E 1H26

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE
MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

478

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SERIA B

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul XII ianuarie 1961

1

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

(SERIA B)

Anul XII, nr. 1 — ianuarie 1961

SUMARUL

	pag.
1. Eclipsa totală de Soare de la 15 februarie 1961	1
2. Semiconductori (prelucrare)	5
3. Note matematice de Iacob Vola, Munteanu Ion, Vodă Viorel şi Guiaşu Silviu	11
4. Caleidoscop fizic	19
5. Premiile Gazetei Matematice şi Fizice seria B pe anul 1960	21
6. Olimpiada micilor matematicieni şi fizicieni 1961	24
7. Concursul de matematică, fizică şi mecanică pentru studenţi, 1960	27
8. Probleme rezolvate (4003; 4013; 4038; 4041; 4052; 4053; 4054; 4057; E: 1459; 1461; 1462; 1467; 1468; 1502; 1053)	28
9. Chestiuni de examen (4499—4506)	37
10. Probleme propuse (4507—4543)	39
11. Exerciţii şi probleme propuse pentru şcoala de şapte ani (E: 1617 — E: 1632)	45
12. Despre activitatea „Cercului de Matematică" de la şcoala medie Bolintinul din Vale	47
13. Rubrica rezolvitorilor de probleme	49

ANUL XII **1** IANUARIE

COMITETUL DE REDACŢIE

Ailincăi M., profesoară; *Atanasiu V.*, lector, redactor pentru fizică; *Boiangiu D.*, lector; *Ionescu-Bujor C.*, prof. univ.; *Ionescu-Tiu C.*, profesor, redactor pentru matematică; *Manolescu St.*, profesoară; *Muşat I.*, profesor; *Petrovanu A.*, profesor, *Sacter O.*, conf. univ., redactor responsabil; *Simionescu D. Gh.*, conf. univ.; *Udrea E.*, profesoară.

REDACŢIA: Str. Academiei, 14 — Tel. 14.46.53 — Bucureşti I

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar putea interesa redacţia noastră se vor trimite pe adresa de mai sus.

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

(SERIA B)

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul XII, nr. 1 ianuarie 1961

ECLIPSA TOTALĂ DE SOARE DE LA 15 FEBRUARIE 1961 *)

Eclipsa totală de Soare de la 15 februarie 1961, este prima eclipsă totală de Soare ce se vede în ţara noastră după aproape 150 de ani. În adevăr, eclipsa de la 26 martie 1867, care a avut linia de centralitate pe direcţia Orşova-Iaşi, a fost numai inelară, iar eclipsa de la 8 iulie 1842 a avut fişia de totalitate trecînd ceva mai la nord de ţara noastră.

Eclipsa de la 20 noiembrie (respectiv 8 noiembrie stil vechi) 1816 a fost vizibilă ca totală la noi în ţară şi este menţionată într-o însemnare pe o psaltire la Mînăstirea Neamţului, culeasă de prof. A. Florinescu: „s-au întunecat Soarele la 7 ceasuri şi s-au făcut întunerec desăvîrşit peste tot pămîntul, întru cît foarte se îngrozise oamenii...". Este de remarcat că această eclipsă face parte din acelaşi ciclu Saros ca şi eclipsa de la 15 februarie 1961. Cît despre viitoarea eclipsă totală de Soare care va fi vizibilă în ţara noastră, aceasta se va produce de abea la 11 august 1999.

Aci se dau rezultatele calculelor efectuate la sectorul solar al Observatorul din Bucureşti, privind linia de centralitate, limita nord a fişiei totalităţii, izocronele începutului şi sfîrşitul eclipsei parţiale, datele eclipsei la Bucureşti, Constanţa şi Zimnicea, rezultate prezentate sub forma unei hărţi. Calculele au fost efectuate folosind elementele lui Bessel pentru această eclipsă, ce ne-au fost comunicate cu anticipaţie şi care au fost ulterior publicate în Astronomiceski Ejegodnic pe anul 1961, luîndu-se pentru diferenţa $\triangle T$ = Timpul Efemeridelor — Timpul Universal = $31^s 9$ Valoarea acestei diferenţe a fost luată dintr-o comunicare scrisă a prof. A. A. Mihailov, directorul Observatorului de la Pulkovo, de la sfîrşitul anului 1959. D-sa a folosit această corecţie la calculul datelor eclipsei totale pentru linia de centralitate, inclusiv porţiunea acestei linii care trece prin R.P.R. S-ar putea ca această corecţie să fie mai mare cu 2 secunde, după alte aprecieri preliminare. În acest caz, timpul legal al diferitelor faze ar creşte cu aceeaşi cantitate, iar punctele calculate pentru linia de centralitate spre ex. ar avea longitudinile faţă de Greenwich deplasate spre est cu 0',5, cîtimi care nu este însă sensibilă la scara hărţii.

Linia de centralitate a eclipsei totale trece la nord de Zimnicea cu circa 4 km şi pe la Constanţa. Pe hartă sînt indicate din minut în minut atît pe linia de centralitate, cît şi pe linia reprezentînd limita nord a fişiei de totalitate, locurile pentru care la minutul respectiv se produce mijlocul eclipsei totale. Astfel, pe linia de centralitate mijlocul totalităţii se produce în faţa noastră între orele $9^h 53^m$ şi $9^h 58^m$ timpul

---

* Acest articol semnat de C. Popovici, este extras din Gazeta Matematică şi Fizică seria A, nr. 9 din Septembrie 1960.

legal, totalitatea durînd $2^m\ 32^s$ în apropiere de Zimnicea și $2^m\ 37^s$ în apropiere de Constanța. Limita nord a fîșiei de totalitate se află în medie cu 130 km de linia de centralitate și trece pe la Turnul Severin, Zătreni, Pitești (3 km sud), Tîrgoviște (3 km sud), Ploiești (2 km nord), Buzău (6 km sud), Brăila. Mijlocul totalității avînd loc pe această linie între $9^h\ 51^m$ (Turnul Severin) și $9^h\ 59^m$ (Brăila). La mijlocul tota-

lității, pe linia de centralitate înălțimea soarelui deasupra orizontului atinge aproape 25°, condițiile geometrice ale eclipsei (durata totalității, înălțimea soarelui) fiind ceva mai bune spre est, în particular la Constanța. În privința condițiilor meteorologice, după o comunicare a Institutului Meteorologic Central, acestea sînt ceva mai favorabile la reintrarea liniei de centralitate pe teritoriul țării noastre în Dobrogea în dreptul localităților Dobromirul din Vale, Băneasa, Adamclisi, Basarabi etc.

După calculele efectuate la Serviciul Solar și care au fost verificate și prin calculele întreprinse de Ella Marcus și I. Niculescu, pentru București. Zimnicea, Constanța, avem următoarele date ale eclipsei:

La București (Observatorul Astronomic) eclipsa începe la $8^h\ 43^m$, 2, unghiul de poziție la pol al primului contact fiind 255°, iar la zenit de 293° (Luna intră pe discul Soarelui în partea din dreapta sus). Eclipsa totală începe la $9^h\ 53^m$, 7 și sfîrșește la $9^h\ 55^m$, 9, durînd $2^m\ 10^s$, deși Bucureștiul este la 70 km de linia de centralitate. Mărimea eclipsei totale la București este 1,008. Aceasta se datorește mărimii și orientării eclipsei reprezentînd umbra Lunii pe suprafața Pămîntului. Pentru ora $9^h\ 55^m$ calculul indică pentru semi-axa mare a umbrei Lunii 149 km, semi-axa mare a umbrii fiind îndreptată în direcția azimutului de 319°, iar semi-axa mică de 59 km, viteza umbrei fiind de 0,86 km/s. Aceste date pot folosi la calculul aproximativ al duratei totalității pentru alte localități aflate în fîșia de totalitate. La București, eclipsa se termină la $11^h\ 12^m$, 0, unghiul de poziție la pol al ultimului contact fiind 73°, iar la zenit de 90° (Luna iese de pe discul Soarelui exact în direcția stînga).

La Zimnicea eclipsa începe la $8^h\ 41^m$, 4, cu unghiul de poziție la pol de 256°, ar la zenit de 300°. Eclipsa totală începe la $9^h\ 51^m$ 6, durata ei fiind de $2^m\ 33^s$ și sfîrșindu-se la $9^h\ 54^m$, 1. Eclipsa parțială se termină la $11^h\ 10^m$, 0, cu unghiul de poziție la pol de 73°, iar la zenit de 90°.

La Constanța, eclipsa începe la $8^h\ 45^m$, 3, cu unghiul de poziție la pol de 255°, iar la zenit de 292° și se sfîrșește la $11^h\ 16^m$, 1, la unghiul de poziție la pol de 72°, iar la zenit de 86°. Mijlocul eclipsei totale care durează $2^m\ 37^s$, are loc la $9^h\ 58^m$, 1.

Pentru alte localități din țară se pot deduce orele începutului și sfîrșitului eclipsei parțiale, *la minutul de timp precizie*, după harta întocmită la sectorul solar al Observatorului din București, hartă care dă din minut în minut izocronele începutului și sfîrșitului eclipsei parțiale. Izocronele au fost calculate prin cîte 3 puncte făcînd să varieze unghiul la pol cu cîte un grad. Se vede astfel că eclipsa începe la $8^h\ 40^m$ în sud-vestul țării și la $8^h\ 50^m$ în nord-estul țării. Ea se sfîrșește la $11^h\ 5^m$ în vestul țării și la $11^h\ 17^m$ în estul țării. Astfel, pentru orașul Oradea orele începutului și sfîrșitul eclipsei parțiale sînt respectiv $8^h\ 44^m$ și $11^h\ 8^m$.

În ceea ce privește mărimea eclipsei parțiale ea depășește 0,95 părți din diametrul Soarelui în toată țara. Soarele apărînd ca un corn subțire cu coarnele îndreptate în jos la faza maximă a eclipsei parțiale pentru localitățile aflate la nord de linia Turnul Severin-Brăila.

Unghiul de poziție la pol și la zenit al primului și ultimului contact nu variază decît cu cîteva grade în toată țara. Astfel, unghiul de poziție la pol pentru începutul eclipsei, variază între 252° (în nord-estul țării) și 256° (în sud-vestul țării), iar la sfîrșitul eclipsei între 72° (în sud-

estul țării) și 77° (în nord-vestul țării). Aceste mici diferențe nu schimbă sensibil aspectul fenomenului.

Unghiul la zenit este egal cu unghiul la pol plus unghiul paralactic. Unghiul paralactic variază între 34° (începutul eclipsei la 8^h 49^m unghiul la pol 252°) și 40° (începutul eclipsei la 8^h 40^m, unghiul la pol. 256°), iar la sfîrșitul eclipsei unghiul paralactic variază între 13° (sfîrșitul eclipsei la 11^h 17^m unghiul la pol 73°) și 20° (sfîrșitul eclipsei la 11^h 06^m unghiul la pol 78°).

Ella Marcus și I. Niculescu au mai calculat în afară de cele 3 orașe amintite mai sus și fazele eclipsei de Soare la localitățile Craiova, Timișoara, Cluj și Iași reproduse în tabelul alăturat, unde orele sînt date în timp legal și au fost obținute cu aceiași corecție $\triangle T$.

Eclipsa totală de Soare din 15 februarie 1961, timp legal R.P.R.

	1 contact ext.	Mijloc	2 contact ext.	Durata totalit.	P_1	P_2	Mărimea
Craiova	8^h 41^m, 0	9^h 51^m, 6	11^h 07^m, 9	1^m 50^s	255°	74°	1,006
Timișoara	8^h 41^m, 2	9^h 50^m, 9	11^h 05^m, 3	parțială	254°	76°	0,982
Cluj	8^h 44^m, 6	9^h 54^m, 9	11^h 10^m, 2	parțială	253°	76°	0,972
Iași	8^h 49^m, 0	10^h 0^m, 6	11^h 17^m, 0	parțială	253°	75°	0,974

Date fiind condițiile meteorologice defavorabile ale lunii februarie în care are loc fenomenul, este de dorit ca observatorii aflați în zona totalității să încerce observarea coroanei solare, pentru a se realiza cel puțin acest punct din programul lucrărilor ce se execută cu ocazia eclipselor totale de Soare. Prezintă un interes deosebit, notarea aspectului general al coroanei, forma ei, diferitele jeturi observate, distanța unghiulară de soare pînă la care se întind, culoarea coroanei etc. O schiță a coroanei solare făcută cu grijă, are o valoare științifică și cu atît mai mult o fotografie reușită. Diametrul discului solar apare pe un clișeu cam a suta parte din lungimea focală a obiectivului aparatului. Cu aparate fotografice cu lungimea focală de 13 cm sau mai mult (preferabil teleobiective) se poate încerca cu succes fotografierea coroanei solare, făcîndu-se fotografii cu durata de expunere de la una la cîteva secunde de timp, cu filme sau plăci foarte sensibile.

Expuneri prea lungi nu se pot face din cauză că soarele se deplasează pe cer și imaginile vor fi mișcate. În acest caz va trebui să se urmărească deplasarea Soarelui. Variindu-se timpul de expunere se vor fotografia diferite regiuni ale coroanei, de străluciri deosebite.

Cu o mică lunetă se pot observa și desena și protuberanțele care vor fi văzute în timpul eclipsei totale. Se vor nota și stelele ce se vor putea vedea cu ochii liberi în timpul totalității la diferite distanțe de Soare.

Cu cîteva clipe înainte sau după totalitate se observă uneori niște umbre deplasîndu-se repede pe suprafața Pămîntului și pe diferite obiecte. Desenarea sau fotografierea acestor umbre prezintă un interes științific

în aplicarea acestui fenomen. În timpul eclipsei se fac și observații meteorologice asupra vîntului, norilor, coborîrii temperaturii, modificarea umidității aerului etc., care nu cer o aparatură complicată.

Audițiile posturilor de radio îndepărtate pot fi modificate și în general ameliorate în momentul eclipsei totale și notarea acestui fenomen prezintă de asemenea un interes științific. Animalele au o comportare schimbată cu ocazia eclipsei și observații în legătură cu aceasta sînt interesante.

Trebuie să se organizeze în școli observarea sistematică a acestui fenomen atît de rar, profesorii dînd explicațiile necesare și arătînd importanța științifică a observării eclipselor totale de Soare.

SĂ CUNOAȘTEM SEMICONDUCTORII

SEMICONDUCTORI

Semiconductorii! Cine nu a auzit de aceste substanțe minunate? Cristalele cenușii albăstrui cu o vagă strălucire, de germaniu, siliciu sau seleniu, nenumărate aliaje și oxizi, atrag atenția savanților. De semiconductori se ocupă chimiștii și metalurgiștii, îi studiază inginerii radiofoniști, constructorii instalațiilor automate, spre semiconductori își îndreaptă atenția fototehnicienii, energeticienii, medicii; chiar și fiziologii vorbesc din ce în ce mai des despre semiconductori. Viitorul științei și practicii se profilează strîns legat de aceste substanțe care poartă un nume atît de modest.

Ce sînt semiconductorii? De ce au devenit atît de solicitați?

Pentru a răspunde la aceste întrebări, este necesar să reamintim mai întîi, pe scurt, esența fizică a fenomenului de conductibilitate electrică.

Conductori și izolatori

Cititorul cunoaște foarte bine cele două substanțe fundamentale ale electrotehnicii — *conductorul* și *izolatorul*.

O sîrmă de cupru conduce bine curentul electric. De aceea cuprul ca și alte metale se numesc conductori. Însă o rolă de porțelan sau un obiect din sticlă, cauciuc sau ebonită, nu lasă să treacă curentul. Aceștia sînt izolatori. Care sînt cauzele fizice ale deosebirii dintre conductori și izolatori? Se știe că orice substanță este alcătuită dintr-un număr impresionant de atomi. Fiecare atom este format dintr-un nucleu, în jurul căruia se învîrtesc electronii, niște particule ușoare, care poartă sarcină negativă. Se constată că, în conductori și în izolatori, electronii periferici, așa-numiții electroni de valență, adică cei de care depind legăturile chimice, au o comportare diferită.

Într-un metal electronii periferici nu pot să fie reținuți de atomi, de aceea ei rătăcesc liber în interiorul metalului, formînd un original *gaz electronic*. Este adevărat că particulele sale nu pot să părăsească metalul. Forțele totale ale atomilor încărcați pozitiv (ionilor) care formează rețeaua cristalină a metalului reține sigur gazul electronic în interiorul metalului *).

*) Abia la o încălzire puternică particulele gazului electronic încep să se miște îndeajuns de repede încît capătă posibilitatea de a se rupe din metal. Are loc, spun fizicienii, emisiunea termoelectronică.

Se poate presupune că electronii de valență sînt aici comunizați și aparțin deodată tuturor atomilor la un loc și nu fiecăruia în parte. Acest lucru determină buna conductibilitate electrică a metalelor (fig. 1 sus).

Este suficient să lipim sîrma metalică de polii unei baterii electrice și particulele gazului electronic sînt prinse de cîmpul electric și se îndreaptă spre polul pozitiv. Prin metal începe să circule curentul electric.

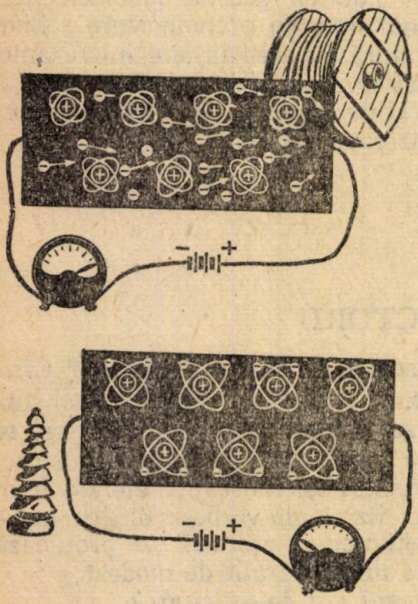


Fig. 1.

Desenul de sus dă schița conductibilității unui metal. Electronii de valență nu sînt legați de fiecare atom în parte, ci se mișcă printre aceștia. Transportul acestor electroni constituie curentul electric. Pe desenul de jos se arată cum se poate reprezenta structura unui izolator. Electronii de valență sînt aici strîns legați de atomi. De aceea în izolator nu are cine să formeze curentul electric.

Din experiențele școlare cititorul își reamintește că, la încălzirea unui conductor, contabilitatea sa electrică scade. De aceea spirala unui reșou electric îndată după conectarea la rețea are o rezistență mult mai mică decît după ce s-a încălzit la roșu.

Aceasta este o importantă proprietate fizică a conductorilor. Cum se poate explica?

Se știe că, curentul electric într-un metal străbate rețeaua cristalină a atomilor lipsiți de electronii de valență. Atomii însă nu stau nemișcați. Ei oscilează. Cu cît temperatura este mai mare, cu atît oscilațiile sînt mai puternice și deci cu atît mai greu izbutește fluxul electronic să străbată prin rețea. Astfel se explică în modul cel mai simplu, esența fizică a conductibilității electrice a metalelor.

Ce se întîmplă în izolator?

Într-o rolă de porțelan, ca și în oricare alt izolator, lucrurile stau altfel: Aici gazul electronic lipsește, deoarece atomii rețin puternic electronii lor de valență (fig. 1 jos). În izolator nu are cine să constituie curentul. E adevărat, dacă încălzim izolatorul foarte puternic, uneori el poate deveni conductor: la o intensă mișcare termică atomii vor începe să-și piardă electronii de valență, aceștia devenind liberi pot servi ca purtători de curent.

Semiconductorii ocupă însă o poziție intermediară între conductori și izolatori.

Electronii în semiconductori

La o temperatură joasă, cea mai mare parte a electronilor dintr-un semiconductor se află pe locurile lor din atomi.

Electronii sînt însă legați de atomi destul de slab. Participînd la mișcarea termică atomii oscilează și își pierd electronii periferici. Încălzind un semiconductor mărim cantitatea de gaz electronic din el, adică de electroni liberi capabili să transporte curentul electric.

Prin umare, *la încălzire, un semiconductor nu-și micșorează conductibilitatea electrică cum se întîmplă cu un metal, ci dimpotrivă și-o mărește* (fig. 2). În aceasta constă trăsătura fizică principală a oricărei substanțe semiconductoare.

Este caracteristică și o altă particularitate. Se constată că într-un semiconductor curentul este transportat nu numai de electronii rupți din atomi, dar și de acei care rămîn legați de atomi.

De ce se întîmplă astfel?

Pentru a găsi un răspuns, să urmărim comportarea electronilor într-o bucățică de semiconductor unită cu polii unei baterii electrice.

Iată că atomii rețelei cristaline oscilează. De pe ei sar neîntrerupt electroni, care în aceeași clipă sînt prinși de cîmpul electric al bateriei și zboară mai departe. Însă, *în fiecare atom care a pierdut un electron rămîne oarecum un loc liber*. Acest loc rămîne însă liber doar o clipă. Sub acțiunea cîmpului electric aici sosește un electron de la un atom învecinat. Fără să capete o libertate deplină acest electron, pur și simplu, își schimbă stăpînul, tinzînd să se miște încotro îl antrenează cîmpul electric al bateriei. Locul eliberat din nou este ocupat de un electron al unui atom mai îndepărtat ș.a.m.d.

Cu alte cuvinte electronii legați se deplasează în lungul locurilor libere ale atomilor în direcția polului pozitiv al bateriei. Aceasta crează un adaus însemnat la curentul printr-un semiconductor. În acest timp locurile libere, sau cum spun fizicienii, „găurile", se deplasează în direcție inversă.

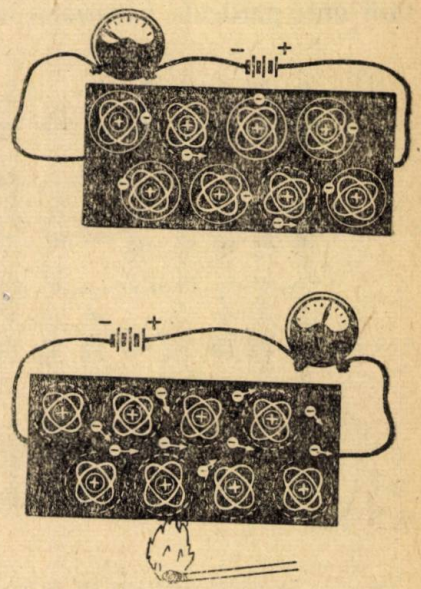


Fig. 2.
Cu cît temperatura este mai mare, cu atît semiconductorul conduce curentul electric mai bine. In aceasta constă deosebirea sa principală față de un conductor. Acest lucru se explică simplu: la încălzire tot mai mulți electroni de valență se rup din atomii semiconductorilor.

Găurile

Noțiunea de „gaură" este foarte importantă în teoria semiconductorilor și trebuie să fie lămurită printr-o analogie simplă.

În fața instructorului s-a aliniat un șir de pionieri. Instructorul cheamă pe unul din pionierii din șir și-l trimite cu o însărcinare oarecare. În șir se formează un loc neocupat, o „gaură". Se dă comanda: strîngeți rîndurile! Copiii unul după altul se deplasează către flancul drept. Gaura însă în acest timp se deplasează pas cu pas către flancul stîng (fig. 3).

Într-un semiconductor gaura se comportă asemănător cu locul liber din șirul de pionieri. Cînd printr-un semiconductor se scurge un curent, electronii liberi și găurile aleargă în direcție opusă. Iată ce este esențial: găurile se deplasează ca niște particule care poartă o sarcină egală cu acea a electronului, dar pozitivă. Legile mișcării găurilor sînt în așa fel

încît acestor locuri fizicienii le atribuie în mod convențional și o așa-numită „masă efectivă", adică, pentru comoditatea calculelor, admit că găurile au o masă determinată (ceva mai mare decît cea a electronilor, deoarece găurile nu sînt atît de mobile ca electronii).

Rezultă că, comportarea găurii este întru totul asemănătoare comportării unei particule materiale încărcată cu cea mai mică sarcină pozitivă

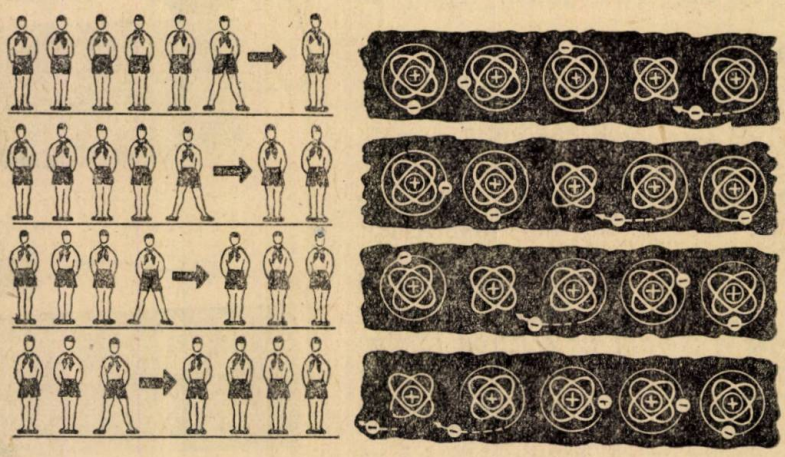


Fig. 3.
In șirul de pionieri la strîngerea formației spre dreapta locul liber se deplasează spre stînga. Printr-un semiconductor locul ocupat de electronul de valență — gaura, călătorește aproximativ la fel.

posibilă, dar ceva mai grea decît un electron. Această particulă ca și un electron liber servește în semiconductor ca purtător de curent electric.

Se înțelege, trebuie reținut că, „gaura" este o noțiune convențională. Aceasta nu este nicidecum o particulă adevărată. În realitate, ea nu are nici sarcină nici masă. Noțiunea de „gaură" este folosită doar pentru comoditate, pentru a evita raționamente complicate și greoaie privind mișcarea electronilor legați de atomi.

Așadar vom presupune că într-un semiconductor există două tipuri de purtători de curent — electroni și găuri. De acest lucru se leagă o mulțime de fenomene — nu numai conductibilitatea electrică, dar și fosforescența materialului, cînd electronii se unesc cu găurile, sau comportarea ciudată în cîmpul magnetic: dacă un semiconductor, prin care trece curentul electric, este plasat într-un cîmp magnetic, electronii și găurile sînt deviate de la drumul rectiliniu și crează o diferență de potențial în direcție perpendiculară. Acest fenomen se numește *efectul Hall*. Înregistrînd aceasta, adică fixînd tensiunea electromotoare transversală din semiconductorul așezat într-un cîmp magnetic, se reușește să se sesizeze cele mai fine variații ale cîmpului magnetic. Înalta sensibilitate a semiconductorului la variațiile cîmpului magnetic se folosește la crearea unor busole ideale, precum și a altor aparate.

Două tipuri de semiconductori

Se poate crede că într-un semiconductor electronii liberi și găurile sînt întotdeauna în cantitate egală : cîți electroni vor părăsi atomii tot atîtea găuri vor apare. Acest lucru se întîmplă însă într-un semiconductor pur care nu conține nici cele mai neînsemnate adausuri. Este suficient să introducem într-un semiconductor o cantitate cu totul neglijabilă dintr-un alt element chimic și de îndată va apare un surplus de electroni sau de găuri. De exemplu, oxidul de cupru în prezența unui adaus de cupru se îmbogățește cu electroni, iar în cazul cînd e un exces de oxigen se îmbogățește cu găuri. Acest lucru se explică ușor : atomii de oxigen atrag ușor către sine electronii și crează un exces de găuri în timp ce atomii de cupru cedează electronii lor. Materialele în care constituenții principali ai curentului electric sînt electronii se numesc *semiconductori electronici*. Materialele cu exces de găuri se numesc *semiconductori cu găuri*.

Prepararea unui semiconductor este o treabă foarte grea. Dificultatea principală constă în purificarea materialelor. De exemplu, elementul semiconductor cristalin germaniu necesită uneori o purificare atît de perfectă încît la un milion de atomi ai săi să nu revină mai mult de un atom dintr-un alt element. O puritate și mai perfectă se cere în cazul siliciului — la un miliard de atomi nu trebuie să existe mai mult de unul străin ! Tehnica modernă se descurcă însă foarte bine cu problema purificării materialelor. Pentru aceasta s-au inventat nenumărate mijloace. Impuritățile sînt înlăturate printr-o topire specială. Sub influența unui cîmp de înaltă frecvență semiconductorul este încălzit și topit ; apoi zona de metal topit se deplasează treptat înainte. Atunci impuritățile parcă sînt împinse afară din substanța topită. Făcînd să apară din masa topită cristale se obțin de asemenea materiale purificate (fig. 4). La baza acestor metode se află un fenomen cunoscut multora : un cristal este întotdeauna mai curat decît lichidul din care se depune. Din această cauză, de exemplu, gheața care apare la suprafața mării este mai puțin sărată decît apa mării.

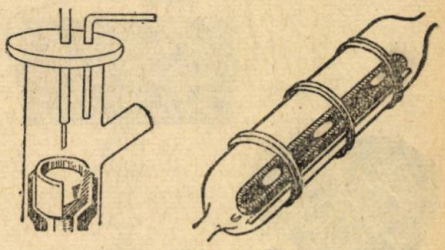


Fig. 4.
Instalații pentru obținerea unei purificări speciale a semiconductorilor. La stînga, instalația pentru extragerea unor cristale pure din materialul topit. La dreapta, aparatul pentru o topire zonală a semiconductoru ui. Sub influența unui cîmp de înaltă frecvență, semiconductorul se topește ; apoi zona de material topit este deplasată treptat înainte. In această situație impuritățile sînt parcă împinse afară din materia topită, iar porțiunea care se răcește se purifică.

Într-un material semiconductor purificat de mai multe ori se adaugă o cantitate neînsemanată de substanțe necesare. Astfel se obțin semiconductorii cu găuri sau electronici modificîndu-se de sute și mii de ori conductibilitatea lor electrică și dependența conductibilității de acțiunile exterioare.

Posibilitatea de a dirija între limite foarte largi proprietățile electrice ale semiconductorilor deschide acestora nenumărate căi, în ceea ce privește aplicațiile lor practice.

Termistorii

Cea mai simplă particularitate a unui semiconductor este dependența conductibilității sale electrice de temperatură. Cu cît materialul semiconductor este încălzit mai tare, cu atît numărul de electroni care se eliberează este mai mare, cu atît se formează mai multe găuri și cu atît mai bine conduce curentul electric (fig. 5). De la început a venit ideea de a se construi pe bază de semiconductori electrotermometre simple și sigure. Ele sînt numite de obicei *termistori*.

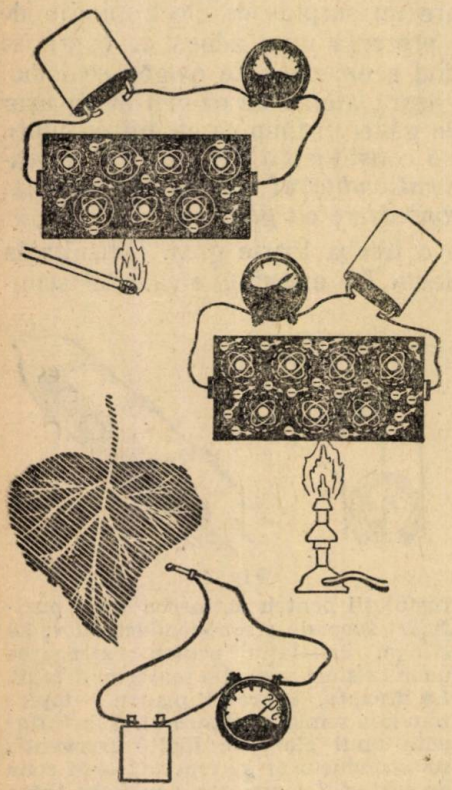


Fig. 5.

Un semiconductor încălzit la diferite temperaturi conduce în mod deosebit curentul electric. Pe acest fenomen se bazează diferitele aparate de măsură a temperaturii — electrotermometrele sau termistorii.

Cîte termistoare nu se întîlnesc acum în uzinele, institutele de cercetare, spitale și colhozuri sovietice! Există de exemplu niște tije de mai mulți metri cu care se verifică comod temperatura undeva în adîncimea unui elevator umplut cu grăunțe. Există termistori care prin aspectul lor seamănă cu niște pumnale. Ele sînt implîntate în sol pentru a cunoaște temperatura diferitelor straturi de pămînt. Electrotermometre în miniatură, cu semiconductori, sînt folosite de agronomi pentru a măsura cu precizie temperatura suprafeței frunzelor, iar de medici a temperaturii pielii bolnavului. Elemente de termistori, minuscule și foarte sensibile, se pot introduce direct în vasele sanguine. Inginerii instalează termistori în interiorul mașinilor pentru a obține la timp indicații asupra supraîncălzirii detaliilor. Aceste aparate încep să fie aplicate din ce în ce mai mult în automatică, peste tot unde e nevoie să se mențină o temperatură constantă sau la fenomenele fizice legate de aceasta (cum sînt umiditatea, viteza mișcării unui gaz).

Sensibilitatea unor termometre cu semiconductori este atît de mare încît pe baza lor se construiesc aparate speciale, *bolometre*, capabile să capteze emisiunea calorică a unei țigări aprinse la o distanță de cîțiva kilometri. Se construiesc și diferite aparate automate, care la prima vedere nu au nici o legătură cu temperatura, de exemplu, un releu de timp. În această instalație un curent electric slab, trecînd prin semiconductor, îl încălzește și îi ridică conductibilitatea electrică în așa fel, încît după un timp dinainte stabilit să fie conectat un curent puternic care să alimenteze să zicem un motor oarecare.

În toată această mulțime de aplicații practice se folosește cea mai simplă proprietate a semiconductorilor — *dependența foarte mare a conductibilității de temperatură.*

(Prelucrare după Enciclopedia Sovietică pentru tineret)

(va urma)

NOTE MATEMATICE

ASUPRA PROBLEMEI 3358. În Gazeta matematică și fizică seria B nr. 6, 1959 a apărut soluția problemei 3358. Din studiul problemei se pot scoate cîteva proprietăți interesante.

— *În triunghiul ABC notăm cu* AA_1, BB_1, CC_1 *și* AA_2, BB_2, CC_2 *cevienele concurente respectiv în* M_1 *și* M_2. *Fie de asemenea* $\alpha \equiv (B_1C_1;\ B_2C_2)$, $\alpha_1 \equiv (B_1C_2;\ B_2C_1)$, $\beta \equiv (C_1A_1;\ C_2A_2)$, $\beta_1 \equiv (C_1A_2;\ C_2A_1)$. $\gamma \equiv (A_1B_1;\ A_2B_2)$ *și* $\gamma_1 \equiv (A_1B_2;\ A_2B_1)$.

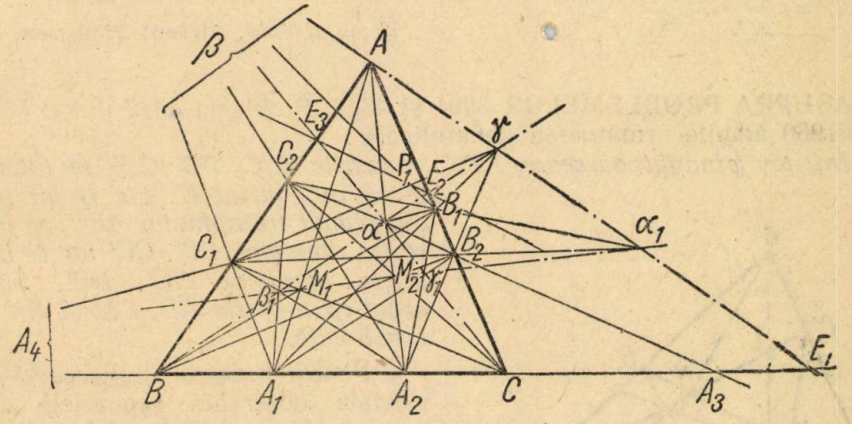
1. *Punctele* M_1, M_2, α_1, β_1, γ_1, *sînt coliniare* (problema 3358).

Se mai poate demonstra că:

2. *Punctele* $(A, \beta, \gamma, \alpha_1)$; $(B, \gamma, \alpha, \beta_1)$ *și* $(C, \alpha, \beta, \gamma_1)$ *sînt respectiv coliniare.*

3. *Dreptele* $(A\alpha, B\beta, C\gamma)$; $(A_1\alpha, B_1\beta, C_1\gamma)$ *și* $(A_2\alpha, B_2\beta, C_2\gamma)$ *sînt respectiv concurente.*

Soluție. 1. Hexagonul concav $C_1A_2AA_1C_2C$ are cîte trei vîrfuri pe dreptele BA și BC; laturile opuse C_1A_2 și C_2A_1, AA_1 și CC_1, AA_2



și CC_2 se taie în trei puncte γ_1, M_1, M_2 care sînt coliniare (v. nota „Asupra unei probleme de coliniaritate", GMF-B nr. 2, 1958, p. 89).

În mod analog α_1, M_1, M_2 și β_1, M_1, M_2 sînt coliniare. Deci, α_1, β_1, γ_1, M_1, M_2 sînt coliniare.

2. Fie $A_3 \equiv (BC;\ B_2C_2)$ și $A_4 = (BC;\ B_1C_1)$. În patrulaterul complet $AC_2M_2B_2BC$ diagonala BC este împărțită armonic de celelalte două diagonale AM_2 și C_2B_2. Deci, B, A_2, C, A_3 formează o diviziune armonică.

În mod analog, C, A_1, B, A_4 formează o diviziune armonică.

Fascicolele armonice $(C_1; B_1M_1A_1B)$ și $(C_2; B_2M_2A_2B_2)$ având raza comună C_1C_2, punctele de intersecție a razelor omoloage $C \equiv (C_1M_1; C_2M_2)$, $\alpha \equiv (C_1B_1; C_2B_2)$, $\beta \equiv (C_1A_1; C_2A_2)$ sînt coliniare.

În mod analog A, β, γ și B, γ, α sînt coliniare.

Dacă $E_2 \equiv (AC; \alpha\gamma)$, fasciculul $(B_2; C_2BA_2C)$ fiind armonic urmează că B, α, E_2, γ formează o diviziune armonică, deci $A\,\Upsilon$ este polara punctului α față de AB și AC.

Pe de altă parte, în patrulaterul complet $C_1B_2B_1C_2$ α_1 A dreapta $A\,\alpha_1$ e polara punctului α față de AB și AC. Deci $A\gamma$ și $A\,\alpha_1$ coincid.

Rezultă că: $(A, \beta, \gamma, \alpha_1)$, $(B, \gamma, \alpha, \beta_1)$ și $(C, \alpha, \beta, \gamma_1)$ sînt respectiv coliniare.

3. Fie $E \equiv (BC, \beta\gamma)$ și $E_3 = (AB; \alpha\beta)$. Deoarece fasciculul $(C_2; B_2CA_2B)$ e armonic C, α, E_3, β formează o diviziune armonică. Această diviziune armonică având un punct comun cu diviziunea B, α, E_2, γ dreptele $\beta\Upsilon$, E_3E_2 și BC sînt concurente, adică E_1, E_2, E_3 sînt coliniare

Rezultă că $(E_1E_2E_3)$ e axa de omologie a triunghiurilor ABC și $\alpha\beta\Upsilon$. Deci triunghiurile fiind omologice $A\alpha$, $B\beta$ și $C\gamma$ sînt concurente

Fie de asemenea, $P_1 \equiv (C_1\gamma; B_1\beta)$, și $\alpha_2 \equiv (C_1B_1; \beta\Upsilon)$. Punctul α_2 e conjugatul armonic al lui α în raport cu B_1C_1. În patrulaterul complet $A_1B_1P_1C_1\beta\Upsilon$ diagonala A_1P_1 va întîlni diagonala B_1C_1 într-un punct α', conjugatul lui α_2 față de B_1C_1. Deci, $\alpha' \equiv \alpha$

Rezultă că $A_2\alpha$, $B_2\beta$, $C_2\Upsilon$ concură în P_1.

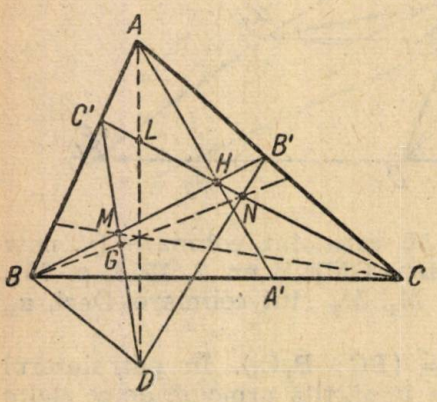
În mod analog, $A_2\alpha$, $B_2\beta$, $C_2\gamma$ concură în P_2.

Observare. Triunghiurile ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ sînt respectiv omologice cu $\alpha\beta\gamma$. Centrele de omologie P_1 și P_2 se găsesc pe axa de omologie $E_1E_2E_3$.

Iacob I. Voia, student Timișoara

ASUPRA PROBLEMELOR 3991 și 4322. Problema 4322 din G.M.F.-B nr. 8/1960 admite următoarea generalizare:

Într-un triunghi oarecare ABC, cevienele AA', BB' CC' se intersecteaza în punctul H. Fie D un punct din planul triunghiului ABC, M intersecția dreptelor BB', CC' iar N intersecția dreptelor DC', DB'. Să se arate că dreptele AD, CM și BN sînt concurente.



Pentru a demonstra această proprietate observăm rapoartele anarmonice ale fascicolelor $B(AB'ND)$ și $A(BDNB')$ sînt egale pentru că au raza AB comună iar punctele D, N, B' de întretăiere ale razelor BD și AD; BN și AN; BB' și AB' sînt colineare. În aceste fascicole transversalele $C'D$ și $C'N$ care taie razele BB', BN și AD, AB' respectiv în M, G și L, C ne dau rapoartele anarmonice $(C'DGM)$ și $(C'LNC)$ egale. Aceste rapoarte avînd

punctul omolog C' comun celelalte trei perechi de puncte omoloage: D și L, G și N, M și C determină dreptele DL, GN și MC concurente.

Observare. Cînd D se află pe latura BC a triunghiului ABC avem problema 4322 din GMF—B nr. 8/1960 iar cînd AA', BB' și CC' sînt înălțimile triunghiului ABC și D mijlocul laturii BC atunci obținem enunțul punctului b) de la problema 3991.

Munteanu I. Ioan, student mat. — Iași

STABILIREA UNOR RELAȚII. În G.M.F.—B nr. 11/1957 prof. C. Ionescu-Țiu arată o metodă de stabilire a unor identități trigonometrice din identități algebrice, și invers.

Urmînd această cale vom stabili cîteva relații între elementele unui triunghi oarecare.

a) Fie inegalitatea cunoscută

$$x + y + z \geqslant 3\sqrt[3]{xyz} \tag{1}$$

Înlocuim

$$x = h_a^n r_a^{2n} \; ; \; y = b_b^n r_b^{2n} \; ; \; z = h_c^n r_c^{2n}$$

și obținem:

$$h_a^n r_a^{2n} + h_b^n r_b^{2n} + h_c^n r_c^{2n} \geqslant 3\sqrt[3]{h_a^n h_b^n h_c^n r_a^{2n} r_b^{2n} r_c^{2n}}$$

însă

$$h_a\, h_b\, h_c = \frac{2}{R} \cdot r_a\, r_b\, r_c$$

și (1) devine, ținînd seama că $\dfrac{2r}{R} \leqslant 1$,

$$h_a^n r_a^{2n} + h_b^n r_b^{2n} + h_c^n r_c^{2n} \geqslant 3\, r_a^n r_b^n r_c^n$$

b) Pornim de la inegalitățile:

$$\Sigma (x + y)^3 \geqslant 24xyz,$$

$$x^3 + y^3 + z^3 \geqslant 3\, x^2 y^2 z^2$$

unde facem înlocuirile: $x = r_a$, $y = r_b$, $z = r_c$.

Împărțind, membru cu membru, și ținînd seama de relația $r_a\, r_b\, r_c = rp^2$ obținem

$$\frac{(r_a + r_b)^3 + (r_b + r_c)^3 + (r_c + r_a)^3}{r_a^3 + r_b^3 + r_c^3} \geqslant \frac{8}{rp^2}.$$

c) Să considerăm identitatea :

$$\sum x(y+z)^2 = \Pi(x+y) + 4xyz.$$

Fie $x = p-a$, $y = p-b$, $z = p-c$ și ținînd seama de formulele $abc = 4RS$, $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

avem

$$\sum a^2(p-a) = 4RS + \frac{4S^2}{p}.$$

Dacă ținem seama de relațiile

$$S = pr = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c$$

deducem :

$$\frac{a^2}{r_a} + \frac{b^2}{r_b} + \frac{c^2}{r_c} = 4(R+r)$$

d) Dacă în aceeași identitate facem :

$$x = \frac{1}{r_a}, \quad y = \frac{1}{r_b}, \quad z = \frac{1}{r_c} \text{ și ținem seama că}$$

$$\frac{2}{h_a} = \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}; \quad \frac{2}{h_b} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_c}; \quad \frac{2}{h_c} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b};$$

vom obține după efectuarea calculelor, relația :

$$\frac{1}{r_a h_a^2} + \frac{1}{r_b h_b^2} + \frac{1}{r_c h_c^2} = \frac{2}{h_a h_b h_c} + \frac{1}{r_a r_b r_c}$$

e) Fie inegalitatea

$$\frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z} \geqslant 6$$

în care facem $x = p-a$; $y = p-b$; $z = p-c$.

Obținem

$$\frac{a}{p-a} + \frac{b}{p-b} + \frac{c}{p-c} \geqslant 6.$$

dar $a = \frac{2S}{h_a}$, $p-a = \frac{S}{r_a}$, etc, deci rezultă

$$\frac{r_a}{h_a} + \frac{r_b}{h_b} + \frac{r_c}{h_c} \geqslant 3.$$

f) Dacă înlocuim în relația :

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + yz + zx$$

$x = \operatorname{ctg} A$, $y = \operatorname{ctg} B$, $z = \operatorname{ctg} C$ și ținem seama că :

$\sum \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B = 1$ obținem inegalitatea :

$$\operatorname{ctg}^2 A + \operatorname{ctg}^2 B + \operatorname{ctg}^2 C \geqslant 1.$$

g) Dacă scriem inegalitatea :

$$(x+y+z)\,(xy+zx+yz) \geqslant 9xyz$$

considerată în articolul menționat, sub forma :

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geqslant \frac{9}{x+y+z}$$

unde substituim :

$x = a = \frac{r_a(r_b+r_c)}{p}$, etc., și ținem seama că :

$p = \frac{r_a}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}} = \frac{r_b}{\operatorname{tg}\frac{B}{2}} = \frac{r_c}{\operatorname{tg}\frac{C}{2}}$, obținem relația :

$$\frac{\operatorname{ctg}\frac{A}{2}}{r_c+r_b}+\frac{\operatorname{ctg}\frac{B}{2}}{r_a+r_c}+\frac{\operatorname{ctg}\frac{C}{2}}{r_a+r_b} \geqslant \frac{9}{2p}, \text{ care devine}$$

$$\sum \frac{\operatorname{ctg}\frac{A}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}} \geqslant \frac{9}{2}.$$

h) Fie inegalitatea :

$$\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{a+b}{c} \geqslant 6,$$

considerată în același articol menționat.

Adunînd 3 la ambii membri și știind că $a+b+c=2p$ și

$$\frac{2p}{a}=\frac{h_a}{r};\ \frac{2p}{b}=\frac{h_b}{r};\ \frac{2p}{c}=\frac{h_c}{r},$$

deducem relația $h_a+h_b+h_c \geqslant 9r$.

Vodă Viorel, elev ș. m. 12, Buc.

GENERALIZAREA UNEI PROBLEME A LUI G. ȚIȚEICA. În Gazeta Matematică din anul XI, nr. 9, *G. Țițeica* a dedus condițiile în care avem:

$$\sqrt{A+\sqrt{B+\sqrt{C}}} = \sqrt{x}+\sqrt{y}.$$

Dăm o generalizare. Pentru ca să avem

$$\sqrt{A_k+\sqrt{A_{k-1}+\ldots+\sqrt{A_2+\sqrt{A_1}}}} = \sqrt{x}+\sqrt{y},$$

sînt suficiente condițiile :

$$A_i^2+2A_im_{2i-4}+m_{2i-5}=m_{2i-3}^2, \text{ unde } (i=2,3,\ldots,k) \qquad (1)$$

$$A_j+m_{2j-4}+m_{2j-3}=2m_{2j-2}^2, \text{ unde } (j=2,3,\ldots,k-1)$$

Considerînd $m_0 = 0$ și $m_1 = A_1$, avem:

$$x = \frac{1}{2}(A_k + m_{2k-4} + m_{2k-3}); \quad y = \frac{1}{2}(A_k + m_{2k-4} - m_{2k-3}) \tag{2}$$

Presupunem că A_1 nu este pătrat perfect, iar $k \geqslant 2$ deoarece pentru $k = 1$ problema nu are sens.

Demonstrația prin inducție completă. Pentru $k = 2$ avem:

$$\sqrt{A_2 + \sqrt{A_1}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \tag{3}$$

Ridicînd la pătrat obținem: $A_2 + \sqrt{A_1} = x + y + 2\sqrt{xy}$.

Egalînd părțile raționale și respectiv cele irraționale avem:

$x + y = A_2$, $xy = \frac{A_1}{4}$, adică x și y sînt soluțiile ecuației:

$$z^2 - A_2 z + \frac{A_1}{4} = 0, \text{ deci:}$$

$$x = \frac{A_2 + \sqrt{A_2^2 - A_1}}{2}; \quad y = \frac{A_2 - \sqrt{A_2^2 - A_1}}{2}.$$

Pentru ca x și y să fie raționali este necesară condiția:

$$A_2^2 - A_1 = m_1^2 \tag{4}$$

și avem:

$$x = \frac{1}{2}(A_2 + m_1); \quad y = \frac{1}{2}(A_2 - m_1) \tag{5}$$

Pentru $k = 3$, avem *):

$$\sqrt{A_3 + \sqrt{A_2 + \sqrt{A_1}}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \tag{6}$$

Ridicînd de două ori la patrat avem:

$$A_2 + \sqrt{A_1} = (x + y - A_3)^2 + 4xy + \sqrt{4(x + y - A_3)^2 \cdot 4xy}.$$

Egalînd părțile raționale și respectiv, irraționale:

$$(x + y - A_3)^2 + 4xy = A_2 \text{ și } (x + y - A_3)^2 \cdot 4xy = \frac{A_1}{4}$$

adică, putem forma ecuația: $z^2 - A_2 z + \frac{A_1}{4} = 0$ ale cărei soluții sînt raționale dacă realizantul este pătrat perfect, adică:

$$A_2^2 - A_1 = m_1^2 \tag{7}$$

atunci

$$(x + y - A_3)^2 = \frac{A_2 + m_1}{2}; \quad 4xy = \frac{A_2 - m_1}{2} \tag{8}$$

---

* Acest caz se mai găsește tratat cu alte notații și în Algebra cl. IX, de Gh. Dumitrescu, 1958, pag. 37.

Cum membrul stîng din relația (8) este patrat perfect se impune condiția

$$A_2 + m_1 = 2m_2^2 \tag{9}$$

prin urmare: $x + y = A_3 + m_2$; $xy = \frac{m_2^2 - m_1}{4}$, adică x și y sînt soluțiile ecuației: $z^2 - (A_3 + m_3)\, z + \frac{m_2^2 - m_1}{4} = 0$.

Impunînd condiția de raționalitate obținem:

$$A_3^2 + 2A_3 m_2 + m_1 = m_3^2 \tag{10}$$

de unde:

$$x = \frac{1}{2}(A_3 + m_2 + m_3); \quad y = \frac{1}{2}(A_3 + m_2 - m_3) \tag{11}$$

Exemplu numeric: $\sqrt{2 + \sqrt{9 + \sqrt{32}}} = \sqrt{2} + 1$, în care caz $A_1 = 32$, $A_2 = 9$, $A_3 = 2$; iar $m_1 = -7$, $m_2 = 1$ și $m_3 = 1$.

Considerăm și cazul $k = 4$ și avem:

$$\sqrt{A_4 + \sqrt{A_3 + \sqrt{A_2 + \sqrt{A_1}}}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \tag{12}$$

Ridicînd de trei ori la patrat obținem:

$$A_2 + \sqrt{A_1} = [(x + y - A_4)^2 + 4xy - A_3]^2 + 4(x + y - A_4)^2 \cdot 4xy +$$
$$+ \sqrt{4[(x + y - A_4)^2 + 4xy - A_3]^2 \cdot 4(x + y - A_4)^2 \cdot 4xy}.$$

Egalînd între ele părțile raționale și respectiv cele iraționale, avem:

$$[(x + y - A_4)^2 + 4xy - A_3]^2 + 4(x + y - A_4)^2 \cdot 4xy = A_2$$
$$[(x + y - A_4)^2 + 4xy - A_3]^2 \cdot 4(x + y - A_4) \cdot 4xy = \frac{A_1}{4}.$$

Impunînd soluțiilor ecuației: $z^2 - A_3\, z + \frac{A_1}{4} = 0$ condiția de raționalitate $A_2^2 - A_1^2 = m_1^2$ (13), obținem:

$$[(x + y - A_4)^2 + 4xy - A_3]^2 = \frac{A_2 + m_1}{2} \tag{14}$$
$$4(x + y - A_4)^2 \cdot 4xy = \frac{A_2 - m_1}{2}.$$

Membrul stîng din (14) fiind un pătrat perfect se impune condiția:

$$A_2 + m_1 = 2m_2^2 \tag{15}$$

adică:

$$(x + y - A_4)^2 + 4xy = A_3 + m_2;$$
$$(x + y - A_4)^2 \cdot 4xy = \frac{m_2^2 - m_1}{4}.$$

Impunînd soluțiilor ecuației: $z^2 - (A_3 + m_2)\, z + \frac{m_2^2 - m_1}{4} = 0$, condiția de rațională:

$$A_3^2 = 2A_3 m_2 + m_1 = m_3^2 \tag{16}$$

obținem:

$$(x + y - A_4)^2 = \frac{1}{2}(A_3 + m_2 + m_3); \tag{17}$$

$$4xy = \frac{1}{2}(A_3 + m_2 - m_3)$$

Membrul stîng din (17) fiind un pătrat perfect se impune condiția:

$$A_3 + m_2 + m_3 = 2m_4^2 \tag{18}$$

adică:

$$x + y = A_4 + m_4; \quad xy = \frac{m_4^2 - m_3}{4}$$

În sfîrșit, pentruca x și y soluții ale ecuației: $z^2 - (A_4 + m_4)\, z + \frac{m_4^2 - m_3}{4} = 0$ să fie raționale e suficient ca discriminantul să fie pătrat perfect, adică:

$$A_4^2 + 2A_4 m_4 + m_3 = m_5^2 \tag{19}$$

în care caz:

$$x = \frac{1}{2}(A_4 + m_4 + m_5); \quad y = \frac{1}{2}(A_4 + m_4 - m_5) \tag{20}$$

Exemplu numeric:

$\sqrt{2 + \sqrt{8 + \sqrt{121 + \sqrt{4032}}}} = \sqrt{\frac{7}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}$; în acest caz: $A_1 = 4032$, $A_2 = 121$, $A_3 = 8$, $A_4 = 2$ iar $m_1 = -103$, $m_2 = 3$, $m_3 = -3$, $m_4 = -2$ și $m_5 = 3$.

Etapa II-a a demonstrației. Presupunem acum, relațiile adevărate pentru $n = k$ și să demonstrăm pentru $n = k + 1$. Fie,

$$\sqrt{A_{k+1} + \sqrt{A_k + \ldots + \sqrt{A_2 + \sqrt{A_1}}}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \tag{21}$$

Ridicînd la patrat:

$$\sqrt{A_k + \sqrt{A_{k-1} + \ldots + \sqrt{A_2 + \sqrt{A_1}}}} = x + y - A_{k+1} + 2\sqrt{xy}$$

Ținînd seama de presupunerea făcută pentru $n = k$, avem condițiile (1) și putem scrie:

$$\sqrt{\frac{A_k + m_{2k-4} + m_{2k-3}}{2}} + \sqrt{\frac{A_k + m_{2k-4} - m_{2k-3}}{2}} =$$

$$= x + y - A_{k+1} + 2\sqrt{xy}$$

Pentru ca această relație să fie satisfăcută este suficient ca:

$$A_k + m_{2k-4} + m_{2k-3} = 2m_{2k-2}^2 \qquad (22)$$

în care caz, prin egalarea între ele a părților raționale și respectiv iraționale se obține:

$$x + y = A_{k+1} + m_{2k-2}\,;\ 4xy = \frac{1}{2}(A_k + m_{2k-4} - m_{2k-3}).$$

Înlocuind valoarea lui A_k scoasă din (22) avem:

$$x + y = A_{k+1} + m_{2k-2}\,;\ xy = \frac{m_{2k-2}^2 - m_{2k-3}}{4}$$

Impunînd condiția de raționalitate soluțiilor ecuației

$$z^2 - (A_{k+1} + m_{2k-2})z + \frac{m_{2k-2}^2 - m_{2k-3}}{4} = 0, \text{ obținem}$$

$$A_{k+1}^2 + 2A_{k+1}m_{2k-2} + m_{2k-3} = m_{2k-1}^2 \qquad (23)$$

și apoi:

$$x = \frac{1}{2}(A_{k+1} + m_{2k-2} + m_{2k-1});\ y = \frac{1}{2}(A_{k+1} + m_{2k-2} - m_{2k-1})$$

adică, avem condițiile (1) și soluțiile (2) pentru $i = 2,3,\ldots,k+1$; $j = 2,3,\ldots,k$ ceea ce înseamnă că teorema presupusă adevărată pentru $n = k$, este adevărată pentru $n = k + 1$.

Silviu Guiașu, student matematici, București

CALEIDOSCOP FIZIC

Cauza fizică a catastrofei lui „Celiuskin"

Din cele spuse acum nu trebuie să ne grăbim să tragem concluzia că, frecarea pe gheață este neînsemnată în toate condițiile. Chiar la o temperatură apropiată de zero frecarea pe gheață este adeseori destul de mare. În legătură cu activitatea spărgătoarelor de gheață, a fost studiată amănunțit frecarea gheții din mările polare, de învelișul de oțel al vasului. S-a dovedit că ea este neașteptat de mare, nu mai mică decît frecarea fierului de fier: coeficientul de frecare a unui bordaj de oțel pe gheață este egal cu 0,2.

Pentru a înțelege ce importanță are acest număr pentru vasele care plutesc între ghețuri, ne vom folosi de figura 1; ea ne arată direcția forțelor care acționează asupra bordului MN al unui vas sub acțiunea presiunii gheții. Forța P de apăsare a gheții se descompune în două forțe: O forță R perpendiculară la bord și o forță F orientată după tangenta la bord. Unghiul dintre P și R este egal cu unghiul α de înclinare a bordului față de verticală. Forța Q de frecare a gheții de bord este egală

cu forța R înmulțită cu coeficientul de frecare, adică cu 0,2; avem $Q = 0{,}2\ R$. Dacă forța de frecare Q este mai mică decît R, aceasta din urmă antrenează gheața care presează sub apă; gheața lunecă în lungul bordului neavînd timp să cauzeze stricăciuni vasului. Dacă forța Q este mai mare decît F, frecarea împiedică alunecarea gheței și aceasta, după un timp, poate să îndoaie și să strivească bordul.

Cînd însă $Q < F$? Este ușor de văzut că $F = R \operatorname{tg} \alpha$; prin urmare trebuie să aibă loc inegalitatea $Q < R \operatorname{tg} \alpha$; însă $Q = 0{,}2\ R$. Deci inegalitatea $Q < F$ duce la o alta:

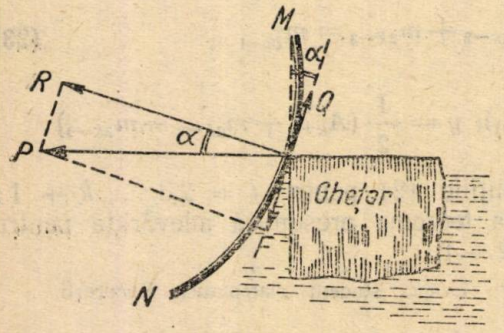
$$0{,}2\ R < R \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

sau

$$\operatorname{tg} \alpha > 0{,}2.$$

Din tabele găsim unghiul a cărui tangentă este 0,2; el este de 11^0. Prin urmare $Q < F$ atunci cînd $\alpha > 11^0$.

Prin aceasta se determină ce înclinare a bordului vasului față de verticală asigură o plutire printre ghețuri fără pericole: înclinarea trebuie să nu fie mai mică de 11^0.



Să ne întoarcem acum la naufragiul lui Celiuskin. Acest vapor, care nu era un spărgător de gheață, a parcurs cu succes întreaga rută marină nordică, însă în strîmtoarea lui Bering a fost prins între ghețuri.

Ghețurile au dus pe Celiuskin departe în spre nord și l-au strivit (în februarie 1934). Cele două luni petrecute eroic pe ghețuri de către cei de pe Celiuskin și salvarea lor de aviatorii eroi, a rămas în amintirea multora.

Iată descrierea catastrofei:

„Metalul rezistent al corpului vasului nu a cedat dintr-odată — comunica prin radio conducătorul expediției O. I. Smidt — era vizibil cum ghețarul pătrunde în bord și cum plăcile bordajului se bombează îndoindu-se în afară. Gheața își continua asaltul încet dar iminent. Plăcile bombate de fier ale bordajului s-au desfăcut în lungul liniilor de nituire. Niturile zburau cu zgomot. Într-o clipită bordul stîng al vaporului a fost rupt de la partea din față a „calei" pînă la capătul punții".

După cele spuse în acest articol, cititorul trebuie să înțeleagă cauza fizică a catastrofei.

De aici rezultă și învățăminte practice. La construirea vaselor destinate pentru a pluti între ghețuri, este necesar să se dea bordurilor o înclinare potrivită și anume nu mai mică de 11^0.

(prelucrare din limba rusă)

PREMIILE „GAZETEI MATEMATICE ȘI FIZICE"

Seria B pe anul 1960

Pentru activitatea deosebită ca rezolvitorii de probleme de către evidențiații în volumul al XI-lea al Gazetei Matematice și Fizice seria B, se acordă următoarele premii și menționuri. Numerele din paranteze arată volumele din lista anexată, acordate corespondentului respectiv.

Premiul I

1. *Bănică Gh. Const.*, cl. XI ș.m. 2 C-lung Muscel (2, 3, 4, 5, 6, 23, 51).
2. *Năstăsescu Constantin*, cl. X Pucioasa (2, 3, 6, 31, 39, 48, 49).
3. *Ene P. Dumitru*, cl. XI ș.m. 1 Ploiești (2, 3, 4, 5, 6, 31).
4. *Popa Nicolae*, cl. X Focșani (2, 3, 4, 6, 31, 48).
5. *Danciu Iulian*, cl. VIII ș.m. 2 Brăila (2, 3, 25, 34, 35, 40).
6. *Niță Constantin*, cl. X Pucioasa (2, 5, 6, 25, 31, 35).
7. *Brînzei Dan*, student matematici Iași (2, 4, 6, 28, 31, 50).
8. *Iorga Valeriu*, cl. X Lugoj (2, 6, 22, 31, 32, 35).
9. *Ghiță R. Teodor, cl. X* Bolintinul din Vale, Buc. (2, 6, 21, 32, 35).
10. *Arsene Cătălin*, cl. X ș.m. 18 București (2, 6, 20, 31, 35).
11. *Lustig Gheorghe*, cl. VIII ș.m. 5 Timișoara (2, 17, 19, 29, 35).
12. *Simpăleanu Marin*, cl. XI Turda (2, 5, 6, 18, 31).
13. *Timuș M. Dan*, cl. XI ș.m. 1 Ploiești (2, 4, 5, 6, 16).
14. *Sfetcu Ioan*, cl. X Lugoj (2, 6, 15, 31, 35).

Premiul II

1. *Munteanu Valeriu*, an. I șc. tehnică sanitară Buc. (2, 5, 6, 14, 26).
2. *Frînculescu Iulian*, cl. IX ș.m. 1 Buzău (2, 13, 14, 32, 35).
3. *Grigoraș Vasile*, absolvent Bacău (2, 4, 5, 6, 14).
4. *Ghica S. Anton*, cl. VIII ș.m. 3 Pitești (2, 10, 22, 24, 35).
5. *Olteanu S. Victor*, cl. X ș.m. 17 București (2, 6, 9, 22, 42).
6. *Perianu Dan*, cl. X Reșița (2, 6, 12, 22, 35).
7. *Cimoca Gheorghe*, cl. XI ș.m. 5 Cluj (2, 5, 6, 11, 22).
8. *Hiriș Viorel*, cl. X ș.m. 1 Timișoara (1, 2, 6, 8, 41).
9. *Catrina Dumitru*, cl. XI ș.m. 25 București (1, 2, 5, 6, 7).
10. *Opriș Ion*, cl. XI ș.m. 1 Ploiești (1, 2, 5, 6, 22).
11. *Apostoloiu A. Victor*, cl. XI R. Vîlcea (1, 2, 3, 5, 6).
12. *Gheorghiu A. Nicolae*, cl. XI ș.m. 1 Ploiești (1, 2, 3, 5, 6).
13. *Necula Virgil*, cl. XI ș.m. 23 București (1, 2, 3, 5, 6).
14. *Cornblum Eugen*, cl. XI ș.m. 11 București (1, 2, 3, 5, 6).
15. *Cancer Ilina Anca*, cl. X ș.m. 1 Tg. Jiu (1, 2, 3, 6, 32).
16. *Obadă Hareta*, cl. XI ș.m. 10 București (1, 2, 5, 6).

Premiul III

1. *Murăreci P. Nicolae*, cl. XI Curtea de Argeș (1, 2, 5, 6).
2. *Adamesteanu Ion*, cl. X ș.m. 1 Pitești (2, 6, 32, 38).
3. *Gurămultă V. Ion*, cl. XI Adjud, Bacău (2, 5, 6, 34).
4. *Vișan Grațiela*, cl. XI ș.m. 10 București (2, 5, 6, 34).

5. *Ene P. Elena*, cl. VII Lipănești, Ploiești (2, 6, 26, 46).
6. *Racoltă Mihail*, absolvent Baia Mare (2, 5, 6, 34).
7. *Ursu C. Constantin*, cl. X Buhuși, Bacău (2, 6, 33, 34).
8. *Marini Ileana*, cl. X ș.m. 10 București (2, 6, 33, 34).
9. *Pavel N. Radu*, cl. XI ș.m. 2 Craiova (1, 5, 6, 34).
10. *Bărbulescu Lucia*, cl. XI ș.m. 10 București (1, 5, 6, 35).
11. *Țuțuianu Ovidiu*, absolvent București (1, 5, 6, 34).
12. *Lupaș Laurențiu*, cl. XI ș.m. 1 București (1, 5, 6, 34).
13. *Ionescu Rodica*, cl. XI ș.m. 10 București (1, 5, 6, 34).
14. *Fințescu Elena*, cl. X ș.m. 10 București (1, 6, 30, 33).
15. *Nicolescu Doina*, cl. X ș.m. 2 Craiova (1, 6, 33, 34).
16. *Scarlat Nicolae*, cl. XI ș.m. 3 Ploiești (1, 6, 34, 35).
17. *Stan A. Mircea*, cl. X ș.m. 1 București (1, 6, 34, 35).
18. *Persache Octavian*, cl. VII ș.m. 11 București (1, 6,34, 47).

Mențiuni

1. *Albu Toma*, cl. X Petroșani Hunedoara (6, 34, 35, 36).
2. *Ou V. Ion*, cl. X ș.m. 1 R. Vîlcea (1, 6, 34).
3. *Rusu Constantin*, cl. XI ș.m. 2 Ploiești (1, 5, 44).
4. *Ionescu D. Alexandru*, student Timișoara (1, 5, 50).
5. *Diaconescu C. Radu*, cl. X Pucioasa, Ploiești (1, 6, 36).
6. *Banu Gheorghe*, cl. X Pucioasa, Ploiești (1, 6, 36).
7. *Radu A. Gheorghe*, cl. X Pucioasa, Ploiești (1, 6, 35).
8. *Moflic Emilian*, cl. XI Moreni (7, 5, 44).
9. *Zevedei Valerian*, cl. XI Curtea de Argeș, Pitești (1, 5, 44).
10. *Tănase Mihai*, cl. IX Sinaia (1, 6, 35).
11. *Pantelimon Anton*, cl. VIII Focșani (1, 6, 37).
12. *Calistrate D. Ioan*, cl. VIII ș.m. 2 Tg. Jiu (1, 6, 37).
13. *Garabedian Rodica*, cl. X ș.m. 1 Or. Stalin (1, 6, 36).
14. *Pop Ioan*, absolvent Suceava (1, 6, 36).
15. *Mușat Sorin*, cl. XI ș.m. 1 Galați (1, 5, 44).
16. *Pintea Tudor*, student Petrol și Gaze București (1, 5, 45).
17. *Piscupescu Gabriel*, cl. XI ș.m. 1 București (1, 5, 34).
18. *Poșircă Ioan*, cl. X R. Vîlcea (1, 6, 36).
19. *Burghelea Dan*, cl. XI ș.m. 1 R. Vîlcea (1, 5, 34).
20. *Stoichescu Al. Dan*, cl. XI ș.m. 20 București (1, 5, 27).
21. *Bejan Costel*, cl. XI ș.m. 1 Galați (1, 5, 34).
22. *Rășcanu Radu*, cl. X ș.m. 1 București (1, 6, 38).
23. *Pantelimon Radu*, absolvent Cîmpia Turzii (1, 5, 43).
24. *Toth Emil*, cl. X ș.m. 1 Reșița (1, 6, 34).
25. *Georgescu Florin*, cl. XI ș.m. 11 București (1, 5, 34).
26. *Mihuț Octavian*, cl. IX ș.m. Bolintinul din Vale (1, 6, 34).
27. *Jaliu Cristel*, cl. XI ș.m. 15 București (1, 5, 34).
28. *Ilie Mihai*, cl. X ș.m. 20 București (1, 6, 36).
29. *Grădinaru Nicolae*, absolvent Tulcea (1, 5, 43).
30. *Neagu Gheorghe*, cl. X Sighișoara (1, 34, 36).
31. *Bluoss I. Hans*, cl. X ș.m. 7 București (2, 5).
32. *Crăcea I. Gheorghe*, cl. X ș.m. 2 Brăila (2, 5).
33. *Ene I. Traian*, cl. X ș.m. 1 Ploiești (2, 5).

34. *Gheorghiță Vitalie*, absolvent Cimpulung Muscel (2, 5).
35. *Răduță Apolodor*, cl. X Bolintinul din Vale (2, 5).
36. *Perșoiu I. Titus*, cl. X Călărași (2, 5).
37. *Vlahovici Nicolae*, cl. X Baia Mare (2, 5).
38. *Raicu Viorel*, cl. X Drăgănești — Olt, Pitești (2, 5).
39. *Stratan Gheorghe*, absolvent Caracal (2, 5).
40. *Vlad Valentin*, cl. X ș.m. 7 București (2, 5).
41. *Anițescu N. Maria*, cl. VII ș.m. 2 Tg. Jiu (2, 5).
42. *Gladcenco Gheorghe*, absolvent Codlea (2, 5).
43. *Anghelache C. Tudorică*, absolvent Pitești (2, 5).

LISTA CĂRȚILOR

1. **Gazeta matematică și fizică seria B**, anul 1952 (R.M.F.) ; 2. **Gazeta matematică și fizică seria B**, anul 1953 (R.M.F.) ; 3. **Gazeta matematică și fizică seria B**, anul 1954 (R.M.F.) ; 4. **Gazeta matematică și fizică seria A**, anul 1956; 5. **Gazeta matematică și fizică seria A**, anul 1957 ; 6. **Gazeta matematică și fizică seria A**, anul 1958 ; 7. **S. I. Novoselov**, Curs special de algebră elementară ; 8. **Gh. Mihoc** și **H. Ionescu**, Curs de matematică pentru statisticieni și economiști ; 9. **P. I. Popov** și **B. A. Voronțov**, Astronomie ; 10. **I. M. Vinogradov**, Bazele teoriei numerelor ; 11. **Gh. Buicliu**, Probleme de construcții geometrice cu rigla și compasul ; 12. **S. V. Vonsovski**, Teoria modernă a magnetismului ; 13. **P. S. Alexandrov**, Introducere în teoria grupurilor ; 14. **Mircea Herovanu**,, Introducere în fizica atmosferei ; 15. **I. S. Dubnov**, Erori în demonstrațiile geometrice ; 16. **Helmut Fiedler**, Calcule chimice, Culegere de probleme ; 17. **M. Ghermănescu**, ș. a., Probleme de matematici pentru admitere în facultăți ; 18. **C. I. Budeanu**, Sistemul practic general de mărimi și unități ; 19. **N. P. Efremov**, **G. M. Ivanov**, Culegere de probleme de mecanică tehnică, 20. **A. O. Ghelfond**, Calculul cu diferențe finite ; 21. **G. N. Berman**, Cicloida ; 22. **Al. Cișman**, Fizică generală vol. II ; 23. **Tr. Angheluță**, Curs de teoria funcțiilor de variabilă complexă ; 24. **Gh Țițeica**, (1873—1939) ; 25. **V. Sergiescu**, Introducere în fizica solidului ; 26. **I. F. Suvorov**, Curs de matematici superioare pentru școli tehnice ; 27, **A. Kahane**, Complemente de matematică, 28. **N. N. Luzin**, Calculul diferențial ; 29. **Albert Einstein**, Evoluția fizicii ; 30. **V. V. Șaranov**, Soarele și observarea lui ; 31. **A. Kahane**, Elemente de teoria congruențelor de drepte ; 32. **C. Drîmbă**, Elemente de mecanică cerească ; 33. **C. Bedreag**, Bibliografia fizicii romîne, Biografii ; 34. **O. Kreindler**, Elemente de calcul vectorial ; 35. **M. V. Pentkovski**, Nomograme ; 36. **C. Borș**, Noțiuni dde geometrie proiectivă ; 37. **A. O. Ghelfond**, Rezolvarea ecuațiilor în numere întregi ; 38. **F. I. Zighel**, Cometele ; 39. **Călin Popovici**, Stelele, date fizice, evoluția și originea lor ; 40. **Al. Marcușievici**, Arii și logaritmi ; 41. **Horia Bodnărescu**, Culegere de probleme de geometrie descriptivă I, II ; 42. **L. P. Jerebțov**, Radiotehnica ; 43. **Fauerbach** (Colecția texte filozofice) ; 44. **S. Sanielevici**, Curs de mecanică rațională, vol. II ; 45. **S. E. Friș** și **A. Timoreva**, Curs de fizică generală vol. I ; 46. **Fizică**, Culegere de probleme ; 47. **Curs de matematici** pentru școala medie, partea IV ; 48. **Gh. Tr. Gheorghiu**, Probleme de algebră și analiză ; 49. **G. Galbură**, **C. Ionescu-Țiu** și **S. Pop**, Curs de geometrie analitică în spațiu ; 50. **Gh. Vrănceanu**, Leçons de géométrie différentielle vol. II ; 51. **V. I. Smirnov**, Curs de matematici superioare vol. III, Partea I și II.

Rugăm pe cei în drept să comunice Societății de științe matematice și fizice din R.P.R., str. Academiei 14, București, printr-o carte poștală, adresa la care urmează să se expedieze cărțile acordate, iar după primirea acestora, să confirme de asemenea printr-o carte poștală, recepționarea lor. Cei din București se pot prezenta personal pentru ridicarea pachetului cu cărți.

OLIMPIADA MICILOR MATEMATICIENI ŞI FIZICIENI 1961

pentru elevii claselor a V-a, a VI-a şi a VII-a

Pot participa la **etapa pregătitoare** (prin corespondenţă) a acestei olimpiade, toţi elevii claselor a V-a, a VI-a şi a VII-a care au la matematică media cel puţin 7, pe trimestrul I.

Fiecare participant la olimpiadă va preda pînă la 10 martie 1961, profesorului său de matematică, problemele clasei din care face parte şi pe care a putut să le rezolve.

Fiecare soluţie explicată pe larg va fi scrisă cu îngrijire în limba de predare a şcolii, însoţită de numărul de ordine. Elevii vor avea grijă ca la sfîrşitul soluţiei să-şi scrie numele complet, localitatea, raionul, şcoala şi clasa din care fac parte.

Problemele copiate nu vor fi luate în seamă.

La evidenţierea participanţilor se va ţine seama dacă fiecare problemă rezolvată este completă, clar explicată, cu soluţia cît mai simplă şi însoţită de toate calculele necesare.

Profesorul de matematică, respectiv cel de fizică, notează fiecare problemă rezolvată cu note de la 1 la 10. Se întocmeşte un tabel pe şcoală, cuprinzînd numărul participanţilor pe clase la etapa pregătitoare (prin corespondenţă) şi lista nominală a celor propuşi pentru etapa a II-a (locală) cu următoarele date: numele, clasa, mediile pe trimestrul I la matematică şi fizică, punctajul obţinut.

Nu se vor propune decît elevi care au întrunit cel puţin 40 de puncte. Tabelele semnate de profesorii de specialitate şi văzute de direcţia şcolii, însoţite de lucrările elevilor propuşi, vor fi expediate pînă la 20 martie 1961, comisiei locale a olimpiadei (la secţia de învăţămînt raională sau orăşenească.

PROBLEMELE ETAPEI PREGĂTITOARE

Clasa a V-a

V. 1. — Directivele Congresului al treilea al Partidului Muncitoresc Romîn prevăd o creştere importantă a producţiei industriei chimice. Producţia totală de sodă, îngrăşăminte minerale şi cauciuc sintetic va ajunge în 1965 de 1 050 000 tone. Să se calculeze cîte tone de cauciuc sintetic se va produce în 1965, dacă se ştie că producţia de sodă este exprimată prin acelaşi număr ca producţia de îngrăşăminte; iar producţia de cauciuc este a zecea parte din producţia de sodă. Verificare.

V. 2. — Directivele Congresului al treilea al Partidului Muncitoresc Romîn prevăd că în anul 1965 se va ajunge la un total de 26 300 000 bovine, ovine şi porcine.

Să se afle care va fi efectivul bovinelor, ovinelor şi porcinelor în 1965, ştiind că efectivul ovinelor va depăşi cu 1 400 000 dublul efectivului bovinelor şi va fi mai mic cu 2 000 000 decît dublul efectivului porcinelor.

V. 3. — Pentru evidenţierea unui elev ca rezolvitor de probleme propuse la gazeta matematică a clasei se cer 200 puncte. Se acordă 10 puncte pentru o problemă bine rezolvată şi se scad 3 puncte pentru o problemă greşit rezolvată. Un elev evidenţiat a obţinut 261 puncte, în

urma celor 30 probleme trimise. Cîte probleme a rezolvat și cîte a greșit?

V. 4. — Trei autobuze pleacă dintr-o piață la ora 6 dimineața în trei direcții și se întorc astfel: primul după 5 minute și pleacă din nou după 4 minute: al doilea se întoarce după o oră și un sfert și pleacă din nou după 5 minute; iar al treilea se întoarce după 45 minute și pleacă după 3 minute. La ce oră vor pleca din nou în același timp din piață cele trei autobuze?

V. 5. — Două roți dințate formează un angrenaj. Înainte de a se pune în mișcare se însemnă cu creta doi dinți din locul de contact al ambelor roți. Știind că o roată are 88 de dinți și cealaltă numai 66 de dinți, să se calculeze cîte rotații poate face fiecare roată pînă ce dinții însemnați cu cretă ocupă aceași poziție ca la începutul mișcării.

V. 6. — Trei șantiere de construcții au cîte un autocamion de transportat pietriș. Deși aceste șantiere au nevoie de aceeași cantitate de pietriș, autocamioanele fiind de capacități diferite, primul șantier are nevoie de 70 transporturi, al doilea șantier de 84 transporturi și al treilea de 92 transporturi, fiecare autocamion lucrînd la șantierul său. Dacă la primul șantier s-au făcut 62 transporturi, la al doilea 74 transporturi și la al treilea 82 transporturi, să se calculeze la care șantier s-a transportat cea mai mare cantitate de pietriș și la care cea mai mică. Să se mai afle dacă primul și ultimul autocamion pot încărca împreună atît cît încarcă al doilea camion în două transporturi.

V. 7. — Ce va deveni diferența a două numere dacă descăzutul se mărește cu $12\frac{2}{15}$, iar scăzătorul se micșorează cu $4\frac{6}{21}$? Dar dacă descăzutul se micșorează cu $1\frac{15}{18}$ și scăzătorul cu $7\frac{11}{42}$?

Să se justifice de fiecare dată, operațiile ce se fac.

Clasa a VI-a

VI. 1. — În Directivele Congresului al treilea al Partidului Muncitoresc Romîn se prevede că în 1965 producția de lînă pieptănată va crește la 12 000 tone fire față de 4 700 tone în 1960 și față de 1 200 tone în 1938. Să se afle trei numere întregi care să fie proporționale cu cele trei producții de 1 200, 1 400 și 12 000 tone, astfel ca suma acestor numere să fie cea mai mică. De cîte ori crește producția în 1965 față de anul 1960? dar față de 1938? Exprimați aceste creșteri și în procente.

VI. 2. — Lichidul turnat într-un vas cîntărește 136 kg. Vasul plin cîntărește de 5 ori greutatea vasului gol; să se afle greutatea acestuia. Știind că vasul are capacitatea de 1,7 hl să se afle densitatea lichidului.

VI. 3. — Un pilot zburînd cu un avion cu viteza de 500 km/oră vede drept în față lumina unui fulger, iar după 5 secunde aude tunetul. Să se calculeze la ce distanță de fulger s-a aflat avionul în momentul cînd l-a văzut. Cît timp i-ar mai trebui avionului să zboare pentru a ajunge la locul unde s-a produs fulgerul? Nu se ține seamă de timpul necesar pentru ca lumina fulgerului să ajungă la avion.

VI. 4. — O brigadă de tractoriști dintr-o gospodărie agricolă colectivă a arat în prima zi $\frac{3}{13}$ din întreaga suprafață. În a doua zi a arat încă $\frac{4}{11}$

din ceea ce rămăsese de arat. În a treia zi a arat $\frac{4}{7}$ din ceea ce rămăsese nearat după a doua zi. A patra zi s-a terminat aratul.

a) Să se arate prin calcul că s-au arat arii egale în ziua a doua și a treia, iar în ziua a patra s-a arat cel mai puțin.

b) Cît s-a arat în fiecare zi dacă în prima zi s-a arat cu 6 ha mai mult decît în ultima zi.

VI. 5. — Peste cîți ani urmează un an exprimat printr-un pătrat perfect și care este acesta? Explicați rezultatul obținut.

VI. 6. — Să se desemneze un unghi drept ABC și o semidreaptă BD în interiorul lui. Să se arate că simetricele acestei semidrepte față de laturile unghiului sînt în prelungire. Ce devine acest rezultat dacă unghiul ABC are 45°?

VI. 7. — Un vas gol cîntărește 750 grame. În vas se toarnă 2 litri de apă minerală, după care, cîntărind vasul se constată o greutate de 2 kg și 766 grame. Apoi se pune în vas o bucată de gheață de apă minerală, care cîntărește 200 grame și are un volum de 240 cm^3. Să se afle densitatea apei minerale și a gheții. Să se spună dacă după topirea gheții nivelul apei din vas se ridică sau rămîne același și să se motiveze răspunsul.

Clasa a VII-a

VII. 1. — Directivele Congresului al III-lea al Partidului Muncitoresc Romîn prevăd că producția în 1965, de aparate de radio, de televizoare și frigidere la un loc va fi de 480 000 bucăți, producția de televizoare, biciclete și aparate de radio va fi 880 000 bucăți, iar numărul bicicletelor va fi de 9 ori numărul frigiderelor. Să se calculeze care va fi producția de biciclete și de frigidere la un loc.

VII. 2. — Biletul de intrare la o expoziție costă 1 leu. După reducerea prețurilor la bilete numărul vizitatorilor s-a dublat, iar încasarea a crescut cu jumătate. Care a fost reducerea?

VII. 3. — În lunecarea unei sănii pe un plan înclinat spațiile parcurse sînt proporționale cu pătratele timpurilor (duratei) socotite din momentul plecării. Un spațiu de 60 m pe un plan înclinat a fost parcurs de o sanie în 20 secunde. Care a fost spațiul parcurs după primele 5 secunde? În cît timp a parcurs sania 30 metri de la plecare lunecînd pe acest plan înclinat?

VII. 4. — Să se construiască un patrulater convex cu laturile $AB = 2$ cm, $BC = 4$ cm, $CD = 6$ cm, $DA = 8$ cm și cu o diagonală de 5,2 cm. Cîte cazuri sînt posibile?

VII. 5. — Este ora 8. Peste cîte secunde cele două ace care arată orele și minutele vor fi în linie dreaptă? Peste cît timp vor fi perpendiculare? Peste cît timp se vor suprapune?

VII. 6. — Un triunghi isoscel are baza de 5 cm și perimetrul 18 cm. Să se afle lungimea bisectoarei care este și mediatoare. Să se calculeze apoi, aria, înălțimile și medianele triunghiului.

VII. 7. — Dintr-un pătrat se scoate o fîșie dreptunghiulară reprezentînd 15% din aria pătratului și rămîne un dreptunghi. Din acesta se

scoate o altă fîșie dreptunghiulară, astfel că suprafața rămasă este un alt pătrat. Care sînt ariile celor două pătrate știind că diferența ariilor celor două fișii scoase este de 81 mm^2. Se va executa desenul exact.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ, FIZICĂ ȘI MECANICĂ PENTRU STUDENȚI, 1960

În zilele de 1—4 decembrie 1960, a avut loc în București, *etapa finală* a concursului de matematică, fizică și mecanică pentru studenți, la care au participat 186 studenți.

Dăm mai jos numele evidențiaților:

Premiul Special

1. *Gheorghe Cezar,* an I fac. mat. Univ. C. I. Parhon, București.

Premiul I.

1. *Fărtat Ion,* an III fac. electromecanică Inst. Mine, Petroșani.
2. *Isbășescu Mihai,* an II fac. electronică, Inst. Politehnic, București.
3. *Rassilier Ioan,* an V, fac. fizică Univ. Parhon, București.
4. *Tugulea Mircea,* an II, fac. fizică Univ. Parhon, București.
5. *Wiesler Bela,* an II, fac. matematică, Univ. Babeș-Bolyai, Cluj.

Premiul II.

1. *Gabriel Richard,* an IV, fac. matematică-fizică, Inst. Pedagogic, Timișoara.
2. *Ixariu Liviu,* an II, fac. fizică, Univ. Parhon, București.
3. *Rădoi Leon,* an II, fac. electrotehnică, Inst. Politehnic, București.
4. *Radu Constantin,* an. III, fac. mecanică, Inst. Politehnic, Brașov.
5. *Vlădoiu Mircea,* an. II, fac. mecanică, Inst. Politehnic, Brașov.

Premiul III.

1. *Chișleag Radu,* an IV, fac. fizică, Univ. A. I. Cuza Iași.
2. *Cîrnu Mircea,* an. II, fac. matematică, Univ. Babeș-Bolyai Cluj.
3. *Cruceanu Ștefan,* an. III, fac. matematică Univ. Parhon București.
4. *Dragomirescu Mihai,* an II, fac. matematică, Univ. Babeș-Bolyai Cluj.
5. *Florescu Mircea,* an II, fac. utilaj, Inst. P.G.G. București.
6. *Ionescu Sorin Petre,* an II, fac. electronică Inst. Politehnic București.
7. *Lerner Emil,* an. IV, fac. constr. feroviare, Inst. Construcții București.
8. *Nistor Sergiu,* an II, fac. fizică, Univ. Babeș-Bolyai Cluj.
9. *Rădescu Eugen,* an. II, fac. fizică, Univ. Parhon București.
10. *Ștefănescu Dinu,* an II, fac. geofizică, Inst. P.G.G. București.

Mențiuni.

1. *Bardan Virgil,* an IV, fac. electronică, I. P. București.
2. *Bergthaler Cristian,* an II, fac. matematică, Univ. Parhon București.
3. *Bot Aurel Octavian,* an II, fac. matematică, Univ. Parhon București.
4. *Brînzei Dan,* an II, fac. matematică, Univ. A. I. Cuza Iași.
5. *Bulacu Valeriu,* an III, fac. electromecanică, Inst. Mine Petroșani.
6. *Ciorănescu Ioana,* an II, fac. matematică, Univ. Parhon București.
7. *Constantinescu Mihai,* an II, fac. utilaj I.P.G.G. București.
8. *Dinulescu Horia,* an II, fac. fizică, Univ. A. I. Cuza Iași.
9. *Hărăguș Dumitru,* an III, fac. matem. fizică, Inst. Pedagogic Timișoara.
10. *Iftimie Viorel,* an IV, fac. mat. fiz. Univ. Parhon București.
11. *Kiss Francisc,* an II, fac. mecanică, Inst. Politehnic, Cluj.
12. *Mihai Alexandru,* an II, fac. matematică, Univ. Parhon București.
13. *Nanu Octavian,* an II, fac. matematică, Univ. A. I. Cuza Iași.
14. *Negoiță Mihai,* an IV, fac drumuri. Inst. Construcții București.
15. *Nițescu Traian,* an IV, fac. electromecanică, Inst. Mine Petroșani.
16. *Palihovici Valerian,* an II, fac. mecanică, Inst. Politehnic Iași.

17. *Puiu Constantin Alexandru*, an III, fac. fizică, Univ. A. I. Cuza Iași.
18. *Strat Mitache*, an III, fac. fizică, Univ. A. I. Cuza Iași.
19. *Szekely Ioan*, an IV, fac. electromecanică, Inst. Mine Petroșani.
20. *Tudor Constantin*, an IV. fac. mat. fiz. Univ. Parhon București.
21. *Vecsey Bela*, an IV, fac. fizică, Univ. Babeș-Bolyai Cluj.
22. *Vrăjitoru Mihai*, an II, fac. mecanică, Inst. Politehnic București.

Evidențiații au primit premii în cărți și obiecte.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 4003

Fiind dat tetraedrul echifacial OABC, în care se notează $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, *iar unghiurile diedre corespunzătoare muchiilor BC, CA, AB cu* α, β, γ *să se arate că dacă punem* $a^2 + b^2 + c^2 = 2\sigma$, *atunci*

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{(\sigma - b^2)(\sigma - c^2)}{\sigma - a^2}};\quad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{(\sigma - c^2)(\sigma - a^2)}{\sigma - b^2}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{(\sigma - a^2)(\sigma - b^2)}{\sigma - c^2}}$$

Gh. D. Simionescu

Soluție: Considerăm triedrul *ABCO*. Notînd cu *A, B, C* unghiurile triunghiului *ABC* și tetraedrul fiind echifacial avem $\sphericalangle CAB = A$, $\sphericalangle BAO = B$; $\sphericalangle CAO = C$. În ce privește unghiurile directe, cele opuse în tetraedru sînt egale (articolul despre tetraedre), deci unghiurile cu muchiile *AB, AC, AO* sînt respectiv γ, β, α. Între unghiurile diedre și fețele unui triedru sînt aceleași relații ca unghiurile și laturile unui triunghi sferic, deci referindu-ne la formulele care dau tangentele jumătăților unghiurilor diedre avem, notînd $A + B + C = 2p$, deci, $p = 90^0$:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p - B)\sin(p - C)}{\sin p \sin(p - A)}} = \sqrt{\frac{\cos B \cdot \cos C}{\cos A}}$$

sau:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{4a^2\, bc \cos B \cos C}{4a^2\, bc \cos A}} = \sqrt{\frac{(a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)}{2a^2(b^2 + c^2 - a^2)}}$$

Cu notația din enunț avem $b^2 + c^2 - a^2 = 2(\sigma - a^2)$ etc., deci:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{(\sigma - b^2)(\sigma - c^2)}{\sigma - a^2}}.$$

La fel pentru celelalte.

Altă soluție: Se pot folosi formulele (16) date în articolul *„Unghiuri triedre"* din R.M.F. nr. 6, iunie 1952, care cu notația din problemă devin:

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A, \text{ etc.}$$

Însă, în tetraedrele echifaciale avem relația $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1$ (articolul despre tetraedre), deci, înlocuind pe $\cos\alpha$, avem:

$$1 - \cos\beta - \cos\gamma + \cos\beta\cos\gamma = \sin\beta\sin\gamma\cos A,$$

sau:

$$(1 - \cos\beta)(1 - \cos\gamma) = \sin\beta\sin\gamma\cos A.$$

Transformînd expresia obținem:

$$4 \sin^2 \frac{\beta}{2} \sin^2 \frac{\gamma}{2} = 4 \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \cos A,$$

sau:

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \cos A \text{ și analog, } \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \cos B,$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \cos C.$$

Prin înmulțirea relațiilor și extragerea rădăcinii patrate obținem

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\cos A \cos B \cos C}$$

de unde prin împărțirea cu relațiile precedente,

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\cos B \cos C}{\cos A}}, \text{ etc.}$$

Mai departe, ca la prima soluție.

Problema 4013

Hidrocentrala din Stalingrad va avea o putere de 2 530 000 kW — spune tovarășul N. S. Hrușciov în „Raport prezentat la Congresul al XXI-lea extraordinar al P.C.U.S.".

Cîte becuri de 100 W s-ar putea alimenta de la această hidrocentrală? Să se exprime puterea hidrocentralei în C.P. și kgm/s.

D. M. Bătinețu

Soluție: a) Puterea hidrocentralei este $P = 2\,530\,000$ kW $= 2\,530\,000\,000$ W.

Numărul becurilor ce s-ar putea alimenta este:

$$x = \frac{P}{100} = \frac{2\,530\,000\,000}{100} = 25\,300\,000 \text{ becuri}$$

b) 1 *kW* = 102 kgm/*s*, deci,

$$P = 2\,530\,000 \cdot 102 = 258\,06\,000 \text{ kgm/s}.$$

Dar 1 *C.P.* = 75 kgm/*s*, deci,

$$P = \frac{258\,060\,000}{75} = 3\,440\,800 \text{ C.P.}$$

Problema 4038

Se dă ecuația $\cos 3x = \cos 2x$,

a) Să se afle x în radiani.

b) *Notînd* $\cos x = y$ *să se formeze ecuația corespunzătoare în y, și apoi să se rezolve.*

c) Folosind rezultatele precedente, să se deducă valorile lui $\cos \frac{2\pi}{5}$ *și* $\cos \frac{4\pi}{5}$ *apoi, pentru* $\cos \frac{\pi}{5}$, $\cos \frac{3\pi}{5}$, $\sin \frac{\pi}{10}$ *și* $\sin \frac{3\pi}{10}$.

(Journal de mathématiques élémentaires)

Soluție dată de elevul *Olteanu S. Victor*, s.m. 17 București: a) Deoarece avem o egalitate de cosinusuri, înseamnă că arcele corespunzătoare trebuie să aibă diferența egală cu $2k\pi$, sau să aibă suma egală cu $2k\pi$. Avem:

$$3x - 2x = 2k\pi \text{ deci } x = 2k\pi \qquad (1)$$

$$3x + 2x = 2k\pi, \text{ deci } x = \frac{2k\pi}{5}$$

b) Dacă avem în vedere identitățile: $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ și $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, atunci ecuația dată devine:

$$4\cos^3 x - 3\cos x = 2\cos^2 x - 1;$$

$$4\cos^3 x - 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0;$$

Notînd $\cos x = y$ ecuația de mai sus devine:

$$4y^3 - 2y^2 - 3y + 1 = 0$$

care se mai scrie:

$$(4y^3 - 4y^2) + (2y^2 - 2y) - (y - 1) = 0;\ (y - 1)(4y^2 + 2y - 1) = 0.$$

Rădăcinile acestei ecuații sînt: $y_1 = 1$, $y_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$.

Făcînd legătura cu soluțiile (1) ale ecuației trigonometrice se observă imediat că avem:

$$y_1 = \cos 2k\pi = 1;\ y_2 = \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \text{ (deoarece } \cos\frac{2\pi}{5} > 0);$$

$$y_3 = \cos\frac{4\pi}{5} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}, \text{ (deoarece } \cos\frac{4\pi}{5} < 0).$$

c) Valorile celorlalte funcții (cosinus și sinus) ale arcelor ce urmează se pot deduce foarte ușor din relațiile stabilite mai sus și pe baza relațiilor ce există între valorile funcțiilor trigonometrie pentru arce suplimentare, complementare etc. Astfel:

$$\cos\frac{\pi}{5} = -\cos\frac{4\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4};\ \cos\frac{3\pi}{5} = -\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1-\sqrt{5}}{4};$$

$$\sin\frac{\pi}{10} = \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4};\ \sin\frac{3\pi}{10} = \cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

Problema 4041

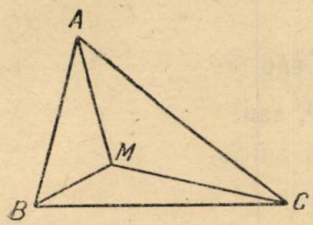
Fie un punct M mobil în interiorul triunghiului ABC. Notînd cu d_a, d_b, d_c distanțele punctului M la laturile BC, CA, AB să se calculeze minimul expresiei

$$E = \frac{1}{ad_a} + \frac{1}{bd_b} + \frac{1}{cd_c}$$

unde a, b, c sînt laturile triunghiului ABC. Să se arate ce poziție ocupă punctul M în acest caz.

Tomescu Ion, elev Ploești

Soluție dată de elevul *Olteanu S. Victor*, s.m. 17 București: Pentru a rezolva această problemă este necesar să stabilim în prealabil, o inegalitate ce are loc pentru fiecare trei mărimi reale și pozitive. Fie x,y,z trei numere reale și pozitive; în acest caz știm că media aritmetică a lor este întotdeauna mai mare sau cel puțin egală cu media geometrică. Vom avea inegalitățile:



$$\frac{x+y+z}{3} \geqslant \sqrt[3]{xyz} \quad \text{și}$$

$$\frac{xy+yz+zx}{3} \geqslant \sqrt[3]{x^2y^2z^2} \qquad (1)$$

Înmulțind, obținem inegalitatea

$$\frac{(x+y+z)(xy+yz+zx)}{9} \geqslant xyz$$

sau:

$$(x+y+z)(xy+yz+zx) \geqslant 9\,xyz. \qquad (1')$$

Revenind la problema noastră vom nota ariile triunghiurilor MBC, MCA, MAB respectiv cu S_1, S_2, S_3 și deci, vom avea: $ad_a = 2S_1$; $bd_b = 2S_2$; $cd_c = 2S_3$. Expresia dată se va scrie:

$$E = \frac{1}{ad_a} + \frac{1}{bd_b} + \frac{1}{cd_c} = \frac{1}{2S_1} + \frac{1}{2S_2} + \frac{1}{2S_3} =$$

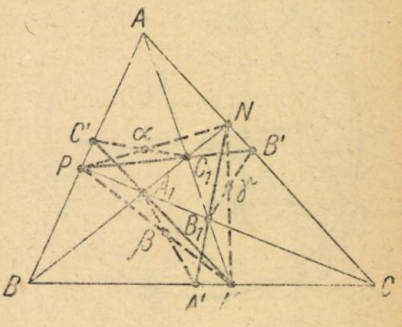
$$= \frac{S_1S_2 + S_2S_3 + S_3S_1}{2S_1S_2S_3} \geqslant \frac{9}{2(S_1+S_2+S_3)} = \frac{9}{2S}$$

Egalitatea are loc dacă $S_1 = S_2 = S_3$, în care caz M este în centrul de greutate al triunghiului ABC.

Problema 4052

În triunghiul ABC se iau două ceviene BN, CP concurente în A. O dreaptă care trece prin A taie pe BN, CP, BC respectiv în punctele C_1, B_1, M. Fie $A' \equiv (BC; NB_1)$; $B' \equiv (AC; PC_1)$; $C' \equiv (AB; MA_1)$ și $\alpha \equiv (NP; C'C_1)$; $\beta \equiv (MP; A'A_1)$; $\gamma \equiv (MN; B'B_1)$. Să se arate că grupele de puncte (A, α, A_1); (B, β, B_1); (C, γ, C_1) sînt coliniare.

Ene P. Dumitru, elev Ploești



Soluție: Triunghiurile AC_1N și $A_1C'P$ sînt omologice fiindcă punctele $B(NC_1; PC')$; $M(AC_1; A_1C')$; $C(AN; A_1P)$ sînt coliniare. Deci, în virtutea teoremei lui Desargues, dreptele NP, C_1C', AA_1 sînt concurente. Deci α $(C_1C'; NP)$ este pe dreapta AA_1 adică A, α, A_1 sînt coliniare.

În mod analog B, β, B_1 sînt coliniare (triunghiurile BA_1P și $B_1A'M$ sînt omologice) și C, γ, C_1 sînt coliniare (triunghiurile CB_1M și $C_1B'N$ sînt omologice).

Soluții bune au dat: *R. Răscanu* și *V. I. Vlad*, București

Problema 4053

Să se rezolve în numere întregi ecuația:

$$6x^2 - 13xy + 6y^2 = 19.$$

Bănică Const., elev Cîmpulung

Soluție: Ecuația se mai poate scrie:

$$6x^2 - 4xy - 9xy + 6y^2 = 19, \text{ sau}$$

$$(6x^2 - 4xy) - (9xy - 6y^2) = 19, \text{ sau}$$

$$2x(3x - 2y) - 3y(3x - 2y) = 19, \text{ adică,}$$

$$(3x - 2y)(2x - 3y) = 19;$$

deoarece 19 este prim, trebuie să avem:

$$3x - 2y = 1\ ;\ 2x - 3y = 19 \qquad (1)$$

cu rădăcinile $x = -7$; $y = -11$.

$$3x - 2y = 19\ ;\ 2x - 3y = 1 \qquad (2)$$

cu rădăcinile $x = 11$, $y = 7$

$$3x - 2y = -1\ ;\ 2x - 3y = -19 \qquad (3)$$

cu rădăcinile $x = 7$; $y = 11$.

$$3x - 2y = -19\ ;\ 2x - 3y = -1 \qquad (4)$$

cu rădăcinile $x = -11$; $y = -7$, deci, perechile de soluții sînt

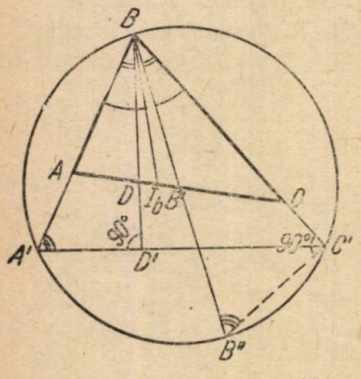
$$x = \pm 7 \text{ și } y = \pm 11; \text{ sau}$$

$$x = \pm 11 \text{ și } y = \pm 7$$

Problema 4054

Într-un triunghi oarecare notăm cu B unghiul a cărui mărime este cuprinsă între $\sphericalangle A$ și $\sphericalangle C$. Un cerc cu centrul în mijlocul laturii AC și care trece prin B, mai taie dreptele BA în A' și BC în C'. Să se arate că simediana dusă din B este perpendiculară pe A'C'.

Gh. Vasiliu, București



Soluție: Fie B'' punctul diametral opus lui B. Se observă că triunghiul dreptunghic $BB''C'$ este asemenea cu triunghiul $BD'A'$, deoarece $\measuredangle A'BD' = \measuredangle B''CB'$ ca unghiuri pe care le face simediana, respectiv mediana vîrfului B cu laturile care pleacă din același vîrf, — și $\measuredangle BA'D' = \measuredangle BB''C'$. ca avînd ca măsură comună jumătatea arcului BC'. Deci, vom avea și $\measuredangle BD'A' = \measuredangle BC'B'' = 90°$, adică simediana BD' este perpendiculară pe $A'C'$.

Problema 4057

De la ce depărtare de pămînt o rachetă care zboară spre lună nu mai poate cădea înapoi, chiar dacă stă pe loc?

Se dau: masa pămîntului $= 5{,}95 \cdot 10^{21}$ *tone; masa lunii* $= 7{,}298 \cdot 10^{19}$ *tone; distanța pămînt-lună* $= 384\,000$ *km.*

Adameșteanu Ion, elev Pitești

Soluție: Trebuie ca forța F de atracție a pămîntului asupra rachetei să fie egală cu forța F' de atracție a lunii asupra rachetei (pentru a se anula una pe alta). Deci, $F = F'$ sau:

$$\frac{k m_p m}{R^2} = \frac{k m_e m}{r^2}$$

unde k = constanta gravitației, m_p = masa pămîntului, m_e = masa lunei, m = masa rachetei, R = distanța pămînt rachetă, r = distanța rachetă lună. Rămîne ca:

$$\frac{m_p}{R^2} = \frac{m_e}{r^2},$$

adică:

$$\frac{5{,}95 \cdot 10^{21}}{R^2} = \frac{7{,}298 \cdot 10^{19}}{r^2}; \quad \frac{R^2}{r^2} = 81{,}53,$$

$$R^2 = 81{,}53\, r^2; \quad R = r\sqrt{81{,}53}; = 9{,}0294\, r$$

$$R + r = 384\,000; \quad 9{,}0294 \cdot r + r = 384\,000$$

$$r\,(9{,}0294 + 1) = 384\,000; \quad r = \frac{384\,000}{10{,}0294}.$$

$r = 38\,288$ km de la lună la rachetă

$R = 384\,000 - 38\,288$ m $= 345\,712$ km de la pămînt la rachetă $=$

$\cong 346\,000$ km.

Distanțele sînt socotite între centrele de greutate ale pămîntului, lunii și rachetei.

Problema E: 1459

Să se descompună în produs de factori expresia:

$$E = (x+y)(y+z)(x+2y+z) + (x+y)(x+z)(y+2x+z) + (y+z)(z+x)(x+2z+y) + 2(x+y)(y+z)(z+x)$$

V. V. Pravăț, elev Adjud

Soluție: Notăm: $x + y = A$, $y + z = B$, $z + x = C$.

Expresia devine:

$$E = AB(A+B) + AC(A+C) + BC(B+C) + 2\,ABC$$

$$E = A^2B + AB^2 + A^2C + AC^2 + B^2C + BC^2 + 2\,ABC =$$

$$= A^2(B+C) + A(B_2 + C_2 + 2\,BC) + BC(B+C) =$$

$= A^2(B + C) + A(B + C)^2 + BC(B + C).$

$E = (B + C)(A^2 + AB + AC + BC) = (B + C)[A(A + B) +$
$+ C(A + B)] = (A + B)(B + C)(C + A).$

Înlocuind pe A, B, C cu expresiile lor avem:
$E = (x + 2y + z)(y + 2x + z)(x + 2z + y).$

Problema E: 1461

O gospodărie agricolă colectivă își are terenul ei arabil împărțit pe culturi astfel: suprafața cultivată cu porumb întrece cu $\frac{1}{4}$ *suprafața cultivată cu grîu; mazărea și floarea soarelui ocupă fiecare cît* $\frac{1}{5}$ *din suprafața cultivată cu porumb; suprafața cultivată cu sfeclă de zahăr este de* $2\frac{1}{2}$ *ori mai mică decît cea cultivată cu porumb, iar lucerna și trifoiul ocupă fiecare cîte* $\frac{1}{8}$ *din suprafața cultivată cu grîu. Suprafața cultivată cu mazăre întrece cu 75 ha suprafața cultivată cu lucernă (enunț complet). Se cere: aria întregului teren al gospodăriei.*

Florea I. Dumitrescu

Soluție: Însemnînd suprafața cultivată cu grîu cu 1 întreg sau $\frac{4}{4}$, suprafețele ocupate de culturi, raportate la suprafața cultivată cu grîu sînt:

grîu: $\frac{4}{4}$, sfecla de zahăr $\frac{5}{4} : 2\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$; porumb $\frac{5}{4}$, lucernă $\frac{1}{8}$, mazăre $\frac{1}{4}$, trifoi $\frac{1}{8}$, floarea soarelui $\frac{1}{4}$.

Din aria cultivată cu mazăre scăzînd aria cultivată cu lucernă rămîn 75 ha sau $\frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$, ceea ce înseamnă că $\frac{1}{8}$ din suprafața cultivată cu grîu este de 75 ha și atunci rezultă:

suprafața cultivată cu grîu $= 75$ ha $\cdot 8 = 600$ ha

suprafața cultivată cu porumb $= 600 + \frac{600}{4} = 750$ ha

suprafața cultivată cu mazăre $= 600 : 4 = 150$ ha

suprafața cultivată cu floarea soarelui $= 150$ ha

suprafața cultivată cu sfeclă de zahăr $= \frac{600}{2} = 300$ ha

suprafața cultivată cu trifoi $= 75$ ha.

Suprafața totală ocupată de culturi $= 600 + 750 + 150 \cdot 2 + 300 +$
$+ 75 \cdot 2 = 2100$ ha.

Problema E : 1462

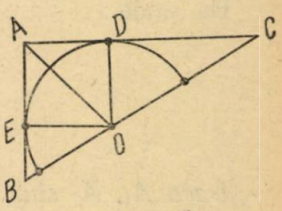
În triunghiul dreptunghic ABC cu catetele AC = b, AB = c se înscrie un semicerc tangent catetelor și cu diametrul pe ipotenuză.

Să se demonstreze că: 1) mijlocul diametrului semicercului este piciorul bisectoarei interioare a unghiului A; 2) raza semicercului este dată de relația:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

* * *

Soluție: Însemnînd cu *D* și *E* punctele de contact ale cercului cu catetele, se constată că figura *ADOE* este un paralelogram. Ținînd seama că *DO = OE* și că *AC*, *AB* sînt perpendiculare, rezultă că *ADOE* este un pătrat. Diagonala *AO* a pătratului este și bisectoarea unghiului *DAE*.



2. Din asemănarea triunghiurilor *DOC* și *ABC* avem:

$$\frac{OC}{BC} = \frac{DO}{AB},$$

iar din asemănarea triunghiurilor *BOE* și *ABC* deducem $\frac{BO}{BC} = \frac{OE}{AC}$.

Adunînd cele două relații și ținînd seama că $OD = OE = R$ avem

$$\frac{BO + OC}{BC} = \frac{R}{AC} + \frac{R}{AB}$$

sau:

$$R\left(\frac{1}{AC} + \frac{1}{AB}\right) = 1 \quad \text{sau:} \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Problema E : 1467

Să se arate că: a) dacă la produsul a 4 numere consecutive se scade dublul produs al numerelor extreme se obține pătratul produsului numerelor extreme;

b) dacă la produsul a 4 numere consecutive se adaugă dublul produs al numerelor din mijloc se obține pătratul produsului numerelor din mijloc.

Șaganai Nusfet,

Soluție: a) Avem:

$$n(n+1)(b+2)(n+3) - 2n(n+3) = n(n+3)[n(n+3)+2] - 2n(n+3) =$$
$$= [n(n+3)]^2 + 2n(n+3) - 2n(n+3) = [n(n+3)]^2$$

b) Avem:

$$n(n+1)(n+2)(n+3) + 2(n+1)(n+2) =$$
$$= (n+1)(n+2)[(n+1)-1][(n+2)+1] + 2(n+1)(n+2) =$$
$$= (n+1)(n+2)[(n+1)(n+2) - (n+2) + (n+1) - 1] + 2(n+1)(n+2) =$$
$$= (n+1)(n+2)[(n+1)(n+2) - 2] + 2(n+1)(n+2) =$$
$$= [(n+1)(n+2)]^2 - 2(n+1)(n+2) + 2(n+1)(n+2) =$$
$$= [(n+1)(n+2)]^2.$$

Problema E : 1468

Să se demonstreze că suma pătratelor a 5 numere consecutive este un multiplu de 5.

Eug. St. Iacob, Or. Stalin

Soluție : Fie S suma pătratelor a cinci numere consecutive : $n - 2$, $n - 1$, n, $n + 1$ și $n + 2$. Avem :

$$S = (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2$$

$$S = 5n^2 + 2(1^2 + 2^2) = 5n^2 + 20.$$

De unde :

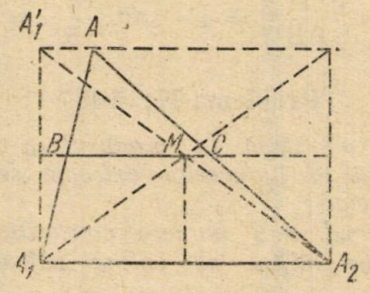
$$S = 5(n^2 + 4) = \mathfrak{M}\, 5.$$

Problema E : 1502

Dacă A_1, A_2 sînt respectiv, simetricele lui A față de B și C în triunghiul ABC, să se determine pe latura BC un punct M, astfel ca suma $MA_1 + MA_2$ să fie minimă.

Gabriel Tirtan, absolvent Găești

Soluție : Fie punctul M pe BC astfel ca suma $MA_1 + MA_2$ să fie minimă. Dacă A_1' este simetricul lui A_1 față de BC atunci $MA_1 = MA_1'$ oricare ar fi M pe BC și deci $MA_1 + MA_2 = MA_2' + MA_2$. Și cum



punctele A_1' și A_2 sînt de o parte și de alta a dreptei BC, rezultă că suma $MA_1' + MA_2$ este minimă atunci cînd punctele A_1', M, B sînt colineare iar $M \equiv (A_1'A_2, BC)$.

Observare : Mediatoarea laturei A_1A_2 taie pe BC în M.

Problema E : 1503

Să se găsească numerele de două cifre xy care să aibă pătrate de forma zxy.

Strătescu Ion, student

Soluția autorului: Cifra y prin ridicare la patrat trebuie să fie un număr de forma y sau uy, deci unul din numerele 1, 5, 6

$$(1^2 = 1;\ 5^2 = 25;\ 6^2 = 36)$$

Dar,

$$100\,z + 10\,x + y = (10\,x + y)^2 \qquad (1)$$

Pentru $y = 1$ relația (1) devine:

$$10\,z = 10\,x^2 + x$$

în numere întregi egalitatea are loc pentru $x = \mathfrak{M}\ 10$, dar cum $x < 10$ rezultă că acest caz se exclude.

Pentru $y = 5$, relația (1) devine:

$$10\,z = 10\,x^2 + 9\,x + 2$$

în numere întregi egalitatea are loc pentru $9x + 2 = \mathfrak{M}\ 10$; o soluție $x < 10$ este $x = 2$. Corespunde $z = 6$, deci numărul xz este 25, (25^2=625). Pentru $y = 6$, relația (1) devine:

$$10z = 10x^2 + 11x + 3$$

În numere întregi egalitatea are loc pentru $11x + 3 = \mathfrak{M}\ 10$, o soluție $x < 10$ este $x = 7$. Corespunde $z = 57$, dar $z < 10$; deci $x = 7$ nu corespunde problemei. Singura soluție bună este $N = 25$.

CHESTIUNI DE EXAMEN

4499. Fie $ABCD$ un patrat de centru O și de latură a. Prin vîrfurile opuse A și C ale patratului se duc în același sens, perpendicularele AA' și CC' pe planul patratului. Punctul A' este ales astfel ca $A'O = a$ și C' astfel ca $A'C' = 2a$.

a) Să se arate că dreapta $A'C'$ este perpendiculară pe planul $A'BD$.

b) Suma volumelor tetraedrelor $A'ABD$ și $C'CBD$ este egală cu volumul tetraedrului $C'A'BD$.

(La admiterea în Fac. matematică și fizică, București 1960)

4500. Se dau două axe rectangulare Ox și Oy și un punct $P(a, b)$. Prin acest punct se duc două drepte perpendiculare variabile, iar una întîlnește Ox în punctul A și cealaltă întîlnește pe Oy în B. Să se arate că locul proiecției punctului P pe AB este o dreaptă.

(La admiterea în Fac. matematică și fizică, București 1960)

4501. Fie ABC un triunghi, P un punct situat pe bisectoarea unghiului A și P', P'', P''' proiecțiile punctului P respectiv pe laturile BC, AC, AB. Să se găsească locul geometric al intersecției dreptelor $P''P'''$ și PP', cînd P alunecă pe bisectoarea unghiului A. Să se precizeze de asemenea, locul geometric descris de M cînd P parcurge segmentul de pe bisectoarea unghiului A care este coardă în cercul circumscris triunghiului ABC.

(La admiterea în Fac. matematică și fizică, București 1960)

4502. Fie P un punct exterior unei elipse, F unul din focare și d directoarea relativă la focarul F. Se duc din P tangentele la elipsă și se notează cu P', P'' punctele de tangență. Dreapta $P'P''$ intersectează directoarea (d) în punctul Q. Să se arate că dreptele FP și FQ sînt bisectoarele unghiului $P'FP''$.

(La admiterea în Fac. matematică și fizică, București 1960)

4503. Un corp cade de la 2000 m înălțime. În cît timp va străbate ultimii 200 m ? $g = 9{,}8$ m/s^2.

Teorie [1]) : Dilatarea gazelor.

(La admiterea în Fac. matematică și fizică, București 1960)

4504. Un acumulator avînd rezistența interioară de 0,05 Ω este legat cu un fir cu rezistența de 2 Ω. Curentul produs are intensitatea de 1 A. Care este tensiunea electromotoare a acumulatorului și tensiunea la bornele lui ?

Teorie [2]) : Formarea imaginilor în lentile. Formula lentilelor. trimite expunerea).

(La admiterea în Fac. matematică și fizică, București 1960)

4505. a) Fie G centrul de greutate al triunghiului isoscel ABC, $(AB = AC)$. Să se demonstreze că avem : $AB^2 = 2AG^2 + BG^2$.

b) O piramidă are vîrful V și baza un triunghi echilateral ABC cu latura a. Muchia laterală VA este perpendiculară pe planul bazei, iar fața laterală VBC face cu baza un unghi de 60^0. Să se afle volumul și aria totală a piramidei.

c) Laturile unui triunghi au ecuațiile $x+y-2=0$; $x+3y-4=0$ și $x+2y-4=0$. Să se scrie ecuația cercului circumscris triunghiului și ecuația tangentei la acest cerc într-unul din vîrfuri.

(La admiterea în Inst. agronomic, Craiova, 1960)

4506. a) O progresie aritmetică are suma de 222. Să se afle cîți termeni are progresia știind că termenul al treilea adunat cu al șaptelea dă 28, iar termenul al patrulea adunat cu al optulea dă 34.

b) Să se afle dimensiunile unui bidon cu baza patrată care să conțină 64 litri, știind că pentru construcția lui s-a întrebuințat minimum de material.

c) Se dă $\operatorname{tg} a = \frac{1}{5}$ și $\operatorname{ctg} b = \frac{5}{12}$. Se cere să se afle $\sin(2a+b)$.

(La admiterea în Inst. agronomic, Craiova, 1960)

---

[1]), [2]) Nu se va trimite expunerea.

PROBLEME PROPUSE *)

4507. Să se stabilească identitatea:

$$\sum_{K=1}^{n} \frac{\cos^3 K\alpha - \cos^3\left(\frac{2}{3}\pi - K\alpha\right)}{\cos K\alpha + \cos\left(\frac{\pi}{3} + K\alpha\right)} = \frac{3}{4}n$$

Ioan Şt. Mușat

4508. Se dau cercurile ortogonale (O_1) și (O_2). Să se arate că cercul ortogonal cu cercul (O_1) și care trece prin centrul cercului (O_2) și cercul ortogonal cu cercul (O_2) și care trece prin centrul cercului (O_1) au un punct comun cu linia centrelor cercurilor (O_1) și (O_2).

Gh. Cezar, Buzău

4509. Să se determine m așa fel ca rădăcinile ecuației.

$$x^2 - mx + m = 0$$

să satisfacă relația

$$(x_1 + x_2)^2 = x_1^3 + x_2^3$$

* * *

4510. Să se arate pentru care valori ale lui x avem:

$$\frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x}} + \frac{\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}} = \frac{2}{\sin x}$$

$$\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} = \frac{2}{\cos 2x}$$

C. Ionescu-Țiu

4511. a) Să se afle locul geometric al centrelor cercurilor ce trec printr-un punct fix A și sînt ortogonale unei sfere fixe (F).

b) Să se afle locul geometric al centrelor sferelor ce trec prin două puncte fixe A, B și sînt ortogonale unei sfere date (F).

c) Să se afle locul geometric al contactului P al unui plan cu o sferă variabilă ce trece prin două puncte fixe E, F.

* * *

4512. Bisectoarele unui triunghi sînt proporționale cu numerele 1, 2, 2.

a) Să se afle unghiurile triunghiului.

b) Este posibil ca bisectoarele unui triunghi să fie poporționale cu numerele 1, 2, 3?

* * *

---

*) VIII (4516, 4517, 4519, 4520, 4521, 4543); IX (4507, 4508, 4509, 4518, 4528, 4533, 4536, 4537, 4538, 4539); X (4510, 4512, 4522, 4523, 4525, 4527, 4529, 4530, 4531, 4532, 4535); XI (4511, 4513, 4514, 4515, 4524, 4526, 4540, 4541, 4542).

4513. Să se reprezinte grafic funcțiile:

$$y_1 = \sqrt{x^2 - 4} + x\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}},$$

$$y_2 = \sqrt{9 - x^2} - \frac{3x}{|x|}\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}},$$

$$y_3 = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1},$$

$$y_4 = \sqrt{x^2 - 1} + \frac{|x+1|}{x-1}\sqrt{\frac{(x-1)^3}{x+1}}.$$

C. Ionescu-Țiu

4514. Două oglinzi sferice concave O_1 și O_2 sînt așezate față în față, astfel încît axele lor să coincidă. Distanța dintre oglinzi este de 50 cm, iar distanțele lor focale sînt de 6 cm, respectiv 9 cm. Să se determine:

a) locul unde trebuie așezat obiectul luminos pentru ca imaginile lui reale în ambele oglinzi să coincidă;

b) mărimea imaginilor formate de cele două oglinzi, dacă obiectul luminos este de 2 cm;

c) distanța față de oglinzi la care se vor forma cele două imagini cînd oglinda O_1 se apropie de obiect cu 4 cm, iar oglinda O_2 se apropie de obiect cu 24,9 cm.; cum sînt aceste imagini?

d) mărimea imaginilor formate de cele două oglinzi pentru această nouă poziție a oglinzilor.

Teodora Grosu

4515. Un condensator de 20 μF și o bobină de inductanță variabilă a cărui rezistență este 50 Ω și inductanță este 1,33 H sînt conectate la o sursă de 110 V cu frecvența de 48 Hz. Pentru montajul în serie și în paralel să se calculeze:

a) Curentul furnizat de generator și defazajul în raport cu diferența de potențial la bornele bobinei și condensatorului;

b) Se modifică apoi, inductanța bobinei astfel, încît prin montajul în serie să avem maximul de curent provenit de la generator. Să se răspundă la cele două întrebări precedente ținînd seama de această nouă valoare a inductanței.

C. de P.

4516. Roata unui motor avînd puterea de 100 C.P. face 580 rot/min. Să se determine momentul lui de rotație M și forța tangențială P, dacă diametrul roții motorului este $D = 800$ mm.

C. de P.

4517. Să se demonstreze că numerele întregi

$$n \pm 1 \text{ și } n^2 \mp n + 1$$

sînt sau prime între ele sau au cel mult pe 3 ca divizor comun.

Gh. Buicliu

4518. Un punct M se mișcă pe latura BC a unui triunghi oarecare ABC. Fie O_1 și O_2 centrele cercurilor care trec prin MAC respectiv MAB. Să se afle locul geometric al mijlocului segmentului O_1O_2. (În legătură cu problema 3498).

Dan Bretan, Timișoara

4519. Să se arate că dacă

$$\frac{a^2-x}{a}+\frac{b^2-x}{b}+\frac{c^2-x}{c}=\frac{a^2b^2c^2x-1}{abc}$$

atunci

$$\frac{ab-1}{ab+1}\cdot\frac{bc-1}{bc+1}\cdot\frac{ca-1}{ca+1}=\frac{1-x}{1+x}$$

I. Stamate

4520. Să se arate că expresia

$$E=2^{6^n}+2^{2^{n+4}}\cdot 3^n+2^n\cdot 3^{3^{n+2}}+3\cdot 7^{2^{n+1}}$$

este divizibilă cu 37, n fiind un număr natural.

Liviu C. Pîrșan, elev, București

4521. Dintr-un același punct sînt lăsate să cadă fără viteză inițială, succesiv, două bile grele. Observatorul de pe fiecare bilă constată că bila cealaltă se depărtează de el cu viteza constantă v. Ce distanță a parcurs fiecare bilă în momentul cînd se găsesc la o depărtare l una de alta? La ce timp și în ce poziție trebuie lansată o a treia bilă, astfel încît în tot timpul mișcării sale să se găsească la mijlocul distanței dintre cele două bile?

Alexandru Stoenescu

4522. Pe fața $ABCD$ a unui cub cu muchia a se așează un alt cub care are vîrfurile unei fețe în mijloacele laturilor feței $ABCD$. Deasupra acesteia se așează în același mod un alt cub și se continuă mereu operația. Să se afle înălțimea coloanei de cuburi formată, volumul coloanei, suprafața ei totală și centrul de greutate.

C. Menciu

4523. O uzină electrică utilizează ca mijloace de producere a curentului electric, grupuri electrogene formate din motoare cu ardere internă de tip Diesel în patru timpi, care acționează ca generatoare de curent alternativ. Blocul motor conține un număr de 7 cilindri, fiecare avînd un piston cu diametrul de 0,8 m. Se mai dau următoarele date: cursa pistonului $s = 1{,}6$ m, turația pistonului $n = 2500$ rot/min, presiunea medie indicată $P_{mi} = 90$ kgf/m^2, iar randamentul mecanic al motorului $\eta_m = 38\%$. Să se calculeze puterea indicată, puterea efectivă precum și puterea reală a motorului în *CP*.

Diaconu Adrian, elev, Bîrlad

4524. O bobină a cărei inductanță este 0,38 H este intercalată în circuitul unui curent produs de un mic alternator de laborator, a cărui frecvență este 12 și intensitatea maximă 4 A. Se cere:

a) Tensiunea electromotoare maximă autoindusă ce se produce în bobină de acest curent; b) Impedanța circuitului; c) Tensiunea electromotoare maximă a alternatorului știind că rezistența activă totală a circuitului este de 15 Ω; d) Puterea medie a alternatorului și factorul de putere.

C. de P.

4525. Un pendul de lungime l și densitate ϱ e scufundat într-un fluid perfect de densitate ϱ_0. Să se deducă formula perioadei pendulului. Să se studieze perioada în cazurile $\varrho > \varrho_0$; $\varrho = \varrho_0$; $\varrho < \varrho_0$. Caz particular $l = 49$ cm, $\varrho = 9 \frac{g}{cm^3}$, $\varrho_0 = 7 \frac{g}{cm^3}$.

C. Savu, profesor, Urlați

4526. Se admite că razele catodice transportă electroni cu o viteză egală cu $3.10^9 \frac{cm}{s}$; fiecare electron are o masă egală cu 10^{-27} g. O bobină de inducție cu 10 întreruperi pe secundă produce aceste raze într-un tub Crookes și electronii bombardează aripile unei moriști așezate pe șenile în tub. Dacă se presupune că 10^{12} particule lovesc aripile la fiecare întrerupere a bobinei, să se afle după cît timp lucrul mecanic produs va fi de 1 kgm.

* * *

4527. Se dă un circuit derivat, cu două ramuri. Prima ramură e formată dintr-un conductor de cupru, lung de 1000 m și cu secțiunea de 1 mm², iar a doua ramură e formată dintr-un conductor avînd o rezistență de 70 Ω. Dîndu-se rezistivitatea cuprului $\varrho = 0{,}0175$ Ω cm și știind că în ramura unică circulă un curent de 10 A, se cere:

a) intensitatea curenților cari circulă prin cele două ramuri;

b) puterea electrică ce se consumă în ramura care are rezistența de 70 Ω.

I. Jaliu

4528. Se dă un tub de oțel lung de 2 metri. Secțiunea transversală are raza cercului exterior egală cu 5 cm și raza cercului interior egală cu 4 cm. Dîndu-se rezistența admisibilă a oțelului la întindere $\sigma_a = 1000$ kgf/cm², se cere:

a) Care este forța de întindere P pe care tubul o poate suporta în bune condiții?

b) Cu cît se va alungi tubul sub acțiunea forței P aflată la punctul a? (Se va lua $E = 2 \times 10^6$ kg/cm²).

* * *

4529. Să se rezolve în numere întregi, ecuația:

$$xyz + x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx + x + y + z = 2$$

(3948, Mathesis, 1960)

4530. Să se demonstreze că dacă n este un întreg pozitiv, există relațiile

$$1-\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2-\frac{1}{4}C_n^3+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n+1}C_n^n=\frac{1}{n+1},$$

$$\frac{1}{2}C_n^0-\frac{1}{3}C_n^1+\frac{1}{4}C_m^2-\frac{1}{5}C_n^3+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n+2}C_n^n=\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

(3952, Mathesis, 1960)

4531. Să se arate că perimetrul oricărui triunghi dreptunghic în A este egal cu $2r\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}$, unde r este raza cercului înscris.

Să se exprime aria triunghiului dreptunghic în A în funcție de raza cercului înscris și unghiul B, unde $B\leqslant 45^0$.

Eliferie M. Rogai, București

4532. Să se arate că într-un triunghi oarecare ABC există inegalitatea

$$\sum\frac{\cos^2 A+\cos^2 B}{\cos A+\cos B}\geqslant 1+\frac{p_0}{p}$$

unde p_0 este semiperimetrul triunghiului ortic.

Viorel G. Vodă, elev, București

4533. Într-un semicerc dat să se înscrie un dreptunghi de arie maximă.

(Clasa IX, Olimpiada 1956, Kiew)

4534. Se dă un unghi diedru și o dreaptă care intersectează muchia sa. Să se ducă prin această dreaptă un plan în așa fel încît dreapta dată să fie bisectoarea unghiului care se obține în secțiune.

(Clasa IX, Olimpiada 1956, Kiew)

4535. Trei sfere sînt tangente la planul unui triunghi cu laturile a, b, c în vîrfurile sale și sînt tangente două cîte două. Să se găsească razele sferelor.

(Clasa X, Olimpiada 1956, Kiew)

4536. Să se găsească valorile x, y și z care nu sînt egale simultan cu zero și care verifică sistemul de ecuații;

$$(x+1)(3-4y)=(6x+1)(3-2y)$$
$$(4x-1)(z+1)=(x+1)(z-1)$$
$$(3-y)(z-2)=(1-3y)(z-6)$$

* * *

4537. Laturile unui patrulater convex oarecare se prelungesc și se înscriu patru cercuri, fiecare tangent la una din laturi și prelungirii celorlalte două laturi învecinate. Să se demonstreze că centrele acestor cercuri se află pe același cerc.

* * *

4538. Să se demonstreze că

$$(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)>n^2$$

unde $a_1, a_2 \ldots a_n$ sînt numere reale și pozitive.

* * *

4539. Să se rezolve sistemul

$$x^2 = ax + by\,; \qquad y^2 = bx + ay$$

caz particular $a = n(n-1)+1$, $b = n(n-1)$.

Stanislav Horak. (Matematika, Praha)

4540. Să se rezolve ecuația

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x+\sin 5x+\sin 6x =$$
$$=\cos x+\operatorname{coc} 2x+\cos 3x+\cos 4x+\cos 5x+\cos 6x$$

* * *

4541. Să se arate că dacă a, b, c sînt trei numere pozitive subunitare, avem

$$1>\sqrt{1-a}+\sqrt{1-b}-\sqrt{\frac{(1-a)(1-b)}{1-c}}>1-\frac{1}{\sqrt{1-c}}$$

C. Ionescu-Iiu

4542. Să se găsească toate numerele întregi x și y care satisfac inegalitatea: $2(x^2-x)+y^2<20$.

Jiri Sedlacek. (Matematika, Praha)

4543. Să se demonstreze că oricare ar fi numărul natural n expresia n^3+5n este divizibilă prin șase.

Ota Setzer (Matematika, Praha)

EXERCIŢII ŞI PROBLEME PROPUSE PENTRU ŞCOALA DE ŞAPTE ANI *)

E: 1617. O gospodărie agricolă de stat a cultivat cu porumb 100 ha pămînt. Toate lucrările au fost făcute cu mijloace mecanizate în 343 zile-muncă, pe cînd nemecanizat s-ar fi folosit 5370 zile-muncă. La fiecare hectar lucrat mecanizat s-au recoltat 200 kg boabe în plus. Ziua-muncă în acest an a fost plătită cu 32 lei, iar 1 kg de porumb a fost socotit la 90 bani. Ce economie a făcut această gospodărie de stat folosind mijloace mecanizate?

(Clasa V, OMMF, 1960, Suceava)

E: 1618. Un romb şi un paralelogram au unghiul ascuţit de 60°. Laturile paralelogramului sînt respectiv egale cu diagonalele rombului. Care este raportul ariilor?

(Clasa VII, OMMF, 1960, Oradea)

E: 1619. Un reşou electric cu putere de 550 W lucrează la o tensiune de 110 V. Se cere:

a) Valoarea intensităţii curentului care circulă prin reşou,

b) rezistenţa electrică a reşoului,

c) diametrul firului reşoului dacă este de nichelină cu $\varrho = 0{,}44$ ohmi mm^2/m şi dacă lungimea firului este de 10 m,

d) costul energiei electrice consumată de reşou în timp de 10,1 minute, dacă un kWh costă 0,60 lei.

(Clasa VII, OMMF, 1960, Oradea)

E: 1620. După două reduceri de preţuri un palton costă 612 lei. Ştiind că prima reducere a fost de 15%, iar a doua reducere de 10%, să se afle cît a costat paltonul înainte de reducerea preţurilor.

(Clasa VI, OMMF, 1960, reg. Suceava)

E: 1621. Se dă un triunghi dreptunghic ABC ($A = 90°$). În punctele B şi C se ridică cîte o perpendiculară BD şi CE pe ipotenuză, situate de aceeaşi parte a ipotenuzei cu triunghiul; se duc bisectoarele unghiurilor DBA şi ECA care se taie în M. Să se afle unghiul M ştiind că unghiul ABC are 20°30′2″.

(Clasa VI, OMMF, 1960, reg. Suceava)

E: 1622. Patru oameni împing pe un plan înclinat, o greutate de 400 kgf. Lungimea planului este de patru ori mai mare decît înălţimea lui. Să se afle forţa pe care trebuie să o dezvolte fiecare lucrător. Să se mai afle şi lucrul mecanic efectuat ştiind că lungimea planului înclinat este de 20 m.

(Clasa VI, OMMF, 1960, reg. Suceava)

---

*) V (E: 1617, 1626, 1627, 1631); VI (E: 1620, 1621, 1628, 1630); VII (E: 1618, 1619, 1623, 1625, 1629, 1632).

E: 1623. Terenul unei gospodării agricole colective a fost cultivat în felul următor: jumătate din teren și încă 50 ha au fost cultivate cu grîu. Jumătate din rest și încă 50 ha cu porumb, iar jumătate din noul rest și ultimele 50 ha cu cartofi. Să se afle cîte ha avea gospodăria agricolă colectivă.

(Clasa VII, OMMF, 1960, reg. Suceava)

E: 1624. O sursă de lumină A se află la distanța $\sqrt{3}\,m$ de o oglindă plană. O rază de lumină care pleacă din A se reflectă sub un unghi de incidență de 60° și trece printr-un alt punct situat la distanța de $3\sqrt{3}\,m$ de oglindă. Să se afle distanța AB.

(Clasa VII, OMMF, 1960, reg. Suceava)

E: 1625. Un fier de călcat electric cu indicațiile 110 V, 600 W, funcționează 10 ore. Să se calculeze:

a) Ce intensitate are curentul electric care circulă prin el?

b) Ce rezistență are fierul de călcat?

c) Cît costă funcționarea lui dacă 1 kWh costă 0,60 lei?

(Clasa VII, OMMF, 1960, reg. Suceava)

E: 1626. Cunoscînd produsul a două numere egal cu 4851000 și cel mai mare divizor comun al lor egal cu 210, să se afle cele două numere.

(Clasa V, OMMF, 1960, București)

E: 1627. O gospodină a cumpărat de la o fermă de stat, cu suma de 390 lei, 2 curcani, 3 cocoși și 4 găște. Un curcan costă cît un cocoș și o găină laolaltă, iar un cocoș costă mai puțin cu 10 lei decît o gîscă. Să se afle costul unui curcan, al unei găște și al unui cocoș.

(Clasa V, OMMF, 1960, București)

E: 1628. La un magazin fierometal se vinde un colac de șină de butoi în formă de coroană circulară formată din 29 cercuri bine apropiate unul de altul. Să se afle lungimea aproximativă a șinei din colac, cunoscînd raza cercului mijlociu de 40,2 cm. Cît cîntărește colacul știind că șina are grosimea de 0,2 cm și lățimea de 5 cm. Densitatea metalului se ia $7{,}6\ \frac{g}{cm^3}$.

Șerban Popescu, Strehaia

E: 1629. Dacă $\frac{1}{a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{b}=\frac{1}{d}-\frac{1}{c}$ să se arate că:

$$a(d-c)+b(a-c)+c(d-a)=0.$$

Bejan Costel, absolvent Galați

E: 1630. În urma aplicării măsurilor hotărîte de plenara C.C. al P.M.R. din iulie 1959 cu privire la ridicarea nivelului de trai, după trei măriri succesive cu același număr de procente, salariul unui muncitor va fi de două ori mai mare în 1965 față de 1958. Cu cîte procente va crește salariul muncitorului de fiecare dată ?

Al. Lalescu, profesor Cîmpina

E: 1631. Să se găsească cifrele înlocuite prin x în înmulțirea

$$\begin{array}{r} 5xx \\ x3x \\ \hline xx0x \\ xxx1 \\ xxx \\ \hline xxxx3 \end{array}$$

Stelian Lamba, profesor Tuzla

E: 1632. Pe latura BC a triunghiului oarecare ABC luăm un punct D. Fie E și F proiecțiile punctului D pe înălțimile triunghiului duse din B și C. Să se arate că: $AB \cdot CF + AC \cdot BE = 2S$.
(În legătură cu E: 1197).

D. M. Bătinețu

Despre activitatea „Cercului de matematică" de la școala medie Bolintinul din Vale

In scopul legării teoriei de practică, un rol important îl are matematica. La școala noastră existînd numai secție reală și deci matematica și fizica fiind pe primul plan, elevii școlii noastre dau o deosebită atenție acestor obiecte.

Pentru lărgirea orizontului de cunoștințe al elevilor, în domeniul matematicii și fizicii, s-au organizat în școală cercuri de matematică și fizică, încă din 1957. Anul acesta fiind al patrulea an de activitate al cercului, participarea elevilor la cercuri și succesul lor a devenit ceva obișnuit în școala noastră. Anul acesta **s-au organizat** două cercuri de matematică: clasa a VIII-a cu a IX-a și a X-a cu a XI-a, datorită numărului mare de elevi participanți la cercuri. Cercurile sînt conduse de tov. prof. Ivașcu Ștefan, care prin munca sa neobosită aduce un aport important la succesul activității cercului. De la începutul anului am stabilit un plan de muncă trimestrial cu obiectivele următoare:

1. Sprijinirea elevilor mai puțin avansați precum și stimularea celor ce participă ca rezolvitori la G.M.F.-B.
2. Lărgirea orizontului de cunoștințe prin tratarea unor note și subiecte interesante propuse de participanți.
3. Rezolvarea cît mai multor probleme din cele mai variate pentru adîncirea programei analitice.
4. Antrenarea unui număr cît mai mare de elevi ca rezolvitori la G.M.F.-B.

Ședințele s-au ținut cu regularitate de două ori pe lună, cu fiecare cerc. Majoritatea elevilor au înțeles de la început sarcinile ce le stau în față și cei mai mulți au devenit colaboratori la G.M.F.-B dintre care menționez pe: Răduță Apolodor, Mihuț I. Octavian, Ghiță R. Teodor, Dobre Elena, Badea Gheorghe, Radu Stere, Costache Ilie, Năstase Ion, Dumitru Ion, Pană Gheorghe, Zaharia Rada, Ispir Florica, Alexandru Cornel, Lăzărescu

3. *Jocul „15“*. O tablă în formă de pătrat e împărțită în 16 pătrățele egale ; 15 dintre ele sînt ocupate cu fise numerotate de la 1 la 15 și așezate la întîmplare, bunăoară așa (fig. 1) :

1	13	8	2
4	7	3	5
11		6	9
14	15	10	12

Fig. 1.

;

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	2
	13	14	15

Fig. 2.

Aici pătrățelul liber e învecinat cu patru pătrățele ocupate. În alte cazuri, el poate avea 2, 3 sau 4 vecini. Prin mutarea în pătrățelul liber a unei fise dintr-un pătrățel vecin, acesta din urmă devine liber ; și așa mai departe.

Jocul „15“ constă în asemenea mutări succesive, care urmăresc o altă așezare a fiselor, bunăoară așezarea din figura 2.

Se naște în mod firesc întrebarea : cînd este posibil să se treacă de la o așezare a fiselor la alta, și cînd — nu ? Bineînțeles, e vorba de o trecere conformă cu *regulile jocului*.

Cum răspunde matematica la această întrebare ? Avem aici nu o singură problemă, ci un ansamblu întreg de probleme înrudite, deoarece pentru fiecare două așezări date, trecerea de la așezarea întîi la așezarea a doua e o problemă în sine. Ne trebuie, așadar, nu un răspuns simplu („da“ sau „nu“) ci o metodă sigură pentru toate situațiile cîte se pot ivi, care sînt în număr de $\frac{16!\,(16!-1)}{2}$, deci un număr destul de mare.

Ne trebuie o metodă sigură și clară pentru a rezolva un mare număr de probleme înrudite, adică vrem să căutăm un *algoritm*.

În acest scop, facem abstracție de mărimea pătrățelelor, mărimea și natura fiselor etc. Trebuie să înlăturăm tot ce e accesoriu și nesemnificativ pentru chestiunea care ne interesează. Să introducem *un simbolism adecvat*, adică să folosim acele simboale (semne) care reprezintă *regulile jocului*, în ceea ce au ele esențial și determinant pentru întrebarea pe care ne-o punem ; cu alte cuvinte : căutăm o altă formulare a regulilor, care să ne sugereze ideea generală a răspunsului și să ne permită formularea sa precisă.

E firesc în primul rînd să notăm cu 0 locul liber ; în al doilea rînd, e tot atît de firesc să notăm cu *b* barierele ce despart diferitele orizontale. Cu aceste simboale, așezarea din figura 1 se notează :

1 13 8 2 *b* 4 7 3 5 *b* 11 0 6 9 *b* 14 15 10 2 ;

iar cea din figura 2 se notează :

1 2 3 4 *b* 5 6 7 8 *b* 9 10 11 12 *b* 0 13 14 15.

Astfel, am notat două așezări particulare. Pentru a nota două așezări oarecare, ne folosim de litere cu indici. O așezare va fi:

$$A' = a'_1\, a'_2\, a'_3\, a'_4\, a'_5\, a'_6\, a'_7\, a'_8\, a'_9\, a'_{10}\, a'_{11}\, a'_{12}\, a'_{13}\, a'_{14}\, a'_{15}\, a'_{16}\, a'_{17}\, a'_{18}\, a'_{19};$$

a doua va fi:

$$A'' = a''_1\, a''_2\, a''_3\, a''_4\, a''_5\, a''_6\, a''_7\, a''_8\, a''_9\, a''_{10}\, a''_{11}\, a''_{12}\, a''_{13}\, a''_{14}\, a''_{15}\, a''_{16}\, a''_{17}\, a''_{18}\, a''_{19},$$

unde pentru $i = 5$, 10 și 15, a_i ia valoarea b, iar pentru ceilalți indici, a_i, poate lua o valoare oarecare de la 0 la 15 inclusiv (cu restricția că fiecare valoare poate fi luată o singură dată).

În figura 1, vecinii lui 0 sînt 7, 11, 6 și 15. În figura 2, vecinii lui 0 sînt 9 și 13. Pentru a păstra același înțeles pentru noțiunea de *vecin*, vom spune că într-o așezare A, a are cel mult 4 vecini: a_{i-5}, a_{i-1}, a_{i+1} a_{i+5} (unii din ei pot lipsi), iar operația admisă R (regula jocului) este schimbarea între ei (transpoziția) a doi vecini, atunci cînd unul este egal cu zero, iar celălalt este diferit de b.

Deci, obiectul cercetării noastre îl constituie așezările A dotate cu operația R, iar problema (de astă dată unică!) este de a stabili în ce caz se poate ajunge de la A' la A'' folosind numai operația R, adică în ce caz există o succesiune de așezări:

$$A' = A_1,\ A_2,\ A_3, \ldots, A_n = A''$$

astfel încît A_{j+1} să fie rezultatul aplicării operației R asupra lui A_j.

Dar prin ce diferă A' de A''? Atît în A' cît și în A'' regăsim aceleași semne (se zice că avem același *alfabet*), numai ordinea e alta: față de A', găsim în A'' anumite inversiuni, adică la anumite perechi de semne, semnul anterior în A' devine posterior în A''. Altă deosebire, în afară de inversiuni, nu poate exista. De aceea, trebuie să cercetăm ce se întîmplă cu inversiunile dintr-un A_j oarecare, atunci cînd îl supunem operației R.

Dacă ne înțelegem să nu considerăm inversiuni esențiale acelea la care participă zero (prin ce este justificată o asemenea convenție?), observăm că o transpoziție între a_i și a_{i+1} sau între a_i și a_{i-1} nu adaugă, nici nu scade numărul inversiunilor esențiale.

Dar o transpoziție între a_i și a_{i+5}? Pentru fixarea ideilor, să considerăm $a_i = 0$. Ce se întîmplă cu a_{i+5}? Devine anterior pentru a_{i+1}, a_{i+2}, a_{i+3}, a_{i+4}. Dacă exista o inversiune între a_{i+1} și a_{i+5}, acum nu mai există: numărul inversiunilor a scăzut cu 1. Dacă nu exista o inversiune între a_{i+1} și a_{i+5}, acum există: numărul inversiunilor a crescut cu 1. La fel pentru a_{i+2}, a_{i+3}, a_{i+4}: fiecare în parte aduce ori o creștere cu 1, ori o reducere cu 1 a numărului inversiunilor.

Deci, sînt posibile cinci cazuri: 4 creșteri; 3 creșteri — 1 descreștere; 2 creșteri — 2 descreșteri; 1 creștere — 3 descreșteri; 4 descreșteri.

În rezumat, după operația R, numărul inversiunilor esențiale ori rămîne neschimbat, ori scade cu 2 sau 4 unități, ori crește cu 2 sau 4 unități. Se zice că *paritatea* e un invariant față de operația R.

Noțiunea de inversiune esențială e o noțiune relativă la așezarea inițială A'; numărul inversiunilor esențiale din A' este 0, adică un număr par. Deci, și în A'' trebuie să fie un număr par de inversiuni.

In concluzie, pentru a ști dacă e posibilă trecerea de la A' la A'', numărăm inversiunile din A''. Trecerea este posibilă dacă și numai dacă numărul este par.

Dacă tabla nu e pătratică, ci dreptunghiulară, dar în fiecare linie continuă să fie cîte patru pătrățele, și sînt cel puțin două linii — răspunsul rămîne în picioare; adică, de fapt, algoritmul se aplică într-un număr infinit de cazuri; mai mult, răspunsul rămîne valabil și în cazul dreptunghiurilor cu baza număr par oarecare, iar în cazul cînd baza e număr impar, răspunsul se modifică în mod corespunzător, după cum e lesne de văzut.

Jocul „15 e susceptibil de numeroase variante și generalizări. Studierea lor este nu numai distractivă, dar și instructivă, constituind o introducere (și poate nu numai o introducere) în *teoria sistemelor asociative*. Un sistem asociativ este o mulțime de simboale (denumită alfabet) dotată cu o definiție a „cuvintelor corecte" (în cazul jocului „15" cuvintele corecte sînt așezările) și cu operații asupra cuvintelor denumite *reguli sintactice*.

Una din problemele fundamentale în teoria sistemelor asociative este problema determinării echivalenței cuvintelor, care constituie o preocupare a *logicii matematice*.

Mircea Tîrnoveanu

REZULTATUL ÎNTRECERII ÎNTRE ȘCOLILE MEDII DIN ȚARĂ privind activitatea extrașcolară și a cercurilor de elevi la matematică și fizică, pe anul 1960.

La întrecerea din anul 1960 au participat numai un număr de 26 școli medii, adică o participare destul de slabă față de numărul mare de școli medii din țară.

Din cercetarea activității școlilor participante în conformitate cu regulamentul publicat în G.M.F.-B din martie 1960, a rezultat următoarea clasificare:

1. *Școala medie din Moreni*, reg. Ploești cu *4 clase medii*, de la care s-au evidențiat în mod deosebit, elevii: *Moflic Emilian, Paraschivoiu Gh. Ion, Stanciu D. Petre, Ștefănescu Decebal, Tiron Adrian, Tudor Gheorghe, Predescu Marin, Rădulescu Spiridon, Dogaru Mihai* și *Jipa Constantin*.

2. *Școala medie nr. 10 din București* cu *10 clase* medii, de la care s-au evidențiat în mod deosebit elevele: *Obadă Hareta, Marini Ileana, Ionescu Rodica, Fințescu Elena, Bărbulescu Lucia, Vișan Grațiela, Cristu Ileana* și *Teodorescu Catrinel*.

3. *Școala medie nr. 11 din București* cu *13 clase* medii, de la care s-au evidențiat în mod deosebit: *Georgescu Florin, Cornblum Eugen, Georgescu Horia, Gianni Emanuel, Gropper Jean* și *Pantazi Emanuel*.

4. *Școala medie nr. 1 din București* cu *16 clase* medii, de la care s-au evidențiat în mod deosebit elevii: *Lupaș Laurențiu, Stan A. Mircea, Petrescu Lucian, Căzănescu Virgil, Răscanu Radu, Răzvan Vladimir, Mocanu O. Marcel* și *Pascu Adrian*.

5. *Școala medie Bolintinul din Vale* (reg. București) cu *4 clase*

medii, de la care s-au evidențiat: *Ghiță R. Teodor, Mihuț Octavian, Răduță Apolodor, Alexandru St. Cornel* și *Năstase D. Ion.*

6. *Școala medie „Ștefan Gheorghiu"* din Brașov cu *10 clase* medii, de la care s-au evidențiat: *Topliceanu Vasilica, Patriciu Ștefan* și *Socoliac Gheorghe.*

7. *Școala medie din Bechet,* reg. Oltenia cu *3 clase* medii, de la care s-a evidențiat elevul *Crușoveanu Victor.*

— S-a mai constatat că mai activează și alți elevi de la multe școli medii din țară, după cum se arată în rubrica *„evidențiații pe 1960"* publicată în nr. 12, decembrie 1960, pagina 766; nu au însă toți o activitate destul de susținută.

— Mai sînt încă școli unde G.M.F.-B nu este suficient popularizată; iar elevii nu sînt *îndrumați* și *stimulați* în activitatea de rezolvări de probleme.

Am dori ca la *întrecerea pe anul 1961,* al cărui regulament se publică mai jos, *să se înscrie mai multe școli medii,* la care funcționează cercurile de elevi pentru pregătirea lor la matematică și fizică și au elevi rezolvitori de probleme din G.M.F.-B.

REGULAMENTUL ÎNTRECERII PE CARE O ORGANIZEAZĂ REDACȚIA G.M.F.-B ÎNTRE ȘCOLILE MEDII, PE ANUL 1961

Pentru a stimula activitatea extrașcolară la matematică și fizică a elevilor din școlile medii, dată fiind importanța acestor discipline în contribuția lor la desăvîrșirea construcției socialismului, pentru formarea unor specialiști necesari patriei, un mijloc deosebit îl constituie întrecerile. În acest scop, publicăm regulamentul întrecerii, pentru a fi în atenția școlilor medii, a profesorilor de specialitate, a organizației U.T.M. din școli și a responsabililor de cercuri de matematică și fizică.

La această întrecere se poate înscrie orice școală medie din țară, specificînd la înscriere, într-o fișă, numărul de clase medii (VIII, IX, X real și XI real), care funcționează în anul școlar 1960—1961.

Redacția GMF-B solicită profesorii de matematică și fizică din învățămîntul mediu să popularizeze această întrecere în rîndurile elevilor, să-i stimuleze pe elevi, să-i lămurească asupra însemnătății acestei întreceri organizate.

1. Regulamentul întrecerii are următorul punctaj:

a) cîte un punct de fiecare problemă rezolvată și anunțată la rubrica rezolvitorilor în cele 12 numere ale G.M.F.-B pe 1961;

b) cîte 10 puncte de fiecare evidențiere a elevilor școlii, în anul 1961;

c) cîte un punct de fiecare elev participant la etapa locală a olimpiadelor din 1960—1961.

d) cîte 10 puncte de fiecare elev participant la etapa regională a olimpiadelor din 1961;

e) cîte 30 de puncte de fiecare elev participant la etapa finală (pe țară);

f) cîte 50 de puncte de fiecare elev reușit la etapa finală;

g) cîte 50 de puncte de fiecare elev care obține premiu sau mențiune pentru activitatea sa la G.M.F.-B. pe anul 1961 ;

h) cîte 5 puncte de fiecare ședință de cerc de matematică sau de fizică ținută între 15 octombrie 1960 și 15 iunie 1961 ;

i) cîte 2 puncte de fiecare abonat la G.M.F.-B. pe anul 1961 pînă la 15 iunie a. c. ;

2. Înscrierea la întrecere urmează să fie făcută de profesorii sau elevii conducători de cercuri pînă la 1 iunie 1961, la care se va alătura fișa mai sus menționată, cuprinzînd punctele b, c, d, e, f, h, i.

3. Fișa cu punctajul obținut de școala medie respectivă, va purta viza direcției cu ștampila școlii și va fi înaintată redacției G.M.F.-B. pînă la 23 decembrie 1961 ; ea va cuprinde : totalul de puncte obținut în cele 12 numere.

4. Completarea fișei cu punctul g) și verificarea ei va fi făcută de către redacția G.M.F.-B.

5. Pentru clasificarea școlilor, numărul total de puncte rezultat va fi împărțit la numărul de clase a VIII-a, a IX-a, a X-a reală și a XI-a reală, din școala respectivă.

6. Rezultatul acestei întreceri se va publica în G.M.F.-B. De asemenea se vor publica și dări de seamă despre activitatea extrașcolară la matematică și fizică a unor școli medii înscrise la întrecere.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 4025

Cinci kg calcar cu un conținut de 80% carbonat de calciu se tratează cu o soluție de 10% HCl. Gazul care rezultă este condus într-o soluție 0,5 molară de NaOH. Se cere :

a) *Scrierea reacțiilor ;* b) *volumul soluției 10% de HCl necesar în reacție ;* c) *volumul gazului rezultat din reacție ;* d) *volumul soluției 0,5 molară de NaOH care absoarbe complet gazul.*

Mase atomice : $Ca = 40$; $C = 12$, $Cl = 35{,}5$; $Na = 23$.

Inst. Politehnic București examen de admitere 1959

Soluție dată de *Stan Mircea*, s.m. 1 București.

a) $CaCO_3 + 2HCl = CO_2 + CaCl_2 + H_2O$

$CO_2 + 2NaOH = Na_2CO_3 + H_2O$

b) Cele cinci kilograme de calcar conțin $5000 \cdot 0{,}8 = 4000$ kg carbonat de calciu.

Din reacția întîi se vede că 1 mol de $CaCO_3$ (100 g) reacționează cu 2 moli HCl (73 g). Rezultă că pentru cele 4000 g de $CaCO_3$ sînt necesare $\frac{4000 \times 73}{100} = 2920$ g de *HCl*.

Deoarece soluția de *HCl* este de 10% rezultă că cele 2920 g necesare se află în $\frac{2920 \times 100}{10}$ adică 292 l.

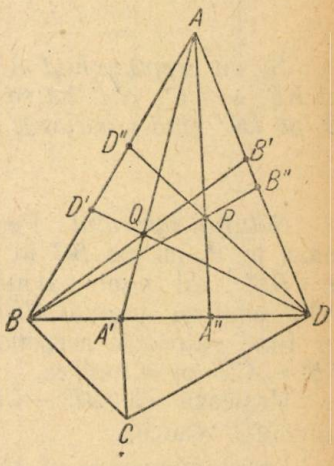
c) Tot din reacția întîi se vede că un mol de $CaCO_3$ (100 g) dă naștere la 1 mol de CO_2, care în condiții normale ocupă 22,4 *l*. Se calculează ușor că din 4000 g, $CaCO_3$ rezultă 896 *l* de CO_2.

d) Reacția a doua arată că 2 moli de NaOH, (80 g) absorb 1 mol de CO_2, (22,4 *l*). Deci, 896 *l* de CO_2 sînt absorbiți de 80 moli. Soluția de *NaOH* fiind 0,5 molară, rezultă că 80 de moli se află în $\frac{80}{0,5} = 160$ litri.

Problema 4061

Să se demonstreze că pe laturile AD, AB ale patrulaterului ABCD se găsesc perechile de puncte B', B'' respectiv D', D'' astfel încît triunghiul BCD să fie echivalent cu fiecare din triunghiurile ACB', ACD', CDB'', CBD''. Dacă se notează cu Q și P intersecțiile (BB', DD') și cu (BB'', DD'') și cu A' intersecția (BD, AQ) atunci A'C este paralelă cu AP.

Gh. Buicliu



Soluție: Completăm paralelogramul *BCDP* și notăm cu *B''*, *D''* intersecțiile (*BP*, *AD*), (*DP*, *AB*). Observăm că

$$\text{aria tr. } BCD = \text{aria tr. } CB''D \qquad (1)$$

ca avînd bază comună *CD* și aceeași înălțime. Fie izotomicul *B'* al lui *B''* pe *AD*, (*AB''* = *DB'*, sau ceea ce este tot una *AB'* = *DB''*), Triunghiurile *ACB'* și *CDB''* avînd aceeași înălțime și bazele egale sînt echivalente și ținînd seama de (1) rezultă:

$$\text{aria tr. } BCD = \text{aria tr. } ACB' = \text{aria tr. } CDB''.$$

Intersecția *D''* a lui *DP* cu *AB* și izotomicul *D'* al lui *D''* pe *AB* determină triunghiurile *CBD''*, *ACB'* care sînt echivalente între ele și echivalente cu *BCD*.

Punctele *P* și *Q* sînt prin construcție intersecțiile a două ceviene izotermice, deci, dacă *A''* este intersecția (*BD*, *AP*) atunci *BA'* = *DA''* și din paralelogramul *BCDP* se vede că *BC* = *DP* și $\sphericalangle CBA' = \sphericalangle A''DP$. Deci triunghiurile *BCA'*, *DPA''* sînt egale și prin urmare tr. *BA'C* = tr. *DA''P*, ceea ce arată că *A'C* este paralelă cu *A''P*.

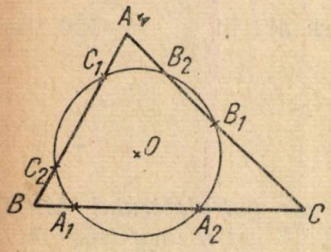
Problema 4083

Dacă se notează cu A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2; punctele în care un cerc oarecare (O) taie respectiv laturile BC, CA, AB ale triunghiului ABC, atunci avem relația:

$$\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{A_2B}{A_2C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{B_2C}{B_2A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} \cdot \frac{C_2A}{C_2B} = 1$$

* * *

Soluție: Se observă că



$$A_1B \cdot A_2B = C_1B \cdot C_2B,$$
$$B_1C \cdot B_2C = A_1C \cdot A_2C \text{ și}$$
$$C_1A \cdot C_2A = B_1A \cdot B_2A$$

ca fiind puterile vîrfurilor triunghiului în raport cu cercul 0.

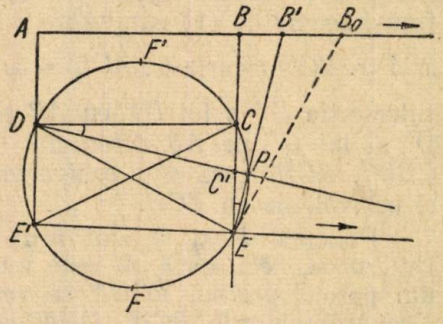
Proprietatea este astfel evidentă, căci fiecare produs de doi termeni de la numărător este egal cu unul din produsele de la numitor. S-au primit multe soluții bune.

Problema 4085

Se dă dreptunghiul ABCD. Se prelungesc laturile AB și BC respectiv cu BB′ = CC′ = l. Să se găsească locul geometric al proiecției punctului B′ pe DC′ cînd l variază.

Emil Morțun, Pitești

Soluția autorului: Perpendiculara coborîtă din B' pe DC' o intersectează în P, iar pe BC în punctul E. Triunghiurile dreptunghice DCC' și EBB' sînt egale avînd unghiul CDC' egal cu unghiul BEB', laturile lor fiind respectiv perpendiculare, și $BB' = CC'$ prin ipoteză.



Urmează că $BE - CD$ și deci puntcul E este fix.

Locul geometric al punctului P este pe cercul descris pe segmentul DE ca diametru.

Nu toate punctele acestui cerc fac parte din locul geometric. În E ridicăm perpendiculara EB_0 pe ED, care taie pe AB în B_0. Cînd B' se deplasează între B și B_0, P descrie arcul de cerc CPE. Cînd B' se depărtează mereu pe AB, dincolo de B_0, la limită, EB' devine EE'; C' se depărtează necontenit pe BC și la limită, DC' devine DE'; în acest caz punctul P se confundă cu E'. Deci, cînd B' se depărtează dincolo de B_0, punctul P descrie arcul EFE'. Așadar, punctele cercului care corespund locului geometric sînt punctele de pe arcul de cerc CEE'. Celelalte puncte ale cercului, adică arcul $E'DF'C$ corespund cazului cînd punctele B' și C', în loc să fie luate pe prelungirile laturilor AB și BC ar fi luate în interiorul lor.

Problema 4092

Să se calculeze fără tabele:

$$\frac{1}{2 \sin 10^\circ} - 2 \sin 70^\circ$$

c. d. p.

Soluția I. Avem:

$$\frac{1}{2 \sin 10^\circ} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 10^\circ} = \frac{3 \sin 10^\circ - 4 \sin^3 10^\circ}{\sin 10^\circ} =$$

$$= 3 - 4 \sin^2 10^\circ = 3 - 4 (1 - \cos^2 10^\circ) = -1 + 4 \cos^2 10^\circ$$

și având în vedere că $1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$;

$$\frac{1}{2 \sin 10^\circ} = -1 + 2 (1 + \cos 20^\circ) = 1 + 2 \cos 20^\circ.$$

Deci expresia dată devine:

$$\frac{1}{2 \sin 10^\circ} - 2 \sin 70^\circ = 1 + 2 \cos 20^\circ - 2 \cos 20^\circ = 1$$

Soluția II. Înlocuind în identitatea cunoscută:

$$2 \cos y \sin x = \sin (x + y) + \sin (x - y)$$

pe $x = 10^0$ și $y = 20^0$, deducem

$2 \cos 20^\circ \sin 10^\circ = \sin 30^\circ - \sin 10^\circ$, de unde

$\frac{1}{2 \sin 10^\circ} = 1 + 2 \cos 20^\circ$. Astfel expresia dată, se poate scrie

$$\frac{1}{2 \sin 10^\circ} - 2 \sin 70^\circ = 1 + 2 \cos 20^\circ - 2 \cos 20^\circ = 1$$

Problema 4097

Un trapez dreptunghic are baza mare $BC = 6$ cm, baza mică $AD = 3$ cm, unghiurile drepte în A, B iar $AB = 4$ cm.

a) *Să se calculeze perimetrul trapezului.*

b) *Pe diagonala BD se ia punctul E astfel încît segmentul ED să fie 2/5 din BD. Perpendiculara ridicată în E pe dreapta BD întîlnește dreapta AD în F. Să se arate că triunghiurile ABD și DEF sînt asemenea și să se calculeze lungimea segmentului EF.*

c) *Să se calculeze distanța punctului E la dreapta BC.*

(La admitere în Inst. Politehnic București)

Soluție. a) Fie M piciorul perpendicularei din D pe BC. Avem:

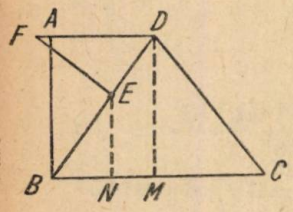
$$CD = \sqrt{DM^2 + MC^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ cm}$$

Perimetrul: $= 3 + 4 + 5 + 6 = 18$ cm.

b) $BD = CD = 5$ cm, deci $ED = 5 \cdot \frac{2}{5} = 2$ cm.

Triunghiurile ABD și DEF sînt asemenea deoarece au unghiul D comun, $\sphericalangle A = \sphericalangle E = 90^0$, deci au toate unghiurile egale.

Scriem proporționalitatea laturilor. Avem:



$$\frac{FE}{AB} = \frac{DE}{AD} \text{ sau } \frac{FE}{4} = \frac{2}{3}, \text{ de unde } FE = \frac{4 \cdot 2}{3} = \frac{8}{3} = 2,(6) \text{ cm.}$$

c) Din asemănarea triunghiurilor BEN și BDM rezultă: $\frac{EN}{DM} = \frac{BE}{BD}$

sau $\frac{EN}{4} = \frac{5-2}{5}$, de unde $EN = \frac{4 \cdot 3}{5} = \frac{12}{5} = 2{,}4$ cm.

— Soluții bune au dat: *Gh. Gladcenko*, cl. XI Codlea, *Elena Finţescu*, cl. X ş.m. 10 Bucureşti, *Ovidiu Tuţuianu*, abs. Bucureşti.

Problema 4098

Se dă un triunghi dreptunghic ABC cu unghiul $A = 90°$ și $AC = 2\,AB = 2\,a$. Se notează cu M mijlocul lui AC și se cere:

a) *să se împartă BC în cinci părți egale prin punctele D, E, F, G așa încît $BD = DE = EF = FG = GC$.*

b) *să se arate că triunghiurile MFC și BAC sînt asemenea;*

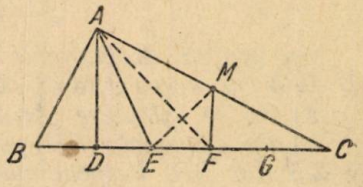
c) *să se calculeze aria patrulaterului $AEFM$.*

(La admiterea în Inst. Politehnic Bucureşti)

Soluție. Avem:

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = a\sqrt{5}$$

$$AD = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{a \cdot 2a}{a\sqrt{5}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$$



în care am notat cu D piciorul perpendicularei din A pe BC.

Din triunghiul dreptunghic ABD deducem:

$$BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{2a\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{5}$$

Cum $BC = a\sqrt{5}$ urmează că BD este a cincea parte din BC adică, $BD = \frac{BC}{5}$. Luînd BD în compas, împărțim BC în 5 părți egale.

b) Pentru ca triunghiurile BAC și MFC să fie asemenea trebuie să existe proporționalitatea:

$$\frac{FC}{AC} = \frac{MC}{BC} \quad \text{sau} \quad \frac{2a\sqrt{5}}{10a} = \frac{a}{a\sqrt{5}}$$

Identitatea de mai sus fiind adevărată, urmează că triunghiurile BAC și MFC sînt asemenea.

c) Avînd în vedere că perpendiculara AD este mediatoarea segmentului BE (din construcție) rezultă că triunghiul BAE este isoscel.

Avem: $AB = AE = a$; $AM = a$; $EF = MF = \frac{a\sqrt{5}}{5}$. Deci patrulaterul $AEFM$ este ortodiagonal.

$$S = \frac{1}{2} AF \cdot EM; \quad EM = \sqrt{\frac{10a^2}{25}} = a\sqrt{\frac{2}{5}}; \quad AF = a\sqrt{\frac{8}{5}}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{\frac{2}{5}} \cdot a\sqrt{\frac{8}{5}} = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{2a^2}{5}$$

— Soluții bune au dat: *Gh. Gladcenko*, cl. XI Codlea, *Elena Fințescu*, cl. X ș.m. 10 București, *Ovidiu Țuțuianu*, abs. București.

Problema 4099

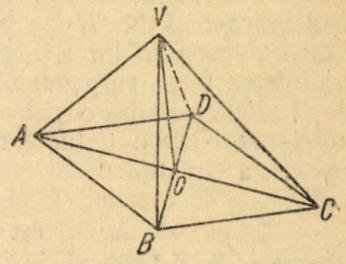
O piramidă are vîrful în V și ca bază rombul $ABCD$. Știind că diagonalele bazei sînt de 8 cm și 6 cm și că se întîlnesc în punctul O, iar înălțimea piramidei este $VO = 4$ cm, să se calculeze:

a) *Volumul piramidei*; b) *lungimile muchiilor*; c) *A și C fiind capetele diagonalei mari ale bazei să se arate că dreptele AV și CV sînt perpendiculare între ele.*

(La admitere în Ist. Politehnic București)

Soluție. a) $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{AC \cdot BD}{2} \cdot VO =$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{8 \cdot 6}{2} \cdot 4 = 32 \text{ cm}^3$.



b) Din triunghiul dreptunghic VOC deducem:

$$VC = \sqrt{VO^2 + OC^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \text{ cm}.$$

La fel din triunghiul dreptunghic VOB deducem:

$$VB = \sqrt{OV^2 + OB^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}.$$

Deci, $AV = VC = 4\sqrt{2}$ cm și $VB = VD = 5$ cm.

c) Avînd în vedere că laturile VO și OC sînt egale ($VO = OC = 4$ cm) și cum unghiul VOC este drept urmează că $\sphericalangle OVC = \sphericalangle VCO = 45°$.

La fel, $\sphericalangle OAV = \sphericalangle AVO = 45°$. Deci: $\sphericalangle AVO + \sphericalangle CVO = 45° + 45° = 90°$, adică AV și CV sînt perpendiculare între ele.

— Soluții bune au dat: *Gh. Gladcenko*, cl. XI Codlea, *Ovidiu Țuțuianu*, *abs.* București.

Problema 4108

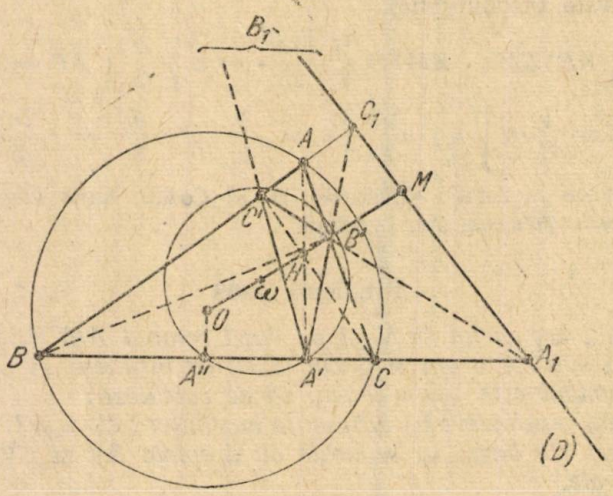
Să se construiască un triunghi cînd se dă axa ortică, ortocentrul și picioarele medianei și înălțimii corespunzătoare unei aceleiași laturi.

Rădulescu Mircea, elev Constanța

Soluția autorului. Axa ortică a unui triunghi este axa radicală a cercului circumscris și cercului lui Euler.

Prin urmare, ea este perpendiculară pe dreapta lui Euler a triunghiului.

Fie date: axa ortică (D), ortocentrul H și punctele A' și A'' care sînt respectiv piciorul înălțimii și medianei corespunzătoare laturii BC a triun-



ghiului ABC ce trebuie construit. Este evident că trebuie să avem $HA' \perp A'A''$. Conform cu proprietatea enunțată mai sus este clar că pe perpendiculara dusă din H pe (D) se vor găsi centrul cercului circumscris (O) și centrul cercului lui Euler (ω). Ducem mediatoarea segmentului $A'A''$, care intersectează perpendiculara în H pe (D) în ω. Simetricul lui H față de ω este O. Raza cercului circumscris triunghiului căutat este $R = 2\omega A' = 2\omega A''$, dublul razei cercului lui Euler. Ducem cercul de rază R și centru O. Intersecția cercului O cu HA' ne dă punctul A, iar intersecția cercului O cu $A'A''$ ne dă punctele B și C. Problema are o soluție.

— Soluții bune au mai dat: *Ovidiu Țuțuianu*, abs. București, *Al. Ionescu*, student Timișoara și *N. Murăreci*, cl. XI Curtea de Argeș, *Gh. Cezar*, Buzău, *N. Popa*, Focșani, *Victor Olteanu*, ș.m. 17 București și *D. Ene*, elev Ploești.

Problema 4113

Dîndu-se segmentul a, să se construiască expresia

$$x = \frac{a\sqrt{2\sqrt{2}}}{\sqrt{2\sqrt{2}+1}}$$

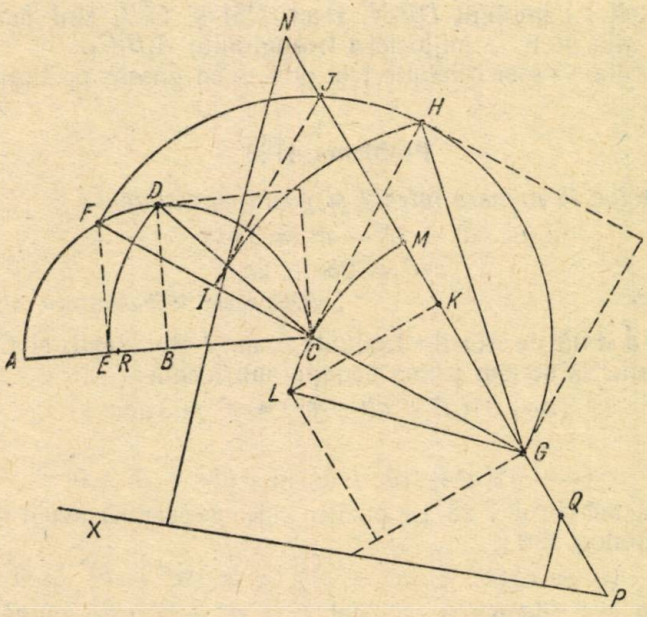
Gh. Popescu, profesor Lugoj

Soluția autorului. Scriem succesiv:

$$x = \frac{a\sqrt{2\sqrt{2}}}{\sqrt{2\sqrt{2}+1}} = \frac{\sqrt{2a\cdot a\sqrt{2}}}{\sqrt{2\sqrt{2}+1}} = \frac{b}{\sqrt{2\sqrt{2}+1}} = \frac{b\left(\sqrt{2\sqrt{2}}-1\right)}{2\sqrt{2}-1} =$$

$$= \frac{\sqrt{2b\cdot b\sqrt{2}}-b}{2\sqrt{2}-1} = \frac{c}{2\sqrt{2}-1} = \frac{c(2\sqrt{2}+1)}{7} = \frac{2c\sqrt{2}+c}{7} = \frac{d}{7}$$

Construcția este următoarea:



Avem:

$AB = a$; $CD = a\sqrt{2}$; $CF = b$; $FG = 2b$; $GH = GI = b\sqrt{2}$; $GJ = \sqrt{2b \cdot b\sqrt{2}}$;

$JK = b$; $GK = c$; $GL = GM = c\sqrt{2}$; $GN = 2c\sqrt{2}$; $NP = d$; $PQ = AR = \frac{d}{7} = x$.

Problema 4119

Să se construiască un triunghi ABC cunoscînd diametrul cercului circumscris, distanța de la ortocentru la una din laturi și diferența unghiurilor alăturate acestei laturi. Înălțimile mai taie cercul respectiv în A_1, B_1 C_1. Fie D proiecția lui A, pe paralela dusă prin B_1 la AC, G proiecția lui A_1 pe paralela dusă prin C_1 la AB, F proiecția lui A_1 pe înălțimea din B și E proiecția lui A_1 pe înălțimea din C. Să se arate că punctele D, E, F, G sînt coliniare.

Dan Stoichescu, elev București

Soluția: Se desenează cercul de diametru dat și se construiește în acest cerc un triunghi dreptunghic AA_1A_2 al cărui unghi ascuțit este egal

cu diferența dată (AA_2 fiind ipotenuză). Pe cateta AA_1 se ia distanța A_1H_a egală cu distanța de la ortocentru la latură. În H_a se duce o perpendiculară pe cateta AA_1 care taie cercul în punctele B și C. Triunghiul obținut este cel cerut de problemă, deoarece:

$\sphericalangle A_1AA_2 = B - C$, $(C - B)$ și $H_aA_1 = HH_a$, proprietăți cunoscute.

Înălțimile sînt bisectoare în triunghiul $A_1B_1C_1$. Paralelele la AB și AC duse din C_1 și B_1 sînt bisectoare exterioare ale triunghiului $A_1B_1C_1$. Notăm cu M mijlocul lui A_1B_1. În triunghiul dreptunghic A_1B_1D mediana DM este egală cu jumătatea ipotenuzei. Deci, triunghiul B_1MD este isoscel, deci $\sphericalangle MB_1D = \sphericalangle MDB_1$. Însă, OB_1 fiind bisectoarea unghiului din B_1, unghiul MDB_1 este egal cu unghiul DB_1N. Deci, DM și C_1B_1 sînt paralele. Prin urmare, D se află pe linia mijlocie a triunghiului $A_1B_1C_1$.

Analog arătăm că și celelalte trei puncte se găsesc pe linia mijlocie a triunghiului.

Problema 4126

Să se rezolve în numere întregi și pozitive, sistemul:

$$a^3 - b^3 - c^3 = 3abc$$
$$a^2 = 2b + 2c.$$

(Olimpiada 1959 Moscova, cl. VIII-a)

Soluția I-a dată de Mazilu Ludmila, ș.m. 7 București, și *C. Vasilescu* profesor Ploești. Să scriem prima ecuație sub forma:

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) - c^3 = 3abc$$

sau:

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = 3abc + c^3 > 0$$

Pentru ca membrul I să fie pozitiv este necesar să avem $a > b$.

În mod analog, din:

$$(a - c)(a^2 + ac + c^2) = 3abc + b^3 > 0$$

deducem că $a > c$ (deoarece factorul $a^2 + ac + c^2$ este număr natural).

Deducem imediat că

$$2a > b + c$$

Din ecuația

$$a^2 = 2(b + c)$$

rezultă că a este divizibil cu 2, deci a este număr par, par pe de altă parte obținem $a^2 < 4a$ sau $a < 4$ și singurul număr natural par mai mic decît 4 este $a = 2$.

Mai rezultă: $b + c = 2$ și fiindcă b și c sînt numere naturale avem $b = 1$, $c = 1$.

Soluția sistemului este deci: $a = 2$; $b = c = 1$.

Soluția II-a dată de elevi: *C. Năstăsescu*, Pucioasa și *C. Tarnu*, Blaj. Se știe că $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$, dacă $a + b + c = 0$, de asemenea dacă avem $a^3 - b^3 - c^3 = 3abc$ rezultă $a - b - c = 0$.

Sistemul de ecuații dat devine:

$$a^2 = 2(b + c) \text{ și } a = b + c$$

de unde,

$$a = b + c = 2$$

Pentru numere întregi rezultă $a = 2$, $b = 1$, $c = 1$ și cazul banal $a = 2$, $b = 0$, $c = 2$.

Dacă vrem să rezolvăm sistemul în numere întregi fără a fi toate numere pozitive, obținem $a = 2$, $b = n$ și $c = 2 - n$, unde n este întreg.

Pentru $n = 1$, atunci a, b, c, sînt toate întregi și pozitive.

Soluția III dată de *Gh. Cezar*, elev Buzău. Se cunoaște identitatea: $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$.

Înlocuind pe $x = a$, $y = -b$, $z = -c$ se obține:

$$a^3 - b^3 - c^3 - 3abc = (a - b - c)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac - bc) =$$
$$= (a - b - c)[a^2 + (b - c)^2 + ab + ac + bc)]$$

Din enunț rezultă:

$$a^3 - b^3 - c^3 - 3abc = 0 \text{ și } a > 0,\ b > 0,\ c > 0.$$

Deci: $a^2 + (b - c)^2 + ab + ac + bc > 0$. Rezultă că: $a - b - c = 0$; $a = b + c$.

Dar: $a^2 = 2b + 2c$; $a^2 = 2a$; $a(a - 2) = 0$. $a = 0$ nu convine. Deci $a = 2$. Rezultă: $b + c = 2$ și $b = 1$, $c = 1$, numerele b și c fiind întregi și pozitive. Deci convine: $a = 2$, $b = 1$, $c = 1$, numere întregi pozitive diferite de zero.

Problema E: 1499

Să se găsească un enunț concret astfel încît rezolvarea problemei să fie dată de relațiile de mai jos:

$$300 \times 3 = 900; \quad 400 \times 2 = 800$$
$$900 + 800 = 1700$$
$$2000 - 1700 = 300$$

Alexandru Stoenescu

Soluțiile autorului: a) O persoană pleacă după tîrguieli cu 2 000 lei. Ea cumpără 3 metri de stofă cu 300 lei metrul și 2 metri de catifea cu 400 lei metrul. Cu cîți lei s-a înapoiat acasă?

b) O persoană depune la C.E.C. în trei rînduri cîte 300 lei și în două rînduri cîte 400 lei. Cît îi mai lipsește pentru a putea cumpăra un obiect în valoare de 2 000 lei?

S-au primit foarte multe soluții bune.

Problema E: 1500

Să se găsească cifrele înlocuite prin x în înmulțirea:

$$\begin{array}{r} 4\,x\,x \\ x\,2\,x \\ \hline x\,x\,4\,x \\ x\,1\,2 \\ x\,3\,x\,x \\ \hline x\,x\,x\,x\,x\,8 \end{array}$$

Stelian Lambă, profesor Tuzla

Soluția autorului: Cifra zecilor de 2 de la înmulțitor înmulțită cu cifra unităților de la deînmulțit trebuie să ne dea un număr terminat cu cifra 2. Observăm că din cifrele existente numai cifrele 1 și 6 înmulțite cu cifra 2 ne dă numere terminate cu cifra 2. Pe care din cifrele 1 și 6 o vom pune în locul cifrei unităților de la deînmulțit? Răspunsul la această întrebare se obține observînd mai departe că rezultatul înmulțirii dintre cifra zecilor 2 de la înmulțitor și cifra zecilor de la deînmulțit este un număr terminat cu cifră fără soț, ceea ce dovedește clar, că în el se includ și zecile primite din sînul unităților de ordinul I. Deci, în locul cifrei unităților de la deînmulțit punem cifra 6. Se constată că dintre rezultatele produselor dintre cifra 2 și celelalte cifre existente adunate fiecare cu 1, convine doar $2.5 + 1 = 11$. Deci, în locul cifrei zecilor de la deînmulțit punem cifra 5.

In continuare, observăm că cifra unităților 6 de la deînmulțit înmulțită cu cifra unităților de la înmulțitor trebuie să ne dea un număr terminat cu cifra 8. Din cifrele existente numai cifrele 3 și 8 înmulțite cu cifra 6 ne dă numere terminate cu cifra 8. Pe care din aceste cifre o vom pune în locul cifrei de la înmulțitor de la unități? Pe cifra 8, căci convine $8.6 = 48$ și $8.5 + 4 = 44$.

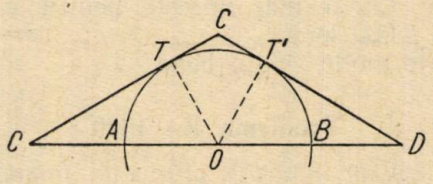
Deducem că cifra sutelor de la înmulțitor este 3, căci numai ea este singura dintre toate celelalte cifre existente care poate crea prin înmulțire cu deînmulțitul un număr în care cifra sutelor să fie cifra 3.

Acum, iată cum arată înmulțirea:

$$\begin{array}{r} 456 \\ 328 \\ \hline 3648 \\ 912 \\ 1368 \\ \hline 149568 \end{array}$$

Problema E: 1504

Să se demonstreze că tangentele duse la un cerc din două puncte exterioare cercului, simetrice față de centrul cercului și așezate fiecare



la o depărtare de centru egală cu diametrul cercului, formează la intretăierea lor un unghi egal cu $1\frac{1}{3}$ *dr., iar punctele de contact ale tangentelor împart cercul în două arce al căror raport este egal cu* $\frac{1}{5}$.

Florea I. Dumitrescu, Valea Stanciului reg. Craiova

Soluția autorului: Triunghiurile OTC și $OT'D$ sînt dreptunghice egale, fiindcă au ipotenuzele și cîte o catetă respectiv egale. Atunci $\sphericalangle C = \sphericalangle D = 30^0$ (catetele opuse lor sînt egale cu jumătatea ipotenuzei). Rezultă că triunghiul CED este isoscel în care

$$\sphericalangle E = 120^0 = 1\frac{1}{3}\,dr.,\ \text{iar}\ \frac{arc\ TT'}{arc\ TABT'} = \frac{60^\circ}{300^\circ} = \frac{1}{5}.$$

Problema E : 1505

Dacă A, B, C, D sînt numere întregi care satisfac relațiile:

$$1956.\ A - 1957.\ B + 1958.\ C - 1959.\ D = \mathfrak{M}\ 1960$$

și

$$1885.\ A - 2028.\ B + 1887.\ C - 2030.\ D = \mathfrak{M}\ 1960,$$

atunci avem și $A + B + C + D = \mathfrak{M}\ 1960$.

D. Bătinețu

Soluția autorului: Dacă din prima relație de condiție scădem pe a doua obținem:

$$71.\ (A + B + C + D) = \mathfrak{M}\ 1960 \quad \text{(multiplu de 1960)}$$

Cum numerele 71 și 1960 sînt prime între ele rezultă că neapărat

$$A + B + C + D = \mathfrak{M}\ 1960$$

Problema E : 1545

O G.A.C. termină prășitul porumbului în 4 zile. Știind că în prima zi a prășit $\frac{1}{5}$ *din toată suprafața, în a doua zi* $\frac{3}{8}$ *din rest, în a treia zi* $\frac{5}{8}$ *din noul rest, iar în a patra zi restul, să se afle suprafața totală cultivată cu porumb și cît a prășit în fiecare zi, dacă în a treia zi a prășit cu 3 ha mai mult ca în a doua zi.*

I. Albescu, Făgăraș

Soluție. $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ din toată suprafața a rămas după ce a prășit în prima zi;

$\frac{4}{5} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{10}$ din toată suprafața a prășit în a doua zi;

$\frac{4}{5} - \frac{3}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ a rămas după a doua zi;

$\frac{1}{2} \times \frac{5}{8} = \frac{5}{16}$ din toată suprafața a fost prășită în a treia zi;

$\frac{1}{2} - \frac{5}{16} = \frac{3}{16}$ din toată suprafața a prășit în a patra zi;

$\frac{5}{16} - \frac{3}{10} = \frac{25-24}{80} = \frac{1}{80}$ din toată suprafața a prășit în a treia zi mai mult decît în a doua zi;

$3 : \frac{1}{80} = 3 \times 80 = 240$ ha suprafața totală cultivată cu porumb;

$240 \times \frac{1}{5} = 48$ ha a prășit în prima zi;

$240 \times \frac{3}{10} = 72$ ha a prășit a doua zi;

$240 \times \frac{5}{16} = 75$ ha a prășit a treia zi;

$240 \times \frac{3}{16} = 45$ ha a prășit a patra zi.

Problema E : 1551

În triunghiul ABC bisectoarele unghiurilor B și C se taie în D. Paralelele duse din B și C la bisectoare întîlnesc prelungirile laturilor AB și AC în E, respectiv F. Se notează cu M intersecția lui CE cu BF.

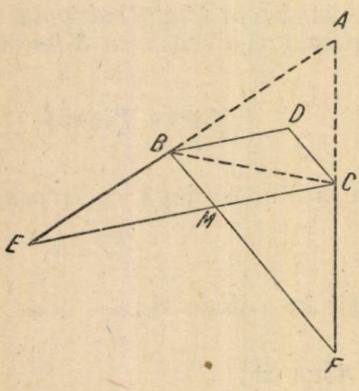
a) *Să se demonstreze că BE = CF;*

b) *Să se calculeze unghiurile triunghiului dat și cele ale paralelogramului BDCM în cazul cînd* $\sphericalangle E = 19° 16'$ *și* $\sphericalangle F = 39° 14'$.

Rodica Bazacov, elevă Tr. Severin

Soluție. — a) Pentru a demonstra că $BE = CF$ trebuie să dovedim că triunghiurile BEC și BCF sînt isoscele.

$\sphericalangle ABD = \sphericalangle BEC$ ca unghiuri corespondente, $\sphericalangle DBC = \sphericalangle BCE$ ca unghiuri alterne interne, iar $\sphericalangle ABD = \sphericalangle DBC$ ca formate prin ducerea bisectoarei unghiului B.



Deci, $\sphericalangle BEC = \sphericalangle BCE$ și triunghiul BEC este isoscel.

Atunci : $BE = BC$.

În mod analog se arată — folosind paralele $CD = BF$, precum și bisectoarea unghiului C, că triunghiul BCF este isoscel, deci $CF = BC$.

Deoarece $BE = BC$ și $CF = BC$ rezultă că $BE = CF$.

b) $\sphericalangle BEC = \sphericalangle ABD = \sphericalangle DBC = 19° 16'$ deci

$\sphericalangle ABC = 19° 16' \times 2$, $\sphericalangle ABC = 38° 32'$

$\sphericalangle CFB = \sphericalangle ACD = \sphericalangle DCB = 39° 14'$, deci $\sphericalangle ACB = 39° 14' \times 2 = 78° 28'$

$\sphericalangle A + \sphericalangle ABC + ACB = 180°$; $\sphericalangle A = 180° - (\sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB) = 63°$

$\sphericalangle DBM = \sphericalangle DBC + \sphericalangle CBM = \sphericalangle DBC + \sphericalangle F = 19° 16' + 39° 14' = 58° 30'$

Unghiurile opuse în paralelogram sînt egale:

$$\sphericalangle DBM + \sphericalangle DCM = 58° 30'$$

Unghiurile alăturate în paralelogram sînt suplimentare:

$$\sphericalangle DBM + \sphericalangle BDC = 180°; \quad BDC = 180° - 58° 30' = 121° 30'.$$

Problema E : 1552

La consfătuirea de la Constanța s-a spus: „Sarcina pe tractor convențional va spori de la 340 ha arătură normală la 430 ha arătură normală, în 1960".

Să se exprime în procente cu cît își va mări productivitatea fiecare tractor convențional.

x x x

Soluție: În 1960 fiecare tractor își va mări productivitatea cu $430 - 340 = 90$ ha arătură normă.

În procente cu:

$$\frac{90}{340} = \frac{x}{100} \quad \text{de unde:} \quad x = \frac{900}{34} = \frac{450}{17} = 26\frac{8}{17}\%$$

PROBLEME PROPUSE *)

4544. Se dă un patrulater $ABCD$ și un punct E în planul său. Fie G și H două puncte oarecare pe BE și respectiv DE. Fie $M \equiv (AG;BC)$; $N \equiv (CG;AB)$; $P \equiv (AH;CD)$; $Q \equiv (CH;AD)$ și $F \equiv (MN;PQ)$.

Să se arate că, dacă punctele A,C,E, sînt coliniare, atunci și punctele A,C,F sînt coliniare.

Ene P. Dumitru, elev Ploești

4545. Să se afle cea mai mare și cea mai mică valoare reală pe care o poate lua fiecare din funcțiile:

$$z_1 = x\sqrt{a - x^2} + y\sqrt{b^2 - y^2},$$
$$z_2 = x\sqrt{a^2 - y^2} + y\sqrt{a^2 - x^2},$$
$$z_3 = x\sqrt{a^2 - y^2} - y\sqrt{a^2 - x^2},$$
$$z_4 = x\sqrt{y^2 - a^2} - y\sqrt{x^2 - a^2},$$
$$z_5 = x\sqrt{y^2 - a^2} + y\sqrt{a^2 - x^2},$$

unde a și b sînt constante iar x și y variabile.

Discuție.

C. Ionescu-Țiu

* VIII (4547, 4548, 4554, 4561); IX (4546, 4551, 4552, 4555, 4556, 4564, 4566, 4567, 4570, 4571); X (4549, 4553, 4557, 4559, 4560, 4563, 4565, 4568, 4572); XI (4544, 4545, 4558, 4562, 4569, 4573, 4574).

4546. Să se demonstreze că într-un triunghi ABC, cercul circumscris triunghiului ortic împarte segmentele AH, BH, CH, în același raport, notațiile fiind cele obișnuite.

* * *

4547. Să se rezolve ecuația:

$$(x^2-3x+1)(x^2+3x+2)(x^2-9x+2a)+30=0$$

Maftei Ion, student Iași

4548. O mașină centrifugă de laborator are diametrul roții de acționare normală de 20 cm, iar diametrul roții conduse prin intermediul unei curele de către roata de acționare de 4 cm. Presupunînd că pe axul solidar cu roata mică se fixează un regulator centrifugal ale cărui bile cîntăresc fiecare cîte 80 gf, iar lungimea fiecărei tije care unește centrul fiecărei bile cu extremitatea axului regulatorului este de 6 cm, să se determine:

a) turația cu care este rotită roata de acționare a mașinii, neglijînd masa manșonului de glisare ca și rezistența aerului, știind că unghiul α pe care-l face tija cu axa de rotație este de 45^0.

b) Valoarea forței centrifuge în kgf, care acționează asupra bilelor considerînd că $g=9{,}8$ m/s^2.

Romulus Sfichi

4549. Un aparat de iluminat în formă de glob din sticlă lăptoasă cu diametrul de 10 cm, are intensitatea luminoasă în direcția axului vertical de 65 cd. Se cere:

a) Să se determine strălucirea aparatului de iluminat.

b) Să se calculeze iluminarea unui punct situat pe direcția axului vertical la distanța de 2,5 m de suprafața corpului de iluminat.

Sfichi Romulus, profesor, Fălticeni

4550. Frecvența sunetului dat de o sursă sonoră ce se mișcă cu viteza de 61,2 km/h este identică cu aceea a sunetului produs de o coardă sonoră de 5 m. Știind că temperatura aerului este de 16°C să se afle care este frecvența sunetului percepută de un observator ce se apropie de sursă cu viteza de 7,2 km/h? Ce se va întîmpla cu frecvența sunetului pe care o percepe observatorul, dacă el se depărtează de sursă cu aceiași viteză de 7,2 km/h?

Mihail Vasilescu, Cîmpulung Muscel

4551. Să considerăm ca operație acel procedeu de calcul cu ajutorul căruia din numerele a și b găsim numărul $c=a+b+ab$. Să numim această operație, operația de steluța și să notăm $a * b=c$. Să se rezolve ecuația $a * x=c$. Să se arate că: a) Există cel mult un x, pentru care $a * x=0$. Dacă există acest număr să-l notăm cu a', deci $a * a'=0$; b) Să se arate că $(a')'=a$, deci, dacă aplicăm lui a' încă o dată virgula, în general obținem chiar numărul inițial; c) Să se arate că $(a * b)'=a' * b'$; și $(a' * b)'=a * b'$, iar $(a' * b')=a * b$.

d) Să se reprezinte funcția $y=x'$.

(L'Éducation Mathématique, Paris)

4552. Fie M punctul de intersecție al diagonalelor patrulaterului inscriptibil $ABCD$. Cercurile ABM și ADM intersectează a doua oară laturile BC și CD respectiv în F și E. Să se arate că punctele $E,M,F,$ sînt coliniare.

* * *

4553. Să se reprezinte grafic funcțiile

$$y_1 = \sqrt{x+\frac{1}{8}+\sqrt{x-\frac{1}{8}}} + \sqrt{x+\frac{1}{8}+\sqrt{x-\frac{1}{8}}}$$

$$y_2 = \sqrt{x+\frac{1}{8}+\sqrt{x-\frac{1}{8}}} - \sqrt{x+\frac{1}{8}+\sqrt{x-\frac{1}{8}}}$$

Să se arate că pentru $\frac{1}{8} \leqslant x \leqslant \frac{3}{8}$ avem $y_1 = 1$, iar pentru $x \geqslant \frac{3}{8}$ avem $y_2 = 1$.

C. Ionescu-Țiu

4554. Pe un plan înclinat care se continuă cu o porțiune orizontală, alunecă cu frecare un corp greu de la înălțimea h. Însemnînd cu d proiecția lungimii l a planului pe orizontală și cu μ coeficientul de frecare, să se calculeze:

a) Viteza pe care o atinge corpul la baza planului înclinat. b) Lungimea drumului parcurs de corp pe porțiunea orizontală a planului pînă la oprire. c) Ce valoare ar trebui să aibă coeficientul de frecare, μ pentru ca alunecarea corpului pe planul înclinat să se facă uniform. d) Să se verifice soluțiile de la punctele a) și b) aplicînd relația dintre lucrul mecanic și variația energiei cinetice.

(Olimpiada 1960, cl. VIII, București)

4555. a) La un concurs de tir un concurent trage un glonte de plumb într-o placă de oțel. Ce viteză minimă trebuie să aibă glontele pentru a se topi cînd lovește placa de oțel, dacă numai 73% din căldura produsă la ciocnire este absorbită de glonte.

Să se arate că această viteză nu depinde de masa glontelui.

Se dau: temperatura glontelui $t^0_1 = 27^0C$, temperatura de topire a plumbului $t^0_2 = 327^0C$, căldura specifică a plumbului $c = 0{,}03$ cal/g. grd., căldura de topire a plumbului $\lambda = 5$ cal/g, echivalentul mecanic al caloriei $E = 4{,}18$ jouli/cal.

b) Care este greutatea aparentă a unui corp de masă m cufundat într-un lichid la temperatura t^0? Se notează cu ϱ_0 densitatea corpului la 0^0C, cu ϱ'_0 densitatea lichidului la 0^0C, cu γ coeficientul de dilatare cubică a corpului și cu k coeficientul de dilatare a lichidului.

(clasa a IX-a etapa finală, 1960, București)

4556. Să dă un triunghi în care o mediană este egală cu latura pe care cade. Știind că laturile acestui triunghi sînt exprimate prin numere întregi să se afle care sînt expresiile acestor laturi.

Popa Nicolae, elev Focșani

4557. Să se arate că:

$$1 \cdot C_n^1 + 2 \cdot C_n^2 + 3 \cdot C_n^3 + \ldots + k \cdot C_n^k = n(C_n^{k-1} + C_n^{k-3} + C_n^{k-5} + C_n^{k-7} + \ldots)$$

$$k \cdot C_n^k - (n+k-1)(C_n^{k-1} + (2n+k-2) C_n^{k-2} - (3n+k-3) C_n^{k-3} + (4n+k-4) C_n^{k-4} - (5n+k-5) C_n^{k-5} + \ldots = 0$$

Const. Năstăsescu, elev, Pucioasa

4558. Se consideră un triunghi ABC și parabolele de focare F_1, F_2, F_3. Parabola de focar F_1 este tangentă laturilor AC și AB în C și B.

Parabola de focar F_2, tangentă laturilor BA și BC în A și C, iar cea de focar F_3, tangentă laturilor CA și CB în C și B. Să se demonstreze că AF_1, AF_2, AF_3 sînt concurente.

Dan Burghelea, elev, R. Vîlcea

4559. Să se rezolve ecuația:

$$\sum_{k=0}^{p} \sin(n+k)\, x = \sum_{k=0}^{p} \cos(n+k)\, x$$

Masgras Vasile, elev, Iași

4560. Se dă un cerc O în care se ia coarda fixă AB. Se notează cu M un punct mobil pe arcul mai mare subîntins de AB și cu H punctul de intersecție al perpendicularelor în A și B pe MA și MB. Se duc prin A și B două drepte ce fac cu NA, respectiv NB, unghiuri egale cu NAB și NBA.

a) Să se afle locul geometric al intersecției P a celor două drepte duse prin A și B.

b) Considerînd că pe direcțiile mobile MA și MB se află două oglinzi plane, iar pe direcția AB o rază luminoasă ce se reflectă în A și B, să se afle unghiul format de razele reflectate în funcție de unghiul format de cele două oglinzi.

c) Să se deducă o metodă de calculare a unghiului de rotire a unei oglinzi plane.

Nicolescu Basarab, elev Ploești

4561. Să se arate că dacă $(a+b)(b+c)(c+a)=0$ atunci

$$\frac{(a+b+c)^{n+2} - (a+b+c)^3}{(a+b+c)^2 - 1} = \frac{a^{n+2} - a^3}{a^2 - 1} + \frac{b^{n+2} - b^3}{b^2 - 1} + \frac{c^{n+2} - c^3}{c^2 - 1}$$

pentru a,b,c, oarecare, iar n impar întreg și pozitiv.

Gabriel Tîrtan, absolvent, Găiești

4562. Se dau expresiile

$$E_1 = \left(1 + \frac{1}{n^4}\right)\left(1 + \frac{2^2}{n^4}\right)\left(1 + \frac{3^2}{n^4}\right) \ldots \ldots \left(1 + \frac{n^2}{n^4}\right),$$

$$E_2=\left(1-\frac{1}{n^4}\right)\left(1-\frac{2^2}{n^4}\right)\left(1-\frac{3^2}{n^4}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{n^2}{n^4}\right),$$

$$E_3=\left(1+\frac{1}{n^6}\right)\left(1+\frac{2^3}{n^6}\right)\left(1+\frac{3^3}{n^6}\right)\ldots\ldots\left(1+\frac{n^3}{n^6}\right),$$

$$E_4=\left(1-\frac{1}{n^3}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\left(1-\frac{3}{n^3}\right)\ldots\ldots\left(1+(-1)^n\frac{n}{n^3}\right).$$

Să ne arate că dacă n tinde către infinit, $E_1=E_2=E_3=E_4=1$.

C. Ionescu-Țiu

4563. Instalația unui ascensor funcționează cu un electromotor cu factorul de putere 0,9. Tensiunea rețelei este de 220 V, iar intensitatea curentului de 6,3 A. Cabina în greutate de 75 kg f se deplasează cu o viteză de 0,5 m/s. Știind că randamentul instalației este 85%, se cere încărcătura maximă ce poate fi ridicată.

Rădulescu Mircea, student, București

4564. Pe latura BC a unui triunghi oarecare ABC se ia punctul A_1 iar prin B și C se duc paralele la AA_1 care vor tăia pe AC și AB respectiv în B_2 și C_2. Fie $C_1\equiv(AB, A_1B_2)$, $B_1\equiv(AC, A_1C_2)$, $A_2\equiv(AA_1, B_2C_2)$; $\alpha\equiv(A_2C, A_1C_2)$, $\beta\equiv(A_1B_2, A_2B)$. Să se arate că:

1. Dreptele BB_1 și CC_1 se taie în mijlocul lui AA_1.
2. Dacă A_1 se mișcă pe BC atunci dreapta $\alpha\beta$ trece printr-un punct fix.
3. Dreptele BC, B_1C_1, B_2C_2 și $\alpha\beta$ sînt concurente.
4. Există relația:

$$\frac{1}{BB_2}+\frac{1}{CC_2}=\frac{2}{A_1A_2}.$$

Munteanu I. Ioan, student, Iași

4565. Se consideră tetraedrul echifacial $OABC$. Unghiurile diedre corespunzătoare muchiilor BC, CA, AB se notează cu α, β, γ; unghiurile triunghiului ABC se notează cu A,B,C. Să se demonstreze relațiile:

$$\text{a) } \sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\operatorname{cotg} B\operatorname{cotg} C};$$

$$\text{b) } \cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\cos A\operatorname{cosec} B\operatorname{cosec} C};$$

$$\text{c) } \cos^2\frac{\alpha}{2}=\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2};$$

$$\text{d) } \operatorname{tg}^2\frac{A}{2}=\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\sec\frac{1}{2}(\beta-\gamma).$$

În legătură cu problema 4003).

C. V. Costăchescu

4566. Căldura totală degajată în camerele de ardere ale unei rachete interplanetare este $Q=1762{,}36$ kMcal (G.M.F. - B, 1, 1960, p. 3).

Să se calculeze ce cantitate de gheață la temperatura de -6^0C se poate transforma în întregime în vapori cu această cantitate de căldură. Se dă căldura specifică a gheții $c_1=0{,}5\ \frac{\text{k cal}}{\text{kg. grd}}$ căldura latentă de topire a gheții $\lambda_1=80\ \frac{\text{k cal}}{\text{kg}}$ călduara specifică a apei $c_2=1\ \frac{\text{k cal}}{\text{kg. grd}}$, căldura de vaporizare a apei $\lambda_2=539\ \frac{\text{k cal}}{\text{kg}}$.

D. Bătinețu, Zimnicea

4567. Pe diametrul $MN=2a$ al unui semicerc dat se ia un punct P, iar pe segmentul $PM=2b$ și $PN=2c$, ca diametri, se construiesc două semicercuri în interiorul semicercului dat. Notînd cu x raza cercului (O) tangent celor trei semicercuri se cere:

1) Să se arate că avem relația: $\frac{1}{x}+\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$;

2) Să se determine grafic poziția punctului P în cazul cînd centrul O se află la o distanță de MN egală cu $\frac{a}{2}$;

3) Să se afle locul lui O cînd P parcurge diametrul MN.

Gh. Bazacov, Tr. Severin

4568. Dacă $a_1a_2a_3\ldots a_n=k$ și $a_i>0$, atunci

$$(1+a_1)\,(1+a_2)\ldots(1+a_n)\geqslant(1+\sqrt[n]{k})^n$$

Tomescu Ion, elev, Ploești

4569. Se consideră o elipsă și o dreaptă Δ perpendiculară în punctul I pe semiaxa mare AB. Fie M un punct variabil pe elipsă și P $(AM,\ \Delta)$; dreapta BP întîlnește elipsa în N. Să se afle locul proiecțiilor punctelor A și B pe MN.

A. Susea, student București

4570. Fie AA_1, BB_1, CC_1 cevienele unui punct M în raport cu triunghiul ABC. Dacă notăm cu A_2, B_2, C_2 intersecțiile cevienelor AA_1, BB_1, CC_1 cu segmentele B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1, iar $\frac{BA_1}{A_1C}=\alpha,\frac{CB_1}{B_1A}=\beta,\frac{AC_1}{C_1B}=\gamma$. Să se demonstreze relațiile:

a) $\frac{C_1B_2}{B_2A_1}=\frac{\gamma(\alpha+1)}{\gamma+1};\ \frac{A_1C_2}{C_2B_1}=\frac{\alpha(\beta+1)}{\alpha+1};\ \frac{B_1A_2}{A_2C_1}=\frac{\beta(\gamma+1)}{\beta+1}$,

b) $\frac{AM}{MA_1}=\gamma\,(\alpha+1);\ \frac{BM}{MB_1}=\alpha\,(\beta+1);\ \frac{CM}{MC_1}=\beta\,(\gamma+1)$.

Paul Păncescu, elev Odobești

4571. Ce volum de hidroxid de sodiu (soluție) conținînd 40 g de hidroxid de sodiu la litru este necesar pentru a neutraliza o soluție de acid conținînd 24 g de acid acetic? Care este produsul final și ce greutate are?

Se încălzește produsul obținut cu calce sodată. Ce reacție se produce? Să se scrie ecuația chimică și să se calculeze greutatea gazului care se degajă.

Timuș M. Dan, elev, ș.m. 1 Ploești

4572. La o hidrocentrală apa cade de la 3 m înălțime, avînd debitul de 2,5 m^3/s. Apa acționează turbina unui generator electric, care are randamentul de 4/5 și furnizează energie electrică la tensiunea de 110 V.

a) În timpul nopții toată energia electrică produsă alimentează mai multe becuri, care funcționează normal la curentul de 0,2 *A*. Care-i numărul maxim de becuri ce pot fi alimentate de generator?

b) În timpul zilei jumătate din puterea generatorului este folosită pentru încălzirea unei băi de 400 kg ulei.

În cît timp se încălzește uleiul de la 20° la 220°C, știind că uleiul are căldura specifică de 0,4 cal/g.grd și se neglijează pierderile de căldură.

c) Utilizînd baia de ulei ca izvor cald pentru un motor termic, să se calculeze temperatura la care să fie izvorul rece al motorului pentru ca puterea lui să fie de 15 CP.

(clasa X, olimpiada 1960, București)

4573. Considerăm elipsa raportată la axe și fie U un punct mobil situat pe tangenta în vîrful A. Perpendiculara din A pe dreapta OU taie axa OB în V.

a) Să se arate că $AU \cdot OV = OA^2$.

b) Să se afle locul intersecției dreptei OU cu polara lui U.

c) Aplicație pentru cerc.

N. Mihăileanu

4574. Să se calculeze:

$$E = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{\log n}, \quad F = \lim_{x \to \pi - 0} \frac{\sin x}{\sqrt{\pi - x}},$$

$$G = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2 + k}} \right).$$

(Gazeta de Matematică, Lisabona 1960)

EXERCIŢII ŞI PROBLEME PROPUSE PENTRU ŞCOALA DE 7 ANI *)

E: 1633. În G.M.F. - B nr. 9—1960 la „Caleidoscopul matematic" sînt date exemple de „ornamente" de cifre de tipul:

$$12 \cdot 42 = 21 \cdot 24\,; \quad 12 \cdot 63 = 21 \cdot 36 \text{ etc.}$$

Să se găsească metoda pentru a determina aceste cifre şi să se completeze pe această cale numărul de exemple date în G.M.F. - B.

Alexandru Stoenescu

E: 1634. O gospodărie agricolă colectivă a recoltat de pe două loturi 28750 chintale boabe grîu de toamnă. Să se afîte aria fiecăruia din cele două loturi, dacă se ştie că lotul al doilea a dat o recoltă totală mai mare decît recolta totală a primului lot cu 5/9 din recolta totală a lotului întîi, că producţia medie la hectar a lotului al doilea a fost cu 2 chintale mai mică decît producţia medie la hectar a lotului întîi şi că raportul ariilor celor două loturi este 3/5.

Florea I. Dumitrescu, Craiova

E: 1635. Dacă A,B,C,D sînt numere întregi care satisfac relaţia:

$$1007 \cdot A + 1316B + 954C + 645D = \mathfrak{M}1961$$

atunci satisfac şi relaţia:

$$901 \cdot A - 26 \cdot B + 1060 \cdot C + 1987 \cdot D = \mathfrak{M}1961$$

D. Bătineţu, student Bucureşti

E: 1636. O brigadă de tractorişti trebuie să are ogorul unei gospodării agricole colective în 20 de zile.

Timp de 15 zile lucrează întreaga brigadă, fiecare tractorist depăşind norma cu 10%, după care o parte dintre tractorişti sînt transferaţi la altă lucrare, iar ceilalţi 5 pentru a termina la termenul stabilit depăşesc norma cu 40% zilnic, reuşind să are 119 ha.

Să se afle norma zilnică a fiecărui tractorist, numărul tractoriştilor din brigadă şi suprafaţa ogorului gospodăriei.

Gh. Petrescu, profesor Breaza

E: 1637. Raportul dintre numărul porcilor şi numărul total de oi şi porci pe care îl are o gospodărie agricolă colectivă este 5/17, iar diferenţa dintre numărul oilor şi numărul porcilor este 350. Cîte oi şi cîţi porci are acea gospodărie ?

Florea I. Dumitrescu

E: 1638. Grîul recoltat de pe o anumită suprafaţă a unei gospodării agricole a fost transportat de pe aria de treierat la magazia gospodăriei. Dacă s-ar fi folosit pentru transport un anumit număr de căruţe, ar fi trebuit ca fiecare căruţă să încarce de cîte 25 de ori; însă gospodăria a fo-

*) (E: 1633, 1634, 1635, 1637, 1641); VI (E: 1636, 1638, 1647); VII (E: 1639, 1643, 1644, 1645, 1646).

losit cu 6 căruțe mai mult și astfel, fiecare căruță încărcînd numai de cîte 10 ori, tot grîul a fost depozitat în magazie.

Să se afle numărul total de căruțe folosite și cantitatea de grîu depozitată în magazie, știind că o căruță a transportat cîte 12 saci a 5 ddal fiecare sac și că greutatea hectolitrică a grîului a fost de 82 kg.

* * *

E: 1639. Se dau n numere $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ unde $x_k = +1$ sau -1. Să se demonstreze că dacă $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \ldots + x_nx_1 = 0$ atunci n este un multiplu de 4.

(Cl. VII Olimpiada matematică, Moscova 1959)

E: 1640. Se dau $2n+1$ obiecte. Să se demonstreze că dintre ele se poate alege un număr impar de obiecte în tot atîtea moduri ca și un număr par de obiecte.

(Cl. VII Olimpiada matematică, Moscova 1959)

E: 1641. Din portul maritim Constanța pleacă la aceeași dată 3 vapoare romînești de comerț. Primul se reîntoarce după un număr de zile egal cu $\frac{2}{3}$ din numărul de zile în care cel de-al doilea se duce și vine, al doilea se reîntoarce după un număr de zile egal cu $\frac{3}{5}$ din numărul de zile în care cel de-al treilea se duce și vine, iar al treilea se reîntoarce după un număr de zile egal cu $2\frac{1}{2}$ din numărul de zile în care primul se duce și vine.

Să se afle după cîte zile se reîntoarce fiecare în port și după cîte zile vor pleca iarăș din nou, toate deodată.

Stelian Lambă, profesor Tuzla

E: 1642. Directivele celui de-al III-lea Congres al P.M.R. prevăd că pînă la sfîrșitul anului 1965, producția de carne și lapte să ajungă la 600 000 tone anual și 5 000 000 hl anual. Știind că producția de carne și lapte a anului 1959 reprezintă 60% și respectiv 75% din producția anului 1965, să se afle de cîte ori se va mări producția de carne și lapte a anului 1965 față de producția anului 1959.

Virginica P. Grăjdeanu, Băcești Iași

E: 1643. Împărțim raza OA a unui cerc în trei părți egale: $OB=BC=CA$. Perpendiculara în C pe OA taie cercul în D și E, iar BD retaie cercul în F. Să se arate că $AE=EF$.

N. Mihăileanu

E: 1644. Să se găsească toate numerele de două cifre care se împart la produsul cifrelor lor.

(Cl. VII, Olimpiada 1957, Kiev U.R.S.S.)

E: 1645. În triunghiul dreptunghic ABC notăm cu M și N proiecțiile picioruului înălțimii unghiului drept A pe CA și AB. Să se stabilească relația:

$$\frac{CM}{MA} = \frac{AN}{NB} = \left(\frac{CA}{AB}\right)^2.$$

Stelian Lambă, profesor Tuzla

E: 1646. Să se arate că dacă $a+b+c=0$ și

$$\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} + \frac{a-b}{c} = 0,$$

atunci $\frac{bc+b-c}{b^2c^2} + \frac{ca+c-a}{c^2a^2} + \frac{ab+a-b}{a^2b^2} = 0$

Marica Ștefan, profesor T. Severin

E: 1647. În dreptunghiul $ABCD$ bisectoarea unghiului B și diagonala ce pleacă din acest vîrf, fac între ele un unghi de 15^0. Bisectoarea întîlnește diagonala AC în P și latura DC în E. Să se arate că triunghiurile COE și POE sînt isoscele, O fiind intersecția diagonalelor.

Șerban Popescu, profesor Strehaia

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

(urmare din numărul precedent, **soluții bune primite pînă la 1 noiembrie 1960**).

DĂRĂBANI (Suceava). Cl. XI. Moga Eugen (4248, 50, 56, 57, 67, 302, 03, 05, 06, 08, 09), Moga Ion (4198, 99, 247, 48, 50, 52, 60, 61, 67, 69, 71, 95, 302—09, 12, 14, 39, 42, 43, 48, 54, 62, 64, 69, 70).

DEVESEL (Oltenia) Cl. VI. Căpățînă Teodor (E: 1529, 30, 38, 39, 41, 45, 46, 53, 54, 59, 70), Cotarcea Angela (idem), Cîrjoi I. Rodica (idem), Cuțitoi Margareta (idem), Vladimirescu C. Ion (idem). Cl. VII. Alea Dumitru (E: 1529, 30, 38, 39, 41, 43, 45, 46, 50, 52—54, 59, 70), Burubea Ștefan (idem).

DEVA. **Ș.m. „Decebal"**. Cl. VI. Răgălie Ștefan (E: 1512—17, 21, 22, 27, 28). Cl. X. Zaharia Mihai 4193, 94, 207, 10, 12, 98, 319). Cl. XI. Bunea Bănică (4248, 62, 68, 69, 78, 98, 304, 05, 07, 09, 19, 51, 69).

DRĂGĂNEȘTI-OLT. **Raicu Viorel** (4258, 60, 72, 91, 302—09, 11—13, 19—22, 25, 27, 30, 33, 37, 38, 42—44, 46—48, 53—56, 60, 62, 65, 67—71, 75).

DRĂGĂȘANI (Argeș). Cl. X. Oltu Orest (4248, 56, 63, 65, 71, 83). Cl. XI. Blidaru Ion (4193, 208, 40, 56, 57, 59, 83, 303, 04, 09, 33, 37), Rîmniceanu E. Ion (4248, 56, 57, 59, 60, 77, 97, 305, 09, 18, 25, 33).

FĂLTICENI. **Ș.m. 2**. Cl. IX. Rabinovici Silviu (4192, 207, 08, 17, 48, 56, 57, 71, 83, 337). Cl. XI. **Cojocaru Mircea** (4192, 96, 98, 99, 205, 08, 09, 17, 30, 41, 44, 45, 48, 50, 56, 57, 60, 63, 68, 78, 82, 83, 85, 90, 94, 98, 302—05, 08, 09, 18, 25, 33, 37, 39, 40).

FETEȘTI-GARA. Cl. VII. Dache P. Const. (E: 1538, 39, 43—46, 49, 50, 52, 53, 55, 60,

70), Gonciar St. E: 1528, 43—46, 49, 50, 52, 53, 55, 60, 69, 70). Cl. X. Coşug Vasile (4248, 58, 68, 73, 303—05, 07—09, 38, 55), Grief Valentin (4248, 58, 68, 73, 305, 08, 09, 38, 68, 69), Petcu Virginia (4248, 58, 68, 73, 305, 08, 09, 68, 69), Răcaru Margareta (4248, 68, 73, 304, 05, 08, 09, 38, 69), Şerban Grigore (4256, 58, 304, 05, 08, 09, 38, 48, 68, 69, 73), Văleanu Maria (4248—50, 68, 73, 91, 305, 08, 38, 68).

FOCŞANI. Cl. X. Kramer Eugenia (4217, 44, 48, 56, 57, 71, 83, 337, 54, 65, 69, 71), Rosemblum A. Sorin (4193—97, 203, 108, 10—13, 31, 32, 36, 39, 44, 48, 56, 57, 62, 63, 65, 68, 71, 73, 79, 83, 87, 98), **Segal Zeilic** (4192—97, 203—13, 32, 36, 38, 39, 44, 48, 50, 56—58, 60, 62, 63, 65, 68, 71—73, 78, 79, 83, 86, 87, 98). Cl. XI. **Grădeanu George** 4248, 50, 52, 56, 57, 59, 61—63, 65—73, 77—80, 82, 83, 86, 87, 90, 96, 98—300, 02, 03, 06—09, 14, 15, 25, 33, 37, 54, 60, 64, 71), Mihăilescu Claudia (4268, 71, 73, 87, 303, 08, 09, 33, 48, 69), Paraschiv Florin (P).

GALAŢI. **Ş.m. 1 V. Alecsandri.** Cl. VIII. Popa Eugen (E: 1513, 14, 16, 18—23, 26). Cl. X. Ender Lucian (4248, 49, 56, 57, 62, 65, 71, 72, 83, 98). **Ş.m. 3.** Cl. X. Coiocaru Eugen (4248, 78, 304, 05, 07—09, 30, 38, 42, 47, 69). Cl. XI. Drăgoi Ionel (4248, 71, 95, 302, 03, 05, 08, 54, 60, 69), Ismailescu Ileana (4271, 302—05, 08, 09, 42, 51, 69). **Ş.m. 4.** Cl. VIII. Aizenfeld Ginetta (E: 1555, 57—67, 69, 70), Ciarpov Vitali (E: 1555, 57—61, 63, 65, 69, 70), Cîrlan Const. (E: 1555, 59—61, 63—65, 69, 70), Dică Chirică (E: 1555, 58—61, 63—67, 68, 70), Duţu Stana (E: 1555, 58—61, 63—66, 69, 70), Găzdaru Joiţa (E: 1555, 56, 58—67, 69, 70), Manea Vasile (E: 1555, 59—61, 63—65, 67, 69), Marcus Bruno (E: 1555—67, 69, 70), Mărăscu T. Dumitru (E: 1555, 57, 59, 60, 62—67, 69, 70), Scutaru Maria (E: 1555, 58—61, 63—67, 69, 70), Tucher Eugenia (E: 1555, 57, 59—61, 63—67, 69, 70).

GHIRDOVENI (Ploeşti). **Şc. de 7 ani.** Cl. VII. Costache Stelian (E: 1513, 15, 22, 29, 38, 42—45), Matache Maria (E: 1513, 15, 16, 22, 29, 32, 43—45, 53).

GURA HUMORULUI (Suceava). Cl. X. Coraliuc V. (4250, 56, 68, 71, 302, 05, 09, 30, 48, 69, 70), Croitoru Dragoş (4250, 56, 57, 68, 71, 302, 05, 09, 30, 48, 69), Jucan Nicoleta (4250, 56, 68, 71, 302, 05, 09, 30, 48, 69), Muşină Foca (4250, 56, 57, 68, 71, 302, 05, 09, 30, 48, 69, 70), Pleşan Decebal (4250, 57, 68, 302, 05, 09, 48), Sabin Andrei (4250, 56, 57, 68, 71, 302, 05, 09, 30, 48, 70), Vaipan Nicolae (4256, 57, 68, 71, 302, 04, 05, 09, 30, 38, 69, 70).

HALEŞ (Galaţi). Cl. VI. Stanciu Cornelia (E: 1541, 43, 45, 50, 52, 53, 55, 59, 60, 70).

HAŢEG. Cl. VI. Martan Virgil (E: 1528, 30, 38, 41, 45, 46, 49, 53, 59, 60, 70). Cl. VIII. Petriu Em 1 (E: 1540—50, 52—59).

HOREZU (Argeş). Cl. XI. Mihai V. Dumitru (4248, 56, 57, 86, 302, 08, 12, 42, 51, 58, 62, 67, 69), Tănăsescu T. Miron (4310, 14, 41—43, 45, 47, 51. 53, 56, 58, 62, 67, 69).

HUEDIN. Cl. VII. Roşca Floarea (E: 1532, 39—43, 47, 52, 53, 55, 59, 60, 70), Tişe Maria (E: 1532, 39—41, 43, 47, 53, 60, 70).

HUNEDOARA. Şc. profesională. An. III. Moga Stelian (E: 1531, 32, 38—46, 50, 52—54), Popescu Grigore (idem).

HUŞI. Absolvent Dolteanu T. (4341—43, 51, 53, 62, 65, 70, 75). Cl. XI. Efstrate Dan (4256, 57, 68, 71, 78, 90, 302—05).

IAŞI. **Studenţii:** Mirzac P. Ştefan (4250, 56—58, 61, 68, 70, 303, 04, 09, 18, 19, 34), Pravăţ Vasile (4302—05, 07—09, 14, 37, 54, 60, 69, P). **Absolvent.** Chiriţă Mihai (4193, 95, 97, 203, 07, 08, 10, 12, 20, 24, 29, 35, 36, 40, 41, 43, 45, 46, 56, 58, 68, 73, 77, 87, 93—301, 03, 05, 33, 67, 69). **Ş.m. 1.** Cl. VIII. Polingher Corina (4348, 59, 65, 68, 71, 73, E: 1556—70). **Ş.m. 2.** Cl. VII. Bercovici Carola (E: 1538, 39, 41, 43, 45, 50, 52, 54, 59, 60, 69), Răuţ Smaranda (E: 1538, 39, 43, 45, 50, 54, 59, 60, 69, 70), Rogobete Gabriela (E: 1538, 39, 41, 43, 50, 52, 53, 59, 60, 69, 70), Schwartz Greta (E: 1538, 39, 43, 45, 52, 53, 59, 60, 69, 70), Segal Ghizi (E: 1538, 39, 43, 45, 50, 54, 59, 60, 69, 70), Suiu Rodica (E: 1538, 39, 41, 43, 45, 52, 55, 59, 60, 69, 70). Cl. XI. Pirţac Eugenia (4248, 57, 63, 67, 71, 78, 302—04, 07, 12, 47, 62, 69). **Ş.m. 3.** Cl. XI. Dragoş Matei (4253, 65, 72, 82, 90, 92, 304, 05, 09, 14, 21, 30, 38, 54, 60, 65, 69, 71), Pavel Nicolae (4249, 53, 56, 58, 60, 71, 72, 80, 82, 84, 94, 311, 21, 30, 47, 51, 53—55, 60, 65, 68—73), Petrişor Silviu (4248, 65, 67, 71, 72, 82, 83, 90, 92, 303—06, 08, 21, 30, 38, 47, 54, 60, 65, 69—71), Pintilie Ioan (4221, 48—53, 65—67, 70—72, 75, 78, 80, 82—84, 88, 89, 92, 93). **Ş.m. 4.** Cl. VIII. Georgescu Marieta (E: 1528—32, 38, 39, 47, 59, 60, 70).

LIPOVA (BANAT). Cl. XI. Mihalcea Ioan (4250, 86, 302, 05, 08, 09, 12, 69, 70). LUGOJ. Lt. Pupăzan Nicolae (3338, 42, 51, 54, 59, 60, 62, 65, 68—71, 75, P). **Ş.m. 1** Cl. VIII. Cimponeriu Traian (E: 1529, 33, 39, 41, 43, 45, 49, 52, 59, 70), Dolea D. Radu (E: 1528, 30, 31, 33, 36, 38—40, 48—50, 52—54), Vasiliu Dan (E: 1528, 30, 33, 36, 42, 55, 57, 59, 60, 64, 70). Cl. X. **Boldea Ioan** (4261, 65, 69, 71, 72, 79, 80, 83, 85, 87, 93, 95, 96, 99, 300, 02, 04, 06, 09, 18, 19, 23, 25, 27, 28, 33, 35, 38, 39, 44, 51—54, 65, 67, 69, 71, 77, 82), Dăncilă Marius (4256, 77, 98, 300, 05, 09, 18, 25, 33, 35, 39), **Iorga Valeriu** (4192—99, 203—15, 17, 18, 20, 24, 30—33, 35, 36, 39—47). Cl. XI. Nemet Doina (4248, 52, 56—60, 62, 67, 69, 80, 87, 90, 302—09, 12, 14, 33), **Popa Dorina** (4248 ; 53, 57—60, 65—67, 71, 72, 78, 80, 82, 88, 94, 302—09, 14—16, 38, 51, 53—55, 62, 65, 69—71), **Sfetcu Ion** (4205, 07—17, 20, 24, 29, 09, 32, 33,

36—42, 44, 47, 48, 50—53, 56—58, 65, 67, 68, 71—73).

MEDIAŞ. Cl. X. Ifrimela St. (4207, 56, 65, 80, 87, 98, 307, 42, 65, 69).

MOINEŞTI. Cl. XI. Păsărică Ioan (4248, 50, 56—60, 62, 71, 90, 95, 302, 03, 05, 06, 08, 09).

MORENI (Ploeşti). Cl. VI. Frenţ Maria (E: 1528, 38, 39, 41, 43, 45, 46, 50, 52—55, 57, 60, 70), Păduraru Dumitru (E: 1528, 38, 41, 45, 46, 49, 50, 53, 55, 59, 60, 70). Cl. VII. Zainier Valentina (E: 1531, 38, 39, 41, 43, 45, 46, 49, 52, 53, 55, 60, 70). Cl. IX. Ştefănescu Decebal (4197, 203—08, 10, 13, 15, 36, 38, 50, 57, 65, 68, 72, 73, 79, 86, 87, 98, P). Cl. XI. Ciobanu Dan (4265, 71, 80, 82, 303, 06, 08, 09, 15), Paraschivoiu Ioan)4197, 98, 203, 07—10, 13, 42, 45, 302—05, 07—09).

MURGENI (Iaşi). Cl. XI. Chiosa Vasile (4265, 71, 80, 82, 303, 06, 08, 09, 15), Coman Emil (4265, 67, 71, 78, 80, 82, 303, 06, 08, 09, 15).

OCNIŢA. Cl. VII. Hodorog P. Ion (E: 1532, 38, 41—43, 45, 47, 48, 50, 52, 53, 59, 60, 65, 69, 70).

ORADEA. **Ş.m. 1.** Cl. VII. Borcia Sorin (E: 1530, 38, 39, 41, 43, 45, 48—50, 52, 53). Cl. VIII. Wlad Robert (E: 1559—66, 69, 70). Cl. XI. Hulea Ioan (4248, 68, 73, 79, 86, 87, 302, 03, 05, 08, 09, 33, 48, 62, 69, 70). **Ş.m. 4.** Cl. XI. Fărcaş Irina (4195, 257, 71, 303—05, 08, 09, 54, 62, 69).

ORAŞUL BRAŞOV. **Student.** Hortopan Rodica (Inst. Ped.) (4193, 95, 96, 203, 29, 30, 36, 41, 43—45, 50, 303, 05). **Ş.m. 5.** Cl. IX. Munteanu Gh. Mircea (4248, 50, 56, 57, 65, 67—69, 80, 83, 85, 86, 90, 98, 300). Cl. XI. Sburlan Mihai (4257, 67, 68, 70—73, 87, 90, 302—03, 05—09, 13, 21). **Ş.m. 6.** Cl. VII. Vătui Florin (E: 1540, 41, 43—46, 48—50, 52, 53). Cl. XI. Klopot Ioan (4248, 56—58, 60, 62, 68, 71, 73, 78, 302—05, 07—09, 38), Vintilescu Vasile (4248, 56—58, 60, 62, 68, 71, 73, 78), **Şcoala de 7 ani nr. 12.** Cl. VII. **Jurca Gabriela** (E: 1512—20, 22, 23, 25—29, 32, 35, 38—44, 46—48, 51—53, 55, 57, 59—62, 64, 65, 67, 69, 70).

PETROŞANI. **Student.** Iuga Al. (Fac. electrotehnică) (4248, 50, 56—58, 68, 86, 302—09, 12, 25, 33, 51, 65, 69, 70). Cl. VIII. Orlov Zenaida (E: 1542, 45, 47, 49, 51, 54, 56, 60, 61, 67, 69), Popa Radu (E: 1528, 35, 40—54, 59, 60, 70).

PIATRA NEAMŢ. Absolvent. Trifan Ioana (4254, 57, 58, 305, 08, 09, 48, 51, 69, 70). Cl. IX. Asavei Gh. .4248, 56, 57, 76, 71, 78, 308, 65, 70), Dram Mihai (4248, 50, 56, 57, 65, 71, 78, 306, 65), Manolache Ion (4248, 50, 56, 57, 68, 71, 78, 98, 338, 65, 67). Cl. X. Cristea Paraschiva (4248, 50, 56, 57, 65, 68, 71, 305, 09, 19, 65). Cl. XI. Danilescu Vasile (4248, 65, 71, 82, 305, 08, 70), Maftei Gh. (4248, 65, 71, 82, 303, 05, 08, 65, 70).

PITEŞTI. **Ş.m. 1.** Cl. VIII. Dinovici Sorin (4268, 98, E: 1512, 13, 15—18, 20, 21, 28—31, 37—39), Hurduc Dan (E: 1531, 34, 38, 39, 41—43, 45—50, 53, 54, 59, 60). Cl. X. Stancu Ion (4192, 94, 204, 05, 07, 23, 48, 50, 56, 57, 59, 60, 65, 68, 71, 73, 78, 83, 90, 98). **Ş.m. 3.** Cl. VI. Anton Const. (E: 1531, 38—40, 43, 44, 50, 55, 59, 70). Cl. VIII. Mihăileanu Roland (E: 1529—32, 34, 38). Cl. IX. Zamfir D. Ionel (4250, 56, 57, 62, 65, 68, 71, 73, 83, 86, 90).

PREDEAL. Cl. VII. Ioniţă I. Maria (E: 1528, 30, 31, 40, 41, 43—50, 52, 53, 59, 60, 70, 73, 79).

PLOEŞTI. **Ş. m. 1. I. L. Caragiale.** Cl. VIII. Bucur I. Nicolae (E: 1532, 38, 41, 45, 47, 50, 55, 59, 60, 64, 65, 70), Leonte Filip (E: 1543, 44, 46, 47, 51—53, 59, 60, 67, 70). Cl. X. Constantinescu Al. Marius (4265, 68, 87, 305, 07, 51, 54, 65, 67, 71), Nicolaescu Mihaela (4238, 48, 68, 86, 302, 03, 05, 08, 09). Cl. XI. Ceïanu Gabriela (4267, 70, 71, 302—09, 42), Constantinescu Iosefina (4194, 95, 97, 203, 06, 07, 41, 43—45, 56, 60, 71, 402, 03, 06, 08, 09, 37), **Drugea I. G.** (4198, 99, 242—46, 48, 50, 56—58, 60, 62, 63, 65, 71, 73, 79, 82, 83, 86, 87, 98, 302—09, 19, 25, 27, 33, 37, 46, 49, 51, 54, 55, 60, 62, 65, 67—71), Duţescu Florica (4194, 95, 97, 203, 41, 43—45, 56, 71, 302, 03, 06, 09, 12, 37, 51, 54, 62, 69, 70), Georgescu Ion (4197, 99, 203, 06, 41, 43—45, 48, 50, 56, 71, 83, 303, 05, 08, 09, 12), Lungu Anca (4192, 99, 203, 06—08, 13, 15, 24, 30, 31, 33, 41, 43, 45, 46, 48, 67, 71, 72, 80, 82, 302, 03, 05, 06), Marinescu Al. (4192, 94, 99, 200, 03, 06—08, 13, 15, 24, 30, 31, 33, 34, 41, 43—47, 65, 67, 71, 72, 80, 82, 98, 302—06, 08, 09, 19, 37).

Ş.m. 2. A. Toma. Cl. IX. Petrescu Ortansa (4248, 50, 57, 59, 71, 302, 05, 08, 16, 19). Cl. XI. Mignea Luminiţa (4248, 67, 71, 302, 04—09, 51, 70). **Ş.m. 3 Mihai Viteazu.** Cl. VI. Georgescu Virginia (E: 1512, 15, 17, 27, 38, 41, 45, 54, 59, 70). Cl. VIII. Condrescu Mădălina (4203, 56, 57, 71, 309, 42, 48, 69; E: 1515, 17, 18, 20, 22, 32, 39, 43, 47, 50, 52, 55, 59, 60, 67, 70), Stăvaru Cristina (4203, 08, 57, 71, 305, 09, 42, 69, E: 1512, 13, 15, 17, 18, 20, 25, 26, 42, 43, 45—47, 49—52, 54, 57, 59—61, 64, 67, 69, 70). **Ş.m. 6.** Cl. IX. Pătraşcu Tudor (4192, 93, 203, 22, 24, 49, 69, 71, 305, 65, 69).

Şcoala de 7 ani Pucheni-Moşneni (Ploeşti). Cl. VII. Cucoş Luminiţa (E: 1521, 31, 38, 39, 41, 45, 46, 48, 49, 53, 55, 59, 60, 62, 70), Hunumolo Marian (E: 1529—31, 38, 39, 42—44, 50, 52, 55, 59, 60, 63, 70).

PUCIOASA. Cl. VIII. Manea V. Ilie (4217, E: 1512, 13, 15—18, 20, 22). Cl. X. Caloianu Pompiliu (4268, 80, 89, 95, 305, 07, 15, 19, 27, 38, 43, 45, 54, 59, 65, 67, 69, 70), Marin I. Victor (4198, 207, 09, 11, 15, 24, 42, 48, 56, 62, 65, 71, 80), Mina Aureliu (4256, 68, 73, 86, 89, 303, 07, 15, 19, 21, 27,

38—43, 54), Păduraru Victor (4268, 72, 80, 86, 89, 95, 98, 303, 05, 07, 15, 19, 21, 27, 38, 43, 45, 54, 59, 65, 68, 69—71), Radu A. G. (4197, 98, 203—05, 07—11, 15, 17, 20—25, 33, 34, 36, 42, 44, 45, 47—51, 56, 57, 60, 62, 65, 71, 72, 78, 80, 83, 90, 91, 93). Sendovici Mihaela (4248, 56, 57, 76, 72, 73, 85, 86, 90, 98).

Școala de 7 ani Cricov. Cl. VI. Tircă I. Mihail (E: 1534, 40, 41, 43, 46—48, 50, 52, 53, 55, 59, 60, 70).

RĂDĂUȚI. Cl. X. Sîrghie Mircea (P).

REȘIȚA. **Școala medie Anina.** Cl. VII. Petric Mircea (E: 1538, 39, 41, 43, 45, 49, 50, 52, 53, 55, 59, 60, 62, 69, 70), Samide Mariana (E: 1538—40, 42, 43, 45, 50—52, 60, 61, 69, 70).

RIMNICU SĂRAT. **Ș.m. 2.** Cl. XI. Asanache G. Horia (4248, 57, 65, 71, 78, 303—09, 59, 62, 65, 68, 71).

RIMNICU VILCEA. **Ș.m. 2.** Cl. XI. Popa Costel (4302—05, 07—12, 14, 16, 21, 36—38), Popescu I. Virgiliu (4302—09, 42, 51, 54, 60, 62, 69).

Șc. de 7 ani Ocnița. Cl. VII. Teodorescu G. Vasile (E: 1532, 38, 41—43, 45, 47, 48, 50, 52, 53, 59, 60, 65, 69, 70). Tîmplaru F. Const. (E: 1532, 38, 41—43, 45, 47, 48, 50, 52, 53 59, 60, 65, 69, 70).

ROȘIORII DE VEDE. Cl. VIII. Covreag Remus (4309, 10, 62: E: 1517, 32, 38, 39, 43, 46—48, 50, 53). Cl. XI. Breazu Ioana (4235, 48—52, 303—05, 07—09, 62).

RUPEA. Lazea Ioan (4259, 78, 302, 04, 05, 07—09, 38, 69, 71).

SALONTA. **Ș.m. 1.** Cl. IX. Uveges Valeria (4248, 52, 71, 89, 309, 31, 37, 41, 69).

SATU MARE. Cl. VII. Weiss Ioan (E: 1539, 41, 43, 45, 50, 52, 59, 60). Cl. VIII. Weiss Andrei (E: 1531, 32, 38, 39, 43—45, 48—50). **Școala de 7 ani Silnea-Sărmaj.** Cl. VI. Voica Maria (E: 1522, 43, 48, 50, 53, 54).

SĂVENI (Suceava). Cl. IX. Grișaru Ion (4248, 56, 57, 71, 304, 09, 69), Mihalache Vasile (4248, 56, 57, 71, 304, 09, 51, 65, 69, 71), Onofrei Mihai (4248, 56, 57, 302, 04, 09, 51, 65, 69, 71). Cl. X. Costin Mihai (4248, 50, 56, 57, 71, 302, 04, 09, 42, 51, 69, 71), Zolu David (4248, 56, 57, 302, 04, 05, 42, 51, 65, 68, 71).

SIBIU. **Ș.m. 1 Gh. Lazăr.** Cl. XI. Munteanu Ioan (4303, 05, 06, 24, 51, 54, 60, 65, 70, 71). **Ș.m. 2.** Cl. VIII. Trif Maria (E: 1528—30, 32, 34, 38, 39, 46, 50, 52). **Ș.m. 3.** Cl. XI. Micu Doina (4248—50, 52, 66, 68, 69, 71, 73, 78, 303—05. 07—09, 12). **Școala de 7 ani nr. 9.** Cl. VII. Boac Monica (E: 1530, 38—40, 45, 49, 50, 52, 60, 70), Cristea Victor (E: 1530, 31, 38, 39, 43, 50, 52, 60, 61, 69), Dinculescu Aurelian (E: 1530, 31, 38, 39, 41, 43, 45, 59, 60, 70), Holanda Doina (E: 1531, 38, 39, 43, 45, 50, 55, 59, 60, 70). **Școala de 7 ani nr. 13.** Cl. VII. Bunea Mircea (E: 1540, 41, 43—46, 48, 49, 52, 55, 59, 70), Nicoară Ion (E: 1529, 38, 39, 43, 44, 41, 49, 50, 52, 55).

SIGHIȘOARA. **Ș.m. 1.** Cl. VIII. Răducan Dorina (E: 1500, 01, 06, 07, 10, 12, 13, 15, 17). Cl. XI. Ciulei Mircea (4210, 33, 80, 81, 303—05, 07—09, 12, 21, 28, 65), **Neagu Gh.** (4212, 33, 48, 50, 52, 56, 57, 60, 62, 65, 68, 71—73, 78—80, 82, 83, 86, 87, 90, 98, 302—05, 07—09, 12, 21, 27, 30, 33, 37, 41—43, 54, 60, 62, 65, 67, 69—71).

SINAIA. Cl. X. Zegheanu Petre (4256—59, 62, 71, 87, 302, 08, 09, 19, 27, 33, 48, 51, 52, 62, 69). Cl. XI. Fil Petru (4248, 56, 58, 59, 62, 71, 302, 08, 09, 33, 51, 62, 69), Tănase Mihail (4248, 52, 65, 67, 71, 72, 78, 82—84).

SLĂNIC (Ploești). Cl. IX. Bogdan Viorel (4207, 08, 10, 32, 42, 51 80, 87, 305, 07—09, 67, 69).

SUCEAVA. **Ș.m. 1.** Cl. X. Huțanu Leon (4248, 52, 56, 57, 65, 67, 93, 303, 05, 08), Sorohan Liviu (4250, 56—58, 60, 65, 78).

TECUCI. **Ș.m. 2.** Cl. VII. Beheci Ion (E: 1531, 38, 39, 46, 49, 53, 55, 63). Cl. IX. Alexandru Aneta (4248, 51, 56, 68, 98, 305, 09, 16, 48, 65), Botez Denisa (4248, 56, 71, 302, 05, 48, 51, 65, 68, 69), Botez Zinca (4248, 56, 67, 71, 302, 05, 08, 48, 51, 62, 65, 69), Chiriță Eugenia (idem), Ciorșteanu Gh. (4248, 56, 68, 71, 98, 303, 05, 09, 48, 69), Doniga Vasile (4248, 56, 68, 71, 98, 305, 09, 48, 65, 69), Glavoschi Vasilica (4248, 71, 98, 305, 16, 48, 51, 65, 69), Grama Iulian (4248, 56, 71, 98, 303, 05, 16, 48, 51, 65, 69), Halpern Elias (4248, 56, 68, 71, 98, 316, 19, 65, 69), Irimia Felicia (4251, 56, 68, 71, 98, 305, 16, 48, 65, 69), Klein Herman (4248, 56, 71, 98, 303, 05, 16, 48, 51, 65, 69), Moraru Mariana (4248, 54, 56, 69, 71, 305, 08, 45, 62, 65), Oprea Paul (4248, 51, 68, 71, 95, 98, 303, 05, 09, 48, 65, 69), Răvoiu Petrache (4248, 56, 68, 71, 98, 305, 09, 48, 51, 65, 69), Sigler Berman (4238, 56, 68, 69, 71, 98, 316, 19, 65, 69), Trandafir Victoria (4248, 56, 68, 71, 98, 348, 51, 65, 69). Cl. X. Adrian Lidia (4248, 305, 08, 09, 19, 38, 42, 48, 54, 65, 69), Bubulac Marioara (4200, 48, 50, 68, 73, 305, 08, 09, 19, 48, 65, 69), Constantinescu Mircea (4268, 71, 95, 303, 05, 16, 48, 51, 69), David Tudorel (4248, 56, 68, 98, 302, 03, 05, 08, 48, 62), Dorosan Emil (4248, 56, 68, 71, 83, 302, 05, 08, 09, 37, 38, 62, 69, 70), Eminovici Petronel (4248, 56, 57, 302, 05, 08, 09, 38, 42, 48, 69), Ene Lucia (4248, 50, 56, 57, 59, 68, 73, 87, 302, 05, 07—09, 19, 38, 42, 48, 54, 62, 65, 69, 71), Gheorghiu Virgil (4248, 56, 62, 68, 71, 95, 302, 03, 07, 08, 61, 62, 65), Lazăr Solomon (4248, 56, 57, 68, 71, 98, 302, 03, 05, 08, 09, 48, 69), Petică Gh. (4248, 57, 68, 71, 95, 302, 03, 05, 08, 09, 48, 51, 69), Profiriu Garofița (4248 50, 52, 56, 61, 62, 67, 68, 71, 83, 98, 302, 05, 07, 08, 19, 42, 65, 69), Theodor Teodor (4248, 56, 61, 63, 89, 302, 05, 08, 09, 48, 54, 62, 65, 67, 69, 70). Cl. XI. Alexandru Constanța (4248, 56,

68, 71, 302, 03, 05, 06, 08, 09, 62, 65), Bulanda Eugen (4248, 56, 67, 71, 302, 03, 05, 06, 08, 09, 42, 48, 62, 69), Buluc Gh. (4248, 56, 67, 71, 302, 03, 05, 06, 08, 42, 48, 54, 62, 69), Cihodaru Vasile (4248, 56, 58, 61, 302, 03, 05, 06, 08, 42, 54, 62, 69), Dimofte Chira (4248, 56, 67, 68, 71, 302, 03, 05, 06, 08, 09, 42, 62), Dinu Neculai (4248, 67, 71, 302, 03, 05, 06, 08, 48, 52, 54, 62, 65, 69), Grama Petruș (4248, 56, 71, 302, 05, 06, 08, 42, 48, 51, 62), Huțanu Const. (4248, 56, 67, 71, 302, 03, 05, 06, 08, 42, 48, 51, 54, 62, 69), Man George (4248, 56, 67, 71, 302, 03, 05, 06, 08, 42, 48, 54, 62, 69), Moscovici Henry (4248, 50, 52, 67, 76, 83, 302, 03, 05, 06, 08, 16, 37, 53, 62, 69), Negrea Junica (4248, 56, 67, 68, 71, 302, 03, 05, 06, 08, 09, 42, 62), Răducănescu Mihai (4248, 56, 58, 61, 302, 03, 05, 08, 60, 62), Sevaste Dan (4248, 56, 68, 71, 302, 03, 05, 08, 12, 37, 69, 70), Stancu Virgil (4248, 56, 67, 71, 302, 03, 05, 06, 08, 42, 48, 53, 54, 62), Tătaru Petru (4248, 56, 58, 67, 68, 71, 302, 08, 09, 39, 62, 69), Tigănescu Violeta (4248, 56, 67, 68, 71, 302, 03, 05, 06, 08, 09, 42, 62), Tuchel Teodor (4200, 48, 56, 73, 305, 08, 09, 19, 48, 65, 69).

TIMIȘOARA. **Studenți: Scarlat C. Nicolae** (Fac. Energetică) (4229, 50, 54, 59, 67, 68, 70, 75, 77, 79, 300, 02—09, 15, 19, 25, 27, 33, 34, 37, 39, 41—43, 46—56, 59, 60, 62, 64, 65, 67—75), Ianoșik Adolf (fac. electrotehn.) (4246, 67, 300, 02—06, 08, 09, 19, 32, 33, 46, 50, 51, 54, 55, 60, 62, 64, 65, 67, 69—71). **Absolvent.** Zăgreanu Nicolae (4254, 55, 63, 64, 303, 05, 09, 14, 15).

Ș.m. 1. Cl. VI. Rogojan Dorina (E: 1512, 15, 17, 21, 28, 38, 41, 45, 46, 49, 53), Cl. X. Colojoară Dorel (4203, 21, 42, 48, 50, 65, 83, 302, 03, 05, 07, 08, 37, 38), Munteanu Dan (4256, 57, 68, 73, 86, 98, 304, 05, 08, 09, 19, 27). Cl. XI. Comșulea Corneliu (4248, 56, 57, 60, 62, 63, 68, 71, 83, 98). **Ș.m. 2.** Cl. VIII. Szende Suzana (E: 1529, 40, 52, 57, 59, 60, 66, 67, 69, 70). Cl. IX. Schorscher Hans (4248, 56, 71, 83, 316, 37, 38, 59, 69, 75). Cl. X. Sckhardt Burghert (4250, 56, 57, 60, 68, 86, 305, 09, 19, 27, 38, 69), Höckl Franz (4248, 56, 63, 94, 303, 05, 07, 09, 12, 71).

Ș.m. 3. Cl. IX. Eckstein Gh. (4248—50, 56—58, 60, 65, 71, 80, 89, 302, 04, 05, 07—09, 24, 27, 30, 38, 42, 44, 45, 47, 48, 51, 54, 62, 65, 69, 71, 73, 75). **Ș.m. 5.** Cl. IX. Lusztig Gh. (4302—07, 09, 11, 13, 14, 21, 22, 24, 31, 34, 37, 38, 40, 41, 43, 44, 46, 47, 54, 65, 67—69, 75), Chelici Al. (4192, 257, 60, 68, 98, 309, 12, 38). **Ș.m. 7.** Cl. VII. Caranda Livia (E: 1539—43, 50, 52—54). Cl. VIII. Ciacîru Mircea (E: 1530, 32, 38, 39, 41, 47, 48, 53, 55, 59—62, 70), Copaci Virgil (E: 1530, 32, 37, 43, 47, 48, 52, 53, 59, 60, 62, 70), Drăgoșin Liana (E: 1529, 41, 43, 45, 50, 52, 53, 59, 60, 62, 70), Franz Lidia (E: 1532, 38, 40, 42, 43, 45, 47, 50, 52, 59—61, 64, 67, 70), Goldstein Petru (E: 1530, 38, 39, 41, 42, 47, 48, 59, 60, 63, 70), Hașas Alexandrina (E: 1530, 41, 43, 46—48, 51—53, 55, 57, 59, 60, 69, 70), Holzei St. (E: 1530, 32, 38 41, 47, 48, 52, 53, 59, 60, 63, 70), Jurănescu Rodica (E: 1532, 38, 40, 42, 43, 45, 50, 52, 59, 60, 67, 70), Luzan Emil .4271, E: 1532, 41, 45, 47, 48, 59, 60, 69, 70), Moga Eugenia (E: 1529, 32, 41, 43, 45, 50, 52, 53, 59, 60, 63, 70), Martinovici Gabriela (E: 1530, 32, 38, 39, 41, 42, 47, 48, 52, 59, 63), Murgu Lucia (E: 1529—32, 38—43, 45), Văcăresu Elena (E: 1531, 38, 39, 41, 46, 53, 54, 57, 59—61, 65, 67, 69, 70). Cl. IX. Brînzan Lucian (4268, 71, 98, 319, 27), Sperneac Sorin (4249, 68, 71, 83, 98, 337, 38, 48, 59, 61, 69, 75), Stoianov Lucia (4268, 86, 98, 318, 27, 38, 49, 59, 69). Cl. X. Gora Horațiu (4257, 60, 71, 302, 04, 05, 07—09, 37). Cl. XI. Murgu Eugenia (4256, 57, 71, 302, 03, 05, 09, 38, 51, 69), Sieber Ana .4248, 56, 80, 302, 03, 05, 07—09, 15), Stanciu Ana (idem), Szapanos Margareta (4256, 71, 302, 03, 05, 09, 38, 42, 51, 69).

Școala de 7 ani nr. 4 .Cl. VII. Klein Gabriel (E: 1543, 49, 50, 52, 60, 65, 69, 70).

TIRGOVIȘTE. Ș.m. 2. Cl. X. Migdalovici Marcel (4248, 49, 51, 302, 04, 05, 07, 09, 38, 65, 71). Cl. XI. Zaharia Adina (4256, 80, 304—09, 12, 51, 62, 69). Ș.m. 3. Cl. X. Crețu Gh. Dumitru (4203, 07, 08, 10, 12, 38, 39, 44, 45, 48, 51, 56—58, 68, 71, 73, 86, 87, 98, 302—09, 14, 17, 42, 48, 49, 51, 52, 54, 60, 62, 65, 67, 69—71). Cl. XI. Dumitrică V. Aurel (4209, 11, 48, 50, 51, 53, 56—59, 62, 63, 67, 68, 70, 71, 73, 78, 80, 82, 83, 85—87, 90, 94, 95, 96, 98, 302—09, 14, 16, 18, 25, 31, 33, 34, 37, 38).

TIRGU MUREȘ. Cl. VII. Stratan Valeriu (E: 1539, 41, 44, 46, 48, 49, 55, 60, 61, 70).

TRUȘEȘTI. Cl. IX. Aconstantinesii Hareta (4248, 50, 68, 73, 98, 305, 08, 09, 34, 38), Cărbunaru Mircea (4248, 50, 68, 73, 98, 302, 05, 34, 42, 69), Dănilă Angelica (4248, 50, 68, 73, 98, 305, 08, 09, 34, 68), Neagu N. Mihai (4248, 50, 68, 73, 98, 302, 05, 08, 09, 32, 42, 69), Odorică Iacob (4248, 50, 68, 73, 98, 302, 05, 08, 09, 34, 42, 69), Ștefan Dumitru (4248, 50, 68, 73, 98, 305, 08, 09, 34, 42, 69), Tudose Elena (4248, 50, 68, 73, 90, 305, 08, 09, 34, 38). Cl. X. Melinte Mihai (4248, 50, 68, 73, 98, 302, 05, 09, 19, 34, 42, 69), Mutuzac Elena (4250, 68, 73, 98, 302, 05, 08, 09, 19, 38, 42, 69), Novak Ioan (4248, 50, 68, 73, 87, 98, 302, 05, 09, 19, 39, 42, 49), Vieru Maria (4250, 68, 73, 89, 302, 05, 08, 09, 19, 38, 42, 69). Cl. XI. Bîrzac Elena (4248, 50, 68, 73, 98, 302, 05, 08, 09, 34, 42, 69), Buhăceanu Marina (4248, 50, 68, 73, 98, 302, 08, 09, 32, 42, 69), Ciomaga Zenovia (4248, 50, 68, 72, 98, 302, 05, 08, 09, 34, 42, 69), Davidescu Lucian (4248, 50, 68, 77, 98, 305, 08, 34, 42, 69), Enache Viorica (4248, 50, 68, 73, 98, 302,

05, 08, 09, 34, 42), Popescu Tatiana (4248, 50, 68, 73, 98, 304, 05, 08, 38, 42, 61), Rotundu Viorica (4248, 50, 68, 73, 98, 302, 04, 05, 07—09, 38, 69), Silon Dumitru (4248, 50, 68, 73 77, 87, 98, 302, 05, 08, 12, 25, 33, 34, 42).

TURDA. Cl. X. Olac Iacob (4212, 38, 39, 68, 73. 85, 86. 98, 327, 67).

TURNU SEVERIN. Ș.m. 2. Cl. X. Mocioiu I. Doru (4213, 47, 48, 57, 62, 86, 98, 302, 05, 07, 09).

VĂLENII DE MUNTE (Ploești). Cl. VIII. Dimache Felicia (E: 1529, 32, 34, 40, 41, 43, 45, 47. 50, 53, 54, 59, 60, 70), Mistorică Gh. (E: 1528, 32, 38, 39, 41, 46, 52, 55, 56, 59, 60, 69, 70).

ZALĂU. Cl. VII. Elec. T. Maria (E: 1528, 29, 38, 39, 43, 45, 52, 53, 60, 70). Cl. XI. Gajzago Katalin (4265, 66, 68, 77, 78, 86, 98, 318, 19, 25, 30, 33, 38).

* *

— Problemele rezolvate din G.M.F.-B numerele 11, 12 din 1960 și nr. 1 din 1961, se vor trimite în plic așezate în ordine crescîndă și însoțite de un borderou. Problemele de fizică se vor trimite în plic separat. Rezolvitorii de probleme sînt rugați să nu trimită mai multe plicuri cu rezolvări în cursul unei luni. Plicul cu probleme de matematică să conțină un număr de cel puțin 10 probleme rezolvate pentru a fi luate în considerare la întocmirea rubricei rezolvitorilor de probleme; iar pe plic se va scrie: Redacției G.M.F.-B. (chestiuni de matematică), Strada Academiei, nr. 14 București 1.

EVIDENȚIAȚI

Pînă la 1 decembrie 1960 s-au mai evidențiat ca rezolvitori de probleme de matematici din G.M.F-B numerele 8—11/1960, după cum urmează:

1. **Năstăsescu Constantin** (cl. XI Pucioasa), 2. **Ene P. Dumitru** (anul I matematici București), 3. **Nită Constantin** (cl. XI Pucioasa), 4. **Cimoca Gh.** (fac. matematici Cluj), 5. **Olteanu S. Victor** (cl. XI ș.m. 19 București), 6. **Catrina Dumitru** (absolvent București), 7. **Teodorescu Catrinel** (cl. XI ș.m. 10 București), 8. **Ene P. Elena** (cl. VIII ș.m. 1 Ploiești), 9. **Persache Octavian** (cl. VIII ș.m. 11 București), 10. **Opriș Ion** (cl. XI ș.m. 1 Ploiești), 11. **Vîlceanu Sabin** (anul I matematici București), 12. **Șerban G. Longin** (cl. X Pucioasa), 13. **Cancer Anca** (cl. XI ș.m. 1 Tg. Jiu), 14. **Diaconescu Radu** (cl. X Pucioasa), 15. **Iuga Ștefania** (cl. VII Petroșani), 16. **Tîrcă Ion** (cl. X Pucioasa), 17. **Banu Gheorghe** (cl. X ș.m. 1 Pucioasa), 18. **Popescu Gheorghe** (cl. X Pucioasa), 19. **Marinescu Victor** (cl. X Pucioasa), 20. **Georgescu Horia** (cl. X ș.m. 11 București), 21. **Cupcea Nicolae** (cl. XI ș.m. 1 Buzău), 22. **Bejan Costel** (absolvent Galați), 23. **Iorga Valeriu** (cl. XI Lugoj), 24. **Păncescu Paul** (cl. X Odobești), 25. **Stetcu Ion** (cl. XI Lugoj), 26. **Nicolae Silvia** (cl. VIII ș.m. 1 Ploiești).

*

— Pînă la 1 decembrie 1960 s-au mai primit cel puțin cîte zece probleme de matematică bine rezolvate din numerele 8—11/1960, după cum urmează:

ABRUD. Ș.m. „Horia, Cloșca și Crișan". Cl. VIII. Radu Tudor (E: 1524, 43,50, 52, 54, 55, 60, 65, 77, 79, 81).

AFUMAȚI (București). cl. VIII. Berbece Octavian (4547, E: 1540, 43, 50, 52, 55, 59, 60, 74, 76, 79, 81), Drăgan Marius (E: 1540, 41, 43, 47, 50, 52, 53, 55, 59, 60, 74, 79), Ionescu Ion (E: 1540—43, 46, 50, 52, 53, 59, 60, 65, 70, 74, 76, 79), Matei I. Marin (E: 1513, 40, 41, 47, 50, 53, 55, 60, 70, 74, 79, 81), Pavel D. Marin (4290, E: 1540, 41, 48, 50, 52, 53, 55, 59, 60, 74, 76, 79), Pîrvu I. Const. (E: 1540, 43, 46, 47, 50, 52, 55, 59, 60, 74, 79), Radu V. Cornel (E: 1540, 43, 46, 49, 50, 52, 53, 60, 74). Cl. X. Armășelu Tudor (4305, 38, 65, 69, 71, 80—83). Cl. XI. Camburu Cristache (4302—09, 12, 14, 38, 48, 51, 54, 64, 65, 69, 71, 81—84, 96).

ARAD. Ș.m. Olga Bancic. Cl. VII. Stoinescu Radu (E: 1549, 50, 60, 70, 72—74, 79). Cl. VIII. Băbuțiu Teodora (E: 1543, 45—48, 50, 52—54, 61), Brînda Livia (E: 1541, 43, 45—47, 50, 52—54, 60), Cl. IX. Stoinescu Marina (4338, 65. 69, 71, 73, 81, 82, 90, 312). Ș.m. Ion Slavici. Cl. VII. Olariu Eleonora (E: 1440, 41, 46, 48—50, 53, 54, 59, 60, 70, 74, 79, 80). Cl. VIII. Vicol Viliam (E: 1545, 49, 50, 52, 63, 69, 73, 74, 77, 78, 81). Cl. IX. Olariu Ștefan (4304, 07, 09, 51, 65, 69, 71, 80—82). Cl. XI. Macovei Rodica (4306, 07, 09, 18, 19, 27, 33, 54, 64, 69, 80), Versendaru Ioan (4313, 60, 62, 64, 69, 80—84, 96).

Scoala de 7 ani **Grădiște**. Cl. VI. Lupa Liliana (E: 1530, 38, 41, 50, 59, 60, 70, 72, 74, 79). Cl. VII. Petrescu Elisabeta (E: 1530, 43, 48—50, 52, 59, 60, 69, 70).

BACĂU. Absolvent Pavel Marlena (4342—44, 46—48, 51, 53, 54, 55, 60—62, 65, 68—71, 79). Cl. XI. Sîrbu Angela (4302, 03, 08, 09, 12, 33, 69, 70, 80—84, 90, 96, 98, 99, 412). BAIA DE ARIEȘ. Cl. VIII.Ciura Al. (4302, 05, 09, 49, 51, 67, 81. 98, 99, E: 1540—45, 47, 49, 50. 52, 53, 57, 59—62, 64, 65, 70—74, 77—79, 81).

BAIA MARE. Cl. X. Drăgușescu Maria (4302, 05, 08, 19, 41, 67, 73, 80—82, 84, 98, 99). Cl. XI. Vlahovici Nicolae (4302—09, 18, 19, 25—28, 33, 49, 54, 69).

BALŞ (Craiova). Cl. VIII. Voiculescu V. Florian (E: 1540—43, 45, 52, 59, 60, 64, 70, 77, 81, 81). C I.XI. Dinu M. Gh. (4302—05, 07—09, 12, 14, 80—83, 96).

BISTRIŢA. Cl. XI. Paşca Iuliu (4306, 14, 18, 19, 25, 27, 28, 33, 62, 67, 70, 80, 82, 83, 98, 412, 18, P).

BIRLAD. Cl. VIII. Butnariu Artin (E: 1571, 73, 74, 76, 78). Cl. XI. Arsene Gh. (4302, 04, 06—09, 14, 15, 30, 38), Calapodescu Valeria (4302—05, 07—09, 14, 30), Iliescu Mihaela (4302, 03, 05—08, 14, 15), Katz Matilda (4302—09, 14, 15).

BOTOŞANI. Ş.m. 2. Cl. XI. Constantin Radu (4265, 71, 83, 303, 06, 08, 37, 51, 62, 64, 70, 80, 82, 96), Vaizer Gherta (4304, 07—09, 14—16, 38, 51).

BRĂILA. Ş.m. 1. Cl. VIII. Anghel Elena (E: 1559—61, 69, 70, 73, 75, 77, 79), Cl. X. Chitruşcă Maria (4302, 04, 05, 07, 09, 38, 67, 69, 70, 82, 89, 99), Lăpuşneanu Vasile (4302, 04, 08, 09, 33, 38, 51, 67, 69, 82, 89, 98, 99), Lohr Friederica (4302, 04, 05, 07—09, 38, 59, 69, 82), Lovenson Mihaela (4302, 04, 07—09, 38, 51, 67,, 69, 82, 89, 98, 99), Mazochi D. Elena (4302, 04, 05, 09, 38, 51, 67, 68, 82, 98), Muşat Elena (4302, 05, 09, 38, 51, 67, 69, 82, 89, 97,, 98), Năstase Rodica (4302, 08, 09, 67, 69, 70, 82, 89, 98, 99), Pricop Maria (4302, 04, 05, 08, 09, 38, 51, 69, 82), Sistis Dimitris (4302, 04, 05, 08, 09, 38, 51, 69, 82), Teodorescu Rodica (4302, 04, 07—09, 38, 67, 69, 82, 89, 98, 99), Topală Elena (4302, 04, 08, 09, 38, 53, 67, 69, 70, 82, 87, 98, 99), Vlahia Margareta (4302, 08, 09, 38, 51, 67, 69, 82, 89, 98, 99), Ş.m. 2 N. Bălcescu. Cl. XI. Moţet M. Maria (4303, 06, 25, 33, 42, 49, 51, 52, 54, 59, 62, 65, 67, 68, 75, 81, 82, 98, 9, P). Ş.m. 3. Cl. VIII. Fischel Aurel (E: 1540, 41, 45, 46, 48, 50, 59, 60, 70, 74, 79), Goldenberg Ady (E: 1540, 41, 45, 47, 48, 50, 60, 70, 74, 79), Pistner Ginette (E: 1541, 45, 48, 50, 52, 59, 60, 65, 70, 74, 76, 79), Cl. XI. Giurgiu Maria (4302—09, 14, 25, 31, 33, 51, 58).

BUCECEA. (Cojocaru Gh. (E: 1541, 46, 53—55, 59, 60, 63, 70, 79).

BUCUREŞTI. Studenţi: Cornblum Eugen (f. energetică) 4342, 54, 59, 60, 64,, 65, 69, 72, 76, 77, 79, 80, 82—84). **Ene P. Dumitru** (f. matem.) (4275, 79, 79, 89, 90, 95, 302—09, 14—16, 19, 22, 30, 33, 36—38, 41—43, 46, 47, 49, 51, 53—55, 59—65, 67—72, 75—84, N, P), Marinescu Viorel (f. mat.-fiz.) (4248, 50, 56, 57, 60, 68, 73, 86, 87, 98), **Vîlceanu Sabin** (f. mat.-fiz.) (4204, 05, 09—12, 15, 36, 41—43, 46—48, 50, 56, 60—62, 71, 75, 89, 90, 302, 03, 05, 08, 09, 42, 51, 54, 77, 79, 80, 82, 84, 416). Absolvenţi: **Catrina Dumitru** (4256, 57, 72, 80, 82, 98, 300, 02, 03, 06, 08, 14, 19, 33, 36, 39—51, 54, 55, 60, 62, 65, 69, 70, 76—85, 90, 91, 94—401, 03, 09, 12, P), Lupaş Laurenţiu (4163, 67, 69, 72—74, 76, 78, 83, 84, 91, 93, 94, 99—202, 06, 08—10). Ş.m. 1 N. Bălcescu. Cl. VIII. Ţilenschi Mircea (E: 1541—45, 47—50, 52—55, 57, 59—61, 64, 66—71, 73, 74, 77, 79, P). Cl. X. Talle Petre (4302, 04, 05, 07—09, 27, 33, 42, 65, 69, 81, 82, 91, 98, 407). Cl. XI. Stan A. Mircea (4313—16, 55, 64, 82, 90, 93, 94, 97, 405, 12, P). Ş.m. 2 T. Vladimirescu. Cl. IX. Grigoriu Mihai (4302, 04, 07, 09, 38, 65, 69, 71, 73, 75). Ş.m. 3. Ion Neculce. Sucitu Al. (E: 1555, 57, 59—52, 69—74, 79).

Ş.m. 4 Aurel Vlaicu. cl. VIII. Amărioarei Ileana (E: 1551, 71—79, 81), Beck Cristian (E: 1540, 41, 45, 47, 55, 59, 60, 70), Galişov Constantin (E: 1571—75, 77—81), Dincă Aurel (E: 1540, 53, 59, 60, 70, 73, 74, 76, 77, 79), Dumitru Cornel (4390, E: 1571, 73—79), Graur Gabriela (E: 1531, 32, 40—44, 46, 47, 59, 70), Nicolau Marian (E: 1571—75, 77—79, 81), Nuţu Paul (E: 1540—42, 45, 47, 49, 51, 54, 59, 60), Oprescu I. Const. (E: 1540, 41, 43, 48, 49, 52, 54, 57, 59, 66, 79). Ş.m. 6. Cl. VIII. Anton Al. (E: 1519, 27, 41—50, 52—54). Ş.m. „I. L. Caragiale". Cl. XI. Mazilu Gh. Luminiţa (4348, 51, 60, 52, 65, 70, 71, 80, 81, 96, 411).

Ş.m. 10. Cl. VI. Fianu Cristina (E: 1541, 46, 53, 60, 63, 70, 74, 79). Cl. X. Dumitrescu Emilia (4303, 08, 09, 15, 51, 53, 54, 69, 71, 80, 82, 83), Georgescu Stelian (4303, 05, 09, 47, 53, 54, 69, 71, 82, 84), Pavel A. Eva (4302, 04, 05, 07, 09, 42, 47, 54, 69, 71, 80—82). Cl. XI. Finţescu Elena (4348, 49, 51, 52, 54—56, 60, 62, 64, 66, 67, 69—71, 73, 75), **Teodorescu Catrinel** (4344, 51, 54, 55, 59, 60, 62, 64, 65, 68—71, 75, 80—83, 85, 90, 91, 94, 96, 98, 404, 09, 11—13, 16, 19, 20, 32, 25, 27, 29, 44, 48, 52, 53, P). Ş.m. 11 D. Cantemir. Cl. VI. Cristescu Eugenia (E: 1541, 45, 52, 59, 60, 70, 74, 79), Dumitru Mariana (E: 1501, 06, 13, 22, 59, 69, 73). Cl. VII. Medaru Doina (E: 1553, 55, 61, 64, 69, 71, 73, 74, 77—81). Cl. VIII. **Persache Octavian** (4248, 49, 56, 57, 68, 71, 86, 309, 65, E: 1528—31, 35, 38, 40, 42, 44, 46, 51, 47—62, 69, 70, 72—74, 76—79, 81). Cl. X. **Georgescu Horia** (4203—05, 07—10, 20, 24, 36, 44, 45, 48, 50, 56, 67, 62, 63, 65, 78, 80, 302, 04, 05, 07, 09, 38, 47, 48, 51, 54, 65, 69, 71), Gianni Emanuel (4203, 07, 24, 44, 45, 48—50, 65, 68, 87, 98), Voiculescu Cristian (4203, 07, 08, 10, 44, 45, 54, 56, 57, 62, 65, 69). Cl. XI. Cătănescu I. Vasile (4302, 07, 09, 25, 33, 51, 54, 60, 82, 83), Cristescu Dragoş (4303, 06, 06, 08, 09, 37, 51, 54, 62, 65, 80—82, 96).

Ş.m. 12 Spiru Haret. Cl. X. Badea Mihai (4307, 09, 51, 54, 80—83, 88). Ş.m. 13 Mihai Viteazu. Cl. VIII. Flondor Paul (E: 1559—61, 64, 69, 70, 87, 89—91). Ş.m. 15 Elena Sîrbu. Cl. VIII. Vladinger Jaquelin (4390, E: 1556, 61, 64, 67, 68—71, 73, 77, 79). Ş.m. 16

George Coşbuc. Cl. IX. Morgenstern Schoel (4304, 05, 07—09, 19, 49, 65), Moscovici Corneliu (4304, 05, 07—09, 19, 49, 65, 67, 69, 81), Siegler Goldiţa (4304, 05, 09, 19, 27, 69, 81—83, 98, 99). Ş.m. 18 M. Eminescu. Cl. IX. Moldoveanu Teodora (4302, 09, 12, 16, 37). Cl. X. Crăcinoiu Gh. (4305, 08, 14, 51, 69, 71, 81, 82, 416). Cl. XI. Pîrşan Liviu (4215, 17, 20, 21, 36, 65, 72, 82, 302, 03, 05, 08, 09, 25, 33, 37, 42). Ş.m. 19 Ion Creangă. Cl. XI. **Olteanu S. Victor** (4302—11, 13, 15, 16, 19, 20, 22, 25, 27, 33, 38, 41—49, 51, 52, 54, 59—63, 65, 67, 69—71, 73, 75). Ş.m. 20 Gh. Şincai. Cl. V. Pop Corneliu (E: 1549, 55, 74, 70). Cl. XI. Făgărăşanu I. Teodor (4302—09, 15, 30, 37). Ş.m. 22 Gh. Lazăr. Zamfirescu Tudor (4351, 53—55, 60, 65, 68, 69, 71, 73, P, N). Ş.m. 23. Cl. IX. Cleanoveanu Eugen (4308, 44, 62, 69, 73, 70—82, 90, 426). Ş.m. 24. V. Alecsandri. Cl. XI. Popescu Natalia (4302—09, 14, 33, 37, 38). Ş.m. 25. Cl. VIII. Dumitru D. Remus (4305, 38, 47, 65, 69, 80, 82, E: 1542, 51, 54, 67). Ş.m. 27. Cl. VIII. Locusteanu Dan (E: 1532, 39, 41, 43—47, 50, 52, 55, 59—61, 70). Ş.m. 28. Dr. Petru Groza. Cl. VII. Mureşanu Mihai (E: 1543, 45—47, 50—52, 55, 60—62, 70, 71. 73, 77, 79). Cl. VIII. Alamar Andrei (E: 1542, 47, 50, 53, 60, 69, 70, 74, 77, 79, 81), Brănescu Maria (E: 1540, 41, 45, 47, 48, 52, 53, 57, 59—61, 67, 69—71, 73—77, 79, 81), Măicănescu Al. (E: 1545—47, 50, 53, 60, 61, 70, 71, 73, 77—79, 81), Vîrlan Melania (E: 1545, 47, 51, 53, 71, 74, 76, 77, 79, 81). Ş.m. 32 Filimon Sîrbu. Cl. VII. Florea George (E: 1528, 30, 31, 37—46, 48—54). Cl. X. Vinea Vl. (4342, 45, 47, 48, 51, 54, 59, 65, 71, 76. 81, 91, 93). Ş.m. 34 C. A. Rosetti. Cl. VIII. Cernicia Petre (E: 1542, 43, 45, 47, 50—53, 55, 60). Ş.m. 39. Cl. VII. Dulhan Nela (E: 1541, 43, 45, 46, 48, 49—52, 54). Cl. VIII. Gianni Grigore (E: 1540, 42, 43, 45—54, 59—62, 64—67, 70). Şc. de 7 ani nr. 24. Cl. VII. Niţă I. Cristian (E: 1555, 59—61, 64, 70, 73, 74, 79, 80). Şc. de 7 ani nr. 64. Cl. VI. Iordache Ion (E: 1540, 41, 43—45, 49, 53, 59, 60, 70). Şc. de 7 ani nr. 82. Cl. VII. Derner Ştefania (E: 1541, 44, 60, 61, 69, 70, 73, 79, 80), Marcovici Elda (E: 1541, 60—62, 64, 69, 70, 75, 74, 79, 80). Şc. de 7 ani nr. 119. Cl. VII. Deca Florian (: 1529, 41, 45—46, 62—55, 59—61, 69, 70). Şc. de 7 ani nr. 142. Cl. VII. Constantinescu Elena (E: 1538, 39, 41, 45, 47, 48, 53, 54, 60, 62).

BUZĂU. S.m. 1. Cl. XI. **Cupcea Nicolae** (4267, 71, 78, 80, 83, 302—08, 15, 37, 51, 54, 55, 59, 60, 62, 69—71, 80—83, 91, 94, 96. 97, 400, 12, 15, 18, P), Somnea Gh. Dan (4302—09, 14, 54, 60, 65, 79).

BUZIAŞ. Cl. VI. Adamescu Ana (E: 1543, 46, 50. 53, 58, 79, 80, 95, 97), Damian Maria (E: 1550, 53—55, 59, 60, 74, 79, 80), Drăgănescu Marioara (E: 1543, 46, 50, 53, 55, 58, 79, 80, 95, 97). Groza Mărioara (E: 1543, 46. 50, 53, 59, 60, 74, 79, 80), Meglei I. Elena (E: 1543, 46, 50, 53, 55, 58, 79, 80, 95, 97), Prodan Aurel (E: 1543, 50, 53—55, 59, 74, 79, 80, 95). Cl. VII. Adamescu Cornel (E: 1540, 41, 43—45, 48, 49, 52, 55, 70), Adamescu Ion (E: 1540, 41, 43, 44, 48, 52, 55, 60, 70, 74, 79), Colancea Gh. (E: 1543, 44, 48, 52, 55, 59, 60, 70, 74, 79), Drăgănescu Maria (E: 1540, 43, 44, 48, 55, 59, 60, 70, 74, 79), Druţul Florica (E: 1541, 43, 45, 48, 50, 59, 60, 70, 74, 79), Neamţu Ion (E: 1541, 43—45, 48, 52, 58, 60, 70, 74, 79), Savu Carmen (E: 1541, 43, 45, 48—50, 59, 60, 74, 79), Telibaşa Maria (E: 1541, 43, 45, 50, 52, 59, 60, 70, 74, 79), Vinţi Gh. (E: 1540, 41, 43—45, 48, 49, 52, 55, 70). Cl. VIII. Foale Titi (E: 1529, 32, 33, 42, 43, 46, 47, 49, 53, 54), Mieşa Viorel (E: 1543, 45, 46, 50, 52, 55, 59, 69, 60, 65, 70).

CALAFAT. Cl. VIII. Baraga C. Viorel (E: 1535, 42, 47, 51, 52, 59, 60, 64, 77, 81), Calcea I. Const. (E: 1532, 33, 42, 47, 51, 54, 49, 60, 64, 70, 77, 78, 81), Duca I. Const. (E: 1533, 42, 47, 51, 54, 59, 64, 70, 77, 78), Iordache St. (E: 1520, 32,, 34, 42, 59, 60, 64, 77, 78, 81), Spulber Marcela (E: 1532, 35, 42, 47, 54, 57, 59, 60, 64, 70, 77, 81).

CĂLĂRAŞI. Ş.m. 2. Cl. X. Burtel Stela (4302, 09, 16, 44, 48, 51, 54, 65, 69, 81, 82, 90, 91), Istrate Const. (4302, 05, 09, 41, 48, 51, 53, 54, 65, 69, 82, 90, 91, 416), Milea D. Ecaterina (4302, 44, 48, 51, 54, 65, 69, 81, 82, 90, 91, 416), Pavleţ Al. (4302, 04, 05, 07, 09, 41, 42, 48, 51, 54, 65, 69). Cl. XI. Burcu Victoria (4304, 05, 07—09, 12, 38, 54, 65, 69, 71, 83, 86, 90, 416).

CIMPIA TURZII. Cl. X. Ganea Macedon (4307—09, 12, 27, 33, 38, 41, 47, 65, 69, 71, 81, 82, 84).

CIMPINA. Ş.m. 1. Cl. VIII. Ganea Mihai (E: 1529, 38, 43, 45, 53, 55, 60, 70, 74, 79), Grigorescu I. Alin (E: 1571, 73—75, 78, 80, 81), Gruia Const. (E: 1539, 50, 52, 55, 60, 61, 67, 69, 70, 73, 74, 77, 79, 80), Ilina V. Stelian (4338, E: 1541, 54, 55, 61, 73, 74, 76—80), Mircea Al. (E: 1541, 54, 55, 61, 67, 73, 74, 70—80), Miu I. Ion (E: 1539, 41, 43, 50, 52, 73, 74, 77, 79, 80), Moldoveanu Grigore (E: 1543, 45, 50, 52, 55, 59, 60, 70, 74, 77, 79), Moraru Gh. (4547, E: 1540, 43, 46, 49—52, 59—61, 70, 73, 74, 79), Nedelcu Ion (E: 1541, 59—61, 73, 74, 77, 78, 80), Nistor I. Viorel (E: 1528, 43, 45, 53, 55, 60, 70, 74, 79), Panaitescu M. Tr. (E: 1543, 45, 49, 50, 52, 55, 59, 60, 70, 74, 76—80), Rusu C. Marian (E: 1543, 46, 52, 57, 64, 76, 79), Seciu Gh. (E: 1543, 45, 49, 50, 52, 55, 59, 60, 70, 74, 77—80), Sverjinski Eugen (E: 1543, 45, 50, 52, 55, 59, 60, 70, 74, 77, 79).

CÎMPULUNG MOLDOVENESC. Ş.m. Dragoş Vodă. Cl. VI. Hrab Rodica (E: 1541, 45, 46, 49, 53, 55, 59, 63, 70, 74, 79), Mehlman Al. (E: 1540, 41, 49, 53, 59, 60, 63, 72, 74, 79, 79). Cl. VII. Beşliu Elena (E: 1541, 43, 45, 46, 50—52, 59—62, 69, 70). Cl. VIII. Cornescu Cintia (E: 1540—43, 45, 47, 50—52). Cl. X. Cotlariuc Nicolae (4303—05, 07, 09, 12, 14, 21, 37, 69), Dincă Maria (4302—05, 07—09, 12, 14, 37, 38), Hmelevski Ghertrudi (4302—05, 07—09, 14, 37, 38), Maidaniuc Olga (4302, 03, 05, 08, 09, 14, 33, 37), Manec Oxana (4302—04, 07—09, 14, 37, 38), Mihaiuc Oltea (4302—05, 07—09, 12, 14 37, 38), Paraschiv Dragoş (4302, 03, 05, 07—09, 12, 14, 37), Rosner Igo (4302—05, 07—09, 12, 14, 38). Cl. XI. Mărgărit Cătălin (4302—05, 09, 14, 18, 25, 27, 33, 48, 64, 71, 80—83, 98). Ş.m. Ştefan-cel-Mare. Cl. XI. Strul Al. (4302—09, 12, 16, 51, 60, 70).

CLUJ. Studenţi: **Cimoca Gh.** Fac. Mat.) (4239, 72, 83, 302—09, 14, 25, 27, 32, 33, 35, 37, 38, 40, 54—56, 59, 60, 62, 64, 65, 67, 69—71, 76—82, 90, 91, 95, 98—400, 12, 14—16, P), Moldoveanu (fac. mat. fiz.) (4312, 21, 51, 54, 59, 62, 64, 69—71), Vasilean V. Mihail (fac. mat. fiz) (4302—09, 14, 16, 24, 29, 31, 37, 38, 42, 43, 51, 53, 54, 62—64, 67, 69, 70).

Ş.m. 2 George Coşbuc. Cl. VII. Ungur Radu (E: 1540, 41, 43—46, 52, 53, 60), Cl. VIII. Cîndea Dan (E: 1540—43, 46, 47, 51, 54, 59, 77), Corma Ecaterina (E: 1540—48, 59, 60, 11, 81), Fenerean Monica (E: 1541—43, 48—50, 52, 53, 59, 60, 77), Henţ Silviu (E: 1540, 41, 43, 46, 48, 49, 51, 54, 59, 77), Liteanu Margareta (E: 1540—48, 50), Lupşa Ileana (E: 1540—42, 49, 51, 54, 59, 60, 77, 81), Mocanu Rodica (4547, E: 1540—44, 48, 52, 59, 74, 79), Petraşcu Ligia (E: (1540—42, 48, 59, 60, 74, 77, 79), Petran Rozalia (9: 1540, 41, 50—52, 54, 59, 60, 77), Petruţa Viorica (E: 1540, 41, 45, 46, 49—52, 54), Tamaş Maria (E: 1540, 41, 48, 50—52, 54, 59, 60, 77), Tessler Editta (E: 1540—42, 48, 51, 59, 60, 74, 77, 79). Ş.m. 4 Emil Racoviţă. C. VI. Berbul Sorin (E: 1540, 41, 43—45, 50, 52—54, 55, 70, 74, 79), Stoian Ion (E: 1543, 44, 46, 49, 50, 52, 53, 70, 74, 79). Cl. VII. Coşorcă Maria (E: 1540—42, 44, 46, 50, 51, 61, 69), Gros Adalbert (E: 1540—42, 44, 46, 51, 59, 73, 79), Marian Iuliu (E: 1528—31, 33—35, 38, 39, 52). Cl. VIII. Hadnagy Vasile (E: 1541—47, 49, 50, 52—54), Maier Virgil (E: 1540—42, 44, 47, 48, 59—61, 70), Zidveanu Mariana (E: 1540, 42, 45—48, 50—54). Cl. IX. Fein Reghina)4308, 48, 65, 69, 80, 82, 85, 91, 97—99), Pop Marcel (4319, 27, 38, 42, 60, 65, 68, 98, 99). Ş.m. Gh. Barițiu. Cl. VIII. Călugăreanu Grigore (E: 1541, 43, 47, 52, 59, 60, 65, 69, 70, 77, 79). Ş.m. N. Bălcescu. Cl. VI. David Sanda (E: 1541, 46, 49, 53—55, 72, 74, 79). Cl. VII. Botroagă Emil (E: 1538, 42, 43, 46, 50, 52, 59—61, 70). Ş.m. de muzică. Cl. VI. Farkaş Petru (E: 1543, 48, 50, 52, 54, 59, 61, 63, 74, 79). Şc. pedagogică de învăţători. An. I. Cozar Onuc (E: 1541, 42, 45, 46, 53, 54, 60, 70, 74, 77, 79). An III. Dab Florica (4365, E: 1538, 40—42, 45, 48, 50, 52, 53, 70), Farcaş Viorica (4347, 65, E: 1538, 41, 42, 45, 48, 50, 52, 53, 70). Grăjdan Ioan (4365, E: 1538, 41, 42, 45, 47, 48, 50, 52, 53, 70, 77).

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ 1961

pentru elevii şcolilor medii, profesionale, pedagogice, tehnice.

Se vor mai ţine următoarele etape:

— etapa regională — *în ziua de 23 martie, ora 9, matematica,*
— în ziua de 23 martie, ora 15, fizica,
— în ziua de 24 martie, încheierea etapei.

— etapa finală, *în zilele de 23—25 aprilie 1961, la Bucureşti, lucrări scrise, probe orale şi lucrări de practică de laborator.*

ERATĂ. La pag. 6 rîndul 11 de sus se va citi conductibilitatea în loc de contabilitatea. La pag. 28 rîndul 18 în loc de *directe* se va scrie *diedre*. La pag. 49 la evidenţiaţi se va scrie: 1. *Popa Al.* (clasa XI. S. m. 20 Bucureşti).

CĂTRE REZOLVITORII DE PROBLEME

Corespondenții care ne trimit probleme rezolvate trebuie să redacteze fiecare problemă separat, însoțind-o de toate calculele necesare și de figuri desenate cu îngrijire. Nu se vor trimite soluțiile mai multor probleme pe aceeași foaie. Problemele rezolvate de fizică se vor trimite separat, iar pe plic se va scrie: *Pentru redacția de fizică.*

Se primesc lunar cel puțin zece soluții numai la problemele și exercițiile din ultimele trei numere apărute. Pe plic se va scrie localitatea și școala pe care o urmează rezolvitorii, pentru a se evita confuzii la întocmirea rubricii rezolvitorilor de probleme și a listei celor evidențiați. Soluții la problemele propuse pentru școala de 7 ani se primesc numai de la elevii claselor V—VIII, sau ai școlilor profesionale.

Problemele care se propun de către colaboratorii revistei să fie clar alcătuite și însoțite de soluții, să fie personale, iar nu luate din cărți sau reviste. Elevii sînt sfătuiți să înceapă a propune probleme numai după ce au rezolvat un număr destul de mare de exerciții și probleme. Problemele propuse, dar necorespunzătoare, nu se pot publica. Dacă un corespondent constată că unele probleme propuse au fost publicate în cărți sau reviste, este rugat să ne arate precis volumul și pagina unde a mai apărut enunțul sau soluția problemei respective.

Corespondentul nostru care a citit și a înțeles deplin multe din soluțiile publicate, a rezolvat multe din problemele propuse, poate și este îndemnat să încerce să schițeze cîte o notă rezultată dintr-o observație făcută cu ocazia rezolvării unei chestiuni mai grele. Aceste note să fie *refăcute de mai multe ori înainte de a fi trimise*, pentru ca redactarea lor să fie *cît mai clară și concisă*. Figurile să fie făcute separat. În redactare se vor evita prescurtările. Nu se va scrie: $\parallel$, $\perp$, $\parallel =$, Δ, $\sphericalangle$, Tr., etc., iar trecerea de la un calcul la altul să fie explicată pentru a se putea urmări ușor desfășurarea unei demonstrații. Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

La publicarea problemelor rezolvate se vor menționa rezolvitorii care au dat o bună redactare și o soluție interesantă, sau mai multe metode de rezolvare.

Tovarășii colaboratori elevi sînt rugați să ne trimită date asupra activității lor extrașcolare la matematică și la fizică, asupra activității cercurilor de matematică și de fizică la care iau parte, pentru ca apoi, prin revistă, să se poată realiza cu succes un schimb de experiență. Dările de seamă concrete se vor publica în G.M.F.-B.

Autorii sînt rugați ca la întocmirea articolelor și notelor să țină seama de următoarele: articolele sau notele să fie scrie clar cu cerneală sau dactilografiate la două rînduri și pe o singură parte a foii, figurile să fie desenate îngrijit și pe o foaie separată. Problemele propuse să fie însoțite de una sau mai multe soluții.

Autorul să semneze clar lucrarea personală pe care o trimite pentru publicat, de asemenea să scrie adresa și data trimiterii lucrării.

Colecții și numere din anii precedenți

Societatea de Științe Matematice și Fizice din R.P.R., posedă exemplare mai vechi din G.M.F.-B.

Cititorii noștri își pot procura colecții ca și numere disparate, depunînd banii la poștă prin mandat poștal pe numele Societății de Științe Matematice și Fizice, strada Academiei nr. 14, contul 070.004 la B.R.P.R., filiala Lenin.

Prețul unui exemplar este de lei 3 pentru G.M.F.-A și de lei 1,50 pentru G.M.F.-B. Cheltuielile de transport sînt de 0,20 lei de exemplar.

ABONAMENTE — Societatea de Științe Matematice și Fizice din R.P.R. primește abonamente începînd cu nr. 1/1961 la oricare din publicațiile sale:

a) Pentru instituții, școli, biblioteci la prețul de lei 60 anual, pentru fiecare din periodicile sale: G.M.F.-A, G.M.F.-B, M.F.L., Bulletin Mathématique și 40 lei anual la „Mathematica".

b) Pentru profesori și elevi la prețul de 18 lei la G.M.F.-B sau M.F.L. de 36 lei la G.M.F.-A, de 60 lei la Bulletin Mathématique și de 40 lei la „Mathematica".

— Fiecare abonat este rugat să facă cunoscută G.M.F.-B și altor colegi, pentru a face abonamentele din vreme în vederea planificării tirajului lunar.

— Abonamentul se poate face individual prin oficiile poștale locale sau prin factorii poștali, cu prețul de 18 lei pe 1961 (12 numere).

BIBLIOTECA SOCIETĂȚII DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE DIN R.P.R.

1. E. RUSU	Bazele teoriei numerelor.
2. A. I. MARKUȘEVICI	Șiruri recurente.
3. N. N. VOROBIEV	Numerele lui Fibonacci.
4. P. S. ALEXANDROV	Introducere în teoria grupurilor.
5. I. S. SOMINSKI	Metoda inducției matematice.
6. GH. MIHOC	Elemente de calculul probabilităților.
7. H. IONESCU	Calcule numerice.
8. A. I. MARKUȘEVICI	Arii și logaritmi.
9. A. I. GHELFOND	Rezolvarea ecuațiilor în numere întregi.
10. O. SACTER	Despre conice și alte curbe.
11. ION IONESCU	Maxime și minime geometrice.
12. F. I. ZIGHEL	Cometele.
13. S. SKLOVSKI	Radioastronomia.
14. V. ATANASIU	Structura materiei.
15. V. V. SARONOV	Soarele și observarea lui.
16. O. KREINDLER	Elemente de calcul vectorial.
17. B. B. KUDRIAVȚEV	Experiențe simple cu ultrasunete.
18. M. V. PENTKOVSKI	Nomograme.
19. A. KAHANE	Elemente de teoria congruențelor de drepte.
20. GH. ȚIȚEICA	Culegere de probleme de geometrie, (revăzută și completată de G. D. SIMIONESCU).
21. A. HALANAY	Introducere în teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale.
22. N. STĂNESCU	Electronul.
23. V. SERGIESCU	Introducere în fizica solidului.
24. G. N. BERMAN	Cicloida.
25. C. BORȘ	Noțiuni de geometrie proiectivă.
26. AL. SANIELEVICI	Introducere în radioactivitate.
27. M. HEROVANU	Introducere în fizica atmosferei.
28. C. G. BEDREAG	Bibliografia fizicii române.
29. I. S. DUBNOV	Erori în demonstrațiile geometrice.
31. C. POPOVICI	Stelele, date fizice, structura internă, originea și evoluția lor.
32. C. DRIMBA	Elemente de mecanică cerească.
33. C. IONESCU BUJOR	Elemente de transformări geometrice (I).
34. NICOLAE MILEA	Elemente de geomagnetism.
35. GH. A. CHIȚEI	Metode pentru rezolvarea problemelor de aritmetică.
36. G. PETRESCU	Cutremure de pământ.
37. C. IONESCU-BUJOR	Elemente de transformări geometrice (II).
38. O. SACTER	Olimpiade matematice.
40. A. I. HINCIN	Fracții continue
41. I. S. GRADSTEIN	Teorema directă și reciprocă.

Tip. Învățământului, București, — c. 6086.

Lei 1,50

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE
MATEMATICE ȘI FIZICE DIN R.P.R.

GAZETA MATEMATICĂ ȘI FIZICĂ

SERIA B

Anul XII martie 1961

3

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

(SERIA B)

Anul XII, nr. 3 — martie 1961

SUMARUL

		pag.
1.	*I. V. Mescerski de A. Stoenescu*	129
2.	*Traducerea dintr-o limbă în alta, cu maşina electronică de calcul de S. Marcus*	133
3.	*Energie electrică din căldură (prelucrare)*	140
4.	*Aplicaţii ale teoremei celor trei perpendiculare de Tudor Zamfirescu*	146
5.	*Presiunea osmotică de D. Tănase*	150
6.	*Determinarea densităţii corpurilor prin mijloace simple de G. Segal*	155
7.	*Note matematice de Mircea Rădulescu şi H. Rosner.*	158
8.	*Caleidoscop matematic şi fizic*	160
9.	*Probleme rezolvate (4106; 4111; 4112; 4114; 4115; 4124; 4136; 4157; 4163; 4171; 4172; 4173)*	164
10.	*Chestiuni de examen (4575—4583)*	179
11.	*Probleme propuse (4584—4613)*	181
12.	*Exerciţii şi probleme propuse pentru şcoala de şapte ani (E: 1648—E: 1660)*	185
13.	*Poşta redacţiei*	187
14.	*Rubrica rezolvitorilor de probleme*	188

ANUL XII — 3 — MARTIE

COMITETUL DE REDACŢIE

Ailincăi M., profesoară; *Atanasiu V.*, lector, redactor pentru fizică; *Boiangiu D.*, lector; *Ionescu-Bujor C.*, prof. univ.; *Ionescu-Ţiu C.*, profesor, redactor pentru matematică; *Manolescu Şt.*, profesoară; *Muşat I.*, profesor; *Petrovanu A.*, profesor, *Sacter O.*, conf. univ., redactor şef; *Simionescu D. Gh.*, conf. univ.; *Udrea E.*, profesoară.

REDACŢIA: Str. Academiei, 14 — Tel. 14.46.53 — Bucureşti 1

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar putea interesa redacţia noastră se vor trimite pe adresa de mai sus.

GAZETA MATEMATICĂ ȘI FIZICĂ
(SERIA B)
PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET
Anul XII, nr. 3 martie 1961

MÚSZAKI KÖNYVTÁR ... 1883

I. V. MESCERSKI

de *AL. STOENESCU*

Epoca actuală este pe drept cuvînt denumită epoca pătrunderii omului în cosmos. În adevăr, în această epocă s-au realizat primii sateliți artificiali, primele planete artificiale, primele nave cosmice ; s-au obținut astfel, primele date luate la fața locului asupra materiei și asupra condițiilor vieții la mari depărtări de Pămînt. Aceste realizări nu au fost însă posibile decît cu ajutorul rachetelor ; forța de propulsie a acestor rachete este produsă prin jetul particulelor de gaze din interiorul rachetelor (rezultate prin arderea combustibilului) azvîrlite prin duza de evacuare cu viteză foarte mare (circa 2,5—3 km/s).

Racheta este deci, un corp a cărui masă scade în timpul mișcării prin eliminarea combustibilului ; această scădere a masei este esențială pentru studiul mișcării unei rachete.

Ajungem astfel la necesitatea de a cunoaște dinamica corpului de masă variabilă.

Primul învățat din lume care s-a ocupat cu această problemă, a stabilit ecuațiile generale ale mișcării și a obținut rezultate remarcabile a fost marele învățat sovietic I. V. Mescerski.

Aplicațiile dinamicii corpului de masă variabilă nu se întîlnesc numai la rachete ; în natură precum și în tehnică întîlnim adesea corpuri de masă variabilă.

Astfel, Pămîntul are masă variabilă crescătoare din cauza prafului cosmic și meteoriților care cad pe suprafața lui ; la fel se poate spune despre Lună și toate celelalte planete.

Toate vehiculele cu combustibil, automobilele, avioanele, trenurile au de asemenea masa variabilă, masă care descrește pe măsura consumării combustibilului.

Cilindrii (mosoarele, sulurile, axele) pe care se înfășoară sau se desfășoară diferite materiale (hîrtie, pînză, stofă, sîrmă, ață) pot fi considerați corpuri de masă variabilă crescătoare, respectiv descrescătoare.

Depunerea picăturilor de ploaie, a fulgilor de zăpadă, a firelor de praf etc. pe suprafața corpurilor fac de asemenea, ca masa acestora să fie variabilă.

În multe din cazurile menționate anterior variabilitatea masei este însă foarte mică și ca urmare se neglijează în studiul mișcării.

În anumite probleme actuale, ca de exemplu zborul rachetelor, al avioanelor cu reacție etc., variația masei este un fenomen important de care trebuie neapărat ținut seama în studiul mișcării.

În studiul acestui fenomen I. V. Mescerski a fost un genial deschizător de drum ; fizicienii și inginerii au găsit la timpul necesar în

ecuațiile și formulele lui I. V. Mescerski, elementele esențiale pentru determinarea mișcării corpurilor de masă variabilă și au putut astfel să realizeze epocalele aparate care brăzdează acum nu numai atmosfera Pămîntului, ci și spațiul cosmic de la Pămînt pînă la mari distanțe dincolo de Lună.

Și acum să prezentăm o scurtă biografie. Ivan Vsevolodici Mescerski s-a născut în orașul Arhanghelsk la 10 august 1859; în anii 1871—1879 el urmează cursurile liceului din Arhangelsk pe care-l termină cu medalia de aur. În diploma primită cu această ocazie este trecută mențiunea: „curiozitatea sa științifică pentru matematică și limbile vechi este extrem de lăudabilă".

Ulterior Mescerski urmează facultatea de fizico-matematici de la Universitatea din Petersburg, unde a avut ca profesor de Mecanică pe marele învățat rus D. C. Bobîlev.

La terminarea cursurilor, Mescerski a rămas la catedra lui D. C. Bobîlev spre a se perfecționa și pregăti pentru cariera de profesor; în urma examenelor date, el obține în 1889 titlul de „magistru în matematică aplicată", iar în 1890, la 19 noiembrie, ține prima sa lecție la Universitatea din Petersburg în calitate de „docent privat" al catedrei de matematică aplicată.

Activitatea sa didactică s-a desfășurat apoi necontenit pînă în ultimele zile ale existenței sale. I. V. Mescerski a predat la Universitatea din Petersburg lecțiile de grafostatică, de integrarea ecuațiilor mecanicii și a condus lucrările practice ale studenților la cursul de mecanică.

În afară de Universitate, I. V. Mescerski a profesat la Institutul de drumuri și transporturi și la cursurile superioare pentru femei. În 1902 el este numit profesor de mecanică teoretică la Institutul Politehnic din Petersburg, nou înființat, unde a ținut cursuri și a comunicat rezultatele cercetărilor pînă la sfîrșitul vieții sale. A murit la 7 ianuarie 1935, în vîrstă de 76 ani, la Leningrad.

I. V. Mescerski a fost un mare profesor, un remarcabil pedagog, veșnic preocupat de perfecționarea predării, de metodica cursului de mecanică în institutele superioare, de definiția corectă a masei corpurilor etc. Dar marele său merit îl constituie activitatea sa științifică în general, și în special studiile sale asupra mișcării corpurilor de masă variabilă.

În cadrul acestor studii, I. V. Mescerski publică multe lucrări; dintre toate acestea menționăm pe cea mai importantă și anume: „dinamica punctului de masă variabilă". Expusă la 28 noiembrie 1798 drept disertație de „magistru", lucrarea a avut o primire destul de rece, mulți din cei prezenți neînțelegînd la acea epocă, importanța deosebită a acestei lucrări care deschidea un orizont nou în știința mișcării.

De fapt, în trecut, aceasta era soarta tuturor deschizătorilor de drumuri noi în știință și tehnică; deseori desconsiderați și supuși la tot felul de umilințe și privațiuni, în timpul vieții lor, nu erau apreciați la adevărata lor valoare decît mult după moartea lor, atunci cînd progresul tehnicii ajungea la nivelul teoriilor lor științifice.

Desigur acum, nu ne putem opri să nu dăm ecuația fundamentală a lui I. V. Mescerski, precum și o demonstrație cît mai simplă posibilă pentru stabilirea ei.

Reamintim că racheta se compune schematic, dintr-un înveliș A în interiorul căruia se găsește combustibilul solid sau lichid B prin arderea căruia se formează un jet continuu de gaze, expulzate prin duza C (fig. 1). Producerea forței reactive de propulsie F a rachetei se poate explica în multe moduri.

Una dintre cele mai simple explicații este următoarea: forța de propulsie este rezultanta tuturor presiunilor pe care gazul le exercită asupra pereților interiori din camera de ardere a combustibilului.

O altă cale pentru a înțelege modul de producere al forței de propulsie este următoarea: particulele de gaz ies prin duză cu viteze foarte mari

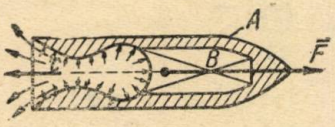


Fig. 1.

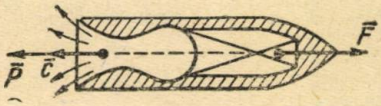


Fig. 2.

din cauza unor forțe elementare care lucrează asupra lor; rezultanta tuturor acestor forțe elementare este forța P care acționează asupra întregului jet de gaze. Conform legii a treia a dinamicii, a egalității acțiunii cu reacțiunea, odată cu producerea forței P (acțiunea) trebuie să apară și o altă forță egală și direct opusă (reacțiunea). Această forță este forța de propulsie F, egală în valoare numerică cu P, dar direct opusă și care acționează asupra rachetei. Din această explicație rezultă și denumirea forței F de *forță reactivă* (fig. 2).

Folosind cea de-a doua explicație, putem să determinăm forțele P și F. În adevăr, notînd cu m masa variabilă cu timpul, a rachetei, să o presupunem exprimată printr-o funcție de timpul t, adică:

$$m = f(t) \tag{1}$$

Întrucît masa descrește cu timpul, pentru un interval de timp elementar dt va rezulta o descreștere a masei cu cantitatea de gaze expulzate corespunzătoare $(-dm)$; semnul minus este necesar deoarece matematic $dm < 0$ (m fiind funcție descrescătoare), iar masa expulzată este neapărat pozitivă. Aceasta înseamnă, că în raport cu racheta o cantitate de gaze de masă $(-dm)$ trece în timpul dt de la viteza zero la viteza c de ieșire a gazelor prin duză.

Accelerația a_g în mișcarea gazelor va fi:

$$a_g = \frac{c}{dt}$$

Înmulțind această accelerație cu masa obținem valoarea numerică a forțelor P și F:

$$P = F = (-dm)\, a_g = -\frac{dm}{dt}\, c \tag{2}$$

Forța reactivă este astfel determinată.

Vectorial, forțele P și F se pot exprima în funcție de vectorul viteză $\vec{c}$ astfel:

$$\vec{P} = -\frac{dm}{dt} \cdot \vec{c} \; ; \; \vec{F} = \frac{dm}{dt} \cdot \vec{c} \tag{3}$$

relație care ne arată că forțele $\vec{P}$ și $\vec{F}$ sînt și direct opuse.

Notînd cu a accelerația rachetei și introducînd în formula lui Newton pe lîngă rezultanta R a forțelor obișnuite (greutatea G, rezistența mediului Q) și forța reactivă F obținem renumita ecuație a lui Mescerski:

$$\vec{ma} = \vec{R} + \vec{F} = \vec{R} + \frac{dm}{dt}\vec{c}, \tag{4}$$

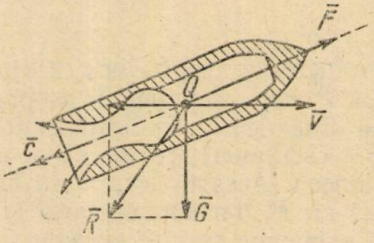


Fig. 3.

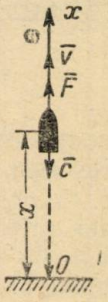


Fig. 4.

ecuație fundamentală în studiul mișcării rachetelor (fig. 3).

Un caz particular ne poate permite imediat integrarea ecuației (4) și anume, pentru $R = 0$ (se neglijează atracția gravității și rezistența mediului) și $c =$ constant (vertical descendent). Presupunînd că racheta pleacă pe verticala Ox din punctul de lansare O rezultă din (4), prin proiecție pe Ox (fig. 4)

$$ma = m\frac{dv}{dt} = -\frac{dm}{dt}c,$$

v fiind viteza rachetei la timpul t (se observă că proiecția vectorului $\vec{c}$ pe Ox este $-c$). Sau:

$$dv = -c\frac{dm}{m}$$

Integrînd de o parte și de alta a semnului egal:

$$v = -c \ln m + A \tag{5}$$

în care A este o constantă de integrare ($ln =$ logaritm neperian).

Presupunînd că la timpul inițial racheta are masa m_0 și că pleacă fără viteză inițială rezultă din (5):

$$0 = -c \ln m_0 + A$$

Obținem astfel :

$$A = c \ln m_0$$

deci :

$$v = c \ln m_0 - c \ln m = c \ln \frac{m_0}{m}, \qquad (6)$$

adică formula găsită de „părintele cosmonauticii" — Constantin Eduardovici Țiolkovski.

Ne oprim deocamdată aici pentru a nu da acestei expuneri o dezvoltare prea mare, mulțumindu-ne acum, cu obținerea relațiilor (4) și (6), fundamentale în mișcarea rachetelor.

Încheiem cu speranța că tinerii noștri cititori de azi, poate curajoși astronauți mîine, vor cunoaște și folosi rezultatele marelui I. V. Mescerski și se vor gîndi la el cu recunoștință și admirație.

TRADUCEREA DINTR-O LIMBĂ ÎN ALTA, CU MAȘINA ELECTRONICĂ DE CALCUL

S. MARCUS, candidat în științe fizico-matematice

1. Introducere

N-au trecut nici două zeci de ani de la apariția mașinilor electronice de calcul și aplicațiile lor sînt dintre cele mai surprinzătoare. Probleme ca acelea privind comunicațiile interplanetare și lansarea rachetelor cosmice stimulează construirea unor mașini electronice cu viteze din ce în ce mai mari.

Una dintre cele mai interesante aplicații ale mașinilor electronice este utilizarea lor în traducerea dintr-o limbă în alta. Posibilitatea traducerilor mecanice a fost întrevăzută încă în 1933, de către savantul sovietic Smirnov-Troianski. Însă condițiile materiale pentru punerea în aplicare a ideilor lui Troianski s-au ivit doar odată cu apariția mașinilor electronice de calcul. În ultimul deceniu s-a trecut la experimentarea traducerilor automate, în primul rînd din engleză în rusă (în Uniunea Sovietică) și din rusă în engleză (în Statele Unite).

Traducerea automată dintr-o limbă în alta se efectuează cu ajutorul mașinilor electronice de calcul. (Pe viitor, se așteaptă construirea unor „mașini de tradus", mașini electronice special construite pentru traducerea dintr-o limbă în alta). Urmează deci ca literele să fie înlocuite cu impulsuri electrice. În mașină se introduce un „dicționar electronic", corespunzător celor două limbi. Numărul cuvintelor din dicționar nu este prea mare (aproximativ cîteva mii). Aceste cuvinte se aleg atît din limba comună cît și din domeniul căruia îi aparțin textele ce urmează a fi traduse. Este deci, necesar, în prealabil, un studiu asupra frecvenței cuvintelor în limbă. Numai un astfel de studiu permite ca dicționarul introdus în mașină să fie alcătuit în mod științific.

2. Principiul mașinilor electronice

Principiul mașinilor electronice de calcul constă într-o scriere specială a numerelor, cu ajutorul lămpilor electronice. Cifrelor 0 și 1 li se pun în corespondență două stări posibile ale unei lămpi electronice. Cifra 0 corespunde situației în care lampa nu conduce curent iar cifra 1 corespunde situației în care lampa conduce curent. Orice număr se poate reprezenta printr-o anumită succesiune a cifrelor 0 și 1, fiecare repetată de un anumit număr de ori, deci printr-o anumită succesiune de lămpi aprinse și stinse. Aceasta revine la folosirea sistemului de numerație cu baza 2. În acest sistem, numărul 23, de exemplu, se reprezintă prin 10111, deoarece avem $23 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$; 15 se reprezintă prin 1111, deoarece avem $15 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$. Deci, pentru scrierea numărului 23 mașina folosește cinci lămpi, dintre care patru aprinse și una stinsă, în timp ce pentru scrierea numărului 15 mașina folosește patru lămpi, toate aprinse. Scrierea unui număr în baza 2 este mai lungă decît scrierea sa în baza 10. Dar viteza cu care lucrează o mașină electronică de calcul anulează acest inconvenient.

3. Cum se caută cuvintele în dicționarul din mașină

Pentru traducerea cu ajutorul mașinii electronice de calcul, literele alfabetului se scriu sub formă de coduri de cifre, asemănătoare codurilor utilizate în telegrafie. Deci, fiecare cuvînt se va scrie printr-un anumit șir de cifre; mașina îl va înregistra printr-o anumită succesiune de lămpi aprinse și lămpi stinse.

Prima operație pe care o face mașina este aceea de a „citi", de a lua cunoștință de fraza pe care urmează să o traducă. Această operație poate fi ușor automatizată dacă se scrie fraza cu ajutorul unor găuri, așa cum se face la banda de telegraf. Urmează, apoi, căutarea fiecărui cuvînt din frază în dicționarul care se află în mașină, dicționar în care cuvintele sînt înscrise cu ajutorul lămpilor aprinse și a celor stinse, așa cum s-a arătat mai sus. Pentru aceasta, fiecare cuvînt din frază este comparat cu fiecare cuvînt din dicționarul din mașină. Compararea se face scăzînd, pe rînd, numărul format cu cifrele care reprezintă cuvîntul respectiv din fiecare număr aflat în dicționar. Dacă există în dicționar un număr din care scăderea numărului introdus conduce la rezultatul zero, atunci înseamnă că cuvîntul a fost găsit în dicționar; dacă rezultatul scăderii nu este niciodată zero, înseamnă că cuvîntul respectiv din frază nu figurează în dicționarul din mașină. Această operație se face foarte repede. Dacă, de exemplu, mașina efectuează zece mii de scăderi pe secundă, căutarea unui cuvînt durează cel mult o zecime de secundă.

4. Mașina „învață" și gramatică

Primele experiențe de traducere cu mașina, anterioare anului 1955, s-au concentrat asupra lexicului, neglijîndu-se problemele de gramatică. Era așa numita perioadă de traducere „cuvînt cu cuvînt", deci se lua în considerare exclusiv situația individuală a cuvintelor, ignorîndu-se orice analiză lingvistică. În dicționarul din mașină nu se înregistra decît înțelesul generic al cuvintelor, făcîndu-se abstracție de flexiune. Însă acest

procedeu s-a dovedit insuficient. Cititorii care vor să se încredințeze de această insuficiență pot face următoarea experiență: Se ia un text oarecare și se păstrează din fiecare cuvînt rădăcina, înlăturîndu-se terminațiile. De exemplu, din „caselor" se păstrează „cas", din „vorbesc" se păstrează „vorb" ș.a.m.d. Se va constata că noul text obținut nu mai poate fi înțeles, deși continuă să dea o idee generală despre subiectul tratat. Astfel, a început să stea, în centrul atenției cercetătorilor, analiza concretă a faptelor lingvistice: analiza frazei din limba din care se traduce și sinteza frazei din limba în care se traduce. Începe să se acorde o deosebită atenție contextului.

Spre deosebire de dicționar, al cărui conținut depinde de domeniul căruia îi aparține textul tradus, programul privitor la punerea în corespondență a structurilor gramaticale ale celor două limbi, limba din care se traduce și limba în care se traduce, este relativ independent de faptul că textul aparține matematicii, fizicii sau literaturii. Acest caracter universal al programului gramatical a fost pus în evidență de lingvista sovietică I. K. Belskaia. D-sa a demonstrat că același program gramatical este valabil pentru traducerea din engleză în rusă a unui text de matematică, ca și pentru traducerea unei povestiri de Dickens.

Se știe că majoritatea cuvintelor au mai multe forme flexionare. De exemplu, un verb are diferite forme, care corespund modificărilor de mod, timp, număr și persoană. Deoarece dicționarul din mașină nu poate conține prea multe cuvinte, nu ne vom permite să considerăm fiecare formă flexionară a unui verb sau a unui substantiv ca un cuvînt diferit. De aceea, dicționarul din mașină nu este atît un dicționar de cuvinte, cît unul de rădăcini. De exemplu, cuvîntul „omului" nu figurează în dicționar, dar figurează cuvîntul „om". Mașina „învață" să separe terminația *ului* pentru a identifica substantivul „om". Mașina învață de asemenea să recunoască faptul că terminația *ului* corespunde genitivului singular sau dativului singular. Toate aceste operații se înregistrează tot pe bază binară. De exemplu, se poate conveni că cifra 1 corespunde singularului, iar cifra 0, pluralului; că cifra 1 corespunde cazurilor nominativ și acuzativ, iar cifra 0, cazurilor genitiv și dativ; că cifra 1 corespunde genului masculin, iar cifra 0 genului feminin (genul neutru se reduce la cel masculin, pentru singular, și la cel feminin, pentru plural). În felul acesta, toate caracteristicile morfologice ale unui cuvînt pot fi descrise printr-un anumit șir format cu cifrele 1 și 0, deci printr-o anumită grupare de lămpi aprinse și lămpi stinse. Rămîne, mai departe, să se decidă unele împrejurări (de exemplu, distingerea genitivului de dativ) cu ajutorul contextului, dar asupra acestor aspecte nu vom mai insista aici.

5. Alte operații pe care le face mașina

După ce textul introdus în mașină a fost analizat din punct de vedere gramatical, toate informațiile obținute sînt înscrise în „memoria mașinii". „Memoria" este una dintre marile inovații pe care le-au adus mașinile moderne de calcul; ea constă în capacitatea de a păstra rezultatele unor operații intermediare, urmînd ca ele să fie folosite ulterior. Memoria mașinii este construită, de obicei, pe bază magnetică, cifra zero corespunzînd magnetizării negative, iar cifra unu, magnetizării pozitive. Un mare

viitor pare a avea, în construcția memoriei mașinii, utilizarea celulelor fotoelectrice.

Urmează operația de sinteză, adică de alcătuire a textului corespunzător în limba în care se traduce. Deci, în mașină este stabilită corespondența între cuvintele dintr-o limbă și cuvintele din cealaltă limbă și în această fază intră în folosință cea de-a doua parte a dicționarului, corespunzătoare limbii în care se traduce. De asemenea, sînt elaborate, pe bază binară, o seamă de reguli de alcătuire a formelor flexionare corespunzătoare formelor din limba inițială. Se mai stabilește o corespondență între configurațiile sintactice ale celor două limbi. Dacă unui cuvînt din limba inițială nu i se găsește corespondent în cealaltă limbă, atunci el este reprodus fără a mai fi tradus. După toate aceste operații, mașina tipărește rezultatul pe o bandă. (Pentru o descriere mai amănunțită a modului în care se face o traducere mecanică, se poate consulta articolul lui D. I. Panov, Analele romîno-sovietice, seria matematică, 1956, nr. 4).

6. Importanța cunoașterii legilor statistice ale vocabularului

Pentru o bună desfășurare a traducerilor automate este extrem de utilă cunoașterea legilor statistice care guvernează fenomenele de limbă. Astfel, există legi statistice care dau posibilitatea să se determine lungimea unui text, adică numărul cuvintelor din text, cînd se cunoaște vocabularul textului, adică numărul cuvintelor distincte din text. Reciproc, cunoscîndu-se lungimea, se poate determina vocabularul, deci mărimea dicționarului care urmează a fi introdus în mașină.

O dificultate esențială pentru traducerea automată o constituie existența cuvintelor cu mai multe sensuri. Acesta este unul dintre motivele pentru care, deocamdată, se experimentează doar traducerea textelor științifice și tehnice, texte în care predomină cuvinte cu un sens bine determinat. Există însă legi statistice care dau posibilitatea ca, fiind dat un text oarecare, aparținînd limbii comune, să se determine proporția de cuvinte polisemantice din text.

Pentru a ilustra eficacitatea legilor statistice ale vocabularului în problema traducerii cu mașina vom da doar un singur exemplu: În baza cercetărilor întreprinse de Zipf *) asupra frecvenței cuvintelor se constată că majoritatea cuvintelor polisemantice sînt, în același timp, cuvinte cu frecvență mare. Cum, pe de altă parte, primele 50 de cuvinte, în ordinea descrescătoare a frecvenței, acoperă aproximativ jumătate din textul respectiv, rezultă că efortul pentru a rezolva problema multiplicității de sensuri trebuie să se concentreze în primul rînd asupra acestor 50 de cuvinte.

7. Dificultăți legate de introducerea gramaticii în mașină

Traducerea automată pune o seamă de probleme delicate, pentru a căror rezolvare sînt necesare eforturile combinate ale lingviștilor, inginerilor și matematicienilor. Am văzut că, pentru ca traducerea să se desfășoare în bune condițiuni, este necesar să se introducă în mașină nu numai un vocabular, dar și o gramatică, o anumită morfologie și o anumită sin-

*) Vezi articolele din GMF-B, nr. 4 și nr. 7/1960.

taxă. Cuvintele apar, într-un text, cu anumite forme flexionare, frazele prezintă o anumită topică și mașina trebuie să sesizeze aceste lucruri și să le găsească corespondentul în limba în care traduce. Atunci cînd s-a încercat să se introducă gramatica în mașină s-a constatat că apar dificultăți mari, deoarece gramatica tradițională abundă în impreciziuni și în considerații descriptive. Pentru ca mașina să „înțeleagă" declinarea substantivelor, conjugarea verbelor și — mai ales — sintaxa limbii respective, este necesar ca întregul sistem morfologic și sintactic să fie redus la un număr bine determinat de noțiuni și de reguli clare, precise, deci lipsite de orice echivoc, de orice ambiguitate.

Este oare posibil acest lucru ? Este el compatibil cu gradul înalt de complexitate pe care-l prezintă fenomenele de limbă ? Dacă răspunsul la această întrebare este afirmativ, atunci întreaga gramatică tradițională va suferi o renovare, bazele științifice ale gramaticii se vor consolida. Această problemă este însă prea complexă pentru ca să poată fi rezolvată dintr-odată. Singura cale este abordarea ei pe etape. Într-o primă etapă, se pot neglija acele fenomene care nu apar decît sporadic. Aceasta presupune că, în prealabil, diversele situații morfologice și sintactice au fost studiate din punctul de vedere al frecvenței lor. Numai în acest fel putem afla care sînt situațiile excepționale, care pot fi lăsate deoparte.

8. Ce ajutor poate da matematica ?

Cum ar putea matematica să ajute la rezolvarea problemei de mai sus ? Prin matematică obișnuim să înțelegem un corp determinat de cunoștințe de specialitate, un anumit număr de definiții și teoreme, o anumită tehnică de demonstrație și o anumită tehnică de calcul. Ce legătură ar putea avea cu lucrurile expuse mai sus o oarecare formulă de trigonometrie, o teoremă privitoare la triunghiuri sau la derivate, o ecuație algebrică sau un oarecare calcul algebric ? O legătură *directă* de acest fel, între matematică și gramatică, desigur că nu există. Dacă, însă, concepem matematica într-un mod mai larg, ca o știință care nu se reduce doar la o sumă de considerații formale, de strictă specialitate, ci care are un rol bine determinat în studiul realității înconjurătoare, atunci problema se pune cu totul altfel. Matematica studiază, în afară de aspectele cantitative ale fenomenelor, forma relațiilor care se statornicesc între elementele unei mulțimi de obiecte. Aspectele cantitative și formale pot fi studiate, pînă la un anumit punct, independent de natura specifică a fenomenelor și obiectelor în cauză. Să luăm de exemplu morfologia. Din punct de vedere morfologic, limba se înfățișează ca o mulțime de cuvinte grupate în clase, în felul următor : fiind dat un cuvînt x, clasa care-l conține pe x este formată din totalitatea cuvintelor care sînt forme flexionare ale lui x. De exemplu, dacă x este un substantiv, clasa lui x este formată din toate formele care se obțin din x prin modificări de număr, caz și prin trecerea de la forma care utilizează articolul nehotărît (hotărît) la cea care utilizează articolul hotărît (nehotărît). De îndată ce privim în acest fel flexiunea cuvintelor, am și ajuns în domeniul matematicii, al matematicii nu atît ca un corp de cunoștințe de specialitate, cît ca un anumit mod de abordare a problemelor, un anumit mod de gîndire. Împărțirea în clase pe care am efectuat-o mai sus este identică, din punctul de vedere al proprietăților formale, cu atîtea alte

împărțiri în clase pe care le efectuăm în algebră sau în geometrie, este ceea ce se numește, în matematică, o împărțire în *clase de echivalență*. Într-adevăr, să convenim că două cuvinte x și y sînt în relația R. dacă ele aparțin aceleiași clase. Pentru a arăta că relația R este o relație de echivalență este necesar să arătăm că ea e reflexivă, simetrică și tranzitivă. Lăsăm pe seama cititorului verificarea acestor proprietăți, în ipoteza absenței sinonimiei.

Tot așa, dacă admitem ca echivalente două cuvinte x și y atunci și numai atunci cînd înlocuirea lui x cu y sau a lui y cu x în orice frază corect construită conduce la o frază de asemenea corect construită, constatăm că ia naștere o împărțire a cuvintelor în clase de echivalență. Această împărțire este de cea mai mare însemnătate în studiul structurilor lingvistice. Bine înțeles, ea reclamă precizarea noțiunii de «frază corect construită».

Dar aceasta nu este decît un început. Lucrurile au fost duse mai departe, fiind angajate în această formalizare aspecte gramaticale mult mai complexe decît cele morfologice. Modul de gîndire cu care n-ea deprins matematica ne dă posibilitatea să separăm mai ușor aspectele formale ale gramaticii de cele care implică un sens. În felul acesta, ajungem la noțiuni și definiții de tipul celor cu care lucrează matematica, deci pe care le „înțelege" mașina. Tocmai de o gramatică construită pe baza acestor considerente are nevoie traducerea automată.

Programul pentru traducerea dintr-o limbă în alta este comunicat mașinii printr-un algoritm, o succesiune bine determinată de operații pe care mașina trebuie să le execute. Acest algoritm trebuie redactat într-o limbă pe care mașina o poate înțelege, adică pe care ea o poate interpreta cu ușurință în termenii codului ei electronic. Este ceea ce se numește o *metalimbă*. Ansamblul de simboluri care constituie metalimba în care redactează algoritmul de traducere automată este, pentru traducerea automată, ceea ce sînt formulele H_2O și NaCl pentru chimie, sau $\sin x \cos y + \sin y \cos x$ și $-b \pm \sqrt{b^2 - ac}$ pentru matematică. Alcătuirea unei astfel de metalimbi reclamă un studiu în spirit logico-matematic al faptelor de limbă.

9. Puncte de vedere în legătură cu pregătirea unei limbi în vederea traducerii automate

Care sînt căile cele mai potrivite pentru a se realiza o gramatică formalizată? În această privință există multe sugestii. Unii, printre care I. D. Andreev, de la Leningrad, sînt de părere că trebuie construită o „limbă intermediară", adică o limbă standard Z; iar traducerea dintr-o limbă oarecare X într-o limbă oarecare Y să se facă prin intermediul limbii Z, adică după schema $X \rightarrow Z \rightarrow Y$. În acest fel, n-ar mai fi nevoie să se pregătească traducerea mecanică pentru fiecare pereche de limbi în parte, fiind suficientă traducerea în și din limba intermediară. I. D. Andreev a și construit o astfel de limbă intermediară..

O. S. Kulaghina de la Moscova, a adus în discuție unele idei foarte interesante privitoare la posibilitatea de a defini noțiunile de bază ale gramaticii în termenii teoriei mulțimilor. Ce este o limbă? O mulțime E de cuvinte în care s-a definit o structură morfologică, adică o anumită împărțire a mulțimii E în clase de echivalență (așa cum s-a arătat undeva

mai sus) și în care s-a mai definit o structură sintactică, adică o anumită mulțime de sisteme ordonate de cuvinte, sisteme pe care la numește „fraze". Pornind de la aceste elemente O. S. Kulaghina dezvoltă o întreagă algebră, care ascunde unele situații foarte generale din limbă. Merită să fie relevată noțiunea adîncă de „limbă simplă", în care O. S. Kulaghina a reușit să înregistreze, în termeni proprii algebrei și teoriei mulțimilor, acel tip de limbă pe care o înțelege mașina. Este, desigur, o noțiune ideală, dar toate construcțiile necesare traducerii mecanice sînt niște aproximații ale limbilor reale.

În cadrul pregătirilor limbii engleze pentru traducerea mecanică, Stuart C. Dodd a construit o „engleză model". Pentru a dovedi că se poate scrie în „engleză model", Stuart C. Dodd și-a scris propriul său articol în „engleză model". La baza englezei model stau zece reguli, dintre care trei reguli se referă la utilizarea cuvintelor cele mai familiare iar celelalte șapte reguli au ca scop să imprime limbii o regularitate cît mai mare.

L. și A. Wundheiler, pornind de la observația că multe dintre conceptele utilizate de gramatica tradițională nu pot fi comunicate mașinii, au sugerat un număr de termeni, în mare parte împrumutați din logică, care sînt invarianți față de traducerea dintr-o limbă în alta. Ei observă că problema traducerii dintr-o limbă într-alta se subsumează, într-un anume sens, problemei de a stabili invarianții prin sinonimie. Multe dintre noțiunile gramaticii tradiționale nu sînt invariante prin sinonimie. De exemplu, noțiunea de „subiect", așa cum este ea utilizată în sintaxă, nu este invariantă prin sinonimie, după cum se vede din exemplul: *"X este felicitat de Y", "Y îl felicită pe X"*. Aceste două propoziții sînt sinonime, dar în prima subiectul este *X* în timp ce în a doua subiectul este *Y*.

Mai sînt multe idei interesante în problema traducerii mecanice. Pe ce trebuie să cadă accentul, pe traducerea cuvintelor sau a sintagmelor, adică a raporturilor sintactice binare, ireductibile? Este nevoie de o preredactare sau e preferabilă o postredactare? Cert este că toate aceste discuții din lumea științifică, discuții în care sînt angajați lingviști, logicieni, ingineri, matematicieni și alți specialiști, au repercursiuni care trec dincolo de problema propriu-zisă a traducerii mecanice. Poate că traducerea mecanică nu este decît un punct de plecare și ea va fi umbrită de consecințele imense pe care le va avea asupra dezvoltării unor științe care au făcut-o posibilă.

Deocamdată, traducerea mecanică se află încă în stadiul de experimentare, cercetările fiind mai avansate în Uniunea Sovietică și în Statele Unite. În ceea ce privește pregătirea limbii romîne pentru traducerea automată, ne aflăm abia la început. Relevăm, în această privință, cercetările acad. Gr. C. Moisil (Studii și cercetări lingvistice, nr. 1, 1960; vezi și expunerea sa generală din revista „Limba romînă", nr. 1, 1960).

ENERGIE ELECTRICĂ DIN CĂLDURĂ

Particularitatea cea mai importantă a semiconductorilor este numărul lor mare de întrebuințări. Nu e de ajuns că un aparat de recepție poate să funcționeze cu triode cristaline. Se constată că și alimentarea poate fi realizată tot prin semiconductori.

În satele îndepărtate, în casele pădurarilor se poate vedea adeseori o originală lampă — uzină electrică cu gaz care nu numai că luminează, dar furnizează și energie aparatului de radio. Secretul instalației este destul de simplu. Niște bare din semiconductori special pregătiți alcătuiesc o baterie în forma unui tub care înconjoară sticla lămpii. Cînd lampa este aprinsă atunci lipiturile din interior sînt încălzite de căldura gazelor fierbinți care se ridică deasupra flăcării. Lipiturile din afară sînt răcite în radiator de către aerul din cameră. Ca rezultat, în bateria cu semiconductori se produce energie electrică. De ce? Bateria este construită din bare de două feluri: electronice și cu găuri. Atît unele ctî și celelate sînt în număr egal și sînt unite în perechi. În fiecare pereche semiconductorii diferiți sînt sudați printr-o placă metalică pusă peste bare. Se obține ceva asemănător cu litera rusească „П“ (*P*) (fig. 1). Să ne amintim acum că locul de sudură se încălzește în timp ce celelalte capete ale barelor se răcesc.

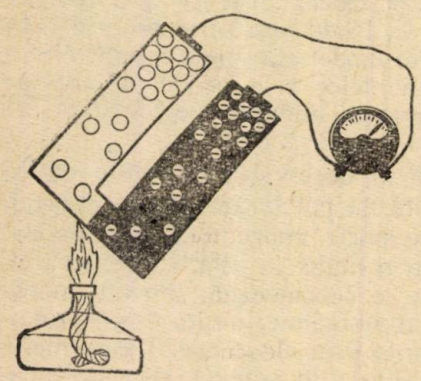


Fig. 1.

La încălzirea unui termocuplu format dintr-un semiconductor electronic și unul cu găuri, la celelalte capete apare o tensiune electromotoare. Acest fenomen stă la baza termoelectrogeneratoarelor-aparate care transformă direct căldura în energia curentului electric.

Încălzirea generează un exces de purtători de curent și în așa fel, încît în semiconductori diferiți se obțin semne contrare. În bara electronică se eliberează electroni, iar în cea cu găuri — găuri. Și, din capetele încălzite ale barelor, unde apare parcă o „îngrămădire“ de purtători de curent, aceștia se deplasează către capetele reci unde e mai multă „liniște“. Ca rezultat, la capătul rece al barelor cu găuri apare o sarcină pozitivă, iar la capătul rece al barelor electronice una negativă. Unind acestea cu o sîrmă, prin ea va circula un curent generat de căldură.

Aplicațiile termoelectrogeneratoarelor

Termoelectrogeneratoarele cu semiconductori promit să aducă tehnicii mari foloase. Într-adevăr gîndiți-vă care este esența acestor aparate. Căldura din ele se transformă în electricitate dintr-odată, direct, nu ca în uzinele termice de astăzi, unde lucrează cazane de abur, turbine și electrogeneratoare. În termobateriile cu semiconductori nu există transformări intermediare ale energiei, nici un fel de detalii mobile. Cît de ispititor ar fi să se plaseze baterii mari cu semiconductori direct în focarele uzinelor electrice!

Însă în zilele noastre asemenea instalații se folosesc doar în aparate mici cum sînt lampa cu gaz, despre care s-a vorbit mai sus (fig. 2). Aceasta se datorește faptului că în ceea ce privește randamentul, pînă acum ele cedează mijloacelor obișnuite de obținere a energiei electrice. Randamentul unui termocuplu este de 6—8%, iar în condiții de laborator de aproximativ 10%. În general aceasta nu este puțin. Aproximativ același este randamentul unei locomotive, dar de cîteva ori mai puțin decît în termocentralele electrice de azi.

Fizica tinde să perfecționeze termoelectrogeneratoarele cu semiconductori pentru a ridica puterea și randamentul lor.

Dar chiar și în forma de acum ele pot fi folosite pe o scară destul de largă. Aceste aparate pot fi aplicate peste tot unde se pune problema captării așa numitei călduri de potențial jos, adică a căldurii conținută în substanțe la o temperatură, relativ nu prea înaltă: în fundul coșurilor uzinelor, în apa eliminată din uzine. O însemnată cantitate din această căldură, așa cum se pierde fără nici un folos poate fi transformată în energie electrică cu ajutorul semiconductorilor. În această direcție unele lucrări au și fost începute. De exemplu, a fost construit un termoelectrogenerator care furnizează curent electric pe baza căldurii gazelor evacuate dintr-un motor de automobil. Energia obținută merge direct la încărcarea acumulatorilor.

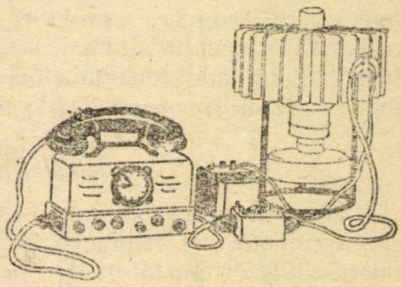


Fig. 2.
Un termoelectrogenerator pe o lampă cu petrol. Aparatul alimentează cu energie o stație radio pentru colhozuri de tip „Urojai".

Noi frigidere

Cu ajutorul termocuplelor de mici bare de semiconductori se pot face, la prima vedere, transformări ciudate. Încălzindu-le și răcindu-le la capete diferite, ele generează energie electrică. Ce se va întîmpla dacă pur și simplu vom trece prin ele un curent electric? În acest caz ele, pe de o parte se încălzesc, pe de altă parte se răcesc. Acest lucru este lesne de înțeles. Cîmpul electric exterior va redistribui electronii și găurile așezîndu-le oarecum în locuri diferite. Acolo unde apare un neajuns de purtători de curent, ei vor începe să se formeze din nou luînd pentru aceasta energia mediului înconjurător și totodată răcindu-l. Invers, peste tot unde va fi un exces de purtător de curent și electronii vor începe să se unească cu găurile, energia va începe să se producă sub formă de căldură. Prin urmare, datorită apariției în micile bare a unor porțiuni cu exces și lipsă de purtători de curent, apare o diferență de temperaturi.

Pe baza aceasta la Institutul de semiconductori al Academiei de științe a U.R.S.S., sub conducerea acad. A. F. Ioffe, au fost prelucrate cîteva sisteme de frigidere. În ele nu veți găsi nici un fel de lichide mobile, motoare sau compresoare. În peretele din spate al unui dulap de frigider este montată o placă nu prea mare formată din termocuple de semiconductori. Ea aderă la radiator ale cărui plăci pătrund în afară și înăuntru. Redresorul cu semiconductori transformă curentul de la rețea din alternativ în continuu, care se folosește la alimentarea frigiderului. Iată totul.

Frigiderul funcționează fără să se consume, iar în ceea ce privește randamentul, ultimele modele sînt aproape la fel de bune ca și frigiderele obișnuite. Acum frigiderele cu semiconductori sînt folosite cu succes pe bordul cîtorva avioane TU-104.

Capacitatea semiconductorilor de a crea frig artificial se folosește desigur nu numai în viața de toate zilele. Pentru cercetările științifice au fost create frigidere miniatură de mărimea unui degetar. Ele nu pot fi construite în nici un alt mod. Medicii speră să obțină de la fizicieni un plasture frigider cu semiconductori, chiar un aparat frigider, destinat a fi introdus în corpul omenesc. Toate acestea sînt posibile tehnicii zilelor noastre.

Încălzire împreună cu răcire

Este suficient să schimbăm sensul curentului printr-o baterie cu semiconductori și frigiderul parcă „se întoarce pe dos". Acolo unde era un neajuns de purtători de curent, acum este un exces și invers. Căldura și frigul își schimbă locurile. (fig. 3). Acum se încălzesc nu capetele exterioare, ci capetele interioare ale barelor semiconductoare.

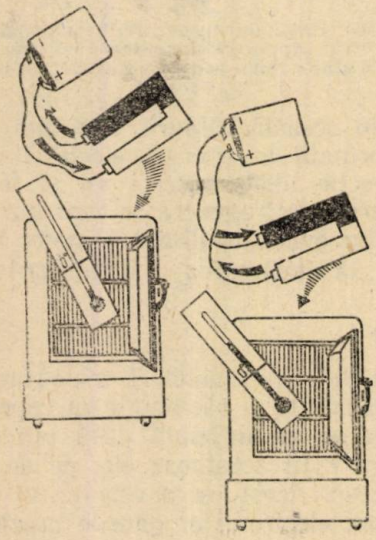


Fig. 3.
Dacă se schimbă sensul curentului care trece printr-o baterie cu semiconductori al unui frigider, atunci acesta parcă se „întoarce pe dos". În interiorul său temperatura crește, iar în afară se răcește.

Dintr-un frigider se obține un cuptor. Se înțelege că această posibilitate nerealizabilă pentru un frigider obișnuit, se folosește în tehnică peste tot unde este nevoie să se obțină o temperatură constantă, unde trebuie încălzit și răcit alternativ un detaliu etc. De exemplu, triodele cu germaniu suportă greu variațiile de temperatură. De aceea e bine ca ele să fie plasate în termostate cu semiconductori.

O altă posibilitate este folosirea acestui fenomen la crearea de instalații de încălzire-răcire pentru locuințe.

Intrînd într-o locuință, dintr-un viitor nu prea îndepărtat, vom observa în camere sub ferestre plăcile largi ale unui radiator. Aceasta însă nu este încălzire centrală. Niște plăci asemănătoare veți găsi și în partea exterioară a peretelui. Între radiatori se află baterii de termocuple cu semiconductori. Lăsînd să treacă prin ele un curent continuu într-un sens determinat, vom obliga radiatorul din cameră să se încălzească. În felul acesta camera se încălzește. În timpul verii curentul se conectează în sens invers. Acum radiatorul din cameră absoarbe căldura aerului înconjurător și răcește încăperea.

Acest sistem este simplu, sigur și higienic. Calitatea sa principală este însă randamentul său mare. Camera se încălzește nu numai pe seama energiei curentului electric care trece prin semiconductori, ci într-o măsură oarecare la încălzire va contribui și răcirea aerului din stradă.

Aerul va „lucra" cedîndu-și căldura radiatorului exterior. Este adevărat că, în caz de ger puternic, transportul de căldură din afară înăuntru va fi neînsemnat. Dar, în cazul cînd timpul este relativ cald, pompa cu semiconductori poate aduce un însemnat folos. Primul agregat de încălzire-răcire cu semiconductori a fost deja creat la Moscova la uzina Santehnica.

Așadar, semiconductorii transformă căldura în energie electrică. La fel de efectiv ele sînt capabile să transforme în energie electrică și lumina.

Fotoelementul cu supapă

Printre cititorii noștri desigur se vor găsi destui fotografi amatori între care mulți cunosc comodul aparat pentru determinarea expunerii în timpul fotografierii — exponometrul fotoelectric. Ridicați capacul aparatului, îndreptați „ochiul" său spre obiectul pe care doriți să-l fotografiați și acul de pe scală arată imediat care este expunerea. Aparatul este remarcabil prin aceea că nu are nevoie de nici o sursă de alimentare: baterii sau acumulatori. El transformă energia luminoasă în energia curentului electric care deviază acul. Lumina se transformă în curent electric.

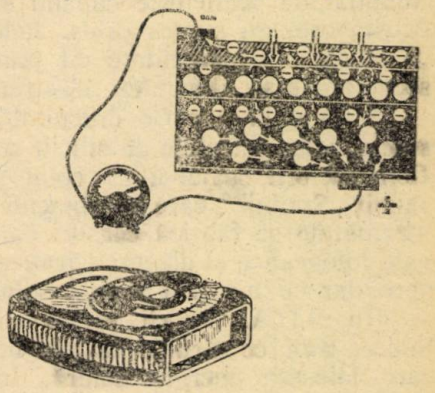


Fig. 4.
Schema simplificată a unui fotoelement cu supapă. Deasupra este un strat subțire de metal, mai jos o zonă de conductibilitate electronică. Apoi urmează stratul de baraj, zona de conductibilitate cu găuri și suportul metalic. Electronii eliberați de lumină în zona de conductibilitate electronică ajung în stratul metalic superior în timp ce găurile pătrund liber prin stratul de baraj și ajung pe suportul metalic. Așadar, între cele două suprafețe opuse ale fotoelcmentului apare o tensiuene electromotoare. Energia luminii se transformă în energie electrică. Intr-un exponometru fotoelectric cunoscut fiecărui fotograf amator, are loc fenomenul descris.

Elementul sensibil al unui exponometru este făcut din seleniu care are o conductibilitatea cu găuri. Acesta se află pe un suport de oțel. Pe suprafața seleniului este depus un strat subțire de metal, de exemplu aur. Acest adaus transformă suprafața superioară a semiconductorului dintr-o zonă cu găuri într-o zonă electronică (fig. 4).

Ce se întîmplă sub acțiunea luminii?

În zona electronică bombardamentul particulelor luminoase (fotoni) eliberează din „prizonieratul" atomilor noi electroni. Ei nu au altă cale de ales, deoarece în zona de conductibilitate prin găuri drumul este închis de stratul de baraj. Din această cauză în pelicula de aur se acumulează un exces de electroni, adică o sarcină electrică negativă. Odată cu electronii în zona electronică se înțelege că se formează și un număr oarecare de găuri. Pentru acestea stratul de baraj nu este un obstacol. Sarcina pozitivă parcă ar avea un „pașaport" pentru trecerea frontierei. Datorită acestui fapt pe suportul de oțel apare o sarcină pozitivă. După cum vedeți energia luminii s-a consumat la crearea unei diferențe de potențial între suprafețele opuse ale semiconductorului nostru. Unindu-se printr-o sîrmă vom obține un curent electric care va circula atîta timp cît seleniul este iluminat.

Acestea sînt după terminologia fizicienilor, fotoelemente cu supapă și sînt cunoscute de destul de multă vreme. Ele sînt folosite de foarte multe ori în diferite instalații automate. De exemplu fotoelementele cu supapă pot

să facă foarte bine analiza sîngelui (fixînd deosebirile neînsemnate în ceea ce privește cantitatea de globule roșii), supraveghează continuu gradul de saturare al sîngelui cu oxigen în cazul operațiilor chirurgicale etc. Pînă nu de mult fotoelementele cu semiconductori au avut un randament extrem de scăzut — ele au transformat în energia electrică doar a mia parte din energia fluxului luminos.

Lumina lucrează

Acum cîțiva ani această situație a fost brusc schimbată către mai bine. Din cristale mari de siliciu desfăcute în plăci subțiri s-a reușit să se construiască fotoelemente capabile să transforme în curent electric pînă la 13% din energia luminii care cade pe ele. Un metru pătrat de suprafață iluminat de soare este capabil să dea pînă la 120 W, energie electrică. Acesta este un succes uriaș. Judecați singuri : O baterie de fotoelemente cu siliciu cu o suprafață cît jumătate din pagina unui ziar într-o zi cu soare poate să alimenteze electromotorul unei mașini de cusut.

Lăsînd la o parte dificultatea purificării și prelucrării cristalelor de siliciu, fotoelementele de siliciu cu supapă pătrund în mod sigur în tehnică. Constructorii sovietici au creat un aparat de radiorecepție în miniatură numit „Sputnik" care se alimentează cu energie de la o baterie solară. În străinătate se fabrică ceasuri care sînt „întoarse", de către lumină, aparate fotografice și cinematografice care nu numai că arată timpul de expunere, dar cu ajutorul „forței solare" își reglează singure diafragma.

În S.U.A. baterii solare alimentează cu energie substațiile telefonice. Sînt construite modele de mecanisme pentru sisteme de irigare, care folosesc energia solară. Imaginați-vă un echipaj care se mișcă fără nici un fel de combustibil, ci doar pentru că este luminat de soare. Adevărat însă că mijloacele terestre de transport de acest tip nu vor căpăta o dezvoltare prea mare. Puterea radiației solare pentru ele este totuși mică. Însă remorcherele fluviale care au o suprafață mare sînt perfect capabile să se miște pe seama energiei razelor solare. În transportul terestru bateriile solare vor servi probabil ca surse de energie suplimentare sau în caz de avarie. Dacă într-un electromobil acumulatorii se vor descărca, acesta va merge pînă la o stație de încărcare cu ajutorul razelor solare captate de acoperișul-fotoelement. Tot astfel în timpul oricărei staționări, în timpul zilei, un astfel de echipaj va acumula neîntrerupt energie în proprii săi acumulatori.

Energetica solară

Sînt deosebit de prețioase „capcanele de lumină" cu semiconductori pentru nevoile energeticii care au căpătat denumirea de „mică". Bateriile solare (fig. 5) vor furniza un belșug de energie pentru raioanele neelectrificate — în munți, pe insule, în taiga, peste tot unde este greu să se construiască o linie de transport electric sau unde nu este convenabil să se construiască o uzină.

S-a calculat că, dacă pe acoperișul unei case se plasează fotoelemente solare, ele o vor asigura cu energie atît pentru încălzire cît și pentru nevoile bucătăriei și iluminatului. Cu alte cuvine toate nevoile vieții. În timpul zilei energia se va acumula în acumulatori pentru perioada de noapte. Cît de ispititor ar fi să se fabrice fotoelemente sub formă de țesă-

turi răsucite în formă de sul! Într-un popas geologul sau turistul desfăşoară acest covoraş şi uzina electrică este gata. Se va conecta un mic reşou, un mic frigider, sau se va putea încălzi de exemplu aerul din cort.

Pe cel de al treilea satelit artificial sovietic şi pe staţia interplanetară automată baterii solare furnizează curent electric posturilor de emisie şi altor aparate ale laboratorului cosmic. Acesta este prevestitorul folosirii întinse a fotoelementelor cu supapă pe navele interplanetare ale viitorului. Lumină nu trebuie să se ia de pe Pămînt. Mergînd spre Marte, Venus sau Mercur, racheta va zbura în faţa unui Soare care nu apune niciodată scăldîndu-se în puternicul său flux luminos. Chiar pentru randamentul de astăzi al bateriilor solare, aplicarea lor va reduce greutatea navei cosmice cu zeci de tone.

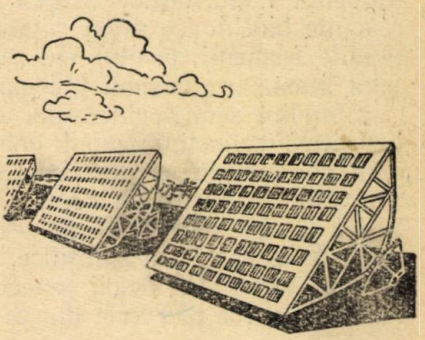


Fig. 5.
S-ar putea ca astfel să arate bateriile unei uzine electrice solare.

Trebuie să remarcăm că fotoelementele cu siliciu de astăzi după toate probabilităţile nu sînt cele mai efective. Se lucrează la desăvîrşirea lor şi mai ales la găsirea unor materiale noi, capabile să-şi însuşească o cantitate de energie luminoasă mai mare decît siliciul. Teoretic este posibilă crearea unor baterii solare cu semiconductori care să transforme în curent electric aproape jumătate din energia luminii care cade pe ele.

Semiconductorii şi viaţa

Apariţia energeticii solare este începutul unei noi etape în istoria tehnicii.

Pînă de curînd numai plantele puteau să, înmagazineze şi să folosească energia razelor solare. Toate rezervele de combustibil mineral la urma urmelor sînt „conserve solare", preparate cîndva de către frunzele verzi ale străvechilor plante. Cu ajutorul semiconductorilor omul a lipsit natura de acest monopol.

În frunza verde au loc fenomene foarte asemănătoare cu cele care se petrec în fotoelementele cu supapă. Astăzi în laboratoare cu ajutorul unor semiconductori coloraţi s-a realizat prima etapă a fotosintezei — celebrul proces de acumulare a energiei solare care transformă lumina în energie chimică a substanţei frunzei verzi, procesul care alimentează întreaga viaţă organică a Pămîntului. În faţa ştiinţei s-a deschis acum perspectiva ispititoare de a realiza fotosinteza artificială. Se pune problema preparării rapide sub acţiunea luminii a unor combinaţii organice complexe direct din bioxidul de carbon şi apă imitînd laboratorul natural al plantelor. Succesele fizicii semiconductorilor împreună cu realizările chimiei şi biologiei conduc sigur spre rezolvarea acestei probleme.

Fizica semiconductorilor este strîns legată şi de alte domenii ale ştiinţei cu viaţa. Fenomenele electronice asemănătoare cu straturile de baraj au un rol extrem de important în fiziologia sistemului nervos, iar procese asemănătoare fotoefectului cu supapă în fiziologia vederii.

Este caracteristic faptul că semiconductorii sînt nu numai cristalini, dar și cu aspect sticlos sau lichid. De aceea nu este de mirare că ei au căpătat pentru chimie o importanță din ce în ce mai mare. Cunoscutul fenomen al catalizei, unde mici adausuri de anumite substanțe accelerează puternic transformările chimice, se constată că se poate explica prin influența impurităților asupra proceselor semiconductoare electronice. În reacțiile biochimice drept catalizatori servesc substanțe organice complexe numite fermenți, țesutul viu reglînd automat compoziția și starea lor. În felul acesta organismul ghidează diferitele procese vitale.

Studiul semiconductorilor este neobișnuit de întins. Punînd stăpînire pe aceste cunoștințe omul îmbogățește fizica și chimia, împinge tehnica spre noi înălțimi și descifrează problemele seculare ale biologiei. Nu întîmplător în cifrele de control ale planului septenal adoptat la cel de al 21-lea Congres al P.C.U.S. semiconductorii figurează în rîndul celor mai importante probleme științifice. Astăzi este greu să ne imaginăm pe deplin viitorul dezvoltării fizicii semiconductorilor. Cu fiecare an aceste substanțe admirabile vor pătrunde din ce în ce mai mult în viața noastră.

PENTRU CERCURILE DE ELEVI

APLICAȚII ALE TEOREMEI CELOR TREI PERPENDICULARE

TUDOR ZAMFIRESCU, elev șc. m. 22, București

Fie punctele A, B, C, și D pe un cerc situat pe suprafața laterală a unui cilindru circular drept. Notăm cu E intersecția (AB, CD), cu F intersecția (BC, DA) și cu A', B', C', D' și N proiecțiile unui punct M aflat pe cilindru, respectiv pe laturile AB, BC, CD, DA și EF ale patrulaterului complet $ABCDEF$. Fie P, intersecția $(A'B', C'D')$ și Q intersecția $(B'C', A'D')$.

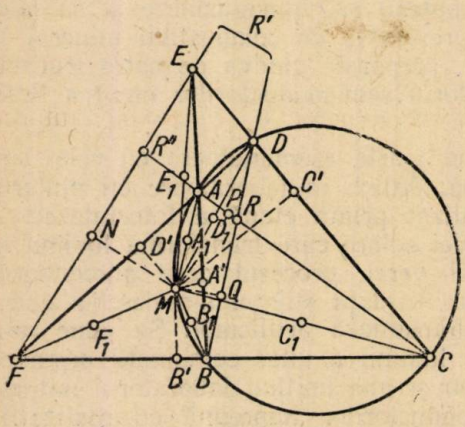


Fig. 1.

1. *Cercurile $A'B'Q$, $B'C'P$, $C'D'Q$, $D'A'P$, $A'C'N$ și $B'D'N$ sînt concurente (fig. 1).*

Pentru demonstrare observăm că o secțiune oarecare într-un cilindru circular drept este o elipsă, iar în cazul particular cînd secțiunea este perpendiculară pe axa cilindrului, este un cerc. Rezultă că planul, pe care îl notăm cu V, al cercului $ABCD$, este perpendicular pe axa și pe generatoarea cilindrului dat.

Fie M' intersecția generatoarei în M a cilindrului cu planul V. Conform celor de mai sus, dreapta MM' este perpendiculară pe planul V. Datorită teoremei celor 3 perpendiculare (o reciprocă) și avînd în vedere că

MM' este perpendiculară pe planul V, iar MA' este perpendiculară pe AB rezultă că $M'A'$ este perpendiculară pe AB. Analog, $M'B'$ este perpendiculară pe BC, $M'C'$ perpendiculară pe CD, $M'D'$ perpendiculară pe DA și $M'N$ perpendiculară pe EF.

Fie P' și Q' respectiv proiecțiile lui M' pe AC și BD. Punctele A', P' și B' sînt colineare deoarece se află pe dreapta lui Simson corespunzătoare punctului M' și triunghiului ABC, iar punctele C', P' și D' sînt colineare deoarece se află pe dreapta lui Simson corespunzătoare punctului M' și triunghiului CDA. Deci $P' \equiv$ intersecția $(A'B', C'D')$. Analog găsim că $Q \equiv$ intersecția $(B'C', D'A')$. Prin urmare $P' \equiv P$ iar $Q' \equiv Q$.

Punctele A', Q și B' se găsesc pe cercul de diametru $M'B$ (în planul V) deoarece $\sphericalangle M'A'B = \sphericalangle M'QB = \sphericalangle M'B'B = 1$ dr. Analog, cercurile $B'C'P$, $C'D'Q$, $D'A'P$, $A'C'N$ și $B'D'N$ au respectiv diametrele $M'C$,

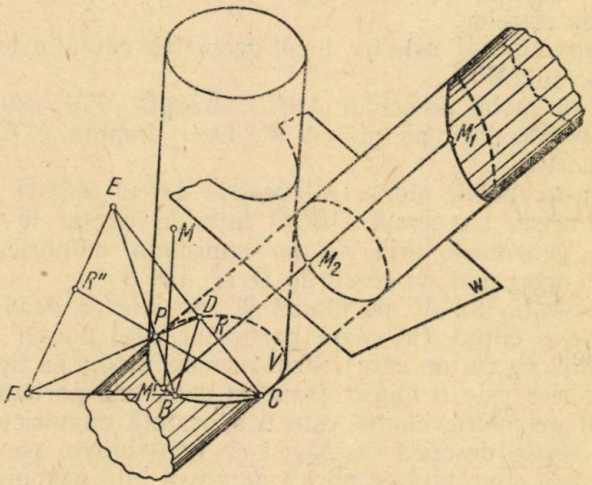


Fig. 2.

$M'D$, $M'A$, $M'E$ și $M'F$, de unde rezultă că punctul M' este comun tuturor acestor cercuri.

2. *Locul geometric al punctului de concurență cînd M variază pe suprafața laterală a cilindrului este cercul $ABCD$.*

Într-adevăr, atunci cînd M este mobil pe cilindru (suprafața laterală), și punctul M' variază, și anume se află la intersecția generatoarei mobile din M cu planul fix V, deci pe cercul $ABCD$.

3. *Toate sferele care trec prin grupele de puncte A', B' și Q; B', C' și P; C', D' și Q; D', A' și P; A', C' și N; B' D' și N admit un centru radical.*

Într-adevăr, toate sferele ce trec prin punctele A', B' și Q trec prin toate punctele cercului $A'B'Q$, deci și prin M'. Analog, toate celelalte sfere trec prin M' deci M' este centrul lor radical, puterea sa față de fiecare sferă fiind nulă.

4. *Locul geometric al centrelor sferelor ortogonale față de sferele ce trec prin grupele de puncte A', B', Q; B', C', P; C', D', Q; D', A', P;*

A', C', N ; B', D', N și au respectiv centrele pe un plan W, cînd M variază pe cilindru dat, este o suprafață cilindrică cu secțiunea dreaptă elipsă, exclusiv aria de pe această suprafață cilindrică cuprinsă între cercul ABCD și simetricul său față de planul W (fig. 2).

Fie B_1 (în planul W) centrul sferei ce trece prin punctele A', B' și Q. Am arătat că toate sferele ce trec prin punctele A', B' și Q trec prin M', deci M' se află și pe sfera B_1.

Fie M_1 simetricul lui M' față de planul W. Avem $B_1M' = B_1M_1$ întrucît B_1 se găsește pe planul W, planul mediator al segmentului $M'M_1$.

Deci și M_1 se află pe sfera B_1. Analog se arată că punctul M_1 se găsește și pe sferele C_1, D_1, A_1, E_1, și F_1. Dar aceste sfere au și punctul comun M'. Deci $M'M_1$, este axa radicală a sferelor A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, și F_1.

Se știe că locul geometric al centrelor sferelor ortogonale față de 3 sfere secante (sau mai multe sfere secante care admit o axă radicală) este axa lor radicală, exclusiv segmentul ce unește cele două puncte comune tuturor sferelor.

Prin urmare, cînd M' este fix, locul geometric căutat este dreapta $M'M_1$, exclusiv segmentul $M'M_1$.

Cînd M' este mobil pe cercul $ABCD$, dreapta $M'M_1$ este mobilă, rămînînd însă perpendiculară pe planul W. Deci dreapta $M'M_1$ generează o suprafață cilindrică.

Dacă M este mobil, atunci M' descrie cercul $ABCD$ iar M_1 descrie un cerc O simetric cu cercul $ABCD$ față de planul W, de unde segmentul $M'M_1$ generează aria de pe suprafața cilindrică generată de dreapta $M'M_1$, mărginită de cercurile O și $ABCD$.

Fie M_2 proiecția lui M' pe planul W. Se știe că dacă M' descrie un cerc M_2 descrie o elipsă (în cazul particular cînd planul W este paralel cu planul V, M_2 descrie un cerc). Prin urmare secțiunea dreaptă a acestei suprafețe cilindrice este o elipsă (sau un cerc, caz particular al elipsei).

Deci locul geometric căutat este o suprafață cilindrică avînd ca secțiune dreaptă elipsa descrisă de M_2 și ca generatoare pe $M'M_2$, exclusiv aria de pe această suprafață cilindrică cuprinsă între cercurile O și $ABCD$.

5. *Locul geometric al mijlocului segmentului PQ cînd patrulaterul ABCD este ortodiagonal, iar M este mobil pe cilindrul dat, este un cerc.*

Fie R intersecția diagonalelor patrulaterului $ABCD$. *În patrulaterul* $M'PRQ$ avem $\sphericalangle M'PR = \sphericalangle PRQ = \sphericalangle RQM' = 90^0$. Deci patrulaterul $M'PRQ$ este un dreptunghi, de unde mijlocul R_1 al diagonalei $M'R$ coincide cu mijlocul diagonalei PQ.

Cînd M variază pe cilindru, M' descrie cercul $ABCD$ iar R_1 descrie un cerc omotetic cu cercul $ABCD$ în raportul $\frac{1}{2}$, avînd ca centru de omotetie punctul R.

6. *Dacă R, R' și R'' sînt respectiv intersecțiile diagonalelor (BD, AC); (BD, EF) și (AC, EF), locul geometric al punctelor egal depărtate de grupele de puncte P, Q și R, N ; Q și R' ; N, P, și R'', cînd M variază pe cilindru sînt respectiv trei suprafețe cilindrice avînd axele paralele iar secțiunile drepte cercuri egale.*

Locul geometric al punctelor egal depărtate de P, Q și R este dreapta perpendiculară pe planul V în centrul cercului PQR. Patrulaterul $M'PRQ$ este inscriptibil într-un cerc de diametru $M'R$ întrucît $\sphericalangle M'PR = \sphericalangle$

$M'QR = 90°$. Deci locul geometric este perpendiculara în mijlocul R' al segmentului $M'R$ pe planul V.

În baza celor arătate la punctul 5., R_1 descrie un cerc omotetic în raportul $\frac{1}{2}$ cu cercul $ABCD$, centrul de omotetie fiind punctul R. Analog R_2 și R_3, respectiv mijloacele segmentelor $M'R'$ și $M'R''$ descriu alte două cercuri omotetice cu cercul $ABCD$, tot în raportul $\frac{1}{2}$. Deci razele cercurilor O_1, O_2 și O_3 descrise respectiv de R_1, R_2 și R_3 sînt egale între ele, fiind egale cu jumătatea razei cercului $ABCD$. Cînd punctele R_1, R_2 și R_3 descriu respectiv cercurile O_1, O_2 și O_3, atunci perpendicularele în R_1, R_2 și R_3 pe planul V generează trei suprafețe cilindrice cu axele perpendiculare pe planul V și avînd ca secțiuni drepte cercurile egale O_1, O_2 și O_3.

7. *Fasciculul de plane ce trec prin M și sînt perpendiculare respectiv pe AB, BC, CD, DA, AC și BD admit două plane de simetrie care rămîn paralele cu ele însile cînd M variază pe cilindru.*

Avem MM' perpendiculară pe planul V; deci MM' este perpendiculară pe AB. Din enunț cunoaștem că MA' este perpendiculară pe AB. Prin urmare MA' și MM' se găsesc în planul trecînd prin M și perpendicular pe AB. Deci și $A'M'$ se află în acest plan. Dar $A'M'$ se află și în planul V, deci ea este dreapta de intersecție a celor două plane. Analog și planele ce trec prin M și sînt perpendiculare respectiv pe BC, CD, DA, AC și BD conțin dreapta MM' și taie planul V respectiv după dreptele $B'M'$, $C'M'$, $D'M'$, PM' și QM'. Dar planul V este perpendicular pe MM', de unde toate planele amintite sînt perpendiculare pe planul V, iar unghiurile dintre ele sînt respectiv egale cu unghiurile făcute de dreptele $A'M'$, $B'M'$, $C'M'$, $D'M'$, PM' și QM'.

Din patrulaterele inscriptibile $M'C'DD'$, $ABCD$ și $M'A'BB'$, găsim că $\sphericalangle C'M'D' = \sphericalangle ADE = \sphericalangle ABC = \sphericalangle A'M'B'$.

Din patrulaterele inscriptibile $M'CC'P$, $ABCD$ și $M'A'QB$, găsim că $\sphericalangle C'M'P = \sphericalangle C'CP = \sphericalangle ABD = \sphericalangle A'M'Q$.

Prin urmare unghiurile $A'M'C'$, $D'M'B'$ și $PM'Q$ admit aceeași bisectoare atît interioară cît și exterioară, și deci planele din enunțul punctului 7, admit ca plane de simetrie planele ce trec prin bisectoarea comună respectivă și sînt perpendiculare pe planul V.

Observăm că bisectoarele comune celor 3 unghiuri rămîn paralele cu bisectoarele unghiului BEC sau CFD, cînd M' descrie cercul $ABCD$. Avînd în vedere că bisectoarele unghiurilor patrulaterului complet $ABCDEF$ sînt fixe iar MM' se deplasează paralel cu ea insăși, planele de simetrie menționate rămîn paralel cu ele însile cînd M variază pe cilindru.

8. *Dacă fasciculul de plane ce conțin generatoarea MM' și respectiv punctele N, R, C', A' (sau N, R, B', D') este armonic, atunci locul geometric al punctelor M este format din dreptele de intersecție ale cilindrului cu planul perpendicular în R pe ER (sau, respectiv, pe FR).*

Fasciculul de drepte $E(F, A, R, C,)$ din planul V este armonic, deoarece R'' (intersecția lui EF cu AC), A, R și C sînt conjugate armonic. Fie M'' proiecția lui M pe ER. Întrucît $M'N$ este perpendiculară pe EF; $M'A'$ pe EA; $M'M''$ pe ER; $M'C'$ pe EC, fasciculul M' $(N, A', M''C')$

este de asemenea armonic. Dar dacă și fasciculul $M'(N, A', R, C')$ este armonic, atunci $M'' \equiv R$, și deci M' se află la una din intersecțiile perpendicularei în R pe ER (în planul V) cu cilindrul, iar M pe generatoarea în M' a cilindrului. Dar MM' este perpendicular pe planul V, deci MM' este perpendiculară pe ER. De asemenea $M'R$ este perpendicular pe ER. Deci planul dreptelor $M'M$, $M'R$ este perpendicular în R pe ER. Prin urmare M se află pe una din dreptele de intersecție ale planului perpendicular în R pe ER cu suprafața cilindrică dată.

PRESIUNEA OSMOTICĂ

Prof. *D. TĂNASE*, ș. m. 18 București

Într-un pahar cilindric de sticlă se toarnă pînă la jumătate dintr-o soluție concentrată de sulfat de cupru și se completează cu apă, cu atenție, prelingînd soluția pe pereți pentru a evita amestecarea celor două straturi (soluție-apă). Se realizează în acest fel o suprafață netă de separație. Se lasă cilindrul într-un loc liniștit și unde nu au loc variații de temperatură care ar putea provoca amestecarea celor două straturi prin convecție. După cîteva zile vom observa că tot conținutul paharului este uniform colorat, ceea ce dovedește o repartizare uniformă a sulfatului de cupru în întreg volumul de lichid.

Experiența de mai sus dovedește fenomenul difuziunii care reprezintă pătrunderea moleculelor unui corp printre moleculele altui corp, fără ca să intervină o forță exterioară. De aici rezultă că moleculele unei substanțe dizolvate sînt animate de mișcări termice comparabile cu ale gazelor. Fenomenul de difuziune este favorizat de ridicarea temperaturii (însă mult mai puțin accentuat decît la gaze). Ca și la gaze substanța dizolvată are tendința de a se destinde, ocupînd tot volumul de lichid ce-l are la dispoziție. (Se presupune substanța din soluție nevolatilă, iar din soluție nu se poate evapora). În experiența prezentată sulfatul de cupru difuzează în stratul superior pînă ce tot lichidul (soluția) ajunge la aceeași concentrație.

Deoarece moleculele substanței dizolvate nu pot depăși suprafața lichidului în care sînt dizolvate, ele trebuie să exercite asupra acestuia o presiune asemănătoare cu presiunea gazului produsă pe pereții vasului ce-l cuprinde. Această presiune se manifestă numai în interiorul lichidului și nu poate fi observată în afara lui.

Fenomenul de difuziune poate avea loc nu numai prin contactul intim dintre lichide, ci și prin pereți de separare, dacă aceștia nu sînt cu totul impermeabili, ca: pergament, membrane animale, porțelan poros etc.

Aceasta se poate arăta prin experiența lui Nollet. Se ia un borcan de sticlă plin cu alcool și se leagă cu o băsică de bou bine întinsă și se cufundă în alt vas cu apă. După cîteva ore se va constata prezența alcoolului în vasul cu apă, iar membrana va fi bombată spre exterior. Aceasta dovedește că alcoolul a străbătut membrana spre exterior și în același timp apa a pătruns în borcan prin membrană în cantitate mai mare. Dacă inversăm lichidele, se va inversa și deformarea membranei. Aceasta dovedește că membrana lasă să difuzeze ambele lichide (alcool-apă). Dacă

folosim în locul alcoolului o soluție de zahăr, membrana va lăsa să difuzeze în ambele sensuri atît zahăr cît și apă, însă mai multă apă va trece de la dizolvant către soluție decît în sens invers.

Fenomenul de trecere preferențială și cu viteză mai mare a dizolvantului către soluție se numește *osmoză,* iar presiunea care apare și care este orientată spre dizolvant se numește *presiune osmotică.*

Pentru studiul fenomenului de osmoză se folosește un perete sau o membrană *semipermeabilă,* care oprește moleculele substanței dizolvate și lasă să treacă numai dizolvantul.

O membrană semipermeabilă foarte bună o constituie ferocianura de cupru Cu_2 $[Fe(CN)_6]$, care se obține cu un precipitat insolubil. Deoarece are o rezistență mecanică mică, pentru înlăturarea acestui neajuns Pfeffer a precipitat ferocianura de cupru (prin reacția dintre $CuSO_4$ și K_4 $[Fe(CN)_6]$) în porii unui vas de lut, ars și nesmălțuit, care joacă rol de suport mecanic al membranei.

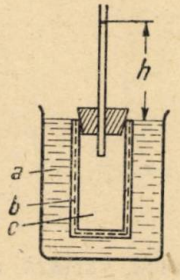


Fig. 1.
a — solvent pur,
b — perete semipermeabil,
c — soluție de zahăr concentrată

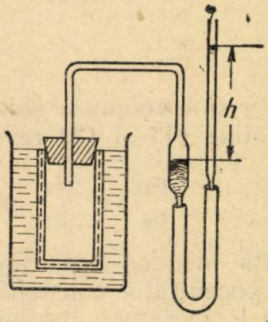


Fig. 2.
Osmometru cu manometru cu mercur.

El a umplut vasul cu o soluție de sulfat de cupru și l-a introdus în soluția de ferocianură de potasiu. Prin pătrunderea soluțiilor în direcții opuse, în pereții vasului se formează precipitatul. Un astfel de vas se numește *celulă osmotică* sau *osmometrul lui Pfeffer,* care la partea superioară are un dop etanș prin care trece un tub de sticlă (fig. 1).

Dacă se umple celula cu soluția de zahăr în apă și apoi se introduce în alt vas cu apă distilată, observăm că nivelul soluției în tub crește. Aceasta dovedește că apa a trecut din vas în celulă. S-a produs fenomenul de osmoză, apa difuzînd din spațiul cu soluție de concentrație mai mică sau nulă, în cel cu concentrarea mai mare. Se observă că moleculele substanței dizolvate (zahărul) nu trec prin peretele semipermeabil. Trecerea apei va avea loc pînă în momentul cînd presiunea hidrostatică a coloanei de soluție din tub echilibrează presiunea osmotică a substanței

$$p_{osm} = \varrho\, g\, h$$

Avînd în vedere că presiunea osmotică crește cu concentrația soluției, putînd avea cîteva atmosfere, este nevoie să înlocuim tubul de sticlă cu un manometru cu mercur (fig. 2).

Legile presiunii osmotice. — Soluțiile de acizi, baze și săruri, care sînt bune conducătoare de electricitate dau presiuni osmotice anormal de mari datorită disociației electrolitice, care mărește numărul de particule și mărește astfel presiunea. Aici vom lua în considerare substanțele nedisociabile (neelectroliți).

1° La temperaturi și concentrații molare egale, presiunile osmotice sînt aceleași la toate soluțiile, indiferent de natura lor.

2° La temperatură constantă, presiunea osmotică este direct proporțională cu concentrația molară a soluției.

Dacă c_1 și c_2 sînt concentrațiile unei substanțe și p_1 și p_2 presiunile osmotice respective putem scrie:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{c_1}{c_2}. \tag{1}$$

Avînd în vedere că, pentru o soluție, concentrația este invers proporțională cu volumul său, putem scrie:

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{v_2}{v_1}, \tag{2}$$

unde v_1 și v_2 sînt volumele soluției.

Din relațiile (1) și (2) rezultă:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{v_2}{v_1} \quad \text{sau} \quad p_1 v_1 = p_2 v_2 = k, \tag{3}$$

adică o relație identică legii Boyle-Mariotte.

3° La concentrație constantă presiunea osmotică variază direct proporțional cu temperatura absolută (legea lui Charles).

Observăm că presiunii osmotice i se pot aplica legile gazelor ideale. De asemenea se aplică și legea lui Avogadro, care se enunță astfel: soluții (diluate) care la volum și temperatură egală au aceleași presiuni osmotice, conțin același număr de molecule.

Aceasta arată că presiunea osmotică nu depinde de natura substanței dizolvate, ci de numărul moleculelor dizolvate.

4° *Legea lui van't Hoff.* — Presiunea osmotică a unei soluții este egală cu presiunea pe care ar exercita-o cantitatea de substanță dizolvată dacă, adusă în stare gazoasă, ar fi comprimată pînă la volumul ocupat de soluție și la aceeași temperatură.

La dizolvarea unui mol dintr-o substanță oarecare de neelectrolit, cu volumul V de soluție, relația se poate scrie:

$$pV = RT \tag{4}$$

sau:

$$\frac{p}{c} = RT, \tag{5}$$

unde R are aceeași valoare ca și în cazul gazelor perfecte (constanta universală a gazelor). În cazul a n molecule-gram de dizolvat relația este

$$pV = nRT \tag{6}$$

Aceste legi, stabilite de Pfeffer și van't Hoff, se aplică numai la soluții diluate, cînd presiunile osmotice sînt suficient de mici. Cu ajutorul ecuației de stare (4) corespunzătoare gazelor ideale se poate calcula masa moleculară a substanței, astfel: se exprimă concentrația c a substanței dizolvate în g/cm^3 și dacă se dizolvă 1 mol de substanță (M) avem:

$$c = \frac{M}{V} \tag{7}$$

Înlocuind volumul din relația (7) în relația (4) rezultă:

$$p \cdot \frac{M}{c} = RT, \tag{8}$$

de unde:

$$M = \frac{c\,R\,T}{p}. \tag{9}$$

Cunoscînd presiunea osmotică ce se măsoară, concentrația c în g/cm^3 și temperatura, calculăm masa moleculară.

Dacă avem două soluții cu presiuni osmotice diferite — aceea cu concentrația molară mai mare primește din dizolvantul celeilalte și se numește *hipertonică* față de a doua, iar aceasta este *hipotonică* față de prima.

Aplicații. Fenomenele legate de presiunea osmotică au un rol foarte mare în natură, în special în procesele care au loc în plante și animale, precum și în diferite procese industriale.

1° *Fenomenul osmozei la celule.* — O celulă vegetală este formată dintr-un conținut protoplasmic (proteină), care este limitat de o pătură mai densă numită membrană protoplasmică (numită și protoplast) și dintr-o membrană celulozică, care înconjoară protoplastul, avînd rolul de susținere. Membrana celulozică este permeabilă atît pentru apă cît și pentru substanțele dizolvate. În schimb, protoplastul este semipermeabil lăsînd să treacă numai apa nu și substanțele dizolvate. Ea lucrează ca o membrană semipermeabilă, mult mai bună decît cele obținute pe cale artificială. Pentru a verifica permeabilitatea membranelor să introducem o celulă vegetală vie în soluția unui colorant. Vom observa că membrana celulozică se colorează, iar protoplasma rămîne necolorată. De asemenea, substanța colorantă din sucul celular al unor plante, nu poate străbate în afară prin membrana protoplasmică. Deci, în anumite limite, o celulă vegetală se poate asemăna cu osmometrul lui Pfeffer.

Botanistul Hugo de Vries, lăsînd să stea în apă curată o celulă vegetală de Begonia maniaeata sau de Tradescentia discolor, a observat că apa pătrunde și prin membrana celulozică și prin protoplast, trecînd în interiorul celulei. În acest mod celula se umflă și presiunea osmotică din interior crește. Acest fenomen se numește *turgescență* și se produce cînd lichidul exterior este apă curată sau soluție mai diluată decît sucul celular (soluție hipotonică). Dacă introducem aceeași celulă în soluție hipertonică (mai concentrată decît sucul celular: cu presiunea osmotică mai mare), de exemplu, în soluție concentrată de KNO_3, se observă că turgescența scade treptat, pînă cînd celula ajunge la starea normală și apoi, în con-

tinuare, apa din cuprinsul celular trece în soluția exterioară. Conținutul celular pierzînd apă se va restrînge și împreună cu protoplastul se va deslipi de membrana celulozică (fig. 3). Fenomenul care a avut loc se numește *plasmoliză*. Presiunea osmotică a sucului celular se datorește substanțelor cuprinse în soluție ca: zaharuri, acizi organici, săruri minerale etc. Ea variază de la 3 atmosfere pentru plantele aeriene pînă la mai mult de 25 atmosfere pentru plantele marine. (Penicilium glaucum poate

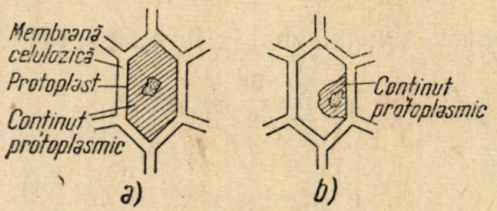


Fig. 3.
Celulă de tradescantia discolor: *a* — celulă în condiții normale. *b* — celulă în soluție hipertonică.

trăi în soluții concentrate de azotat de sodiu 38%, avînd o presiune osmotică de 157 atmosfere). Aceste plante nu vor trăi în apă curată, deoarece suferă fenomenul de turgescență și celulele plesnesc.

2. Celulele globulelor roșii din sînge se comportă la fel ca celulele plantelor. Introducînd globule roșii într-o soluție de clorură de sodiu, cu presiunea osmotică mai mare decît cea din interior, atunci difuzează apă din celulă în exterior și celula se sbîrcește, rezultînd fenomenul numit *hematoliză*. Dacă se introduce în soluție cu presiunea osmotică mai mică, pătrunde apă din exterior. Celula se umflă pînă ce membrana plesnește, iar tot conținutul se revarsă în soluție. Globulele roșii se mențin în stare normală în soluții izotonice. Serul sîngelui este o soluție izotonică. Prin introducerea soluțiilor apoase în organism în scopuri terapeutice, acestea trebuie să aibă o presiune osmotică egală cu aceea a plasmei sanguine. La om presiunea osmotică a serului sîngelui este egală cu aceea a unei soluții de clorură de sodiu de 0,86% (soluție fiziologică de NaCl) sau de 4,15% glucoză. Presiunea osmotică se menține constantă în organism prin acțiunea rinichilor, care elimină excesul de apă sau de săruri. Observăm că pentru a decurge normal fenomenele vitale, presiunea osmotică trebuie să rămînă constantă. Celulele cuprind o cantitate constantă de apă, cu un volum constant și o formă exterioară proprie. Cînd presiunea variază se produc tulburări grave.

3° Cînd pe ochi cad cristale de sare de bucătărie se produce o usturime, deoarece soluția hipertonică ce rezultă la suprafața ochiului scoate apa din interior. Și apa curată este supărătoare (hipotonică), deoarece pătrunde în ochi. În schimb, apa de mare este aproximativ izotonică față de lichidul din ochi (umoare) astfel că nu supără. De aici rezultă că în mare se poate înota cu ochii deschiși.

4° La conservarea alimentelor prin sare, știind că în mediul sărat nu se dezvoltă microorganisme se produc următoarele fenomene: a) prin sărare, carnea sau peștele pierd apa; b) introduse în apă curată se umflă și sarea trece în apă.

5° Grădina minerală. Într-o soluție de silicat de sodiu se introduc cîteva cristale din: sulfat de cupru (albastru), azotat de nichel (verde), clorură de cobalt (roză) și azotat de plumb (în soluție incolor). Se va forma imediat, prin reacția dintre soluțiile sărurilor aruncate (ce se formează în jurul cristalelor) și silicatul de sodiu, silicați insolubili de Cu, Ni, Co și Pb cu culorile specifice, sub formă de membrane gelatinoase semipermeabile. Apa va trece prin osmoză în interior, astfel că ele se umflă văzînd cu ochii, și apar pe fundul vasului ca o grădină de plante multicolore, cunoscută sub numele de grădină minerală.

6° Se pot stabili masele moleculare și gradul de disociere (la electroliți). În aceste scopuri astăzi se folosesc metode foarte precise.

7° Trecerea zahărului din celulele sfeclei în apă, fenomen care se produce la cald, este un proces complex în care intervin fenomenele de difuziune și osmoză; ele au loc pînă la o temperatură de 70—80°C.

2° Presiunea osmotică a fost folosită de către Nernst, la explicarea dizolvării cristalelor și la calculul potențialului „metal-soluția unei sări a metalului respectiv" și cunoscută sub numele de teoria osmotică a pilelor.

SĂ CONSTRUIM MODELE ȘI APARATE DE FIZICĂ PRIN MIJLOACE PROPRII

DETERMINAREA DENSITĂȚII CORPURILOR PRIN MIJLOACE SIMPLE

Prof. *Segal G.* — Șc. m. nr. 2 Bacău

Într-un articol intitulat *„Un mijloc simplu pentru a determina densitatea lichidelor"* din Fizica v Scole Nr. 5/1950, N. A. Maslaev arată cum se poate determina densitatea unui lichid prin mijloacele cele mai simple, fără a întrebuința în acest scop aparate speciale, cum sînt: balanțe, areometre, mensure și vase comunicante. Autorul observă că metoda propusă de el se poate întrebuința și pentru determinarea densității corpurilor în formă de praf, cum ar fi de exemplu nisipul.

În rîndurile care urmează vom arăta în ce consta metoda lui Maslaev și cum o putem extinde și pentru determinarea densității corpurilor solide în general.

Pentru determinarea densității unui lichid după metoda lui Maslaev, avem nevoie numai de o eprubetă, de un vas cu apă, de lichidul a cărui densitate vrem să determinăm (de exemplu petrol) și de o riglă gradată.

În jurul eprubetei legăm un fir de ață sau mai bine de cauciuc, care formează un inel indicator, mobil cu frecare pe partea superioară a eprubetei.

Pentru a determina densitatea unui lichid procedăm în felul următor: Introducem mai întîi în eprubeta prevăzută cu inel indicator (de cauciuc sau ață) atîta apă ca ea să plutească în vasul mai mare cu apă, în poziție verticală. După ce am mutat inelul indicator pînă la nivelul la care se scufundă eprubeta în vasul mai mare cu apă (fig. 1), o scoatem din vas și

măsurăm cu ajutorul unei rigle gradate înălțimea h, a coloanei de apă din eprubetă (fig. 2).

Vărsăm acum apa din eprubetă și în aceeași eprubetă, fără să mutăm inelul indicator, introducem lichidul a cărui densitate trebuie să o determinăm (de exemplu petrol). Lăsăm să plutească și de data aceasta eprubeta în poziție verticală în vasul mai mare cu apă și potrivim (cu ajutorul unei pipete) astfel cantitatea lichidului din eprubetă, încît ea să se

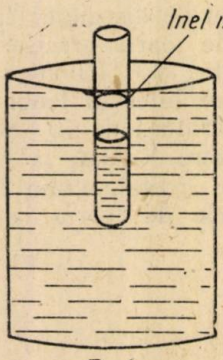


Fig. 1

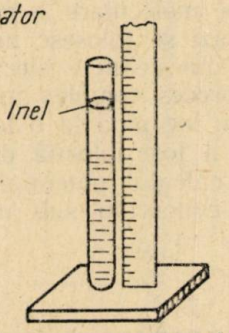


Fig. 2

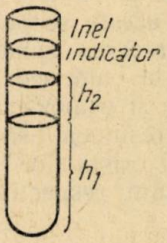


Fig. 3

scufunde pînă la același nivel în apa din vasul mai mare, ca și înainte cînd era în ea apă, adică pînă la poziția inelului indicator. Scoatem după aceea eprubeta din vasul cu apă și cu ajutorul riglei gradate măsurăm înălțimea coloanei de lichid h_2. Dacă notăm densitatea apei cu ϱ_1, densitatea lichidului cu ϱ_2, atunci există relația simplă:

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_2} = \frac{h_2}{h_1}$$

de unde:

$$\varrho_2 = \frac{h_1}{h_2} \cdot \varrho_1$$

Luînd în considerare că $\varrho_1 = 1 \frac{g}{cm^3}$, obținem:

$$\varrho_2 = \frac{h_1}{h_2} \cdot \frac{g}{cm^3}.$$

Relația dată pentru determinarea densității unui lichid o putem deduce ușor. Deoarece eprubeta cu apa din interiorul ei plutește în echilibru în vasul cu apă, putem spune că forța arhimedică F ține în echilibru greutatea eprubetei G și greutatea apei din interiorul eprubetei (G_1). Avem deci egalitatea:

$$F = G + G_1.$$

Eprubeta cu lichidul a cărui densitate trebuie să o determinăm, plu-

tind de asemenea în echilibru și scufundîndu-se pînă la același nivel în vasul cu apă, aceasta înseamnă că avem și egalitatea:

$$F = G + G_2,$$

unde G_2 este greutatea lichidului din eprubetă (forța arhimedică este aceeași în ambele cazuri).

Din ultimele două egalități rezultă egalitatea:

$$G + G_1 = G + G_2,$$

adică:

$$G_1 = G_2.$$

Luînd în considerare că $G_1 = m_1 g$ și $G_2 = m_2 g$, unde m este masa apei din eprubetă și m_2 este masa lichidului din eprubetă, rezultă:

$$m_1 g = m_2 g \quad \text{sau:} \quad m_1 = m_2.$$

Însemnînd cu v_1 volumul apei din eprubetă și cu v_2 volumul lichidului din eprubetă mai rezultă:

$$m_1 = v_1 \cdot \varrho_1 \quad \text{și} \quad m_2 = v_2 \cdot \varrho_2,$$

adică:

$$v_1 \varrho_1 = v_2 \varrho_2.$$

Însemnînd secțiunea eprubetei cu S mai obținem:

$$v_1 = S \cdot h_1 \quad \text{și} \quad v_2 = S h_2,$$

ceea ce ne conduce, prin înlocuire în relația anterioară, la relația:

$$S h_1 \varrho_1 = S h_2 \varrho_2 \quad \text{sau} \quad h_1 \varrho_1 = h_2 \varrho_2 \quad \text{și} \quad \frac{\varrho_1}{\varrho_2} = \frac{h_2}{h_1},$$

Pentru a extinde metoda lui M a s l a e v și pentru determinarea densității corpurilor solide procedăm astfel:

În eprubeta prevăzută cu inelul indicator introducem corpul solid a cărui densitate trebuie să o determinăm (de exemplu introducem în eprubetă cuie mici de fier dacă vrem să determinăm densitatea fierului, sau bucăți mici de sîrmă de aluminium în cazul determinării densității aluminiului). Scufundăm în urmă eprubeta în vasul cu apă, potrivim cantitatea corpului solid introdusă în eprubetă astfel ca eprubeta să plutească în poziție verticală și mutăm inelul indicator pînă la nivelul apei din vasul exterior.

Scoatem apoi eprubeta din apă și fără să mutăm poziția inelului indicator, scoatem de asemenea solidul din eprubetă și-l păstrăm.

Introducem după aceea în eprubetă o cantitate corespunzătoare de apă astfel ca ea să plutească din nou în poziție verticală în vasul cu apă, scufundîndu-se pînă la același nivel ca înainte (cînd corpul solid era în eprubetă), adică pînă la inelul indicator.

Scoatem acum eprubeta din vasul cu apă și măsurăm cu rigla gradată înălțimea h_1 a coloanei de apă din interiorul eprubetei.

După aceea, pentru a afla volumul corpului solid păstrat, îl introducem în apa eprubetei și măsurăm creșterea înălțimii h_2 a coloanei de apă din eprubetă, provocată prin introducerea solidului a cărui densitate vrem să o determinăm. (fig. 3).

Luînd în considerare că în formula pentru densitatea solidului $\varrho_2 = \frac{m_2}{v_2}$, m_2 este masa solidului și v_2 volumul său, și avînd în vedere că masa solidului m_2 este egală cu masa apei m_1, echilibrată prin aceeași forță arhimedică, obținem relațiile:

$$m_2 = m_1; \quad m_1 = \varrho_1 v_1 = \varrho_1 s h_1,$$

deci:

$$m_2 = \varrho_1 s h_1.$$

Înlocuind la rîndul său pe v_2 prin egalul său, $v_2 = s h_2$, unde s este secțiunea eprubetei, obținem densitatea corpului solid,

$$\varrho_2 = \frac{m_2}{v_2} = \frac{\varrho_1 s h_1}{s h_2} = \frac{h_1}{h_2} \cdot \varrho_1;$$

dar:

$$\varrho_1 = 1 \frac{g}{cm^3}$$

deci:

$$\varrho_2 = \frac{h_1}{h_2} \cdot \frac{g}{cm^3},$$

relație, care are aceeași formă ca aceea obținută pentru densitatea corpurilor lichide.

NOTE MATEMATICE

POLINOAMELE LUI CEBÎȘEV

I. Polinoamele lui Cebîșev sînt aplicații importante ale funcțiilor inverse. Ele sînt definite astfel:

$$y = T_n(x) = \cos(n \arccos x),$$

în care n reprezintă gradul polinomului.

Să ne convingem că într-adevăr expresia dată e un polinom de gradul n. Să pornim de la cazuri particulare; pentru $n=0$ trebuie să obținem un număr constant, independent de x. Într-adevăr, avem:

$T_0(x) = \cos(0 \arccos x) = \cos 0 = 1$

Pentru $n=1$ obținem: $T_1(x) = \cos(\arccos x) = x$.

Pentru $n = 2$ obținem: $T_2(x) = \cos(2 \arccos x) = \cos 2\varphi$, unde $\varphi = \arccos x$, sau $\cos \varphi = x$.

Întrucît $\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1$, rezultă:
$T_2(x) = 2x^2 - 1$
Pentru $n=3$: $T_3(x) = \cos(3 \text{ arc cos } x) = \cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$;
$T_3(x) = 4x^3 - 3x$

În acest fel am putea determina Polinoamele lui Cebîșev de orice grad.

II. Să stabilim o relație de recurență, care ne permite să determinăm din aproape în aproape polinoamele lui Cebîșev.

Considerăm primele trei polinoame găsite:
$T_1 = x$; $T_2 = 2x^2 - 1$; $T_3 = 4x^3 - 3x$
Dacă înmulțim T_2 cu $2x$ și scădem T_1, obținem T_3, adică avem:
$T_3 = 2xT_2 - T_1$

Vom demonstra că această relație e valabilă pentru oricare trei polinoame consecutive: $T_{n+1} = 2xT_n - T_{n-1}$

Prin definiție avem:
$T_{n+1} = \cos(n+1)\varphi = \cos(n\varphi + \varphi)$
$T_{n-1} = \cos(n-1)\varphi = \cos(n\varphi - \varphi)$
Adunînd obținem: $T_{n+1} + T_{n-1} = \cos(n\varphi + \varphi) + \cos(n\varphi - \varphi) =$
$= 2\cos\varphi\cos n\varphi = 2xT_n$ adică $T_{n+1} = 2xT_n - T_{n-1}$.

III. Toate rădăcinile polinoamelor $T_n(x) = 0$ sînt reale și cuprinse între -1 și $+1$.

Într-adevăr, trebuie să avem: $\cos(n \text{ arc cos } x) = 0$,

de unde: $n \text{ arc cos } x = (2k-1)\frac{\pi}{2}$;

$$\text{arc cos } x = \frac{(2k-1)\pi}{2n}; \text{ sau } x = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n},$$

unde $k = 0,1,2,\ldots,n$;

Evident, cele n rădăcini sînt reale.

Întrucît $\cos\frac{2k-1}{2n}\pi$ e cuprins între -1 și 1, rezultă că cele n rădăcini sînt cuprinse între -1 și 1.

IV. Din definiția polinoamelor lui Cebîșev mai rezultă următoarele:

Polinoamele lui Cebîșev de grad cu soț $(2n)$ satisfac condiția: $T_{2n}(x) = T_{2n}(-x)$, adică toți termenii sînt de grad cu soț.

Cele de grad fără soț $(2n+1)$ au toți termenii de grad fără soț, adică $T_{2n+1}(x) = -T_{2n+1}(-x)$.

Mircea Rădulescu, elev Constanța

AFLAREA LATURII DECAGONULUI REGULAT CONVEX ȘI A PENTAGONULUI REGULAT CONVEX CU ALTE PROCEDEE

Pe figura alăturată notăm: $CD = l_{10} = 2x$, $CP = ON = a_{10} = y$ atunci $OP = x$, $AP = R - x$, $AC = BD = l_5$

Aria triunghiului OCD este: xy. Urmează că înălțimea DM a triunghiului OCD este: $DM = \frac{2xy}{R}$. Rezultă: $l_5 = BD = 2DM = \frac{4xy}{R}$.

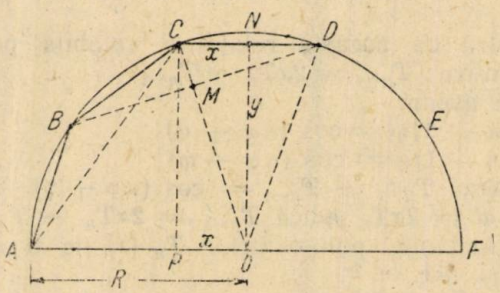
Din triunghiurile dreptunghice OPC și APC deducem:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$(R - x)^2 + y^2 = \frac{16\,x^2 y^2}{R^2}$$

Eliminînd pe y^2 între cele două ecuații obținem ecuația $8x^4 - 8R^2x^2 - -R^3x + R^4 = 0$ care are rădăcinile R și $-\frac{R}{2}$. Împărțind polinomul din membrul I prin $x - R$ și $2x + R$ obținem:

$$8X^4 - 8R^2\,x^2 - R^3x + R^4 = (x - R)(2x + R)(4x^2 + 2Rx - R^2) = 0.$$



Evident: $x - R \neq 0$, altfel ar urma ca latura decagonului să fie egală cu diametrul; de asemenea, $2x + R \neq 0$ urmează că avem de rezolvat ecuația:

$4x^2 + 2Rx - R^2 = 0$ cu rădăcinile: $x = \frac{R}{4}(-1 + \sqrt{5})$.

Eliminăm rădăcina negativă $x = -\frac{R}{4}(1 + \sqrt{5})$ ca fiind fără sens.

Rămîne: $x = \frac{R}{4}(-1 + \sqrt{5})$,

ceea ce dă: $l_{10} = 2x = \frac{R}{2}(-1 + \sqrt{5})$.

Se obține imediat: $a_{10} = y = \frac{R}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$ și $l_5 = \frac{4xy}{R} = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$.

H. Rosner, Iași

CALEIDOSCOP MATEMATIC ŞI FIZIC

„BUCLA MORȚII"

Cunoscuta problemă de mecanică *„bucla morții"*, trece în prezent prin noi faze de cercetări și completări.

Menționăm astfel articolul din G.M.F.-A nr. 12/1959 (datorit lui M. A. Grabovski din Moscova), nota din G.M.F.-A nr. 10/1960, precum și problema nr. 4093 din G.M.F.-B nr. 3/1960.

Deosebit de important constituie și faptul că problema a interesat mult pe cititorii și corespondenții noștri de la G.M.F.-B de la care s-au primit în afară de numeroase soluții bune și două generalizări remarcabile: una aparținînd elevului *Macovschi Mihail* elev cl. XI de la Școala medie „Mihai Viteazu" din București iar cealaltă a tînărului *Boțoacă Vasile* absolvent al Școlii medii nr. 27 din București.

Iată pe scurt generalizarea lui *Macovschi Mihail*.

Notînd cu H înălțimea de la care este lăsată bila să cadă, A ajunge în B cu viteza (fig. 1):

$$v_B^2 = 2gH \tag{1}$$

Dacă presupunem că bila străbate o singură buclă circulară, înălțimea maximă la care se poate ridica este dată de condiția ca în C apăsarea bilei pe buclă să fie nulă, ceea ce revine în a scrie egalitatea dintre greutatea bilei și forța de inerție în C (forța centrifugă).

Notînd cu m masa bilei și cu R_1 raza primei bucle avem:

$$mg = m\frac{v_C^2}{R_1}. \tag{2}$$

Dar viteza în C este dată de expresia:

$$v_C^2 = 2g\,(H - 2R_1). \tag{3}$$

Din aceste două egalități rezultă:

$$R_1 = \frac{2}{5}H\ ;\ v_C^2 = \frac{2gH}{5} \tag{4}$$

Deci, în C, bila are o energie cinetică.

$$E = \frac{1}{2}mv_C^2 = \frac{mgH}{5},$$

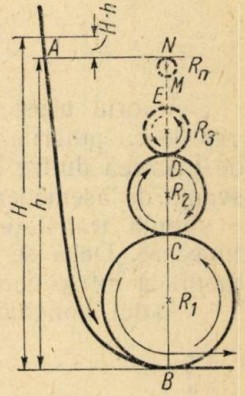


Fig. 1.

care poate fi utilizată pentru a se ridica mai sus.

Așezînd în C o nouă buclă circulară de rază R_2, înălțimea maximă la care se poate urca bila este dată de condiția ca în D apăsarea bilei pe buclă să fie nulă:

$mg = m\frac{v_D^2}{R_2}$. Pe de altă parte: $v_D^2 = 2g\,(H - 2R_1 - 2R_2)$

$$\text{Rezultă: } R_2 = \frac{R_1}{5} = \frac{2H}{5^2}\ ;\ v_D^2 = \frac{2gH}{5^2}. \tag{5}$$

Repetînd raționamentul precedent ajungem la concluzia că bila se poate urca și mai sus, utilizînd energia sa cinetică din D, prin montarea unei noi bucle circulare de rază R_3:

$$R_3 = \frac{R_2}{5} = \frac{R_1}{5^2} = \frac{2H}{5^3}\ ;\ v_E^2 = \frac{2gH}{5^3} \tag{6}$$

Continuînd astfel, pentru al n-lea cerc de rază R_n obținem valorile:

$$R_n = \frac{R_{n-1}}{2} = \frac{R_1}{5^{n-1}} = \frac{2H}{5^n} \; ; \; v_N^2 = \frac{2gH}{5^n}. \tag{7}$$

Rezultă că în cazul a n bucle circulare suprapuse bila se urcă la o înălțime h dată de expresia:

$$h = 2(R_1 + R_2 + \ldots\ldots + R_n)$$

$$h = 2R_1\left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{5^{n-1}}\right).$$

Deci:

$$h = \frac{1}{2} R_1 \frac{5^n - 1}{5^{n-1}} = \frac{5^n - 1}{5^n} H. \tag{8}$$

Diferența de nivel dintre punctul de lansare al bilei și punctul cel mai ridicat N al ultimei bucle circulare este:

$$H - h = \frac{R_1}{2 \cdot 5^{n-1}} = \frac{1}{5^n} H. \tag{9}$$

Autorul acestei generalizări observă că razele diferitelor bucle scad repede cu puterile lui 5 și că la rezolvarea problemei nu s-a ținut seama de frecarea dintre bilă și buclă și nici de rezistența mediului. Nu s-a ținut seama de asemenea de mișcarea de rotație a bilei; mișcarea bilei nu este o simplă translație cum s-a presupus, ci o mișcare de rostogolire fără lunecare. Dacă se ține seama și de acest lucru, rezultatele precedente se modifică într-o oarecare măsură.

Astfel, aplicînd teorema energiei cinetice între punctele A și B obținem:

$$\frac{1}{2} m v_B^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = mgH$$

în care:

$I = \frac{2}{5} ma^3$ este momentul de inerție al bilei în raport cu un diametru

iar $\omega = \frac{v_B}{a}$ este viteza unghiulară a bilei corespunzătoare vitezei v_B a centrului său (a raza bilei).

Obținem astfel: $\frac{7}{10} v_B^2 = gH$; $v_B^2 = \frac{10}{7} gH$, (10)

adică o viteză mai mică decît cea dată de (1).

Relațiile (2) și (3) pentru prima buclă circulară devin:

$$mg = m\frac{v_C^2}{R_1} \; ; \; \frac{7}{10} v_C^2 = g(H - 2R_1),$$

Rezultă:

$$R_1 = \frac{10}{7} H\left(\frac{7}{27}\right); \quad v_C^2 = \frac{10}{7} gH\left(\frac{7}{27}\right)$$

Pentru punctul D:

$$mg = m\frac{v_D^2}{R_2}\ ; \quad \frac{7}{10}v_D^2 = g(H - 2R_1 - 2R_2)$$

De unde:

$$R_2 = \frac{7}{27}R_1 = \frac{10}{7}H\left(\frac{7}{27}\right)^2.$$ Analog obținem:

$$R_2 = \left(\frac{7}{27}\right)R_2 = \left(\frac{7}{27}\right)^2 R_1 = \frac{10}{7}H\left(\frac{7}{27}\right)^3\ ; \quad R_n = \left(\frac{7}{27}\right)^{n-1}\cdot R_1 = \frac{10}{7}H\left(\frac{7}{27}\right)^n.$$

Rezultă: $h = \left(\frac{20}{7}\right)H\left[\frac{7}{27} + \frac{7^2}{27^2} + \ldots\ldots + \frac{7^n}{27^n}\right]$, sau

$$h = \frac{27^n - 7^n}{27^n}H = \frac{27^n - 7^n}{27^{n-1}}\cdot\frac{R_1}{10}, \tag{11}$$

Iar:

$$H - h = \frac{7^n}{27^n}H = \frac{7^n}{27^{n-1}}\cdot\frac{R_1}{10}. \tag{12}$$

O altă generalizare a fost dată de *Boțoagă Vasile*. Dînsul consideră n bucle circulare suprapuse de aceiași rază R (fig. 2).

În punctul N cel mai periculos trebuie să avem:

$$mg = m\frac{v^2}{R}\ ; \quad v^2 = 2g\ (H - 2nR).$$

Rezultă: $h = 2nR = \frac{4nH}{4n+1}$.

În cazul cînd ținem seama și de rotația bilei avem:

$$mg = m\frac{v^2}{R}\ ; \quad \frac{7}{10} = g(H - 2nR)$$

De unde:

$$h = 2nR = \frac{20nH}{20n+7}.$$

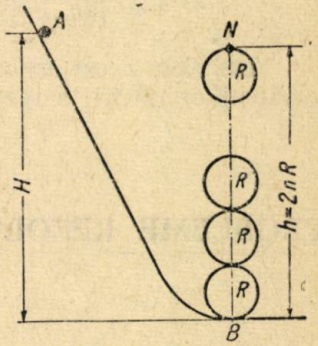


Fig. 2.

În afară de asemenea generalizări *Macovschi Mihai* se ocupă și de cazul a două bucle circulare avînd linia centrelor înclinată cu unghiul α. (fig. 3).

Pentru prima buclă de rază R trebuie îndeplinită condiția cunoscută

$$R = \frac{2}{5}H.$$

Pentru cea de a doua buclă de rază r în punctul cel mai periculos D trebuie să avem:

$$mg = \frac{v^2}{r}\ ; \quad v^2 = 2g\cdot[H - R - r(R + r)\cos\alpha]$$

De unde

$$r = \frac{2(3 - 2\cos\alpha)H}{5(3 + 2\cos\alpha)}; \quad h = (R + r)(1 + \cos\alpha) = \frac{12(1 + \cos\alpha)H}{5(3 + 2\cos\alpha)}.$$

$$H - h = \frac{(3 - 2\cos\alpha)H}{5(3 + 2\cos\alpha)}.$$

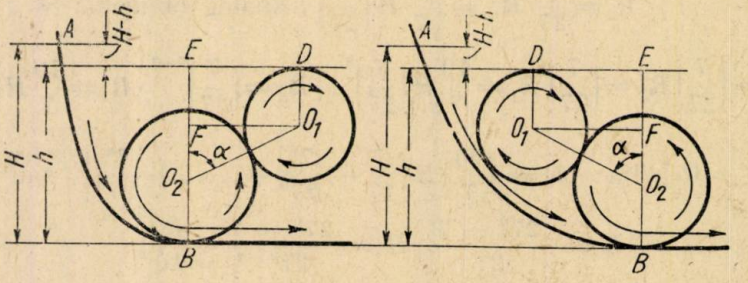


Fig. 3.

Dacă se ține seama și de rotația bilei se obține analog următoarele rezultate :

$$R = \frac{10}{27}H; \quad r = \frac{10(17 - 10\cos\alpha)H}{27(17 + 10\cos\alpha)}$$

$$h = \frac{340(1 + \cos\alpha)H}{27(17 + 10\cos\alpha)}; \quad H - h = \frac{7(17 - 10\cos\alpha)H}{27(17 + 10\cos\alpha)}.$$

Încheiem acest articol remarcînd interesul și aportul original al corespondenților noștri la rezolvarea problemelor din G.M.F.-B.

Al. Stoenescu

PROBLEME REZOLVATE

Problema 4106

Pe latura BC a triunghiului ABC se ia punctul M astfel ca $\frac{MB}{MC} = \lambda$. *Se cere :*

1. *Să se exprime în funcție de* λ *și aria S a triunghiului ABC aria paralelogramului MNAP care are ca laturi AB, AC și paralele duse din M la ele. Să se determine maximul acestei arii cînd* λ *variază.*

2. *Să se calculeze NP în funcție de* λ *și de laturile a, b, c ale triunghiului dat și să se determine maximul acestui segment.*

3. *Să se arate că dacă* $\lambda = \frac{c^2}{b^2}$ *atunci patrulaterul BCNP este inscriptibil iar cercurile MNC și MPB sînt tangente dreptei NP.*

C. Coșniță

Soluție dată de *Răşcanu Radu*, elev ş. m. 1, Bucureşti.

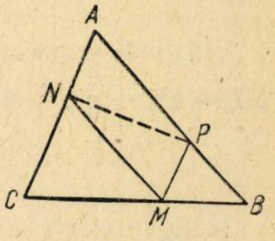
$$\frac{MB}{MC}=\lambda;\quad \frac{NA}{NC}=\lambda;\quad \frac{PB}{PA}=\lambda$$

Din relațiile de mai sus deducem:

$$MB=\frac{\lambda}{\lambda+1}\cdot BC;\quad MC=\frac{1}{\lambda+1}\cdot BC$$

$$NA=\frac{\lambda}{\lambda+1}\cdot AC;\quad NC=\frac{1}{\lambda+1}\cdot AC$$

$$PB=\frac{\lambda}{\lambda+1}\cdot AB;\quad PA=\frac{1}{\lambda+1}\cdot AB$$



$$\frac{\text{Aria } MBP}{\text{Aria } ABC}=\frac{MB\cdot PB}{AB\cdot BC}=\frac{\frac{\lambda}{\lambda+1}\cdot BC\cdot\frac{\lambda}{\lambda+1}\cdot AB}{AB\cdot BC}=\frac{\lambda^2}{(1+\lambda)^2}$$

$$\frac{\text{Aria } MCN}{\text{Aria } ABC}=\frac{MC\cdot NC}{BC\cdot AC}=\frac{\frac{1}{\lambda+1}\cdot BC\cdot\frac{1}{\lambda+1}\cdot AC}{BC\cdot AC}=\frac{1}{(1+\lambda)^2}$$

$$\text{Aria } MPAN=\text{Aria } ABC-\frac{\lambda^2}{(1+\lambda)^2}\cdot\text{Aria } ABC-\frac{1}{(1+\lambda)^2}\cdot\text{Aria } ABC=$$

$$=\frac{2\lambda}{(1+\lambda)^2}\cdot\text{Aria } ABC=\frac{2\lambda S}{(1+\lambda)^2}.$$

Pentru a afla maximul ariei paralelogramului, anulăm derivata întîia a expresiei $E=\frac{2\lambda}{(1+\lambda)^2}$

$$E'=\frac{2(\lambda+1)^2-4\lambda(1+\lambda)}{(1+\lambda)^4}=-\frac{2(\lambda^2-1)}{(1+\lambda)^4}=\frac{2(1-\lambda)}{(1+\lambda)^3}$$

Maximul ariei are loc pentru $\lambda=1$.

$$\text{Aria } MPAN=\frac{2}{4}S=\frac{1}{2}\cdot\text{Aria } ABC$$

2) $NP^2=NA^2+PA^2-2NA\cdot PA\cdot\cos A$ sau

$$NP^2=\frac{b^2\lambda^2}{(1+\lambda)^2}+\frac{c^2}{(1+\lambda)^2}-\frac{2bc\lambda}{(1+\lambda)^2}\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=$$

$$\frac{b^2\lambda^2-(b^2+c^2-a^2)\lambda+c^2}{(1+\lambda)^2}$$

Pentru a afla maximul acestui segment vom anula prima derivată a expresiei $F=\frac{b^2\lambda^2-(b^2+c^2-a^2)\lambda+c^2}{(1+\lambda)^2}$

$$F' = \frac{(1+\lambda)^2[2b^2\lambda-(b^2+c^2-a^2)]-2(1+\lambda)[b^2\lambda^2-(b^2+c^2-a^2)\lambda+c^2]}{(1+\lambda)^4} =$$

$$= \frac{(1+\lambda)(2b^2\lambda+2b^2\lambda-b^2-c^2+a^2-b^2\lambda-c^2\lambda+a^2\lambda-2b^2\lambda^2+2b^2\lambda+2c^2\lambda-2a^2\lambda-2c^2)}{(1+\lambda)^4}$$

$$= \frac{3b^2\lambda - a^2\lambda + c^2\lambda + a^2 - b^2 - 3c^2}{(1+\lambda)^3}$$

Maximul segmentului NP are loc pentru

$3b^2\lambda - a^2\lambda + c^2\lambda + a^2 - b^2 - 3c^2 = 0$, adică pentru

$$\lambda = \frac{3c^2 - a^2 + b^2}{3b^2 - a^2 + c^2}.$$

3. Egalitatea $\lambda = \frac{c^2}{b^2}$ se mai poate scrie astfel:

$$\frac{b\lambda}{c(1+\lambda)} = \frac{c}{b(1+\lambda)} \text{ sau } \frac{AN}{c} = \frac{AP}{b}$$

ceea ce arată că triunghiurile ABC și ANP sînt asemenea căci au cîte două perechi de laturi proporționale și unghiul cuprins între ele egal.

Prin urmare NP este antiparalelă cu BC. Adică patrulaterul $BCNP$ este inscriptibil.

Fie O_1 și O_2 centrele cercurilor MNC și MPB.

Avem $\sphericalangle CNP = 180° - B$

$\sphericalangle CO_1N = 2B$

$$\sphericalangle O_1NP = \sphericalangle CNP - \sphericalangle CNO_1 = 180° - B - \frac{180° - 2B}{2} = 90°.$$

Urmează deci că cercul MNC este tangent dreptei NP. În mod analog arătăm că NP este tangentă cercului MPB.

Problema 4111

Să se reprezinte grafic funcțiile:

$$y_1 = \sqrt{1 + \sin 3x} + \sqrt{1 - \sin 3x}$$

$$y_2 = \sqrt{1 + \sin 3x} - \sqrt{1 - \sin 3x}$$

$$y_3 = y_1 + y_2;\ y_4 = \frac{y_1}{y_2};\quad y_5 = \frac{1}{y_1};\quad y_6 = \frac{1}{y_2}$$

C. Ionescu-Țiu

Soluție dată de *Gh. Cezar*, absolvent Buzău.

Avem:

$$\sqrt{1 + \sin 3x} = \sqrt{\sin^2\frac{3x}{2} + \cos^2\frac{3x}{2} + 2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2}} = \tag{1}$$

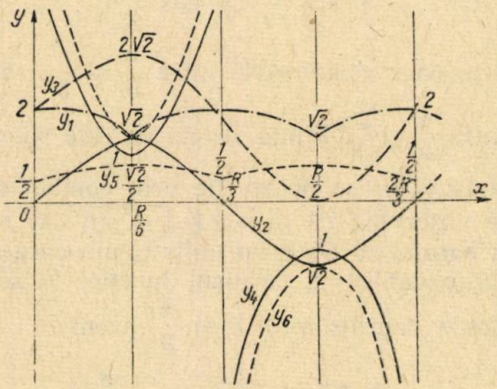
$$= \left|\sin\frac{3x}{2} + \cos\frac{3x}{2}\right|$$

Argumentul funcției $\sin 3x$ este cuprins între 0 și 2π pentru x cuprins între 0 și $\frac{2\pi}{3}$. Deoarece $\sin 3x = -\sin 3\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$, se studiază x cuprins între 0 și $\frac{\pi}{3}$, y_1 luînd aceiași valoare și pentru x și pentru $x + \frac{\pi}{3}$. Avem, pentru x cuprins între 0 și $\frac{\pi}{6}$:

$$y_1 = \sin\frac{3x}{2} + \cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{3x}{2} - \sin\frac{3x}{2} = 2\cos\frac{3x}{2}$$

$$\left(\cos\frac{3x}{2} \geqslant \sin\frac{3x}{2}\right)$$

Se reprezintă y_1 ca o cosinusoidă pentru x cuprins între 0 și $\frac{\pi}{6}$. Avem



pentru x cuprins între $\frac{\pi}{6}$ și $\frac{\pi}{3}$:

$$y_1 = \sin\frac{3x}{2} - \cos\frac{3x}{2} + \sin\frac{3x}{2} - \cos\frac{3x}{2} = 2\sin\frac{3x}{2}$$

$$\left(\sin\frac{3x}{2} \geqslant \cos\frac{3x}{2}\right)$$

Se reprezintă y_1 ca o sinusoidă pentru x cuprins între $\frac{\pi}{6}$ și $\frac{\pi}{3}$. Se completează graficul funcției y_1 între $\frac{\pi}{3}$ și $\frac{2\pi}{3}$ ținînd seamă de cele spuse mai sus.

2. Deoarece $\sin 3x = -\sin 3\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$ se studiază x cuprins între 0 și $\frac{\pi}{3}$, y_2 luînd pentru x valoarea cu semnul schimbat pe care o ia y_2 pentru $\frac{\pi}{3} + x$.

Pentru x cuprins între 0 și $\frac{\pi}{6}$ avem:

$$y_2 = \sin\frac{3x}{2} + \cos\frac{3x}{2} - \left(\cos\frac{3x}{2} - \sin\frac{3x}{2}\right) = 2\sin\frac{3x}{2}$$

$$\left(\cos\frac{3x}{2} \geqslant \sin\frac{3x}{2}\right)$$

Se reprezintă y_2 ca o sinusoidă între 0 și $\frac{\pi}{6}$. Pentru x cuprins între $\frac{\pi}{3}$ și $\frac{\pi}{6}$ avem:

$$y_2 = \sin\frac{3x}{2} + \cos\frac{3x}{2} - \left(\sin\frac{3x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\right) = 2\cos\frac{3x}{2}$$

$$\left(\sin\frac{3x}{2} \geqslant \cos\frac{3x}{2}\right)$$

Se reprezintă y_2 ca o cosinusoidă între $\frac{\pi}{6}$ și $\frac{\pi}{3}$. Se completează graficul funcției y_2 între $\frac{\pi}{3}$ și $\frac{2\pi}{3}$ ținînd seama de cele spuse mai sus..

3. Graficul funcției y_3 se obține fie prin combinarea graficelor funcțiilor y_1 și y_2, fie observînd că $y_3 = 2\sqrt{1 + \sin 3x}$, reprezintă sinusoida $\sin 3x$ translatată paralel cu Oy cu o unitate, din care s-a extras rădăcina pătrată și s-a multiplicat cu 2. Graficul funcției y_3 se mai poate obține observînd că pentru x cuprins între 0 și $\frac{\pi}{3}$ avem:

$$y_3 = 2\left(\sin\frac{3x}{2} + \cos\frac{3x}{2}\right).$$

Graficul funcției y_3 se completează prin simetrie pentru x cuprins între $\frac{\pi}{3}$ și $\frac{2\pi}{3}$.

4., 5., 6. Pentru x cuprins între 0 și $\frac{\pi}{6}$ avem:

$$y_4 = \frac{2\cos\frac{3x}{2}}{2\sin\frac{3x}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{3x}{2};\quad y_5 = \frac{1}{2\cos\frac{3x}{2}} = \frac{1}{2}\sec\frac{3x}{2};\quad y_6 = \frac{2}{2\sin\frac{3x}{2}} =$$

$$= \operatorname{cosec}\frac{3x}{2}$$

Pentru x cuprins între $\frac{\pi}{6}$ și $\frac{\pi}{3}$ avem:

$$y_4 = \frac{2\sin\frac{3x}{2}}{2\cos\frac{3x}{2}} = \operatorname{tg}\frac{3x}{2};\quad y_5 = \frac{1}{2\sin\frac{3x}{2}} = \frac{1}{2}\operatorname{cosec}\frac{3x}{2};$$

$$y_6 = \frac{2}{2\cos\frac{3x}{2}} = \sec\frac{3x}{2}.$$

Pentru x cuprins între 0 și $\frac{\pi}{6}$, y_4 se reprezintă ca o cotangentă, y_5 ca secantă și y_6 ca o cosecantă. Pentru x cuprins între $\frac{\pi}{6}$ și $\frac{\pi}{3}$, y_4 se reprezintă ca tangentă, y_5 ca cosecantă și y_6 ca secantă. Restul graficelor pentru x cuprins între $\frac{\pi}{3}$ și $\frac{2\pi}{3}$ se completează prin simetrie.

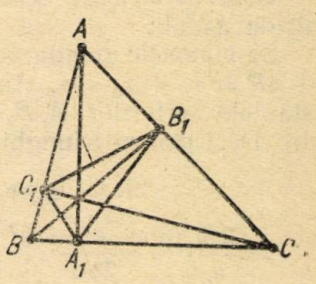
Problema 4112

Într-un triunghi oarecare ABC notăm cu AA_1, BB_1, CC_1 înălțimile; cu R_1, R_2, R_3 razele cercurilor circumscrise triunghiurilor AB_1C_1, BA_1C_1, CA_1B_1, și cu r_0 raza cercului înscris în triunghiul ortic. R fiind raza cercului circumscris triunghiului ABC, să se demonstreze relația:

$$R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = R(R - r_0).$$

Tomescu I., Ploiești

Soluție. Avem: $\frac{AC_1}{AC} = \cos A$. Deoarece B_1C_1 este antiparalelă la BC triunghiurile ABC și AB_1C_1 sînt asemenea. Ele au respectiv ariile S și S_1: $\frac{S_1}{S} = \left(\frac{AC_1}{AC}\right)^2 = \cos^2 A$.



Avem:

$$R_1 = \frac{AB_1 \cdot AC_1 \cdot B_1C_1}{4S_1},$$

$AB_1 = c\cos A$; $AC_1 = b\cos A$; $B_1C_1 = a\cos A$. Așa că: $R_1 = \frac{abc\cos^3 A}{4S\cos^2 A}$, adică:

$$R_1 = \frac{abc\cos A}{4\cdot\frac{abc}{4R}} = R\cos A$$

și încă două relații analoge.

Avem deci: $R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = R^2(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C)$ (1)

Dacă S_0 este aria triunghiului $A_1B_1C_1$, avem:

$$S_0 = \frac{B_1C_1 \cdot C_1A_1 \cdot A_1B_1}{4\cdot\frac{R}{2}},$$

fiindcă raza cercului circumscris triunghiului $A_1B_1C_1$ (cercul lui Euler) este $\frac{R}{2}$.

$$S_0 = \frac{abc\cos A\cos B\cos C}{2R}$$

Avem :

$$r_9 = \frac{2S_0}{B_1C_1 + C_1A_1 + A_1B_1}$$

Dar

$$B_1C_1 + C_1A_1 + A_1B_1 = a\cos A + b\cos B + c\cos C = \\ = 4R\sin A\sin B\sin C$$

și deci :

$$r_0 = \frac{2\cdot 8R^3\sin A\sin B\sin C\cos A\cos B\cos C}{8R^2\sin A\sin B\sin C} = \\ = 2R\cos A\cos B\cos C$$

Vom avea :

$$R(R - r_0) = R^2(1 - 2\cos A\cos B\cos C) \qquad (2)$$

Comparînd relațiile (1) și (2) și știind că $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A\cos B\cos C$, rezultă :

$$R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = R(R - r_0).$$

Observare. Raza cercului înscris în triunghiul ortic, r_0, se mai putea calcula astfel :

Se cunoaște relația care există în orice triunghi între R, r, r_a, r_b, r_c : $r + 4R = r_a + r_b + r_c$. In cazul triunghiului ortic, r_a, r_b, r_c sînt respectiv distanțele vîrfurilor A, B, C la laturile B_1C_1, A_1C_1, A_1B_1 ale triunghiului ortic. Deci pentru triunghiul ortic relația se mai scrie.

$$2R + r_0 = h_a\cos A + h_b\cos B + h_c\cos C = \\ = \frac{2S}{a}\cdot\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{2S}{b}\cdot\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} + \frac{2S}{c}\cdot\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \\ = \frac{S}{abc}(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4R},$$

de unde rezultă :

$$r_0 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4R} - 2R = R(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - 2) = \\ = 2R\cos A\cos B\cos C.$$

Problema 4114

Să se construiască un triunghi cunoscînd : a) *valoarea unui unghi și lungimile unei mediane și ale unei înălțimi ;* b) *lungimea unei laturi, a unei mediane și a unei înălțimi.*

Gh. Buicliu

Soluția autorului. a) Se cunoaște un unghi, o mediană și o înălțime. Problema comportă examinarea a 5 cazuri:

1. *Se cunoaște unghiul A și mediana AA' și înălțimea AA_h care pleacă din A* (fig. 1). Se construiește triunghiul dreptunghic AA_hA' în care se cunosc ipotenuza AA' și cateta AA_h. Pe dreapta $A'A_h$ se iau două puncte B_1, C_1 simetrice față de A' și se construiește segmentul de cerc B_1MC, capabil de unghiul A și care taie pe AA' în A_1. Paralelele din A la A_1B_1 și A_1C_1 întîlnesc pe $A'A_h$ în B și C vîrfurile triunghiului căutat. Problema este posibilă numai dacă $m_a \geqslant h_a$.

2. *Se cunosc: unghiul A, mediana AA' și înălțimea CC_h* (fig. 2). Se construiește triunghiul dreptunghic AC_hC în care se cunoaște unghiul A și cateta CC_h. Se ia intersecția A_1 a dreptei dusă prin C paralel la AC_h, în cercul cu centrul în A și raza $2AA'$. Dreapta CA' care unește pe C cu mijlocul A' al lui AA_1 determină, prin intersecția cu AC_h, al treilea vîrf B al triunghiului. A doua intersecție a

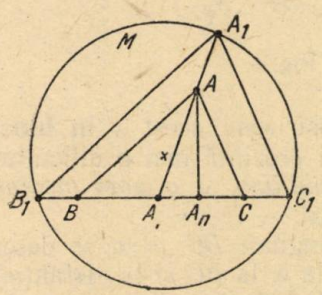


Fig. 1,

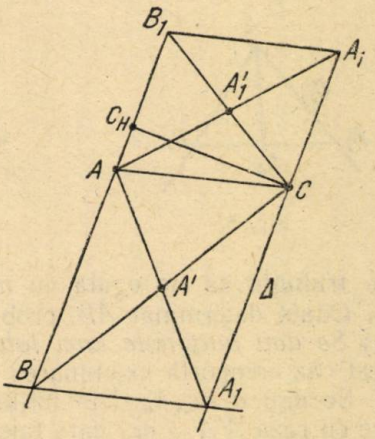


Fig. 2.

dreptei (Δ) cu cercul $A(2AA')$ dă un al doilea triunghi AB_1C.

Problema este posibilă numai dacă $h_c \leqslant 2m_a$.

3. Se cunosc A, h_c și m_c (fig. 3) sau, ceea ce este tot una, h_b, m_b. Se construiește triunghiul dreptunghic CH_cC' în care se cunosc ipote-

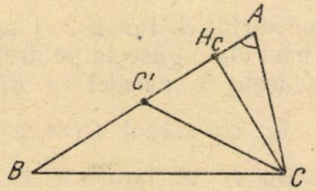


Fig. 3.

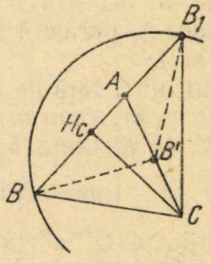


Fig. 4.

nuza m_c și cateta h_c și se ia intersecția A a dreptei $C'H_c$ cu arcul capabil de unghiul A descris pe CC' sau CH_c.

4. Se cunosc A, h_c și m_b (sau h_b și m_c) (fig. 4). Se construește

triunghiul dreptunghic CH_cA și se iau intersecțiile dreptei AH_c cu cercul de rază m_b cu centrul în mijlocul B' al lui AC. Avem 2 soluții ABC, AB_1C sau numai una, cînd $m_b = \frac{h_c}{2}$. Nici o soluție cînd $m_b < \frac{h_c}{2}$.

5. *Se cunosc: A, h_a* și m_c (sau m_b) Cazul acesta conduce la o construcție mai greoaie. Se ia pe pe una din laturile unghiului A o lungime $AB_1 = x > h_a$. Din B_1 se duce tangenta B_1H_1 la cercul $A(h_a)$ pînă întîlnește în C_1 pe cealaltă latură a unghiului A. Triunghiul AB_1C_1 este perfect rezolvabil în funcție de x. Se pune condiția ca mediana $C_1C'_1$ a

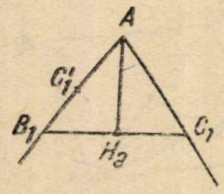


Fig. 5.

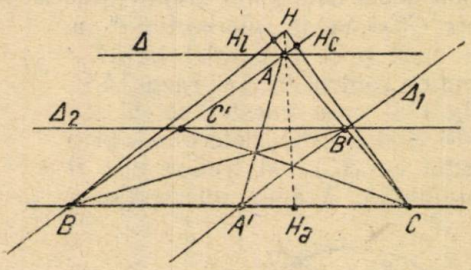


Fig. 6.

acestui triunghi să fie egală cu m_c și se construește acest x în funcție de m_c. Odată determinat AB, problema nu mai prezintă nici o dificultate.

b) *Se dau lungimile unei laturi, a unei înălțimi și a unei mediane.* Și acest caz comportă examinarea a cinci cazuri.

1. Se dau a, m_a, h_a. Din mijlocul A' al lungimii $BC = a$ se descrie un cerc cu raza $A'A = m_a$ care taie în A paralela Δ la BC și la distanța h_a de BC. Dacă $m_a > h_a$ se obțin două soluții. Luînd și a doua dreaptă Δ' paralelă la BC se mai obțin două soluții de poziție, etc...

2. Se dau a, m_a, h_c. Se construește triunghiul dreptunghic BH_cC și se iau intersecțiile catetei BH_c cu cercul $A'(m_a)$. Pot fi 2, 1 sau O soluții.

3. *Se dau a, m_c, h_c* . Se construește triunghiul dreptunghic BH_cC și se iau intersecțiile C' ale catetei BH_c cu cercul $C(m_c)$. Simetricul lui B față de C' determină vîrful A. Pot fi 2, 1 sau O soluții.

4. *Se dau a, m_b* și h_c. Se construește triunghiul dreptunghic BH_cC. Prin A' se duce Δ_1 paralelă la BH_c și se iau intersecțiile B' ale dreptei Δ_1 cu cercul $B(m_b)$.

Simetricul lui C față de B' determină vîrful A. Pot fi 2, 1 sau 0 soluții.

5. *Se dau a, m_c (sau m_b) și h_a.* Vîrful A se găsește pe dreapta Δ dusă paralel cu BC la distanța h_a. Se construește Δ_2 paralel cu BC și la distanța $\frac{h_a}{2}$ de BC. Intersecțiile dreptei Δ_2 cu cercul $C(m_c)$ sau $B(m_b)$ determină mijlocul C' al laturii BA (sau B' al laturii CA). Simetricul lui B față de C' (sau al lui C față de B') determină vîrful A. Pot fi 2, 1 sau 0 soluții. Construind simetrica dreptei Δ_2 față de BC se mai pot obține alte soluții de poziție.

— Soluții bune au mai dat: *Ovidiu Țuțuianu*, abs. București și *Victor Olteanu*, elev ș.m. 17 București. S-au primit multe soluții incomplete.

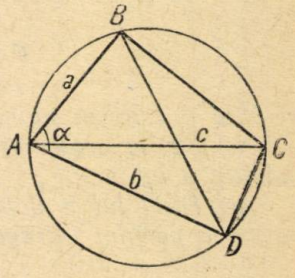
Problema 4115

Într-un patrulater înscriptibil ABCD, unghiurile B și D sînt drepte. Se notează AB = a, AD = b, AC = c și ∢A = α. Să se demonstreze că există relația:

$$c^2 \sin^2 \alpha + 4ab \cos^2 \frac{\alpha}{2} = (a + b)^2.$$

Nicolescu A. Basarab, elev, Ploiești

Soluția dată de *Mircea Stan*, elev ș.m. 1 București. Conform teoremei sinusului aplicată triunghiului *ABD* avem



$$\frac{BD}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin ADB} =$$

$$= \frac{c \sin ACB}{\sin ADB} = c.$$

De unde: $BD = c \sin \alpha$. Teorema cosinusului aplicată aceluiași triunghi, ne dă:

$BD^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$, sau $c^2 \sin^2 \alpha = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$. Ținînd seama că $c^2 \sin^2 \alpha = a^2 + b^2 - 2ab\,(2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1)$,

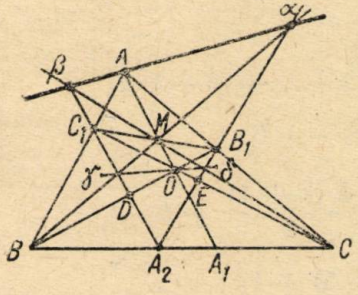
rezultă: $c^2 \sin^2 \alpha + 4ab \cos^2 \frac{\alpha}{2} = (a + b)^2$,

adică tocmai relația cerută.

Problema 4124

Printr-un punct O din planul triunghiului ABC se duc cevienele AA_1, BB_1, CC_1. Fie A_2 un punct fix pe BC, iar M intersecția dreptei B_1C_1 cu ceviana AA_1. Fie punctul $\alpha \equiv (BM, B_1A_2)$ și $\beta \equiv (CM, C_1A_2)$. Să se arate că dreapta $\alpha\beta$ trece printr-un punct fix, oricare ar fi poziția lui O în planul triunghiului.

Strătescu Ion



Soluție. — Notăm $\gamma \equiv (BM, \beta A_2)$ și $\delta \equiv (CM, \alpha A_2)$. Fascicolele $(B \cdot AMB_1C$ și $(C \cdot AMC_1B)$ au o rază comună (BC), de unde rezultă că punctele de intersecție ale razelor omologe coliniare (punctele C_1, M, B_1) au același raport anarmonic. Dacă tăiem primul fascicul cu secanta βA_2 și cel de-al doilea cu secanta αA_2 se obțin diviziunile anarmonice $C_1\gamma DA_2$ și $B_1\delta EA_2$ care sînt egale. Rezultă că fasciculele $(C_1B_1\delta EA_2)$ și $(B_1C_1\gamma DA_2)$ sînt egale. Ele avînd raza C_1B_1 comună înseamnă că punctele de intersecție

ale razelor omologe sînt coliniare adică punctele γ, O și δ se află pe aceeași dreaptă.

Se observă acum că triunghiurile $C_1B\gamma$ și $B_1C\delta$ sînt omologice, deoarece au vîrfurile pe trei drepte concurente BB_1, CC_1 și $\gamma\delta$. Rezultă că intersecțiile laturilor omologe sînt coliniare, deci punctele α, A și β se află pe aceeași dreaptă.

Urmează că dreapta $\alpha\beta$ trece totdeauna prin vîrful A fix al triunghiului dat.

Problema 4136

Se consideră fracția

$$F = \frac{3n^4 + 6n^3 - 2n^2 - 3n + 3}{n^2 + 3n + 2}$$

în care n este un număr natural.

a) *Să se arate că fracția F nu devine număr întreg pentru nici o valoare a lui n;*

b) *Dînd lui n valorile $1, 2, 3, \ldots, k$ se obțin k fracții. Să se arate că suma părților întregi ale acestor fracții este cubul unui număr.*

O. Sacter, București

Soluție. a) Avem:

$$F = \frac{3n^4 + 9n^3 + 6n^2 - 3n^3 - 9n^2 - 6n + n^2 + 3n + 2 + 1}{n^2 + 3n + 2},$$

$$F = \frac{3n^2(n^2 + 3n + 2) - 3n(n^2 + 3n + 2) + n^2 + 3n + 2 + 1}{n^2 + 3n + 2},$$

$$F = 3n^2 - 3n + 1 + \frac{1}{n^2 + 3n + 2}.$$

de unde se vede că F nu este un număr întreg pentru orice n, fiindcă $\frac{1}{n^2 + 3n + 2}$ e o fracție subunitară pentru orice n natural.

b) Suma părților întregi este:

$$S = 3(1^2 + 2^2 + \ldots + k^2) - 3(1 + 2 + \ldots + k) + 1 \cdot k,$$

dedusă din $E = 3n^2 - 3n + 1$, unde $n = 1, 2, \ldots, k$.

Avem:

$$S = 3\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} - 3\frac{k(k+1)}{2} + k$$

$$S = \frac{k(k+1)}{2}(2k + 1 - 3) + k,$$

$$S = k(k+1)(k-1) + k,$$

$$S = k(k^2 - 1 + 1) = k^3,$$

adică cubul unui număr.

Problema 4157

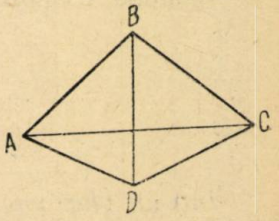
Să se arate că într-un patrulater convex raportul între suma pătratelor diagonalelor și suma diagonalelor este mai mic decît semiperimetrul patrulaterului.

C. Ionescu-Țiu

Soluție dată de *Gh. Cezar*, absolvent Buzău. Se consideră patrulaterul oarecare $ABCD$. În triunghiurile ABC și ACD avem:

$$AB + BC > AC; \quad CD + DA > AC, \tag{1}$$

suma a două laturi ale unui triunghi fiind mai mare decît a treia. Adunînd relațiile (1) se obține:



$$2AC < AB + BC + CD + DA.$$

$$2AC^2 < AC\,(AB + BC + CD + DA). \tag{2}$$

Analog se obține:

$$2BD^2 < BD\,(AB + BC + CD + DA). \tag{3}$$

Adunînd relațiile (2) și (3) deducem:

$$\frac{AC^2 + BD^2}{AC + BD} < \frac{1}{2}(AB + BC + CD + DA)$$

Problema 4158

Să se scrie sub formă condensată sumele:

$$S = 1!\,3 + 2!\,7 + \ldots + n!\,(n^2 + n + 1$$

$$S = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{n}{(n+1)!}$$

$$S = \frac{3}{2!\cdot 1\cdot 2} + \frac{7}{3!\,2\cdot 3} + \ldots + \frac{n^2 + n + 1}{(n+1)!\,n\,(n+1)}$$

C. Coșniță

Soluție dată de *Gh. Cezar*, elev Buzău, *D. Ene*, elev Ploești și *Șerban Strătilă*, elev Pitești.

1. Avem succesiv:

$$1!\,3 = 2!\,2 - 1!\,1;\ 2!\,7 = 3!\,3 - 2!\,2, \ldots\ n!\,(n^2 + n + 1) = (n+1)!\,(n+1) - n!\,n.$$

Adunînd membru cu membru, egalitățile de mai sus rezultă:

$$S = (n+1)!\,(n+1) - 1$$

2. Avem succesiv:

$$\frac{1}{2!} = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!};\quad \frac{2}{3!} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}; \ldots;$$

$$\frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}.$$

Adunînd, membru cu membru, egalităţile de mai sus rezultă:

$$S = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

3. Avem succesiv:

$$\frac{3}{2!1\cdot 2} = \frac{1}{1!1} - \frac{1}{2!2}; \quad \frac{7}{3!2\cdot 3} = \frac{1}{2!2} - \frac{1}{3!3}; \ldots;$$

$$\frac{n^2+n+1}{(n+1)!\,n(n+1)} = \frac{1}{n!\,n} - \frac{1}{(n+1)!\,(n+1)}.$$

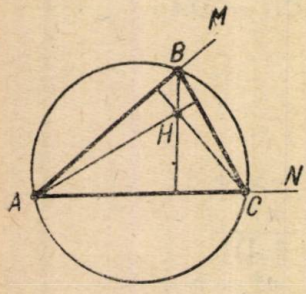
Adunînd, membru cu membru, egalităţile de mai sus rezultă:

$$S = 1 - \frac{1}{(n+1)!\,(n+1)}$$

Problema 4163

Intr-un plan unghiul MAN se roteşte în jurul vîrfului A fix rămînînd constant. Laturile AM şi AN întîlnesc un cerc fix ce trece prin A în B şi C. Să se afle locul geometric al ortocentrului triunghiului ABC.

Tudor Gh., Bucureşti



Soluţie. Se ştie că $AH = 2R\cos A$ (*Geometria triunghiului* de Tr. Lalescu, ex. 15. 6, p. 137).

Fiindcă cercul e fix şi unghiul A este constant, $AH = \text{const.}$ şi cum A e fix locul lui H e cercul cu centrul A şi raza $r = 2R\cos A$, unde R e raza cercului fix.

Problema 4171

Fiind dată ecuaţia: $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, să se formeze ecuaţia în y care admite ca rădăcini pe:

$$y_1 = (x_2 + x_3)x_2x_3;$$
$$y_2 = (x_1 + x_3)x_1x_3;$$
$$y_3 = (x_1 + x_2)x_1x_2;$$

Rădulescu Mircea, elev, Constanţa

Soluţia I-a: Avem: $y_1 = (x_2 + x_3)\,x_2x_3 = (x_1 + x_2 + x_3 - x_1)\frac{x_1x_2x_3}{x_1} =$

$$= (-a - x_1)\frac{-c}{x_1} = \frac{(a + x_1)\,c}{x_1}; \quad x_1 = \frac{ac}{y_1 - c} \neq 0, \ c \neq 0.$$

Inlocuind în ecuația dată pe x cu $\frac{ac}{y-c}$ se obține ecuația căutată :

$$y^3 + y^2(ab - 3c) + yc(a^3 + 3c - 2ab) + c^2(ab - c).$$

Soluția II-a : Deoarece $x_2 + x_3 = -a - x_1$, avem :

$y_1 = (-a - x_1)x_2x_3 = -ax_2x_3 - x_1x_2x_3 = c - ax_2x_3$ fiindcă $x_1x_2x_3 = -c$.

In mod analog $y_2 = c - ax_1x_3$; $y_3 = c - ax_1x_2$.

Avem :

$$y_1 + y_2 + y_3 = 3c - a(x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2) = 3c - ab,$$

$$y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = 3c^2 - 2ac(x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2) + a^2x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) =$$
$$= 3c^2 - 2abc + a^2c,$$

$$y_1y_2y_3 = c^3 - ac^2(x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2) + a^2cx_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) - a^3x_1^2x_2^2x_3^2 ;$$
$$y_1y_2y_3 = c^3 - abc^2 = c^2(c - ab).$$

Ecuația cerută este : $y^3 + (ab - 3c)y^2 - c(2ab - a^3 - 3c)y + c^2(ab - c) = 0$.

Soluții analoage au mai dat : *Gh. Cezar*, Buzău și *Ene Dumitru*, Ploiești.

Problema 4172

În triunghiul ABC, unde A', B', C' sînt intersecțiile cevienelor $AM = l_a$, $BN = l_b$, $CP = l_c$ cu cercul circumscris. Dacă $\frac{BM}{MC} = m$; $\frac{CN}{NA} = n$; $\frac{AP}{PB} = p$, *să se demonstreze relația :*

$$AA' \cdot l_a + BB' \cdot l_b + CC' \cdot l_c = \frac{mb^2 + c^2}{m+1} + \frac{nc^2 + a^2}{n+1} + \frac{pa^2 + b^2}{p+1}$$

(*În legătură cu problema 3458*).

Ene D., Ploiești

Soluție. Avem $\frac{BM}{BC} = \frac{m}{m+1}$ de unde $BM = \frac{am}{m+1}$ și $MC = \frac{a}{m+1}$.

Relația lui *Stewart* în triunghiul ABC ne dă :

$$AC^2 \cdot BM + AB^2 \cdot CM = AM^2 \cdot BC + BM \cdot MC \cdot BC,$$

adică :

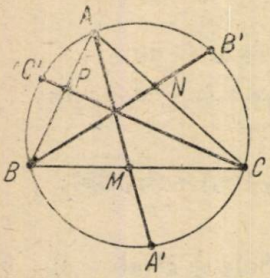
$$\frac{ab^2 m}{m+1} + \frac{ac^2}{m+1} = l_a^2 \cdot a + \frac{a^3 m}{(m+1)^2}$$

de unde

$$l_a^2 + BM \cdot MC = \frac{b^2 m + c^2}{m+1}.$$

Exprimînd în două feluri puterea punctului M față de cerc avem: $AM \cdot MA' = BM \cdot MC$, de unde $MA' = \frac{BM \cdot MC}{l_a}$ și $AA' = MA' + l_a = \frac{l_a^2 + BM \cdot MC}{l_a}$ așa că

$$AA' \cdot l_a = l_a^2 + BM \cdot MC = \frac{mb^2 + c^2}{m+1}$$



și în mod analog,

$$BB' \cdot l_b = \frac{nc^2 + a^2}{n+1}; \quad CC' \cdot l_c = \frac{pa^2 + b^2}{p+1},$$

care însumate dau relația cerută.

Cazuri particulare:

$$m = \frac{c}{b}; \quad n = \frac{a}{c}; \quad p = \frac{b}{a}.$$

$AA' \cdot l_a + BB' \cdot l_b + CC' \cdot l_c = bc + ca + ab$ și AM, BN, CP sînt bisectoare.

$$m = \frac{c^2}{b^2}; \quad n = \frac{a^2}{c^2}; \quad p = \frac{b^2}{a^2}.$$

$AA \cdot l_a + BB' \cdot l_b + CC' \cdot l_c = \frac{2b^2c^2}{b^2+c^2} + \frac{2c^2a^2}{c^2+a^2} + \frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}$ și AM, BN, CP sînt simediane.

$m = n = p = 1$ $AA' \cdot l_a + BB' \cdot l_b + CC' \cdot l_c = a^2 + b^2 + c^2$ și AM, BN, CP sînt mediane. (problema 3548).

Observare. Fiindcă AM, BN, CP sînt concurente avem $mnp = 1$.

Problema 4173

Să se rezolve în numere întregi ecuația

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 2.$$

Să se generalizeze. (În legătură cu problema 3369).

L. Aldea, Călărași

Soluție. Avem: $\sqrt[3]{x} = 2 - \sqrt[3]{y}$, de unde se vede că $y = n^3$ unde n e întreg.

În acest caz, $x = (2 - n)^3$. Deci soluțiile ecuației date sînt: $y = n^3$; $x = (2 - n)^3$ sau $y = (2 - n)^3$; $x = n^3$, unde n este orice număr întreg.

Generalizînd, cerîndu-se să se rezolve ecuația $\sqrt[m]{x} + \sqrt[n]{y} = a$, vom avea: $\sqrt[m]{x} = a - \sqrt[n]{y}$, așa că $y = p^n$ și $x = (a - p)^m$ acestea fiind chiar soluțiile ecuației, p fiind întreg.

— Soluții bune au dat: D. P. Ene, elev, Ploiești,

4575. Să se formeze ecuația de gradul doi ale cărei rădăcini x_1 și x_2 să satisfacă relațiile:

$$4\,x_1\,x_2 - 5\,(x_1 + x_2) + 4 = 0$$

$$(x_1 - 1)\,(x_2 - 1) = \frac{1}{1+a}$$

a fiind un număr cunoscut.

Să se determine a, ca suma $x_1^2 + x_2^2$ să fie egală cu 11.

(La Inst. Construcții București, 1960)

4576. Dintr-un punct M situat pe latura $BC = a$ a unui triunghi oarecare ABC, dat, se duc perpendicularele MP și MQ, respectiv pe laturile $AB = x$ și $AC = b$. Se cere: a) Să se calculeze ariile triunghiurilor MPB și MQC în funcție de $MB = x$ și de elementele triunghiului dat. b) Să se determine poziția punctului M, astfel ca suma S a ariilor celor două triunghiuri să aibă o valoare dată k^2, presupunînd că unghiurile B și C sînt ascuțite. Din discuția rezultatului să se deducă minimul sumei S a ariilor considerate, precum și valoarea lui x corespunzătoare. c) Să se deducă minimul sumei S și cu ajutorul derivatelor.

(La Inst. Construcții București, 1960)

4577. Se dă triunghiul echilateral ABC de latura a. Fie $PQRS$ pătratul înscris în acest triunghi. Se cere să se calculeze: a) latura pătratului $PQRS$ în funcție de a. b) aria triunghiului BTC, punctul T fiind la intersecția lui SB cu PC.

(La Inst. Construcții București, 1960)

4578. Se consideră cercul: $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ și punctul $M(R\cos\alpha, R\sin\alpha)$ situat pe acest cerc. Fie AA' și BB' diametrii situați pe axele OX și OY. Dreptele MA și MA' taie *axa* OY în C și D, iar dreptele MB și MB' taie axa OX în E și F. Se cere: a) Să se demonstreze că punctele C, D, E, F, sînt așezate pe același cerc și să se scrie ecuația acestui cerc. b) Să se găsească locul geometric al centrului acestui cerc presupunînd că M se mișcă pe cercul dat.

(La Inst. Construcții București, 1960)

4579. Pe o roată, care are un ax orizontal, sînt fixate patru greutăți A, B, C, D, la capetele a două diametre, perpendiculare între ele. Greutățile A, B, și C au valorile respective: 1, 2 și 4 kgf. Să se calculeze valoarea greutății a patra, astfel încît, în poziția de echilibru a roții, diametrul AC să facă cu verticala un unghi de 30°.

(La Inst. Construcții București, 1960)

4580. a) Să se rezolve ecuația:

$$\sqrt{5 + x^2} + \sqrt{1 + 2x^2} = 6$$

b) Să se demonstreze identitatea:

$$(1 + \operatorname{tg} x)\,(1 + \operatorname{cotg} x) = 2\,(1 + \operatorname{cosec} 2x)$$

c) Se dă funcția:

$$y = \frac{\sqrt{x}}{1+x}$$

Să se calculeze derivata funcției. Pentru ce valoare a lui x funcția admite extremum? Care este valoarea acestui extremum?

(La Inst. Construcții București, 1960)

4581. Se consideră triunghiul ABC, dreptunghi în A, catetele fiind $AC = b$ și $AB = c$. Se duce înălțimea AA', apoi se proiectează punctul A' în F și E respectiv pe AB și AC. Perpendicularele în B și C pe ipotenuză intersectează pe $A'F$ și $A'E$ respectiv P și Q. Se cere: a) Să se demonstreze că punctele P, A și Q sînt în linie dreaptă. b) Să se evalueze în funcție de b și c raportul dintre aria trapezului $BCPQ$ și aria triunghiului ABC.

(La Inst. Construcții București, 1960)

4582. Se dă o piramidă triunghiulară $OABC$ în care se duce secțiunea $A'B'C'$ paralelă cu baza ABC. a) Să se demonstreze că piramidele $AOB'C'$, $BOC'A'$, $COA'B'$ sînt echivalente. De asemenea că piramidele $A'OBC$, $B'OCA$, $C'OAB$ sînt echivalente. b) Să se calculeze în funcție de înălțimea h a piramidei $OABC$ distanța de la vîrful O la planul de secțiune, în cazul cînd volumul trunchiului de piramidă format este medie proporțională între volumele celor două piramide.

(La Inst. Construcții București, 1960)

4583. a) Se dă o placă dreptunghiulară cu dimensiunile 5×15 cm. și grosimea de 1 cm, alcătuită dintr-un pătrat de oțel cu greutate specifică de 7,8 kgf/dm^3 și un dreptunghi de aluminiu cu greutate specifică de 2,3 kgf/dm^3. Să se stabilească poziția axei orizontale de susținere, perpendiculară pe placă, care asigură sistemului echilibrul indiferent.

b) Pistoanele unei prese hidraulice au diametrele de 12 cm, respectiv 48 cm. Pistonul cel mic este acționat de o pîrghie, la care unul din brațe este de 6 ori mai mare decît celălalt. La capătul brațului mare al acestei pîrghii acționează o forță de 32 kgf. Să se calculeze cît lucru mecanic se cheltuiește pentru a ridica pistonul mare cu 50 cm. Știind că această ridicare a pistonului mare se produce în 3 minute, să se calculeze puterea motorului de care e acționată pompa.

(La Inst. Construcții București, 1960)

PROBLEME PROPUSE *)

4584. Să se rezolve următorul sistem de ecuații:

$$x^y = y^x; \quad \frac{x^x}{y^y} = y^{x+y}.$$

R. Birzan, student, Cluj

4585. Randamentul unei lămpi cu spirt este de 40%. Ce cantitate de spirt trebuie consumată de o asemenea lampă pentru a încălzi 5 litri de apă de la 20^0C pînă la fierbere, știind că puterea calorică a spirtului este de 7200 kcal/kg?

* * *

4586. Considerăm o elipsă de semiaxe a, b. a) Tangentele elipsei în capetele axei mici taie cercul principal în vîrfurile unui dreptunghi ale cărui două laturi opuse trec prin focare. b) Axa mică BB' taie cercul principal în C, C' iar perpendiculara în focar pe axa mare taie elipsa în D, D' și cercul principal în E, E'. Avem relația

$$\frac{DE}{BC} = \frac{b}{a}.$$

N. Mihăileanu

4587. Pentru care valori reale ale lui x și y avem pe rînd:

a) $x\sqrt{1-x^2} + y\sqrt{1-y^2} = 1$,
b) $x\sqrt{1-x^2} + y\sqrt{1-y^2} = -1$,
c) $x\sqrt{1-x^2} - y\sqrt{1-y^2} = 1$,
d) $x\sqrt{1-x^2} - y\sqrt{1-y^2} = -1$.

C. Ionescu-Țiu

4588. Să se arate că:

$$(x+y+z)^{2n+1} - x^{2n+1} - y^{2n+1} - z^{2n+1}$$

este divizibil cu $(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$.

* * *

4589. Să se afle lungimea de undă a radiațiilor din spectrul continuu al unui tub cu raze Röntgen căruia i s-a aplicat tensiunea de 100 kV.

Ene P. Dumitru, absolvent Ploești

4590. Pe un plan înclinat care se continuă cu o porțiune orizontală alunecă cu frecare un corp greu de la înălțimea h. Însemnînd cu d proiec-

*) VIII (4590, 4591, 4601, 4604); IX (4584, 4585, 4586, 4610); X (4588, 4592, 4594, 4595, 4598, 4599, 4600, 4603, 4604, 4611, 4612); XI (4586, 4587, 4589, 4593, 4597, 4602, 4605, 4606, 4607, 6613)

ția lungimii l a planului pe orizontală și cu μ coeficientul de frecare, să se calculeze: a) viteza pe care o atinge corpul la baza planului înclinat; b) lungimea drumului parcurs de corp pe porțiunea orizontală a planului pînă la oprire; c) ce valoare ar trebui să aibă coeficientul de frecare pentru ca alunecarea corpului pe planul înclinat să se facă uniform.

* * *

4591. Să se demonstreze că

$$6^n + 20n - 1 \equiv 25 \quad \text{și} \quad 7^n + 30n - 1 \equiv 36.$$

Gabriel Tîrtan, absolvent, Găești

4592. Pistonul unei mașini cu vapori execută 50 lovituri pe minut. Știind că lungimea cilindrului este de 0,8 m, iar secțiunea de 3,50 dm², să se calculeze presiunea în condensator pentru ca puterea mașinii să fie de 5300 W. Se consideră presiunea vaporilor în cazan de 18 cmHg.

* * *

4593. Să se calculeze limita funcției:

$$y = \left[2 \sin\left(\frac{9x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]^{\operatorname{ctg} 6x}$$

cînd $x \to \frac{\pi}{3}$.

D. C. Panu

4594. Să se demonstreze relația:

$$S \cdot s = p\,[p^3 - p\,(ab + bc + ca) + 2\,abc]$$

unde S este suprafața triunghiului ABC, s este suprafața triunghiului ortic triunghiului ABC, iar a, b, c, p sînt laturile și semiperimetrul triunghiului ortic.

Popa Alex, elev București

4595. Pentru care valori ale lui x cuprinse între 0^0 și 360^0, avem:

$$\sqrt{\frac{(1 + \sin 10x)(1 - \cos 10x)}{(1 - \sin 10x)(1 + \cos 10x)}} + \operatorname{tg}(5x + 45°) \operatorname{tg} 5x = 0.$$

C. Ionescu-Țiu

4596. Pentru determinarea randamentului unui motor cu ardere internă se folosește un dinam cuplat cu el, care dă un curent de 110 V și 5 A. Știind că motorul consumă în plină sarcină 0,2088 kg/h benzină, că randamentul dinamului este de 80% și că puterea calorică a benzinei este 11 000 kcal/kg, să se afle randamentul motorului.

* * *

4597. Fie M un punct mobil situat pe o parabolă de parametru p; normala în M taie axa în N; notăm cu P proiecția punctului M pe axă și cu U mijlocul segmentului MN. a) Să se arate că $4PU^2 - MP^2 = \text{const} = p^2$.
b) Să se arate că punctul U descrie o parabolă cu vîrful în focarul parabolei date.

N. Mihăileanu

4598. Un vas conține 100 litri aer la presiunea de 200 kgf/cm² și temperatura de 0°C. Gazul se destinde izoterm pînă la o presiune de 40 kgf/cm². a) Care va fi lucrul mecanic produs? b) Care va fi lucru mecanic produs și temperatura finală, dacă în problema precedentă destinderea se face adiabatic?

* * *

4599. Să se calculeze suma

$$S = 1 \cdot a^{n-1} + 2a^{n-2} + 3a^{n-3} + \ldots + (n-2)a^2 + (n-1)a + na^0.$$

Dăneț Teodor, profesor Fetești

4600. Cît de mare este diferența de nivel a unui lichid aflat în două capilare comunicante, cu diametrele $d_1 = 0{,}1$ mm și $d_2 = 1$ mm, dacă tensiunea superficială a lichidului este 72,5 *dyn*/cm, iar densitatea 1 g/cm³.

* * *

4601. Într-un plan se duc două semi drepte AA' și BB'. Să se afle locul punctelor M din plan astfel că $\sphericalangle MAA' = \sphericalangle MBB'$.

Petre Liviu, profesor Pucioasa

4602. Să se găsească limita expresiei

$$E = \frac{\log \cos mx}{\log \cos nx}, \quad m \text{ și } n \text{ fiind constante,}$$

cînd x tinde către zero.

* * *

4603. Să se rezolve sistemul:

$$\sin(x + a) = \cos y,$$
$$\sin(y + b) = \cos x.$$

Aplicație: $a = 30°$, $b = 45°$.

Szasz Carol, student Cluj

4604. Într-un triunghi oarecare ABC, I fiind intersecția bisectoarelor AA', BB', CC' să se arate că totdeauna: $IA > IA'$; $IB > IB'$; $IC > IC'$.

Paul Popescu, student

4605. Să se calculeze cînd x tinde către zero, limitele laterale și derivatele laterale ale funcțiilor:

$f(x) = e^{1-x}$ pentru $x < 0$ și $f(x) = +\sqrt{2 - (x-1)^2}$ pentru $x \geqslant 0$.

Gazeta de Matematica, Lisabona 1960

4606. Să se afle limita expresiei:

$$\frac{(a^x - 1)\,x^2}{\operatorname{tg}\left(x + \frac{x^3}{3}\right) - \sin\left(x + \frac{x^3}{3}\right)}$$

cînd x tinde către zero.

(A. Gloden, Boletin Matematico, Buenos Aires)

4607. Pentru care valori ale lui x avem

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \geqslant \frac{8}{3}$$

(Olimpiada matematică, clasa IX, Praga, 1961)

4608. Care este regiunea (domeniul) punctelor $M(x, y)$ din planul $x0y$ pentru care avem:

a) $x\sqrt{1-x^2} + y\sqrt{1-y^2} > 0$
b) $x\sqrt{1-x^2} + y\sqrt{1-y^2} < 0$
c) $x\sqrt{1-x^2} - y\sqrt{1-y^2} > 0$
d) $x\sqrt{1-x^2} - y\sqrt{1-y^2} < 0$

C. Ionescu-Țiu

4609. Să se arate că între unghiurile diedre α, β, γ ale fețelor laterale cu planul bazei unui tetraedru echifacial există relația

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma \geqslant \frac{1}{3}$$

Paul Popescu

4610. Să se arate că dacă segmentul care unește mijloacele a două laturi opuse ale unui patrulater convex plan este egal cu semisuma celorlalte două laturi, atunci patrulaterul este trapez.

Eremia Georgescu-Buzău

4611. Un circuit este constituit dintr-un alternator cu tensiunea efectivă de 70 V, o lampă electrică cu rezistența de 117 Ω și dintr-un condensator de 10 μF în serie cu lampa. Să se calculeze:

a) impedanța circuitului; b) factorul de putere; c) tensiunea electromotoare maximă la bornele condensatorului. (Pulsația curentului este $\omega = 300$).

* * *

4612. Un vas cilindric de rază R și lungime l este așezat pe o generatoare și conține un lichid. Printr-un orificiu aflat deasupra vasului se introduce vertical, un băț marcat pe care se citește înălțimea m a lichi-

dului. Să se calculeze volumul lichidului și să se studieze variația volumului cînd m variază.

Gh. Țopan, profesor Dej

4613. Două oglinzi sferice concave O_1 și O_2 sînt așezate față în față astfel ca axele lor să coincidă. Distanța dintre oglinzi este de 50 cm, iar distanțele lor focale sînt 6 cm, respectiv 9 cm. Să se calculeze:

a) Unde trebuie așezat pe axa comună a oglinzilor un obiect luminos pentru ca imaginile lui reale, în ambele oglinzi, să se facă în același loc pe axă? b) Cît de mari sînt imaginile formate în cele două oglinzi, dacă obiectul luminos este de 2 cm? c) La ce distanță de oglinzi se vor forma cele două imagini, dacă oglinda O_1 se apropie cu 4 cm de obiect, iar oglinda O_2 se apropie cu 24,9 cm și ce fel de imagini sînt acestea? d) Cît de mari sînt imaginile în aceste două poziții?

Teodora Grossu

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PROPUSE PENTRU ȘCOALA DE 7 ANI*)

E: 1648. O gospodărie agricolă colectivă a însămînțat cu grîu un teren de formă patratică de pe care a obținut o recoltă de 2346 kg la hectar, iar de pe întreaga suprafață 600 576 kg, din care a contractat cu statul 270 259,2 kg.

a) Să se afle cîte hectare au fost însămînțate și apoi, cîți metri are latura acestui teren patratic;

b) În cîți saci se va putea pune grîul contractat cu statul, dacă greutatea unui sac cu grîu este de 76,8 kg;

c) Ce cantitate de grîu transportă fiecare din cele două camioane ale gospodăriei și de cîte ori fac drumul pînă la baza de recepție, dacă primul camion transportă 30 saci, iar al doilea 39 saci.

d) Cît la sută reprezintă cantitatea contractată din totalul recoltei?

I. Candrea, Sibiu

E: 1649. Să se arate că:

$$a^2 \cdot \frac{b-c}{b+c} + b^2 \frac{c-a}{c+a} + c^2 \frac{a-b}{a+b} + (a+b+c)^2 \cdot \frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{(b+c)(c+a)(a+b)} = 0$$

* * *

E: 1650. Să se arate că:

$$(1+x)^2 (1+x^2)(1+x^4) = x^8 + 2(x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x) + 1.$$

Dacă $a = \dfrac{1-(1-b):(1+b)}{1+(1-b):(1+b)}$, atunci $b = \dfrac{1-(1-a):(1+a)}{1+(1-a)(1+a)}$.

C. Ionescu-Țiu

---

*) V (E: 1648, 1653, 1658, 1659); VI (E: 1651, 1654, 1655, 1656); VII (1649, 1650, 1652, 1657, 1660).

E: 1651. În expunerea prezentată la cea de-a 15-a aniversare a R.P.R. tov. Gheorghe Gheorghiu-Dej arată că în 1959 țara noastră producea în 13 săptămîni cît se producea în întreg anul 1938. În 1960 țara noastră produce în 11 săptămîni cît se producea în 1938. Să se afle:

a) Producția anului 1959 și 1960 (în procente) comparativ cu cea a anului 1938.

b) Cu cît a crescut producția globală în 1960 față de 1959.

Gh. Petrescu, Breaza

E: 1652. Să se arate că:

$$a(bx+cy)^2-2b(ax+by)(bx+cy)+c(ax+by)^2=(ac-b^2)(ax^2+2bxy+cy^2)$$

N. Mihăileanu

E: 1653. Un automobil pleacă din localitatea A mergînd cu viteza constantă de 30 km/h. Ajungînd în localitatea B se reîntoarce fără oprire, avînd însă viteza de 20 km/h și ajunge în localitatea A după 5 ore de la plecare.

Să se găsească distanța dintre cele două localități.

Vasilache Valeriu, profesor Huși

E: 1654. Producția de sfeclă de zahăr a crescut de la 392 000 tone în 1934—1938 la 2 148 000 tone în anii 1955—1959. Să se afle cu cît la sută a crescut producția de sfeclă de zahăr în anii 1955—1959 față de anii 1934—1938.

* * *

E: 1655. În raportul la cel de-al III-lea congres al P.M.R. se spune: „În anul 1960 producția de oțel crește la 1 700 000 tone față de 766 000 tone în 1955". Să se afle în procente, cu cît a crescut producția de oțel în 1960 față de 1955.

* * *

E: 1656. Într-o uzină, conform depășirii de plan, s-a acordat celor trei lăcătuși un premiu în valoare de lei 960. Să se afle: Ce sumă a primit fiecare din lăcătuși, dacă primul a primit 175%, al doilea 125% din cît a primit al treilea lăcătuș.

B. Baieră

E: 1657. Să se afle trei numere știind că primul întrece pe al doilea cu 4, al doilea număr întrece pe al treilea cu 3 și tot al doilea număr este media geometrică dintre numerele extreme.

* * *

E: 1658. Două automobile pleacă, unul din București spre Ploești și celălalt din Ploești spre București. Primul are viteza de 40 km/oră și pleacă la ora 8; al doilea are viteza de 60 km/oră și pleacă la ora 9. Se cere:

a) La ce distanță și la ce oră se vor întîlni prima dată.

Ajungînd în orașele respective, considerînd că se întorc imediat, se cere: b) la ce distanță se vor întîlni a doua oară.

Distanța București — Ploești este de 60 km.

C. Nicolau, elev București

E: 1659. Dacă mărim un număr de 5 ori și pe al doilea număr de 3 ori, produsul numerelor devine 14 580. Să se afle cele două numere știind că suma lor este de 4 ori mai mare decît cel mai mic dintre cele două numere.

* * *

E: 1660. O plută de pe Bistrița trece prin fața unei pietre în timp de 60 s, iar prin fața unei lunci în timp de 2400 s. Știind că lunca are lungimea de 1170 m, să se afle lungimea plutei și viteza ei.

Proca Nicolae, elev Cluj

POȘTA REDACȚIEI

Unor elevi de la Fetești-gară. Pentru a ușura întocmirea rubricii rezolvitorilor de probleme, soluțiile trimise trebuie să fie așezate în ordinea lor numerică crescîndă și însoțite de un borderou.

Rezolvările să fie făcute după modelul rezolvărilor din G.M.F.-B: enunțul complet și numele autorului, așa cum s-a publicat în paginile Gazetei; iar după rezolvare, scrieți numele și clasa pe care o urmați. Nu se vor anunța soluțiile copiate una după alta, fiecare elev trebuie să rezolve singur. Orice plic să conțină cel puțin 10 rezolvări.

Mai multor rezolvitori. Pentru a se face repartizarea plicurilor cu probleme rezolvate este necesar să fie menționat pe plic: localitatea, școala, clasa și numele rezolvitorului; de asemenea menționați: pentru redacția de matematică, sau: pentru redacția de fizică. Nerespectarea acestor date împiedică corectarea soluțiilor la timp, amînînd sau făcînd imposibilă anunțarea soluțiilor primite. Nu expediați chestiunile de matematică în același plic cu cele de fizică.

Tov. *Niculescu Gh.*, elev, Roman, *Drăgulescu Gh.*, elev, Ploiești. Problemele de fizică rezolvate de elevii claselor medii IX—XI să fie neapărat trimise în plic separat pentru a nu se face confuzii sau amînarea anunțării primirii lor. Se poate scrie rezolvarea unei probleme pe ambele fețe ale unei foi, însă nu mai multe probleme pe aceeași foaie. Desenul se poate face cu creionul și pe aceeași foaie, însă folosiți linia și compasul; textul rezolvării să fie scris cu cerneală, după care urmează numele rezolvitorului și clasa.

— *Stănescu Cicerone*, elev Drăgășani; *Drăgulescu Gh.*, Ploești, *T. Albu*, Petroșani. — Cărțile apărute în Biblioteca Societății de științe matematice și fizice sînt în parte epuizate, iar altele se vînd numai la librării.

— *Georgescu Petre* (Ploești), *Ștefan Doina* (Fetești), *Goțoneagă Rodica* (Scăeni), *Popescu Viorela* (Timișoara). Soluțiile incomplete sau fără numărul și enunțul problemei propuse nu pot fi anunțate.

— *Paraschiv Florin* (Focșani). Nu putem publica nota trimisă de dv. întrucît, după cum și arătați, totul a mai fost publicat în altă parte, deci nu vă aparține. Problemele propuse de corespondenți nu se pot publica dacă nu prezintă un interes deosebit: sînt legate de practică, înfățișează chestiuni noi, moderne, prezintă o rezolvare elegantă sau sînt probleme de perspicacitate.

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

(urmare, soluții bune la problemele de matematică primite pînă la data de 1 decembrie 1960)

CONSTANȚA. Ș.m. 3. Cl. IX. Dimescu Ruxandra (4305, 16, 19, 27, 37, 49, 65, 67, 69). CORABIA. Cl. VI. Alexandru Dan (E: 1538, 41, 45, 52, 54, 55, 59, 70, 72, 74, 79), Bălteanu Nicolae (E: 1538, 41, 45, 46, 52, 54, 72, 74, 79), Belu Constanța (E: 1538, 45, 46, 52—55, 59, 70, 79), Diciuc Ghizela (E: 1538, 41, 52, 54, 55, 59, 70, 72, 74, 79), Enescu Alexandru (E: 1538, 45, 49, 53—55, 59, 71, 73, 79), Gheorghiu Leliana (E: 1541, 45, 46, 49, 50, 53, 54, 74, 79), Iliescu P. Tudor (E: 1538, 28, 39, 45, 46, 52, 53, 55, 74, 79), Nicolae Georgeta (E: 1538, 41, 52, 54, 55, 59, 70, 72, 74, 79), Roșca D. Viorica (E: 1538, 45, 46, 52, 53, 55, 56, 59, 60, 79), Segărceanu Florica (E: 1541, 45, 46, 49, 53, 55, 59, 63, 70), Voinea Marcel (E: 1538, 41, 45, 46, 52, 54, 55, 70, 74, 79), Zaharia Costel (E: 1538, 41, 45, 46, 52, 53, 79). Cl. VII. Filip D. Nicolae (E: 1528, 41, 44, 46, 49, 52, 53, 55, 59, 70, 74, 79).

CRAIOVA. Ș.m. 2. Cl. XI. Stănescu Ortansa (4307—09, 12, 19, 28, 28, 49, 80—82, 98, 99). Ș.m. 3. Cl. X. Cincheza Iuliana (4315, 19, 54, 65, 67, 69, 71, 75, 80—82), Mogoș Marina (4307, 09, 38, 51, 67, 69, 75, 80—82, 98), Stoia Manuela (4315, 27, 38, 42, 54, 59, 65, 67, 69, 71, 75, P), Țurcanu Gabriela (4302, 04, 09, 21, 38, 54, 59, 69, 75, 81, 82). Cl. XI. Pavel N. Radu (4252, 60, 62, 69, 82, 302—06, 08, 09, 12, 16). Șc. de 7 ani nr. 5. Cl. VII. Chirea Antoneta (E: 1571, 73, 75, 78, 81), Chirea Iuliana (idem). Șc. de 7 ani nr. 10. Cl. VII. Nicolaescu Vasile (E: 1540—43, 45, 47—55, 59), Vasile Ion (E: 1540—43, 48—50, 52—54, 57, 59, 60, 70).

CURTEA DE ARGEȘ. Pona D. Gh. (E: 1542, 47, 50, 55, 59, 60, 67, 70, 74, 79).

DEJ. Șc. de 7 ani nr. 2. Cl. VI. Suciu Octavian (E: 1552—55, 59, 60, 63, 70, 74, 79).

DEVA. Cl. VII. Răgălie Ștefan (E: 1530, 31, 38—41, 43, 45, 49, 52—54). Cl. XI. Caraman Dan (4250, 56, 59, 302—06, 14, 68, 98), Crișan Mircea (4308, 09, 12, 14, 35, 54, 69, 70, 80, 412).

DEVESEL (Oltenia) Cl. VII. Caraiman Ion (E: 1541—43, 45—47, 50, 52—54), Dobrin Traian (idem), Marincu Elena (E: 1541—43, 45—47, 50, 52—54), Perianu Ștefan (idem), Spulbat Dumitru (E: 1541—43, 45, 46, 50, 52—54, 70), Vilă D. Ion (E: 1541—43, 46, 47, 50, 52—54).

DRĂGĂȘANI. Cl. IX. Stănescu I. Cicerone (4278, 87, 304, 42, 47, 65, 67, 69, 72, 79). Cl. XI. Blidaru Ion (4290, 302, 08, 14, 42, 48, 51, 62, 69, 80—83, 91, 96, 418).

FOCȘANI. Cl. VII. Popa Dan (E: 1543, 45, 46, 49, 50, 52, 53, 55, 60, 70, 73, 79).

GALAȚI. Absolvent Bejan Costel (4248, 50, 57, 65—68, 70—73, 87, 89, 98, 300, 02—09, 14, 16, 25, 33, 36, 54, 55, 65, 59). Ș.m. 1. Cl. VIII. Popa Eugen (E: 1540, 42, 44, 47, 48, 50—52, 54). Ș.m. 3. Cl. XI. Gheorghiu Cristel (4302, 05, 09, 12, 19, 25, 56, 67, 79, 81, 98, 99). S.m. 4 Weissmann Mirel (E: 1540—47, 49, 50). Cl. VIII. Drăgușanu Const. (E: 1555, 56, 59—61, 63—65, 67, 69, 70), Melinte Iordache (E: 1555, 56, 59—61, 63—65, 70), Popa Elena (E: 1555, 58—61, 63, 64, 67, 69, 70, 85).

GHIRDOVENI (Ploești). Cl. VII. Grigoraș Maria (4285, E: 1513, 15, 29, 38, 43—45, 53).

HALEȘ. (Buzău). Cl. VII. Vișan Victorița (E: 1555, 59, 60, 62, 63, 70, 71, 73, 74, 79, 81), Zîrnea Elena (idem).

HOREZU (Argeș) Cl. X. Crăciunea Loriana (4269, 71, 98, 305, 33, 38, 48, 51, 65, 69, 80—82). Iliescu V. Ion (4304, 05, 07—09, 11, 27, 33, 38, 44).

IAȘI. Absolvent Zbîrnea Boris (P). Școala profesională. An. II. Bejan Magdalena (E: 1559—61, 64, 65, 70, 71, 73, 77, 78, 81). Ș.m. M. Eminescu. Cl. VII. Anghelescu Ioana (E: 1538, 39, 43, 45, 50, 54, 59, 60, 69, 70), Bercovici Carol (E: 1571, 73, 77, 79, 83, 87, 89, 91, 94, 97). Ș.m. 3. Cl.XI. Boțan Corneliu (4302—09, 38, 40), Diaconescu Mircea (4302, 05, 06, 09, 12, 14, 38, 53, 54, 60, 65), Gaiginski Radu (4302, 07, 47, 51, 55, 69, 75, 80—83), Pavel Nicolae (4312, 14—16, 20, 22, 29, 42, 48, 77, 79—84, 90, 91, 93—97, 408, 16), Petrișor Silviu (4302, 07, 37, 42, 45, 48, 59, 80, 82, 90, 91, 93, 96, 416), Pintilie Ioan (4302—09, 14, 15, 21, 42, 43, 45, 46, 51, 55, 65, 68, 70). Ș.m. 5. Cl. XI. Dragoslav Iulian (4302—09, 11, 14—16, 37, 76, 80—83, 90, 94, 411, 16).

LUGOJ. Cl. VII. Brinda Rodica (E: 1540—42, 44, 46, 47, 49, 53, 58, 60). Cl. VIII. Popoviciu I. Mariana (E: 1528, 29, 31, 33, 40, 42—45, 49, 50, 52, 59, 60, 64, 65, 67, 70, 77—79, 81), Vasiliu Dan (E: 1547, 61, 66, 71, 73—75, 77, 79, 81), Zegrea Marius (E: 1528, 32, 38, 40, 42, 50, 59—61, 69—71, 73, 74, 77—79). Cl. XI. Iorga Valeriu (4248, 50, 55—62, 65—73, 77—80, 82, 83, 85—90, 95, 96, 98—101), Jurcă Iulian (4256, 58, 65, 71, 78, 80, 90, 303—05, 08, 09, 14, 16, 62, 80, 82—84), Sfetcu Ioan (4266, 78—80, 82, 83, 85, 88, 90, 93—96, 300, 02—09, 12, 14, 16, 18, 19, 25, 27, 33, 34, 38, 42, 46—48, 51).

MINDRA (Brașov). Cl. VII. Grama Gh. (4256, E: 1543, 52, 54, 55, 59, 60, 70, 74, 79).

MORENI (Ploești). Cl. VI. Anghelina Eliza (E: 1530, 38, 45, 46, 50, 55, 59, 60, 70, 74, 79). Cl. VII. Iliescu Al. (E: 1540, 43, 46, 50, 52, 61, 67, 69, 78).

MURGENI. Cl. X. Pericle Eugen (4315,

16, 21, 54, 69, 81, 82, 90, 412, 16). Cl. XI. Ciosa Vasile (4316, 21, 54, 55, 69, 81—83, 90, 412, 16), Ciobanu Dan (idem).

NĂSĂUD. Cl. VIII. Siegelstein Isidor (E: 1541, 43, 45, 49, 50, 52—55, 59, 60, 62—64, 70).

ODOBEȘTI. Cl. X. **Pănceanu Paul** (4309, 21, 38, 51—55, 56, 62, 69, 50, 53, 54, 80—84, 88—90, 91, 96—400, 07, 11—13, 15, 16, 43, P).

ORADEA. Ș.m. 1. Cl. VIII. Endei Gavril (E: 1541, 43—45, 47—50, 52—54). Cl. IX. Anonim. (4248, 56, 58, 65, 71, 83, 337, 42, 65, 69), Ș.m. 2. Cl. VI. Csillag Robert (E: 1541, 45, 46, 49, 53, 55, 59, 70, 74, 79), Kertesz Viktor (E: 1538, 45, 46, 49, 53, 55, 59, 70, 74, 79), Lőrincz Petru (E: 1541, 45, 46, 49, 53, 55, 70, 74, 79). Ș.m. 4. Cl. VIII. Andrei Livia (E: 1561, 66, 67, 69, 73, 74, 77—79, 81), Begea Gavril (E: 1561, 64, 66, 67, 69, 71, 73, 74, 77, 79), Ghiț Maria (E: 1561, 64, 67, 69, 73, 74, 77—79, 81), Hamza Lucian (E: 1561, 64, 66, 67, 69, 71, 73, 74, 76, 77—79), Ionescu Alina (E: 1561, 64, 66, 67, 69, 73, 74, 77, 79, 81), Lieberman Juditha (E: 1561, 64, 66, 67, 69, 73, 74, 77, 79i 81), Marcu Smaranda (E: 1559, 61, 64, 66, 67, 69, 70, 73, 77, 78), Pleșa Romulus (E: 1561, 64, 66, 67, 69, 71, 74, 76—79, 81), Pop Emilia (E: 1561, 64, 66, 67, 69, 73, 74, 77, 79, 81), Pop Leontina (E: 1561, 64, 66, 67, 73, 74, 77—79), Sălăgean Doina (E: 1561, 66, 67, 69, 73, 74, 77—79, 81). Cl. XI. Bărbulescu Aurelia (4302, 05, 12, 33, 51, 54, 55, 60, 67, 69, 82). Ș.m. Dr. Petru Groza. Cl. XI. Tănase Nica (4371, 80, 81, 88, 90, 91, 94, 96).

Școala de 7 ani **Săcădat**. Cl. VII. Gherghel Fr. (E: 1531, 38, 55, 59—61, 63, 70, 71, 73, 74, 79, 80), Negruț Vasile (E: 1528, 38, 55, 59, 60, 63—64, 69—74, 79, 80).

BRAȘOV. Ș.m. 1. Cl. XI. Rezeanu Rusan (4302, 04, 05, 08, 12, 14, 51, 54, 62, 65, 80, 81, 96, 416), Șerban Doina (4302—09, 14, 13). Ș.m. 5. Cl. VIII. Munteanu Mihai (4248, 56, 57, 65, 68, 83, 86, 98, E: 1530—32, 39). Cl. IX. Munteanu Mircea (4302, 04, 05, 07—09, 18, 19, 25, 27, 28, 33, 37). Cl. XI. Munteanu Al. (4302, 04, 05, 07—09, 18, 19, 27, 28, 33, 37), Pleșcan Petre (4302—09, 12, 15, 38, 42, 44, 51, 54, 65, 71), Sburan Mihail (4304, 12, 15, 38, 41, 42, 44, 54, 65, 71, 73).

OȚELUL ROȘU. Cl. VII. Fiat Mircea (E: 1529, 34, 38, 45, 46, 48, 52, 60, 63, 70), Năvligu Ioan (E: 1555, 59—62, 69, 70, 73, 74, 79, 80). Cl. X. Munteanu Elena (4203, 07, 14, 45, 79, 87, 369).

PETROȘANI. Cl. VII. **Iuga Ștefania** (E: 1540—55, 59, 62, 64, 65, 67, 70—74, 77—81). Cl. VIII. Orlov Zenaida (E: 1553, 58, 59, 66, 70, 71, 73, 75, 77, 78, 81).

PITEȘTI. Ș.m. 1. Cl. X Stancu M. Ioan (4302—09), 12, 16, 37, 38, 40, 54, 65, 67, 69, 71, 75). Cl. VIII. Constantin C. Antoneta (E: 1540—50, 52). Cl. IX. Zamfir Cornel (4302, 05, 07—09, 37, 69, 71, 81, 82). Cl. X. Diaconescu I. Ion (4302, 03, 09, 80—82, 91, 98, 416, 18).

PLOEȘTI. Ș.m. 1. Cl. VIII. Andronescu Gabriel (E: 1529, 38, 43, 46, 47, 50, 52, 59), Avram Gh. Florian (E: 1540, 59—61, 70, 71, 73, 74, 79), Bucur I. Nicolae (E: 1540, 53, 61, 62, 68, 71, 73, 74, 76, 77, 79, 81), Caramalis Paula (9: 1529, 30, 32, 39, 41, 43—45, 47, 48, 50, 52, 55, 59, 60, 62, 65, 70, 74, 76, 77, 80), Constantin Ecaterina (E: 1529, 30, 32, 38, 43, 44, 46, 48, 50, 52, 59), Dașoveanu Marilena (E: 1529, 32, 38, 41, 43—46, 50, 52, 70), Dinescu Constantin (E: 1529—32, 38—41, 43, 45—50, 52—54, 59), Dumitrescu Grigore (E: 1529, 31, 32, 47, 49, 51, 54, 59), Dumitru M. Vasile (E: 1530, 38, 41, 44, 46, 48, 50, 52, 59), Ene D. Elena (E: 1529, 39, 41, 44, 45, 49, 55, 59, 60, 70), **Ene P. Elena** (4319, 49, 59, 65, 67, 69, 98, 99, E: 1540—54, 57, 59—81), Enescu Liviu (E: 1529, 31, 38, 39, 43, 48, 50, 52, 54, 59), Enescu I. Sorin (E: 1539, 41, 45—47, 49, 50, 57, 59—61, 70, 71, 73, 74, 77, 79), Herțen Vasile (E: 1532, 39, 41, 45, 47, 50, 52, 59, 60, 70), Iacovescu C. Const. (E: 1529, 31, 41, 47, 48, 50, 52, 59, 71, 74—78, 81), Ionescu Mariana (E: 1529, 30, 32, 39, 41, 43—45, 48, 50, 52, 59), Lungu Corneliu (E: 1529, 32, 39, 43, 46, 48, 50, 52, 55, 60, 70), Matei Dumitru (E: 1532, 38—41, 43, 45, 47, 48, 50, 52—54, 59—61, 70, 71, 73, 74, 81), Mitroiu Cornelia (E: 1529, 32, 38, 41, 43—46, 50, 52, 70), Neacșu Ecaterina (E: 1529, 30, 32, 38, 43, 48, 50, 53, 59, 60, 70), Nicolae I. Silvia (E: 1529—33, 38—54, 58—61, 64, 66, 67, 69—75, 77—81), Nițu Aurica (E: 1524—32, 38, 41, 47—49, 54, 59, 60, 70), Staicu I. Gh. (E: 1532, 38—41, 43, 45, 47, 48, 50, 52—54, 59—61, 70, 71, 73, 74, 77, 81), Sandru Marin (E: 1530, 32, 39, 41, 42, 45, 47, 49, 50, 52), Tepșoiu Aurelian (E: 1529, 30, 32, 38, 39, 43—52, 54, 59), Tudor Liviu (E: 1543, 50, 52, 59—61, 64, 70, 74), Voicu D. Nicolae (4302, 05, 23, 42, 51, 68, 69, 71, 80—82, 96), Voinea Mircea (E: 1529, 32, 38—41, 43, 45, 47, 48, 50, 52—54, 59—61, 71, 73, 74, 77, 81). Cl. X. Bănică Doru (4302, 05, 30, 38, 42, 57, 65, 69, 80, 82, 84, 96), Butaciu Nicolae (4302, 04, 05, 09, 15, 38, 42, 47, 51, 54, 65, 69, 80—84), Casabalian Eduard (4302, 04, 05, 09, 15, 42, 51, 54, 65, 69, 82, 84), Cruceru St. (4302, 05, 38, 42, 51, 65, 80—84, 91, 96), Dragomir Emil (4304, 05, 07, 38, 42, 51, 69, 80, 82, 84), Drăgulescu Marius (4302, 04, 05, 07, 09, 38, 42, 51, 54, 65, 80, 81, 84, 91, 96), Dumitrescu Dumitru (4302, 04, 05, 09, 15, 38, 42, 51, 54, 65, 69, 81, 82, 84), Geamănu Mihail (4302, 04, 05, 09, 42, 65, 69, 80, 82, 84), Ionescu Aurel (4302, 05, 42, 51, 54, 65, 69, 80—82, 84, 91, 415), Leonte Aurelia (4303—05, 07, 08, 11, 62, 69, 80, 82, 83, 85), Manole Gh. (4302, 04, 05, 09, 42, 51,

65, 69, 80—82, 84, 91, 96), Matei Gh. Nicolae (4302, 05, 42, 51, 65, 69, 81, 82, 84, 96), Mihai Al. (4302, 05, 42, 51, 65, 80, 81, 84, 96), Munteanu Mariana (4302, 05, 42, 51, 65, 80—82, 84, 86), Muşat Alin (4302, 04, 05, 07, 09, 42, 65, 80—82, 91), Nicolae Angela (4302, 05, 42, 61, 65, 80—82, 84, 96), Nicolescu Doina (4402, 05, 23, 42, 65, 69, 71, 80, 81, 90), Oprea Maria (4302, 05, 42, 51, 65, 80—82, 84, 90), Peiulescu Marius (4302, 04, 05, 07, 09, 15, 38, 42, 51, 54, 65, 69, 81, 82, 84, 91), Reghină N. Petre (4302, 04, 05, 07—09, 23, 38, 42, 51, 59, 68, 69, 71, 80—82, 91, 96, P), Teodorescu Cristian (4302, 05, 23, 42, 51, 54, 68, 71, 80—82, 91, 96), Tilincă Simion (4302, 05, 08, 23, 42, 51, 65, 69, 71, 80—82, 96), Vasilescu Luminiţa (4301, 23, 51, 65, 80, 82, 84, 90, 91, 96), Zaharia Victor (4302, 05, 23, 42, 51, 54, 65, 68, 69, 71, 72, 80—82, 91, 96), Zamuel Saul (4302, 03, 05, 09, 42, 51, 54, 65, 69, 80—82, 84, 91). Cl. XI. Andronescu C. Radu (4302, 4302, 04, 05, 08, 09, 14, 60, 68, 80, 412), Bitir Viorel (4302—09, 14), Chicireanu Radu (4303, 05, 06, 08, 42, 54, 60, 80, 412), Gălăţeanu Adrian (4302—05, 08, 09, 14, 60, 67, 69, 80, 412), Gheorghiade Al. (4248, 57, 60, 63, 302—05, 07—09), Groşescu Ion (4302, 03, 05, 06, 08, 09, 14, 54, 60), Marinescu Petre (4302, 05, 09, 42, 54, 65, 69, 80—82, 84, 415), Nicolae Gh. (4267, 78, 80, 93, 302, 03, 08, 12, 14, 28, 59, 64, 73, 80—84, 89—91, 94, 96, 98, 400, 09, 11), **Opriş Ioan** (4217, 52, 67, 71, 79, 80, 82, 94, 305, 14, 24, 28, 47, 49, 51, 53—55, 59, 60, 62, 65, 67, 69—71, 73, 75, 80—84, 89—91, 94, 96, 98—400, 09, 11), Patrol Al. (4248—50, 60, 69, 71, 302, 03, 06, 08, 14, 54, 62, 69), Treidler Romulus (4302, 04, 08, 09, 60, 69, 80, 81, 96), Vlaşcanu Mihai (4302—06, 08, 09, 42, 51, 54, 60, 69, 80), Zaharescu Dorin (4302, 03, 05, 06, 08, 09, 42, 51, 54, 69, 80), Zotea Magdalena (4302—05, 08, 51, 54, 60, 62, 69, 70, 75, 80, 82, 96). Ş.m. 2. Cl. VII. Băzăvan Aristia (E: 155—61, 69, 70, 73, 74, 77, 79, 80). Cl. X. Topciu Rodica (4278, 302, 04, 09, 65, 69, 72, 80, 81). Cl. XI. Comendant Ileana (4302, 05, 06, 08, 09, 14, 48, 64, 82, 83, 96), Dogaru Sanda (4302, 06, 08, 09, 48, 64, 69, 70, 80—83, 96), Iancu Dan (4303, 05, 06, 08, 14, 62, 70, 80, 82—84, 91, 96), Mignea Luminiţa (4342, 69, 70, 80—84, 88, 94, 96), Năescu Ştefania (4302, 05—09, 42, 69, 70, 80), Neguţ Cornelia (4305, 06, 08, 14, 42, 69, 70, 81, 82, 96), Stoicescu Mariana (4302, 03, 05—09, 14, 42, 64, 70, 81—83, 96), Teodorescu Mihaela (4302, 03, 05, 06, 08, 09, 18, 19, 33, 42, 51, 69, 70, 80—84, 98, 99), Vetrici Oana (4302—06, 08, 09, 69, 70, 81). S.m. 3. Cl. VII. Cepoiu Mariana (4347, E: 1529, 30, 38, 39, 42, 47, 50, 53, 74, 79). Cl. VIII. Iacobescu Gabriel (E: 1529, 31, 32, 38, 41, 43, 47, 52, 60, 70), Opriţoiu Doina (4547, E: 1542, 55, 59—61, 64, 65, 70, 74, 75, 79), Păstrămoiu Constanţa (E: 1540—43, 45, 47—50, 52, 54), Ruginescu Marcela (E: 1542, 47, 51, 54, 64, 65, 71, 73, 76, 78, 81), Tănase Florica (E: 1542, 49, 57, 59, 60, 65, 70, 73, 74, 77). Cl. X. Hoinărescu Călin (4302, 04, 09, 48, 67, 69, 71, 80, 81, 98), Stănoiu Cezar (4304, 05, 09, 11, 13, 28, 53, 65, 69, 71, 80—82). Ş.m. 4. Cl. IX. Cuculeanu George (4256, 57, 68, 71, 98, 319, 82, 98, 99). Ş.m. 5. Cl. IX. Lungu Ileana (4365, 69, 75, 90, E: 1531, 32, 38, 41, 44, 47, 49, 60, 70, 77, 81). Cl. X. Mîrzea Gh. (4302, 38, 59, 65, 68, 69, 80, 81, 91, 93, 97, 400, 08), Zamfir Luca (4302, 04, 05, 09, 38, 59, 65, 68, 71, 80—82, 91, 93, 97, 400, 08). Ş.m. 6. Cl. VIII. Petcu Elena (E: 1545, 47, 48, 50, 59, 60, 65, 69—71, 74, 76—79).

PUCIOASA. Ş.m. 1. Cl. VIII. Matei Gh. (4309, E: 1545—47, 51, 53, 60, 61, 73), Stoica Florentin (4298, 305, 49, 69, E: 1529, 30, 32, 38—43, 45, 47, 50, 52, 59, 60, 64, 70). Cl. IX. Popa Al. (4313, 27, 59, 65, 67, 69, 80, 90, 98, 405, 07), Rîmbu Revişoara (4210, 57, 68, 86, 98, 305, 19, 27, 69). Cl. X. Avram Dorin (4256, 65, 68, 71, 80, 83, 86, 87, 98, 303, 05, 11, 15, 19, 21, 48), **Banu Gh.** (4250, 62, 63, 65, 71, 80, 83, 86, 90, 93, 98, 302—09, 14, 15, 19, 21, 25, 33, 37, 38, 43, 48, 49, 51, 54, 59, 62, 65, 67, 69, 70, 98, 99), Bendic Corneliu (4256, 57, 62, 65, 68, 80, 86, 87, 93, 98, 305, 07—09, 15, 19, 48), Băcan Vasile (4256, 65, 68, 73, 86, 87, 305, 19, 33, 42, 48, 54, 62, 65, 69, 70, 87), Braşoveanu Gabriela (4248, 50, 56, 57, 65, 68, 80, 302, 04—07, 09, 14, 15, 19, 21, 37, 38, 70), Davidescu Victor (4248, 56, 65, 73, 80, 83, 86, 87, 89, 95, 98, 303, 05, 19, 21, 27, 48, 54, 65, 67, 70), **Diaconescu Radu** (4268, 82, 87, 89, 95, 307, 14, 15, 19, 21, 27, 37, 38, 42, 43, 45, 48, 49, 54, 59, 65, 67—71, 80—84, 90—94, 98—400, 09), Grigoriu Anca (4248, 50, 56, 57, 65, 68, 73, 80, 86, 98, 302, 04—07, 09, 14, 19, 21, 37, 38, 70), Lăuliceanu Vasile (4248, 50, 56, 65, 71, 72, 80, 93, 303, 05, 08, 15, 48, 65), Lungu Gh. (4248, 50, 65, 68, 86, 87, 98, 302, 05, 19, 21, 27, 37, 42, 48, 54, 62, 65, 67), Marin Victor (4250, 57, 63, 72, 93, 302, 04—09, 15), **Marinescu Victor** (4248, 50, 57, 65, 68, 71—73, 80, 82, 83, 87, 93, 95, 98, 302—09, 14, 15, 19, 21, 27, 37, 38, 42, 48, 49, 54, 59, 65, 67, 69—71), Măgureanu Mircea (4256, 65, 68, 72, 80, 86, 87, 98, 305, 15, 21, 37, 42, 48, 54, 62, 65, 67, 69, 70), Mihai N. Mihai (4248, 56, 65, 68, 71, 80, 83, 86, 87, 98, 303, 05, 19, 42, 48, 54, 62, 69, 70), Mircea Const. 4248, 56, 65, 68, 73, 80, 83, 86, 87, 89, 95, 98, 303, 05, 11, 19, 21, 27, 38, 54, 62, 65, 67, 70), Pantea Virginia (4256, 65, 68, 72, 80, 86, 87, 98, 305, 19, 21, 37, 42, 48, 54, 62, 65, 67, 69, 70), Popa I. Nicolae (4248, 50, 56, 57, 62, 65, 68, 72, 73, 80, 83, 86, 87, 93, 98), **Popescu Gh.** (4248,, 56, 65, 68, 72, 80, 83, 86, 87, 89, 93, 95, 98, 303, 05, 07, 15, 19,

21, 27, 37), Rîmbu Eliade (4248, 56, 65, 68, 80, 86, 87, 98, 305, 11, 19, 21, 37, 42, 48, 54, 69, 70), Rocioiu Vasile (4248, 56, 62, 65, 71, 73, 80, 93, 98, 303, 05, 08, 09, 15, 19, 21, 33, 37, 38, 65, 69, 70), Savu Mihai (4248, 50, 56, 57, 65, 68, 72, 73, 80, 83, 86, 87, 93, 98, 302, 04, 07—09, 15, 19, 21, 37, 38), Sencovici Mihaela (4257, 90, 302, 04—09, 15, 19, 34, 37, 38, 42, 54, 62, 65, 69, 70), **Şerban Gh. Longin** (4248—51, 57, 62, 63, 65, 69, 72, 80, 83, 86, 87, 90, 93, 95, 98, 302—09, 14, 15, 19, 21, 25, 27, 33, 37, 38, 43, 47—49, 51, 54, 59, 62, 65, 67, 68, 70), Stan Gh. (4248, 56, 62, 71, 73, 80, 83, 90, 93, 98, 303, 05, 08, 19, 33, 37, 38, 69, 70), Stanciu Maria (4257, 65, 73, 86, 98, 303, 05, 07, 15, 19, 27, 38, 45, 54, 59, 65, 67, 69—71), Stoian I. G. (4248, 56, 65, 68, 72, 73, 86, 89, 95, 98, 305, 43, 54, 69, 65, 67, 69, 71), Tache Ioan (4248, 56, 58, 80, 83, 303, 05, 19, 54), **Tîrcă Ion** (4248, 50, 61, 63, 68, 71, 72, 80, 86, 89, 90, 93, 98, 302, 03, 05, 06, 08, 09, 14, 15, 19, 21, 27, 33, 37, 38, 42, 43, 47—49, 54, 56, 62, 64, 65, 67, 68—71), Vătăşescu Sima (4248, 57, 62, 65, 68, 80, 86, 87, 98, 305, 09, 11, 15, 19, 38). Cl. XI. Grigore I. Chirița (4285, 302—05, 08, 09, 11, 15, 19, 26, 27, 34, 54, 59, 68, 69), **Năstăsescu Const.** (4314, 15, 31, 41—49, 51, 53—57, 59, 60, 62, 64, 65, 67—71, 73, 75—77, 79—85, 90—94, 96—99, 404, 05, 10—12, 15—18), **Niță Const.** (4272, 89, 315, 18, 37, 42—45, 47—49, 51, 53—56, 60—62, 64, 65, 67—71, 75, 80—85, 89—91, 93, 94, 96—400, 06, 07, 12, 15—17), Popescu Gh. (4248, 57, 61, 62, 65, 68, 71—73, 80, 86, 89, 90, 98, 300, 02—04, 06, 08, 14, 15, 19, 27, 33, 40, 43, 48, 51, 54, 62, 64, 65, 67, 69, 70, 80, 82, 83, 98, 418), Rizescu Elena (4302—06, 08, 09, 11, 15, 19, 26, 27, 34, 38, 51, 54, 59, 65, 69), Stanciu Stelian (4248, 50, 61, 62, 65, 67, 71—73, 80, 83, 86, 89, 90, 93, 98, 302, 03, 06, 08, 14, 27, 29, 33, 37, 51, 54, 62, 64, 65, 69, 70), Vasilache Otilia (4285, 302, 04—09, 11, 15, 19, 26, 27, 34, 37, 38, 51, 54, 59, 69).

Şc. de 7 ani **Cricov**. Cl. VI. Matei C. Ion (E: 1542, 45—47, 53, 59, 60, 64, 70, 74, 77, 79, 81), Tircă Mihail (E: 1542, 45, 67, 72—74, 77—81).

REŞIȚA. Cl. VII. Stiopu Magda (E: 1515, 38, 39, 41, 43, 45, 50, 52, 60, 70, 99).

RIMNICU VILCEA. Absolvent Constantinescu Ion 24(46, 48, 50, 52, 56, 65, 67, 72, 83, 89, 302, 03, 05—09, 14, 21, 31, 37, 54, 60, 62, 64 65, 69—71, 75).

ROZNOV (Bacău). Cl. V. Simion Violeta (E: 1540, 41, 43, 46, 50, 52, 55, 60, 70).

SATU MARE. Cl. VIII. Brenner Robert (S: 1541, 43, 45, 47, 50, 52, 59, 60, 67, 70), Cojocaru Maria (E: 1540—43, 47, 50, 54, 59, 60, 64), Fruchter Lazăr (E: 1541, 43, 45, 47, 50, 52, 54, 59, 64, 67, 70). Geisler Emeric (E: 1559—61, 64, 69, 70, 73, 74, 77, 81), Moldovan Vera (E: 1540, 42, 54, 59, 60, 70, 74, 75, 79, 81), Pintea Doina (E: 1541, 43, 50, 52, 54, 59, 60, 64, 70), Pițu Maria (E: 1541, 54, 72, 74, 77—79), Roth Suzana (E: 1541—43, 47, 50, 54, 59, 60, 70, 74), Samuel Iudita (E: 1542, 54, 59, 60, 73, 74, 77—79, 81), Weinberger Eva (E: 1540, 42, 43, 47, 50, 52, 54, 60, 69, 70), Weisz Andrei (E: 1547, 52, 54, 58—60, 64, 67, 69, 70), Weisz Ioan (E: 1547, 52—54, 64, 67, 69—71, 73), Weisz Iudita (E: 1542, 43, 47, 50, 52, 59, 60, 64, 67, 70), Cl. IX. Gheție Iosif (4302, 05, 07—09, 19, 25, 28, 33).

SĂVENI (Suceava). Cl. VI. Zoler Aron (E: 1543, 45, 46, 50, 52, 55, 60, 70, 97). Cl. IX. Măntăluță Maria (4304, 08, 09, 71, 81, 82, 90), Sanda Elena (4304, 08, 09, 19, 42, 65, 69, 71, 81, 82), Sănduc Medeea (4304, 08, 09, 19, 38, 42, 65, 69, 71, 81), Scutelnicu Florea (4304, 08, 09, 18, 42, 65, 69, 71, 81, 82).

SIBIU. Absolvent Cojocaru Ion (4257, 68, 71, 75, 83, 88, 354, 59, 60, 62—69, 73). Ş.m. 1. Cl. VII. Boeriu Maria (E: 1543, 50, 52—54, 60, 69, 70, 74, 79). Cl. IX. Bădilă Vasile (4302, 04, 06, 07, 33, 54, 60, 80). Cl. XI. Balasopol Radu (4302, 03, 05, 08, 42, 60, 62, 80—83, 96), Breisch Dieter (4314, 15, 19, 24, 25, 33, 50, 52, 67, 70), Popa Eugen (4303, 04, 06—09, 54, 65, 69, 80, 81). Ş.m. 3. Cl. XI. Bucur Mariana (4302—09, 11, 12, 38), Halbreich Iudith (4304, 05, 08, 09, 69, 71, 80—83).

Şc. de 7 ani nr. 9. Cl. V. Badea Sanda (E: 1541, 45, 48, 49, 53, 55, 59, 62, 74), Stoica Adriana (E: 1545, 46, 48, 49, 55, 59, 63, 70, 74), Tăraboi Dana (E: 1541, 45, 46, 48, 49, 55, 59, 70, 74, 79), Turcanu Laura (E: 1541, 45, 46, 49, 53, 55, 59, 70, 74, 79). Cl. VI. Sigmireanu Mihaela (E: 1530, 38, 39, 41, 43, 45, 48—50, 52). Cl. VII. Albu Ion (E: 1545, 46, 49, 55, 59, 60, 63, 70, 84, 89), Boac Monica (E: 1545, 48, 53, 55, 59, 63, 69, 72, 74, 79), Gîlea Octavian (E: 1541, 43—49, 53, 54, 59, 70), Morar Maria (E: 1537—39, 48, 52, 54, 60, 61, 70), Stănescu Doina (E: 1541, 45, 46, 48, 49, 55, 59, 60, 70).

Şc. de 7 ani nr. 15. Cl. VI. Bucur Delia

SIGHET. Cl. VIII. Grosz I. (E: 1542—44, 46, 47, 50, 52, 55, 56, 59, 60, 64, 74, 77). Cl. X. Tiplea Ioan (4303—06, 08, 09, 15, 21, 94, 412). Cl. XI. Văleanu Tiberiu (4302—09, 14, 15, 21, 30).

SIGHIȘOARA. Ş.m. 1. Cl. X. Ajtai Maria (4268, 73, 85, 87, 98, 305, 09, 19, 67, 69, 82, 98, 99, 407). S.m. 2. Cl. X. Cornea Marius (4302, 04, 05, 07—09, 37, 48, 51, 54, 65, 69), Engerth Dieter (4302—05, 07—09, 14, 54, 60), Schneider Gottfried (4302, 04, 05, 07—09, 21, 51, 54, 65, 59, 75), Vlădutiu Mircea (4302—05, 07—09, 11, 15, 21, 30, 37, 38, 69, 71). Cl. XI. Brăteanu Silviu (4302—09, 11, 14, 15, 30, 37).

SINAIA. Cl. IX. Paxino C. Gh. (4302, 05, 04, 07—09, 19, 27, 33, 38, 49, 52, 54, 65, 67, 69), Tănase Virgil (4302—05, 09, 33—38, 42, 52, 62, 65, 67, 69, 71).

SOMCUȚA MARE. Cl. V. Munteanu Aurica (E: 1473, 81, 539, 53, 74, 79). Cl. VIII. Gherman Horia (4390, E: 1559, 73, 74, 76, 77, 79, 81). Cl. IX. Coteț Ioan (4305, 09, 65, 69, 80, 82, 84). Cl. X. Ghiță Tr. (4305, 09, 19, 27, 65, 69, 80, 82, 84, 98, 99).

SUCEAVA. Ș.m. C. VIII. Humoreanu Oltea (E: 1540, 42, 45, 47, 59, 67, 70, 74, 79), Lazăr Const. (E: 1540, 42, 43, 47, 50, 52, 55, 60, 63, 69, 70, 78), Malidi Mariana (E: 1541—43, 48, 49, 51, 66, 69, 70), Rene Alexandra (E: 1540, 42, 45, 47, 59, 60, 67, 69, 70, 74, 79,). Cl. X. Macovei Deuraș (4305, 06, 08, 42, 65, 68, 80, 82, 415). Cl. XI. Sorohan Liviu (E: 4302, 06, 07, 42, 52, 54, 65, 69, 95).

TECUCI. Ș.m. 1. Cl. VII. Bratoveanu Senilia (E: 1555, 59, 60, 63, 69—71, 73, 74, 80), Lupu Magdalena (E: 1541—43, 46, 49, 50, 52, 53, 59, 60), Păstoru Eugenia (E: 1541—43, 50, 53, 74, 79, 80), Stiopa Codruța (E: 1541—43, 45, 46, 50, 59, 73, 74, 79). Ș.m. 2. Cl. VII. Banu Maria (E: 1541—43, 45, 52, 53, 59, 60, 63, 69, 70), Marian Ștefania (E: 1541—43, 45, 50, 53, 59—61, 63, 69, 70, 79). Cl. VIII. Gatea Ionica (E: 1541—43, 45, 46, 49—51, 53, 79), Focșa Corneliu (E: 1541—43, 45, 46, 49, 51—53, 71, 79). Cl. X. Theodor Teodor (4302, 51, 52, 60, 71, 80—83, 96, 409, 16, 18, 34, 42), Tigănescu Violeta (4351, 71, 80, 82, 83, 96, 416, 37, 56, 57).

TIMIȘOARA. Student Costea Dumitru (fac. Electronică) (4302, 03, 05, 08, 12, 14, 30, 37, 44, 54, 59, 62, 64, 65, 69, 70, 73, 81—84, 90, 91, 416). Ș.m. 2. Blum Herta (4302, 05, 08, 09, 14, 48.62, 69, 80—83). Cl. VI. Teleagă Petru (E: 1540, 41, 43—46, 50, 52—54, 59, 60, 70, 74, 79). Cl. VIII. Szende Suzana (E: 1571—79, 81). Cl. XI. Berg Fritz (4402, 03, 05, 08, 09, 14, 48, 62, 69, 80, 82, 83), Bihn Erich (4302—09, 14, 42, 43), Dengl Günther (4302—06, 09, 14, 80—83). Ș.m. 3. Cl. VII. Babeu Constanta (E: 1529, 30, 38, 41, 43—45, 48, 52—54, 60), Klein Gabriel (E: 1540, 41, 45, 46, 53, 54, 64, 73, 74, 80), Lăzărescu Stela (E: 1540—45, 48—50, 52—54, 60), Zosiu Ioana (E: 1540—44, 48, 50, 52, 54, 60). Ș.m. 5. Cl. VIII. Lungu Mircea (E: 1539, 48, 67, 77). Ș. m. 7. Cl. VII. Corondo Livia (E: 1560—62, 66, 70, 27, 74, 79). Cl. X. Mureșanu D. Ilie (4302—05, 09, 51, 69, 81, 82). Cl. XI. Alexandru Gh. (4302, 03, 05, 06, 08, 09, 12, 15, 54, 60, 79, 72), Suciu Cornel (4302—09, 15, 51, 54, 60, 65, 69, 71).

TORGOVIȘTE. Ș.m. 2. Cl. XI. Magdalena Iosefina (4302, 04, 05, 07, 08, 38, 65, 80—82). Ș.m. 3. Cl. VII. Niculescu Const. (E: 1541—45, 51, 53, 56, 60, 70, 79, 87). Ș.m. serală. Cl. VIII. Pavel I. Marin (E: 1555, 59—61, 69, 71—75, 77, 81).

TG. CĂRBUNEȘTI (Oltenia). Cl. XI. Gușiță Marin (4302—06, 08, 09, 11, 18, 19, 21, 22, 25, 27, 28, 33, 49, 51, 52,, 54, 56, 67, 98, 99, 409).

TÎRGU JIU. Ș.m. 1. Cl. VI. Bănică Marian (E: 1541, 43—46, 49, 50, 52, 53, 60). Cl. XI. Cancer Anca (4302—09, 12, 16, 18, 19, 21, 25, 28, 33, 37, 40, 51, 54, 59—62, 64, 65, 68—71, 75, 77, 80—84, 94, 97—99, 408). Ș.m. 3. Cl. VIII. Roanghes Elena (E: 1545, 47, 50, 53, 59, 60, 70, 74, 77, 79, 81). Cl. IX. Ionescu Vl. (4351, 54, 60, 65, 70, 71, 80—82, 96).

TÎRNAVENI. Ș.m. Al. Sahia. Cl. X. Costea Viorel (4309, 11, 38, 65, 67, 69,81, 82, 90).

TÎRGU MUREȘ. Cl. VIII. Kancsar Martin (E: 1557, 64—68, 75, 77, 78, 81).

TRUȘEȘTI (Suceava). Cl. IX. Aconstantinesii Hareta (4256, 302, 19, 42, 49, 52, 69, 80, 98, 99), Cruț Petru (4356, 57, 71, 302, 04, 19, 42, 49, 52, 69, 90, 98), Dănulă Angelica (4256, 57, 62, 71, 302, 19, 42, 49, 52, 69, 80, 98, 99), Iacob Odorica (4256, 57, 62, 71, 302, 04, 19, 49, 52, 80, 82, 98, 99), Perdivară Pavel (4256, 302, 19, 42, 49, 52, 69, 80, 90, 98, 99), Tudose Elena (4302, 09, 19, 42, 49, 52, 56, 69), Varvara Elena (4302, 19, 42, 49, 52, 56,, 69, 98, 99). Cl. X. Ciocuș Olimpia (4303, 04, 09, 19, 42, 52, 62, 69, 82, 98, 99), Mutuzoc Elena (4303, 04, 42, 49, 62, 80, 83, 98, 99), Săranu Emilia (4268, 73, 98, 302—04, 09, 19, 42, 49, 62, 64), Scutaru Ana (4256, 302—04, 19, 42, 52, 62, 69). Cl. XI. Bîzbac Elena (4253, 56—58, 60—62, 71, 304, 69), Ciomagea Zenovia (4254, 56—58, 61, 62, 71, 304, 69, 82), Enache Viorica (4256—58, 60—62, 71, 304, 69, 82), Silion Dumitru (4254, 56—58, 61, 62, 71, 304, 14, 69, 82).

TURDA. Cl. IX. Filip Maria (4319, 38, 65, 67—69, 82, 90, 98), Păcurariu Liana (4319, 65, 67—69, 81, 82, 90, 98, 99).

TURNU MĂGURELE. Cl. VI. Bălan Maria ((E: 1540, 45, 48, 55, 59, 60, 63, 70, 74, 79,), Frățilescu Oara (E: 1541, 45, 46, 53, 54, 59, 60, 70, 74, 79). An. I. Eremima Dinu (4302—09, 12, 19, 36, 38).

TURNU SEVERIN. Absolvent Nănuț Ion (4333, 42, 51, 52, 60, 62, 64, 69, 70, 77, 80—83, 98, 416), Nițulescu Lucian (4302, 03, 05, 08, 14, 42, 51, 54, 62). Ș.m. 1. Cl. VII. Vulpescu Dan (E: 1545, 48, 52, 59, 60, 69, 70, 74, 79). Cl. XI. Roată Radu (4248, 50, 56—58, 60, 62, 63, 68, 73, 80, 83, 86, 87, 96).

VĂLENII DE MUNTE (Ploiești). Cl. VIII. Bocănescu Valeriu (E: 1540, 42, 43, 45, 53, 57, 59, 74, 78, 79), Dimache Felicia (E: 1555, 57, 67, 69, 71, 74, 77—79, 95), Ionescu Pavel (E: 1540, 43, 45, 47—50, 53—55, 59, 60, 70, 74), Zaharia Ion (E: 1540, 43, 45, 49, 50, 53—55, 60, 67, 70).

ZALĂU. Cl. VII. Elec Maria (E: 1541, 42, 44, 46, 48—51, 53, 74, 79). Cl. XI. Gojzago Katalin (4314, 24, 31, 34, 54, 60, 62, 65, 69).

— Elevii claselor IX—XI nu vor trimite soluții la problemele propuse pentru școala de 7 ani. Problemele rezolvate trebuie să fie din ultimele trei numere apărute ale G.M.F. B și vor fi trimise numai odată în cursul unei luni. Problemele de matematică vor fi expediate într-un singur plic și vor fi însoțite de un borderou cu numerele problemelor scrise în ordine crescîndă. Idem pentru problemele de fizică. Pe plic se va scrie localitatea și școala pe care o urmează rezolvitorul. La rubrica rezolvitorilor nu se vor anunța decît cel puțin 10 probleme bine rezolvate.

CONCURS PENTRU ELABORAREA UNOR PROBLEME LEGATE DE PRACTICĂ

Gazeta matematică și fizică seria B organizează un concurs pentru grupuri de probleme cu un conținut care să reflecte legătura matematicii și fizicii cu practica. În acest scop, doritorii care vor să participe la acest concurs vor trimite pînă la 1. X. 1961 un număr de cel puțin 15 probleme împreună cu soluțiile lor într-un plic cu un motto, iar în interiorul plicului se va pune un altul mai mic, sigilat pe care se scrie același motto, și care va conține și adresa autorului sau a autorilor.

Nu vor fi luate în considerare decît acele probleme care nu au apărut în alte cărți și reviste.

În funcție de calitatea și numărul problemelor se vor acorda premii în bani și se va asigura publicarea lor în publicațiile Societății de științe matematice și fizice din R.P.R.

Pe plicurile trimise pe adresa redacției din str. Academiei nr. 14 — București, se va face mențiunea „Pentru concursul de probleme practice".

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ ȘI FIZICĂ 1961

pentru elevii școlilor medii, profesionale, pedagogice, tehnice.

Se vor mai ține următoarele etape:

— etapa regională — *în ziua de 23 martie, ora 9, matematica,*
— în ziua de 23 martie, ora 15, fizica,
— în ziua de 24 martie, încheierea etapei.

— etapa finală, *în zilele de 23—25 aprilie 1961, la București, lucrări scrise, probe orale și lucrări de practică de laborator.*

ERATA. La pag. 100 rînd 21 în loc de $BE—CD$ se va scrie $BE=CD$.
La pag. 86 rînd 18 în loc de revelmente se va scrie relevmente.
La problema 4498 în loc de b^2 se va scrie a^2.
La pag. 85 rînd 8 de jos se va citi *ferite* în loc de *fertile*.

CĂTRE REZOLVITORII DE PROBLEME

Corespondenții care ne trimit probleme rezolvate trebuie să redacteze fiecare problemă separat, însoțind-o de toate calculele necesare și de figuri desenate cu îngrijire. Nu se vor trimite soluțiile mai multor probleme pe aceeași foaie. Problemele rezolvate de fizică se vor trimite separat, iar pe plic se va scrie: *Pentru redacția de fizică.*

Se primesc lunar cel puțin zece soluții numai la problemele și exercițiile din ultimele trei numere apărute. Pe plic se va scrie localitatea și școala pe care o urmează rezolvitorii, pentru a se evita confuzii la întocmirea rubricii rezolvitorilor de probleme și a listei celor evidențiați. Soluții la problemele propuse pentru școala de 7 ani se primesc numai de la elevii claselor V—VIII, sau ai școlilor profesionale.

— Problemele care se propun de către colaboratorii revistei să fie clar alcătuite și însoțite de soluții, să fie personale, iar nu luate din cărți sau reviste. Elevii sînt sfătuiți să înceapă a propune probleme numai după ce au rezolvat un număr destul de mare de exerciții și probleme. Problemele propuse, dar necorespunzătoare, nu se pot publica. Dacă un corespondent constată că unele probleme propuse au fost publicate în cărți sau reviste, este rugat să ne arate precis volumul și pagina unde a mai apărut enunțul sau soluția problemei respective.

Corespondentul nostru care a citit și a înțeles deplin multe din soluțiile publicate, a rezolvat multe din problemele propuse, poate și este îndemnat să încerce să schițeze cîte o notă rezultată dintr-o observație făcută cu ocazia rezolvării unei chestiuni mai grele. Aceste note să fie *refăcute de mai multe ori înainte de a fi trimise*, pentru ca redactarea lor să fie *cît mai clară și concisă*. Figurile să fie făcute separat. În redactare se vor evita prescurtările. Nu se va scrie: ∥, ⊥, ≡, ∆, ∘, ., Tr., etc. iar trecerea de la un calcul la altul să fie explicată pentru a se putea urmări ușor desfășurarea unei demonstrații. Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

La publicarea problemelor rezolvate se vor menționa rezolvitorii care au dat o bună redactare și o soluție interesantă, sau mai multe metode de rezolvare.

Tovarășii colaboratori elevi sînt rugați să ne trimită date asupra activității lor extrașcolare la matematică și la fizică, asupra activității cercurilor de matematică și de fizică la care iau parte, pentru ca apoi, prin revistă, să se poată realiza cu succes un schimb de experiență. Dările de seamă concrete se vor publica în G.M.F.-B.

Autorii sînt rugați ca la întocmirea articolelor și notelor să țină seama de următoarele: articolele sau notele să fie scrie clar cu cerneală sau dactilografiate la două rînduri și pe o singură parte a foii, figurile să fie desenate îngrijit și pe o foaie separată. Problemele propuse să fie însoțite de una sau mai multe soluții.

Autorul să semneze clar lucrarea personală pe care o trimite pentru publicat, de asemenea să scrie adresa și data trimiterii lucrării.

— Materialele care nu corespund profilului G.M.F.-B, nu vor fi publicate.

Colecții și numere din anii precedenți

Societatea de Științe Matematice și Fizice din R.P.R., posedă exemplare mai vechi din G.M.F.-B.

Cititorii noștri își pot procura colecții ca și numere disparate, depunînd banii la poștă prin mandat poștal pe numele Societății de Științe Matematice și Fizice, strada Academiei nr. 14, contul 670.004 la B.R.P.R., filiala Lenin.

Prețul unui exemplar este de lei 3 pentru G.M.F.-A și de lei 1,50 pentru G.M.F.-B. Cheltuielile de transport sînt de 0,20 lei de exemplar.

ABONAMENTE — Societatea de Științe Matematice și Fizice din R.P.R. primește abonamente începînd cu nr. 1/1961 la oricare din publicațiile sale: a) Pentru instituții, școli, biblioteci la prețul de lei 60 anual, pentru fiecare din periodicele sale: G.M.F.-A, G.M.F.-B, M.F.L., Bulletin Mathématique și 40 lei anual la „Mathematica".

b) Pentru profesori și elevi la prețul de 18 lei la G.M.F.-B sau M.F.L. de 36 lei la G.M.F.-A, de 60 lei la Bulletin Mathématique și de 40 lei la „Mathematica".

— Fiecare abonat este rugat să facă cunoscută G.M.F.-B și altor colegi, pentru a face abonamentele din vreme în vederea planificării tirajului lunar.

— Abonamentul se poate face individual prin oficiile poștale locale sau prin factorii poștali, cu prețul de 18 lei pe 1961 (12 numere).

Tipografia Învățămîntului, București — c. 217 Lei 1,50

E 11726

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE
DIN R.P.R.

GAZETA MATEMATICĂ ȘI FIZICĂ

(SERIA B)

Anul XII aprilie 1961

4

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

(SERIA B)

Anul XII, nr. 4 — aprilie 1961

SUMARUL

		pag.
1.	Unele aplicaţii ale statisticii matematice de G. Ciucu	193
2.	Circuite electrostatice şi magnetice de Dorin Gheorghiu	199
3.	Drum spre Luceafăr de Alexandru Stoenescu	209
4.	Prima viteză astronautică (prelucrare)	210
5.	Note matematice de Paul Popescu	213
6.	Să construim modele şi aparate de fizică cu mijloace proprii	219
7.	Probleme rezolvate : (4178 ; 4183 ; 4191 ; 4212 ; 4213 ; 4214; 4215; 4216; 4220; 4225; 4226; 4227; 4229; 4231; 4232 ; 4234 ; 4235 ; 4237 ; 4265 ; 4266).	219
8.	Chestiuni de examen (4614—4633)	232
9.	Probleme propuse (4634—4671)	236
10.	Exerciţii şi probleme propuse pentru şcoala de 7 ani (E: 1661 — E: 1675)	242
11.	Poşta Redacţiei	245
12.	Rubrica rezolvitorilor de probleme	246

ANUL XII **4** APRILIE

COMITETUL DE REDACŢIE

Ailincăi M., profesoară; *Atanasiu V.*, lector, redactor pentru fizică; *Boiangiu D.*, lector ; *Ionescu-Bujor C.*, prof. univ. ; *Ionescu-Ţiu C.*, profesor, redactor pentru matematică : *Manolescu St.*, profesoară : *Muşat I.*, profesor ; *Petrovanu A.*, profesor, *Sacter O.*, conf. univ., redactor şef ; *Simionescu D. Gh.*, conf. univ. ; *Udrea E.*, profesoară.

REDACŢIA: Str. Academiei, 14 — Tel. 14.46.53 — Bucureşti I

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar putea interesa redacţia noastră se vor trimite pe adresa de mai sus.

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

(SERIA B)

PUBLICAŢIE LUNARA PENTRU TINERET

Anul XII, nr. 4 aprilie 1961

UNELE APLICAŢII ALE STATISTICII MATEMATICE

de conf. univ. *G. CIUCU*

Congresul al III-lea al Partidului Muncitoresc Romîn a deschis poporului nostru perspectiva luminoasă a victoriei depline a socialismului şi trecerii treptate la comunism.

Partidul Muncitoresc Romîn a îndreptat ţara noastră pe calea creşterii fără precedent a economiei, culturii şi ştiinţei. Sarcinile planului de dezvoltare a economiei naţionale în anii 1960—1965, elaborate pe baza unor analize temeinice a posibilităţilor dezvoltării noastre naţionale, constituie un plan măreţ care va asigura dezvoltarea bazei tehnico-materiale a socialismului, încheierea procesului de făurire a relaţiilor producţiei socialismului în întreaga economie, în vederea desăvîrşirii construcţiei socialismului.

Congresul al III-lea a acordat o mare atenţie problemelor dezvoltării continue a ştiinţei şi culturii din patria noastră, elaborînd sarcinile care stau în faţa învăţămîntului, ştiinţei şi culturii. Rolul conducător al partidului şi în problemele ştiinţei şi culturii creşte în măsură şi mai mare.

Din lucrările Congresului Partidului sarcini deosebit de importante în realizarea planului economic revin şi cercetătorilor ştiinţifici. Ei trebuie să lupte pentru introducerea celor mai noi cuceriri ale ştiinţei şi tehnicii moderne în industrie şi economie. De asemenea să ţină seama că principalul criteriu de apreciere a muncii ştiinţifice îl constituie aportul adus la rezolvarea problemelor concrete puse de economia noastră naţională. Pe această linie şi matematicienii trebuie să-şi aducă aportul lor.

În Directivele Congresului al III-lea se subliniază sarcinile ce revin cercetării matematice şi anume de a dezvolta cercetările privind calculul numeric, grafic şi statistic.

În cele de mai jos vom arăta principalele domenii în care statistica matematică poate să contribuie la rezolvarea unor probleme puse de nevoile eonomiei noastre naţionale.

Printre diferitele discipline matematice, un rol de frunte în cunoaşterea lumii reale, îl are teoria probabilităţilor şi statistica matematică. Aplicaţiile teoriei probabilităţilor şi ale statisticii matematice în fizică, chimie, astronomie, biologie, tehnică, demonstrează acest fapt. Problemele de telefonie, de mişcare turbulentă, de cristalizarea metalelor, problemele legate de structura atomică a materiei, controlul statistic al calităţii producţiei, lingvistica matematică etc. duc în mod inevitabil la folosirea celor mai noi metode ale statisticii matematice.

1. Diverse probleme ale industriei moderne se rezolvă cu metodele statisticii matematice. Una din particularităţile industriei, este fabricarea în

masă a unor produse de același tip și pentru aceste produse se pune problema controlului lor, cu alte cuvinte, dacă ele corespund principalelor proprietăți, care determină calitatea produsului respectiv, proprietăți stabilite de însăși procesul tehnologic. Dacă ar trebui să se verifice toate piesele care se fabrică, de exemplu, la o mașină unealtă automată de mare productivitate, ar fi necesari cîțiva controlori, ceea ce ar duce la ridicarea prețului de cost al produsului. Principalul scop al aplicării statisticii în acest caz este prevenirea din timp a apariției unor deficiențe. Pentru aceasta este necesar să apropiem controlul de mașina-unealtă. O astfel de verificare efectuată chiar lîngă mașină, poartă numele de control curent sau operativ. Vom expune pe scurt în ce constă acest control.

Controlul operativ statistic constă în organizarea științifică a controlului calității producției, date de o mașină-unealtă automată, pe bază definită de mostre mici, egale ca număr luate la perioade de timp egale (de exemplu din oră în oră cîte 5 piese fabricate). Rezultatele obținute din măsurătorile efectuate se înscriu într-un grafic foarte sugestiv, în care se trec limitele de toleranță stabilite pentru produsul respectiv și niște linii numite limite de control cuprinse între liniile de toleranță și care constituie adevărate șine de ghidare a bunei caltăți a procesului tehnologic. Orice rezultat care iese dintre aceste limite, constituie un semnal de alarmă, care duce imediat la determinarea cauzelor „dereglării" producției și la readucerea procesului tehnologic în stare normală.

O metodă foarte des întîlnită este metoda „max-min", deoarece necesită puține calcule și numărul pieselor controlate este redus (4 pînă la 10 piese). Metoda constă in a determina pentru lotul care se controlează, cea mai mică respectiv cea mai mare valoare a caracteristicii controlate. Limitele de control se stabilesc, ținînd seama ca dimensiunea piesei controlate (dacă aceasta este caracteristica principală) să se găsească între limitele tehnice date de procesul tehnologic.

Se determină mai întîi valoarea medie a valorilor maxime și cea a valorilor minime. Pentru aceasta se controlează cel puțin 25 de loturi. Să notăm cu $V_1, V_2, \ldots, V_{25}$ valorile maxime și cu $M_1, M_2, \ldots, M_{25}$ valorile minime. Atunci.

$$\overline{V} = \frac{V_1 + V_2 + \ldots + V_{25}}{25},$$

iar

$$\overline{M} = \frac{M_1 + M_2 + \ldots + M_{25}}{25},$$

unde $\overline{V}$ și $\overline{M}$ sînt mediile aritmetice ale valorilor maxime respectiv minime.

Limita de control superioară a repartiției valorilor maxime se determină cu ajutorul egalităților:

$$V_{sup} = \overline{V} + A\overline{R}$$
$$M_{inf} = \overline{M} - A\overline{R},$$

unde $\overline{R} = \overline{V} - \overline{M}$, iar A este o constantă care depinde de numărul de piese controlate și de probabilitatea (α) pe care o admitem pentru existența rebuturilor. Constanta A se ia din tabele de statistică în funcție de valoarea lui α.

Să dăm un exemplu de aplicare a acestei metode. Să presupunem că la o piesă se controlează diametrul său dat de procesul tehnologic $\varnothing 20^{-0,10}_{-0,024}$*). Să presupunem, pentru simplificarea calculelor, că pentru stabilirea diagramelor de control se controlează 10 loturi a cîte 4 piese, luate din oră în oră. Măsurînd diametrul diferitelor piese obținem o serie de valori. Să considerăm că în primul lot de 4 piese am obținut următoarele valori: 19,986, 19,988, 19,984, 19,984 și vom înscrie în tabele cea mai mare valoare 88 și cea mai mică 84, evident ținînd seama de mărimea cîmpului de toleranță. Și analog obținem diverse valori pentru celelalte loturi, pe care le înscriem în tabelul de mai jos.

Valoarea maximă		*Valoarea minimă*	
88	85	84	83
91	89	84	87
90	96	84	86
85	90	84	84
82	88	80	85
Total	884	total	845

Ținînd seama de formulele de mai sus obținem:

$$\overline{V} = \frac{884}{10} = 88{,}4 \quad ,\overline{M} = \frac{841}{10} = 84{,}1$$

În cazul nostru $n = 4$ și de exemplu pentru $\alpha = 0{,}27\,\%$ din tabel obținem $A = 1{,}03$.

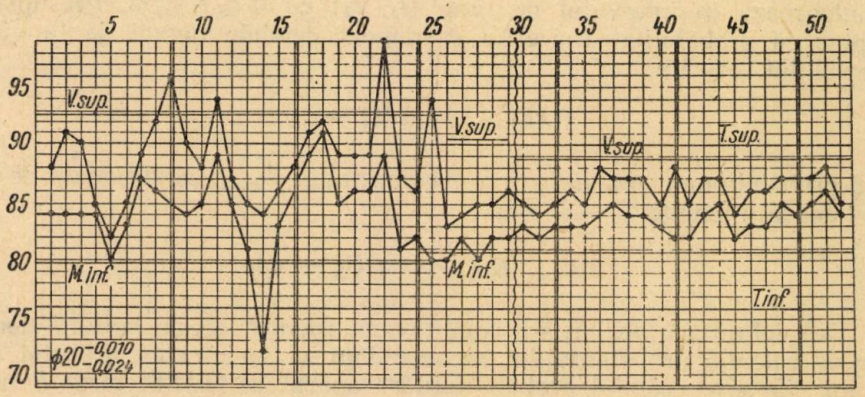
Atunci limitele de control sînt date de:

$$V_{sup} = V + AR = 88{,}4 + 1{,}03 \times 4{,}3 = 92{,}8,$$

iar

$$M_{inf} = \overline{M} - AR = 84{,}1 - 1{,}03 \times 4{,}3 = 79{,}7.$$

Diagrama de control corespunzătoare este de forma de mai jos.



Se observă cu ușurință că înainte de aplicarea controlului operativ diametrul pieselor avea fluctuații mari, multe din piese ieșind din limitele

*) Aceasta înseamnă că diametrul piesei trebuie să fie cuprins între limitele de 19,990 și 19,976 exprimate în unități de măsură corespunzătoare (mm, cm etc.).

cimpului de toleranță *T sup, T inf*. După stabilirea limitelor de control și aplicare efectivă a acestei metode se observă uniformitatea și buna calitate a producției.

Din cele de mai sus rezultă că prin aplicarea acestor metode de control se obține: micșorarea procentajului de rebuturi, ridicarea continuă a calității producției, reducerea cheltuielilor făcute pentru control, reducerea limitelor de toleranță, ceea ce duce la economisire de materiale, descoperirea defectelor în procesele de fabricație și a cauzelor care le-au provocat, contribuind astfel la o mai bună organizare a procesului de producție, reducerea prețului de cost etc.

Un colectiv de matematicieni, de la Facultatea de matematică și fizică Universitatea C. I. Parhon, format din D. Drăghici, Săcuiu Ion, Rancu N., S. Turbatu, condus de profesorii O. Onicescu și Gh. Mihoc, aplică cu succes asemenea metode de control la Uzinele „I. C. Frimu" din Sinaia.

Se pot da și alte numeroase exemple de aplicații în agricultură, geologie, biologie etc.

2. Aplicațiile cele mai numeroase le au statistica matematică în fizică și mai ales în fizica teoretică. Astăzi este de neconceput să faci fizică, fără a aplica metodele probabilistice și statistice. Noi vom da un singur exemplu, privind aplicarea metodelor probabilistice și statistice la studiul dezintegrării unei substanțe radioactive.

Din experiență se știe că un atom se dezintegrează într-un timp oarecare ce nu poate fi stabilit anterior. Să notăm cu $p(t)$ probabilitatea ca un atom să se dezintegreze în intervalul de timp t, presupunînd că la începutul intervalului atomul nu s-a dezintegrat. Evident că funcția $p(t)$ este o funcție de t. Atunci probabilitatea contrară este $q(t) = 1 - p(t)$, care este o funcție monoton descrescătoare și $q(o) = 1$, deoarece la începutul intervalului atomul cu siguranță nu se dezintegrează.

Să notăm cu E_{t_1, t_2} evenimentul care constă în faptul că atomul nu se dezintegrează în intervalul de timp (t_1, t_2) cu $0 \leqslant t_1 < t_2$. Presupunem în plus că probabilitatea acestui eveniment depinde numai de lungimea intervalului, adică:

$$P(E_{t_1, t_2}) = q(t_1 - t_2),$$

și că probabilitatea condiționată a evenimentului E_{t_1, t_2} condiționată de $E_{0, t}$ depinde de diferența $t_2 - t_1$ sau

$$P_{E_{0,t}}(E_{t_1, t_2}) = q(t_1 - t_2).$$

Din definiția probabilității condiționate (pentru aceste noțiuni elementare de calculul probabilităților recomandăm să se citească articolul scris de noi „Ce este calculul probabilităților" apărut în G.M.F. seria *B* nr. 6, 1956) rezultă că:

$$P(E_{0, t+s}) = P(E_{0, t})\ P(E_{t, t+s}),$$

de unde avem:

$$q(t + s) = q(t) \cdot q(s). \qquad (1)$$

Această ecuație este o ecuație funcțională și ne permite să determinăm probabilitatea $q(t)$. Pentru aceasta să înlocuim în ecuația (1) pe s cu Δt, să scădem din ambii termeni ai egalității $q(t)$, iar apoi să împărțim cu Δt. Vom obține

$$\frac{q(t+\Delta t) - q(t)}{\Delta t} = q(t)\,\frac{q(\Delta t) - q(o)}{\Delta t},$$

unde am ținut seama că $1 = q(0)$. Trecînd la limită pentru $\Delta t \to 0$, se vede că:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{q(t+\Delta t) - q(t)}{\Delta t} = q'(t),$$

și

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{q(\Delta t) - q(o)}{\Delta t} = q'(0).$$

Deci:

$$q'(t) = q(t)\, q'(0). \tag{2}$$

Obținem astfel o relație între funcția necunoscută $q(t)$ și derivata ei, care caracterizează procesul de dezintegrare al unui atom radioactiv. Constanta $q'(0)$ este nenegativă. Ea nu poate fi pozitivă, deoarece $q(0) = 1$, iar $q(t) = 1$, întrucît este o probabilitate. Dacă $q'(0) > 0$, atunci $q(t)$ trebuie să ia valori mai mari ca 1, ceea ce este imposibil. Însă $q'(0)$ nu poate fi nici zero, deoarece în acest caz din relația (2) rezultă că $q(t) = 1$, ceea ce nu are sens. Deci $q'(0) = -\lambda$, cu λ pozitiv. Se vede ușor că soluția relației (2) este:

$$q(t) = e^{-\lambda t}.$$

Constanta λ poartă numele de constantă radioactivă.

Să generalizăm acum procesul descris mai sus. Să considerăm că la momentul $t = 0$ avem N atomi radioactivi. Fiecare atom în intervalul de timp t se poate dezintegra cu probabilitatea $1 - e^{-\lambda t}$ (deoarece $p(t) + q(t) = 1$). Numărul dezintegrărilor este aproximativ egal cu $N(1 - e^{-\lambda t})$, iar numărul atomilor nedezintegrați cu $Ne^{-\lambda t}$ Să determinăm probabilitatea ca din N atomi să se dezintegreze în intervalul de timp t, un număr de k atomi. Să notăm această probabilitate cu $p(t)$. Atunci avem:

$$p_k(t) = C_N^k (1 - e^{-\lambda t})^k\, e^{-(N-k)\lambda t}.$$

Se spune că sîntem în cazul unei distribuții binominale. Dacă λt este mic și k nu e prea mare, atunci se poate demonstra că distribuția binominală se poate aproxima cu distribuția Poisson și obținem:

$$p_k^*(t) = \frac{[N(1 - e^{-\lambda t})]^k}{k!} \cdot e^{-N(1-e^{-\lambda t})}.$$

Dacă λt este foarte mic, atunci $1 - e^{-\lambda t}$ poate fi înlocuit cu λt și obținem:

$$p_k^{**}(t) = \frac{(N\lambda t)^k}{k!}\, e^{-N\lambda t}.$$

Se spune că fenomenul studiat urmează în acest caz o distribuție Poisson sau a evenimentelor rare.

3. În ultimul timp o aplicare deosebit de importantă a statisticii matematicii se manifestă în problemele de lingvistică matematică, în studiul statistic al frecvenței de utilizare a cuvintelor din diverse limbi. Să ne reamintim că alfabetul (codul) Morse ținea seama de unele legi statistice ale limbii. Astfel, literele mai frecvente, mai des utilizate au notații mai scurte decît celelalte litere care sînt mai puțin frecvente. Codurile telegrafice pentru limbile Indiei, coduri ce au fost elaborate în ultimul timp, au fost întocmite, ținîndu-se seama de legile statisticii matematice.

Problemele principale care se pun în lingvistica matematică sînt: codificarea optimă a transmisiunilor telegrafice sau a altor transmisiuni, care să fie mult mai economice decît cele utilizate în prezent prin transmiterea unei cantități cît mai mari de informații în unitatea de timp, calculul casetelor de litere tipografice etc. Pentru aceasta limba este considerată ca un lanț de experiențe, fiecare avînd posibilitatea de a lua diferite rezultate. Esențial este faptul că probabilitățile diverselor rezultate ale fiecărei experiențe depind în mod efectiv de rezultatul experienței precedente. Sîntem deci în cazul unei dependențe de evenimente întîmplătoare, care spunem că formează un lanț Markov, după numele eminentului savant A. A. Markov-tatăl, care a introdus în calculul probabilităților noțiunea de lanț și care a aplicat această noțiune la studiul limbii, pentru a construi un exemplu de astfel de dependență. Acest studiu a devenit clasic mai ales după ce Shanon, inginer și matematician american, a formulat cîteva probleme de bază ale teoriei informației.

Cercetările de lingvistică matematică au o importanță deosebită și pentru însușirea unei limbi și deci implicit pentru pedagogie. Astfel după un studiu statistic al frecvenței de utilizare a cuvintelor în limbă germană s-a constatat că $^3/_4$ din textul german tipărit revine la aproximativ 320 cuvinte.

Dacă ne gîndim că în prezent un obiectiv fundamental al acestui domeniu îl constituie legătura cu problema traducerii sau referirii automate, atunci ne dăm seama de ce în momentul de față cei mai mari specialiști din lume se preocupă de problemele lingvisticii matematice. Problema referirii automate de exemplu, este strîns legată de informarea științifică „la zi" în diversele domenii. Astăzi, apar foarte multe lucrări de specialitate în diverse limbi și pentru o documentare temeinică se impune automatizarea traducerilor, referatelor etc. Numai în domeniul chimiei organice, de exemplu apar zilnic atîtea lucrări, încît ar trebui ca un cercetător să stea 3 zile numai să citească articolele care apar într-o zi.

Și la noi în țară au început să fie abordate unele probleme de lingvistică matematică de un colectiv de matematicieni și lingviști, colectiv condus de acad. Gr. C. Moisil și acad. Al. Rosetti.

4. Chiar și în domeniul medicinii statistica matematică are un rol important. Culegerea și prelucrarea materialului statistic în medicină în prezent se efectuează fără să se utilizeze metodele moderne ale statisticii matematice (de care medicii trebuie să înceapă să se ocupe în mod deosebit) și de aceea ritmul de dezvoltare a științei medicale este încetinit, de aceea în unele lucrări se ajunge la concluzii greșite. Uneori se trag concluzii din studiul cîtorva cazuri care nu sînt concludente, alteori se

utilizează unele elemente de statistică matematică, ca de exemplu valorile medii, dispersia, cînd de fapt ar trebui să intervină în studiul lor procedee mult mai complexe etc. Se știe de exemplu că, pentru diagnosticul bolilor cardiovasculare, care după unele date statistice dau mortalitate mai mare decît cancerul, se utilizează înregistrările unor procese întîmplătoare, la electrocardiograme, fonocardiograme, însă cînd se trece la prelucrarea datelor obținute nu se utilizează metodele statisticii matematice și de aici concluzii uneori neconcordante cu realitatea.

Într-un articol al acad. B. V. Gnedenco se subliniază că situația ideală pentru a putea stabili diagnosticul unei boli de inimă ar fi aceea în care s-ar putea indica o mulțime de simptome A_1, $A_2 \ldots A_n$ care să permită ca pentru orice combinație, a prezenței sau absenței lor, să se stabilească precis una dintre bolile de inimă B_1, $B_2 \ldots B_m$ cu probabilitate foarte apropiată de 1 (cazul sigur). Evident că problema nu constă în determinarea unui complex de simptome pentru fiecare boală de inimă ci și în determinarea probabilităților fiecăreia dintre simptome pentru fiecare boală în parte etc.

O colaborare strînsă și eficientă între statisticieni și medici ar putea duce la diagnosticarea unor boli cu o certitudine suficientă.

Din cele expuse mai sus rezultă cu claritate necesitatea dezvoltării și adîncirii cercetărilor din domeniul statisticii matematice, strîns legate de nevoile economiei noastre naționale. Noi avem o școală de probabilități și statistică, condusă de prof. O. Onicescu și prof. Gh. Mihoc, nu prea numeroasă, dar bine cunoscută în întreaga lume matematică, prin contribuțiile prețioase aduse în dezvoltarea acestor domenii ale matematicii, care va trebui să colaboreze mai intens cu diverse departamente, în vederea rezolvării unor probleme puse de producție și de economie.

Congresul al III-lea orientează cercetarea matematică, printre altele și spre statistica matematică, tocmai datorită eficienței, pe care o are în diversele sectoare de activitate, matematicienii putînd să-și aducă contribuția lor la rezolvarea unor probleme concrete, de mare eficacitate economică, probleme puse de însăși nevoile economiei naționale.

PENTRU CERCURILE DE FIZICĂ

CIRCUITE ELECTROSTATICE ȘI MAGNETICE

Asist. univ. *Dorin Gheorghiu*

Cele două legi ale lui Kirchhoff:

$$\Sigma I_k = 0 \quad \text{și} \quad \Sigma I_k R_k = \Sigma E_k \tag{1}$$

valabile pentru rețeaua electrocinetică, pot fi adaptate și pentru rezolvarea circuitelor electrostatice și magnetice.

A. Pentru o *rețea electrostatică* realizată din grupări de tensiuni electromotoare (t.e.m.) și condensatori, interesează cunoașterea cantităților de electricitate cu care se încarcă condensatorii rețelei, precum și polaritatea acestora, cunoașterea cantităților de electricitate făcînd posibilă și determinarea diferențelor de potențial dintre armăturile condensa-

torilor. Știind că pentru o anumită diferență de potențial — de străpungere — dielectricul devine conductor, iar condensatorul se străpunge, apare ca utilă metoda determinării acestor cantități de electricitate.

Dacă un condensator de capacitate C are între armăturile sale o diferență de potențial U, putem scrie că pe armături sînt înmagazinate cantitățile de electricitate:

$$Q = C\,U.$$

Dacă sursa este o pilă de t.e.m. E, putem scrie o relație asemănătoare:

$$Q = C\,E.$$

Folosind mărimea

$$S = \frac{1}{C}$$

numită *elastanță*, scriem expresia de mai sus sub o formă analoagă legii lui Ohm:

$$Q = \frac{E}{S}.$$

Analogia există, deoarece în regimul tranzitoriu, de la închiderea circuitului pînă la stabilirea regimului de echilibru electrostatic, sarcinile

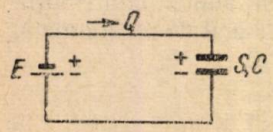


Fig. 1.

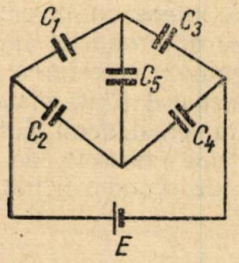


Fig. 2.

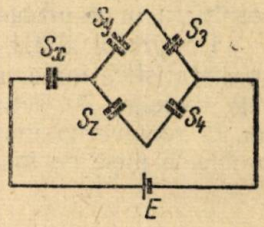


Fig. 3.

Q străbat firele de legătură dintre sursă și condensator creînd curenți electrici (fig. 1). Putem adapta deci legile lui Kirchhoff pentru acest regim sub forma:

$$\Sigma Q_k = 0 \text{ (pentru un nod)},$$

$$\Sigma Q_k S_k = \Sigma E_k \text{ (pentru un ochi de rețea)}. \qquad (2)$$

Considerînd ca exemplu o rețea electrostatică de forma celei din figura 2, determinăm sarcina Q cedată de sursa E calculînd mai întîi capacitatea (elastanța) echivalentă sistemului de cinci condensatori C_1, C_2, C_3, C_4, C_5.

Folosim pentru aceasta metoda transpunerii din triunghi în stea (fig. 3) utilizată în cazul circuitelor electrocinetice, rolul rezistențelor electrice fiind luat acum de elastanțele S.

Vom avea:

$$S_x = \frac{S_1 S_2}{S_1 + S_2 + S_5}; \; Sy = \frac{S_1 S_5}{S_1 + S_2 + S_5}; \; Sz = \frac{S_2 S_3}{S_1 + S_2 + S_5}.$$

Simplificînd încă și mai mult circuitul, obținem pe rînd următoarele scheme echivalente și relațiile corespunzătoare lor (fig. 4, 5, 6):

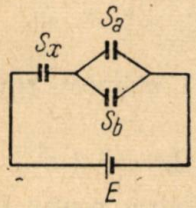


Fig. 4.

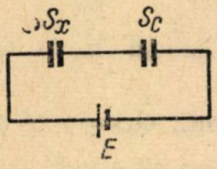


Fig. 5.

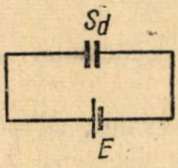


Fig. 6.

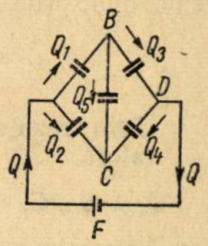


Fig. 7.

$$S_a = S_y + S_3; \quad S_b = S_z + S_4; \quad S_c = \frac{S_a S_b}{S_a + S_b}; \quad S_d = S_x + S_c.$$

Putem găsi prin urmare cantitatea de electricitate

$$Q = \frac{E}{S_d}.$$

Aplicăm acum legile lui Kirchhoff (2) pentru determinarea cantităților de electricitate cu care se încarcă cei cinci condensatori. Alegem pentru aceasta sensuri arbitrare pentru circulația sarcinilor Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q în rețea (fig. 7) și considerăm ca sens de parcurgere al ochiurilor sensul mersului acelor de ceasornic.

Deoarece în tehnică sensul curentului electric se ia ca sens de circulație al sarcinilor pozitive, fiecare condensator se încarcă pozitiv pe armătura care primește sarcina și invers. Spre deosebire de condensator, care este un receptor, pentru un generator polul plus este de ieșire al sarcinii totale Q ce se distribuie armăturilor condensatorilor legați la acest pol.

Pentru nodurile A, B, C, D scriem legea I-a, luînd semnul plus pentru sarcinile care vin în nod și semnul minus pentru cele care părăsesc nodul:

$$\begin{aligned} Q - Q_1 - Q_2 &= 0 \\ Q_1 - Q_3 - Q_5 &= 0 \\ Q_2 + Q_4 + Q_5 &= 0 \\ Q_3 - Q_4 - Q &= 0 \end{aligned}$$

De asemena legea a II-a a lui Kirchhoff pentru ochiurile ABC, BDC, $ABDEA$:

$$\begin{aligned} S_1 Q_1 + S_5 Q_5 - S_2 Q_2 &= 0 \\ S_3 Q_3 + S_4 Q_4 - S_5 Q_5 &= 0 \\ S_1 Q_1 + S_3 Q_3 &= E \end{aligned}$$

Să alegem de exemplu condensatori de 300 V tensiuni de străpungere și de valori:

$$C_1 = 15\,\mu F,\ C_2 = 60\,\mu F,\ C_3 = 40\,\mu F,\ C_4 = 25\,\mu F,\ C_5 = 10\,\mu F,$$

montați conform schemei din figura 2, la o sursă de t.e.m. $E = 600\ V$.

Calculînd mai întîi elastanțele corespunzătoare S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 și făcînd înlocuirile în relațiile deduse mai înainte obținem:

$$S_d = \frac{1}{3} \cdot 10^5\ V/C \quad \text{și} \quad Q = \frac{E}{S_d} = 18\ \text{m}\,C.$$

Prin rezolvarea sistemului de ecuații Kirchhoff obținem șirul de valori:

$$Q_1 = 6\ \text{mC},\ Q_2 = 12\ \text{mC},\ Q_3 = 8\ \text{mC},\ Q_4 = -10\ \text{mC},\ Q_5 = -2\ \text{mC},$$

semnele minus pentru Q_4 și Q_5 arătînd că sensul luat arbitrar pentru Q_4 și Q_5 este în realitate invers. Schema polarizărilor va fi deci aceea din figura 8.

Înlăturînd semnele minus pentru Q_4 și Q_5 obținem:

$$Q = Q_1 + Q_2 = Q_3 + Q_4$$
$$Q_3 = Q_1 + Q_5$$
$$Q_2 = Q_4 + Q_5.$$

În sfîrșit, putem determina și tensiunile care se stabilesc la bornele condensatorilor; din relația $U = QS$, obținem seria de valori:

$$U_1 = 400\ V;\quad U_2 = 200\ V;\quad U_3 = 200\ V;\quad U_4 = 400\ V;\quad U_5 = 200\ V.$$

Se vede deci că cei doi condensatori C_1 și C_4 vor fi străpunși, deoarece rezistă doar la 300 V. Se impune alegerea altor condensatori care să reziste în montaj, cu o tensiune de străpungere de 500 V, de exemplu.

B. *Rețea mixtă electrostatică și electrocinetică.* În această situație încărcarea condensatorilor — regimul tranzitoriu — se face în timp, funcție de rezistențele serie din montaj. Pentru circuitul cel mai simplu — figura 9 — format din sursa de t.e.m. E, un condensator de capacitate C și o rezistență R, după închiderea circuitului, în timpul perioadei tranzitorii de încărcare a condensatorului, sistemul va fi parcurs de un curent electric tranzitoriu de valoare instantanee i.

Conform legii a II-a a lui Kirchhoff:

$$E = Ri + Uc = Ri + \frac{q}{C},$$

curentul electric i încărcînd condensatorul pînă la momentul t cu cantitatea de electricitate q.

Cum $i = \frac{dq}{dt}$, rezultă ecuația diferențială

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{c} = E,$$

care prin integrare, cu condiția inițială $q=0$ pentru $t=0$, conduce la soluția ce ne arată modul de variație în timp a cantității de electricitate care se acumulează pe armăturile condensatorului:

$$q = Q\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right),$$

Q fiind încărcarea finală, $Q = CE$.

Soluția pune în evidență faptul că, funcție de valoarea rezistenței serie R, încărcarea condensatorului necesită un timp, timp în care rețeaua se comportă electrocinetic; după aceasta începe perioada de regim, rețeaua fiind electrostatică, cantitatea de electricitate finală cu care rămîne

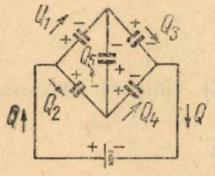


Fig. 8.

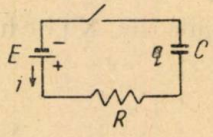


Fig. 9.

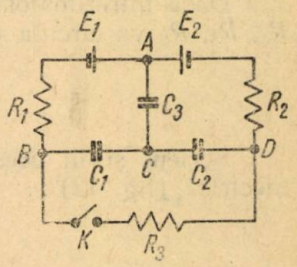


Fig. 10.

încărcat condensatorul nedepinzînd decît de t.e.m. E și de capacitatea C.

Sînt cazuri cînd întreaga rețea electrică poate fi formată simultan din cele două tipuri de rețele, electrocinetică și electrostatică. Figura 10 prezintă o astfel de situație.

Circuitul format din sursele E_1 și E_2 și rezistențele R_1, R_2, R_3 formează circuitul electrocinetic, condensatorii C_1, C_2, C_3 încărcîndu-se cu cantități de electricitate corespunzătoare diferențelor de potențial care se stabilesc între punctele A, B, C, D prin parcurgerea rezistențelor R_1, R_2, R_3 de curentul I debitat de surse.

Rețeaua electrocinetică se supune legilor lui Ohm și Kirchhoff, independent de prezența condensatorilor; rețeaua electrostatică este însă dependentă de diferențele de potențial create de curenții din rețeaua electrocinetică. În acest caz, legile lui Kirchhoff valabile pentru întreaga rețea electrică se scriu:

$$\Sigma Q_k = 0, \quad \Sigma U_k = \Sigma E_k, \tag{3}$$

pentru un ochi de rețea diferențele de potențial U fiind datorite atît rezistențelor ($U = RI$), cît și condensatorilor ($U = SQ$).

Cantitățile de electricitate Q_1, Q_2, Q_3 cu care se încarcă cei trei condensatori și deci diferențele de potențial U_1, U_2, U_3, vor fi dependente, în situația de față, de faptul dacă întrerupătorul K este închis sau deschis. Dacă întrerupătorul K este deschis, totul se reduce — după scurtul regim tranzitoriu — la o rețea electrostatică în care calculăm pe Q_1, Q_2, Q_3 aplicînd legile lui Kirchhoff (2) pentru rețeaua electrostatică (fig. 11):

$$Q_3 - Q_1 - Q_2 = 0$$
$$S_1Q_1 + S_3Q_3 = E_1$$
$$S_2Q_2 + S_3Q_3 = E_2.$$

Dacă avem:

$$C_1 = 0{,}5\ \mu F \qquad R_1 = 5\ \Omega \qquad E_1 = 100\ V$$
$$C_2 = 0{,}5\ \mu F \qquad R_2 = 5\ \Omega \qquad E_2 = 120\ V,$$
$$C_3 = 1\ \mu F \qquad R_3 = 10\ \Omega$$

prin rezolvarea sistemului de mai sus obținem:

$$Q_1 = 22{,}5\ \mu C; \quad Q_2 = 32{,}5\ \mu C; \quad Q_3 = 55\ \mu C$$

și

$$U_1 = 45\ V; \quad U_2 = 65\ V; \quad U_3 = 55\ V.$$

Dacă întrerupătorul K este închis, prin circuitul electrocinetic E_2, E_1, R_1, R_3, R_2 va circula un curent electric permanent de intensitate:

$$I = \frac{E_2 - E_1}{R_1 + R_2 + R_3} = 1\ A.$$

Scriem și în acest caz legile lui Kirchhoff (3) pentru rețeaua electrică (fig. 12):

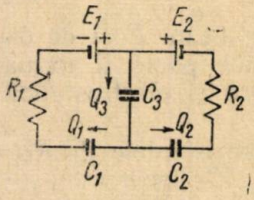


Fig. 11.

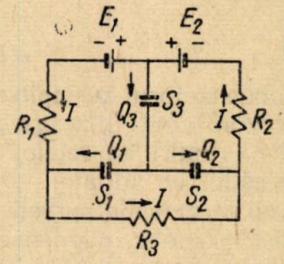


Fig. 12.

$$Q_3 - Q_1 - Q_2 = 0$$
$$S_3Q_3 + S_1Q_1 - R_1I = E_1$$
$$S_3Q_3 + S_2Q_2 + R_2I = E_2.$$

Din rezolvarea sistemului se obține:

$$Q_1 = 25\ \mu C; \quad Q_2 = 30\ \mu C; \quad Q_3 = 55\ \mu C,$$

și

$$U_1 = 50\ V; \quad U_2 = 60\ V; \quad U_3 = 55\ V,$$

rezultate care sînt diferite de cele obținute în cazul K deschis.

C. *Circuite magnetice.* Numeroase aparate electrice întrebuințate în practică conțin o carcasă din fier (fig. 13) pe care sînt înfășurate una sau mai multe bobine străbătute de curenți electrici.

Fluxul creat — în cazul din figura 13 de solenoidul C — este format din linii de forță magnetice închise, canalizate de torul din fier, cu sensul de parcurgere dat de regula burghiului lui Maxwel.

Se formează astfel un circuit magnetic închis străbătut de fluxul Φ, circuit ce conține adesea și un întrefier (A), locul de utilizare al cîmpului magnetic.

Dacă secțiunea întrefierului este S, iar fluxul care o străbate Φ, cîmpul util este:

$$H = \frac{\Phi}{S},$$

calculul reducîndu-se la calculul fluxului Φ care străbate circuitul.

În interiorul unui astfel de circuit magnetic serie, fluxul total se conservă, avînd aceeași valoare prin orice secțiune transversală (neluînd în considerație dispersia). Deoarece secțiunea unui circuit magnetic poate varia de-a lungul lui, inducția magnetică — fiind invers proporțională secțiunii — va avea de asemenea valori diferite pentru diferitele porțiuni.

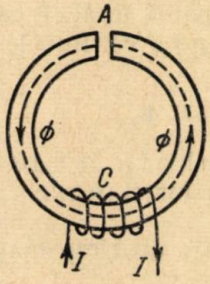


Fig. 13.

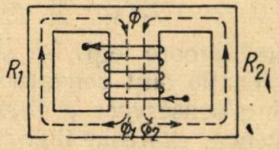


Fig. 14.

Totodată, în limitele fiecărei porțiuni de secțiune constantă, inducția magnetică B cît și intensitatea cîmpului H rămîn constante.

Cum în cazul torului omogen

$$\Phi = BS = \mu HS = \mu \frac{4\pi NI}{l} S$$

rezultă:

$$\Phi = \frac{4\pi NI}{\frac{l}{\mu S}}.$$

Această expresie are o asemănare formală cu aceea a legii lui Ohm pentru un circuit serie închis. Dacă notăm produsul $4\pi NI$ cu F și-l numim *tensiune magnetomotoare* (t.m.m.), iar raportul l S cu $\mathfrak{R}$ și-l numim *reluctanță*, putem scrie:

$$\Phi = \frac{F}{\mathfrak{R}}, \qquad (4)$$

obținînd analogia ca formă și interpretare cu

$$I = \frac{E}{R},$$

pentru circuitul electrocinetic.

Reluctanța $\mathfrak{R}$ are o expresie analoagă celei pentru rezistența electrică,

$$\mathfrak{R} = \frac{l}{\gamma S}$$

rolul conductibilității γ fiind luat de permeabilitate μ.

Tensiunea magnetomotoare F are ca unitate de măsură în sistemul C G S e.m. gilbertul (*Gb*), iar în sistemul *MKSA* o unitate de 10 ori mai mică, decigilbert (*dGb*), ceea ce rezultă din faptul că 1 u.e.m. de intensitate de curent = 10 *A*.

Reluctanța se va măsura atunci (conform relației 4) în sistemul *MKSA* în *dGb/Wb*.

Trebuie să se țină seama totuși că relația (4) nu este liniară, deoarece datorită fenomenului de histerezis nu există directă proporționalitate între fluxul magnetic și intensitatea cîmpului magnetic, rezolvarea circuitelor magnetice fiind dificilă și din cauza dispersiei fluxului. Rezultatele sînt luate prin urmare doar ca ordin de mărime.

Dacă circuitul prezintă o ramificare a fluxului total Φ ca în figura 14 de exemplu, bazîndu-ne pe teorema lui G a u s s că fluxul total printr-o suprafață închisă este zero, obținem :

$$\Sigma\Phi_k = 0 \quad \text{sau} \quad \Phi = \Phi_1 + \Phi_2, \tag{5}$$

o relație asemănătoare legii I-a a lui K i r c h h o f f, în care fluxurile care intră în ramificație sînt considerate pozitive, iar fluxurile care ies negative, existînd o conservare a fluxului.

De asemenea, expresia fluxului Φ creat de un cîmp magnetic

$$\Phi = HS = \frac{4\pi NI}{l} S$$

duce la expresia :

$$Hl = 4\pi NI, \tag{6}$$

produsul Hl fiind numit *tensiune magnetică*, avînd aceleași dimensiuni ca și t.m.m., $F = 4\pi NI$.

Dacă fluxul Φ străbate în circuitul magnetic K porțiuni diferite (fig. 15) și lungimi corespunzătoare l_k, atunci obținem generalizarea expresiei (6) :

$$\Sigma H_k l_k = 4\pi NI, \tag{7}$$

expresie care se poate obține aplicînd teorema circulației a lui Ampère. Relația (7), de mai sus, arată că suma tensiunilor magnetice din lungul unui circuit magnetic este egală cu t.m.m în perfectă analogie cu faptul că t.e.m. este suma tensiunilor electrice de-a lungul unui circuit electric închis. Rezultă o concluzie referitoare la legea a II-a a lui K i r c h h o f f pentru circuitul magnetic :

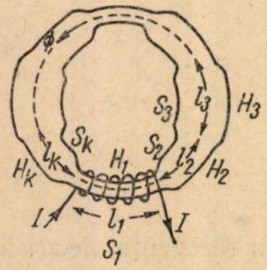


Fig. 15.

$$\Sigma\Phi_k \mathcal{R}_k = \Sigma F. \tag{8}$$

Cum :

$$H_1 = \frac{\Phi}{\mu_1 S_1}, \; H_2 = \frac{\Phi}{\mu_2 S_2} \; \ldots\ldots \; H_k = \frac{\Phi}{\mu_k S_k}$$

(pentru diferitele valori ale cîmpului magnetic H avînd permeabilități μ

corespunzătoare curbei de magnetizare), înlocuind aceste valori ale lui H în expresia (7) obținem:

$$\frac{\Phi}{\mu_1 S_1} l_1 + \frac{\Phi}{\mu_2 S_2} l_2 + \ldots + \frac{\Phi}{\mu_k S_k} l_k = 4\pi NI,$$

care se mai poate scrie și sub forma:

$$\frac{4\pi NI}{\Phi} = \frac{l_1}{\mu_1 S_1} + \ldots\ldots + \frac{l_k}{\mu_k S_k},$$

și duce la relația de compunere a reluctanțelor pentru un circuit magnetic serie:

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \ldots\ldots + \mathcal{R}_k. \qquad (9)$$

Dacă reluctanțele sînt dispuse în derivație, ca în figura 14, avem:

$$\Phi_1 = \frac{F}{\mathcal{R}_1}, \quad \Phi_2 = \frac{F}{\mathcal{R}_2} \quad \text{și} \quad \Phi = \Phi_1 + \Phi_2,$$

adică:

$$\Phi = \frac{F}{\mathcal{R}_1} + \frac{F}{\mathcal{R}_2} = F\left(\frac{1}{\mathcal{R}_1} + \frac{1}{\mathcal{R}_2}\right)$$

și de aici concluzia:

$$\frac{1}{\mathcal{R}} = \frac{1}{\mathcal{R}_1} + \frac{1}{\mathcal{R}_2}, \qquad (10)$$

la fel ca în cazul compunerii rezistențelor electrice.

În concluzie deci, relațiile 5, 7, 8, 9, 10, perfect analoage (formal) cu relațiile corespunzătoare pentru circuitul electric, la care mai trebuie

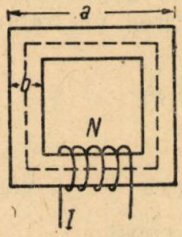


Fig. 16.

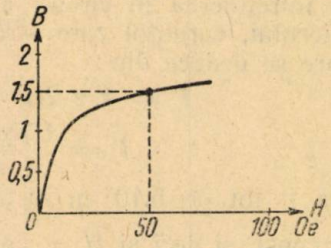


Fig. 17.

adăugată și curba de magnetizare a materialului feromagnetic care formează circuitul, duc la rezolvarea tuturor tipurilor de circuite magnetice utilizate în practică.

Exemplu de calcul.

Un circuit magnetic sub formă de pătrat (fig. 16) cu latura $a = 30$ cm și secțiune pătrată $b^2 = S = 25$ cm^2, are o înfășurare cu $N = 400$ spire parcurse de curentul $I = 10$ A.

Cunoscînd curba de magnetizare (fig. 17) a materialului, putem determina elementele circuitului magnetic:

1. Cîmpul magnetic $H = \frac{F}{l} = \frac{4\pi NI}{l}$, în care $l = 4(a - b)$ este lungimea medie a circuitului magnetic.

În sistemul MKSA vom obține:

$$H = \frac{4 \cdot \pi \cdot 400 \cdot 10}{4(0 \cdot 3 - 0 \cdot 05)} = 5 \cdot 10^4 \text{ m } Oe = 50 \text{ } Oe.$$

2. Din curba de magnetizare, obținem pentru inducția magnetică B valoarea $B = 1{,}5$ T,γ corespunzătoare intensității cîmpului de 50 *Oe*.

3. Permeabilitatea magnetică relativă $\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$ va avea valoarea

$$\mu_r = \frac{B}{\mu_0 H} = \frac{1{,}5}{10^{-7} \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = 300.$$

4. Fluxul în circuit (neglijînd dispersia) este:

$$\Phi = BS = 1{,}5 \cdot 25 \cdot 10^{-4} = 37{,}5 \cdot 10^{-4} \text{ } Wb.$$

Observații. Dacă circuitul magnetic prezintă și un mic întrefier, de lungime $l_a = 1$ mm de exemplu, reluctanța acestei porțiuni de aer din circuitul magnetic va influența mult calculul de mai sus.

Întrefierul cu aer va prezenta o reluctanță pentru 1 mm de lungime:

$$\mathcal{R}_a = \frac{l_a}{\mu_r \mu_0 S} = \frac{10^{-3}}{1 \cdot 10^{-7} \cdot 25 \cdot 10^{-4}} = 4 \cdot 10^6 \frac{dGb}{Wb},$$

iar restul circuitului din fier, de aproximativ 100 cm, în ipoteza întreținerii cu un curent de intensitate I' a aceluiași flux în circuit $\Phi = 37.5.10^{-4}$ *Wb:*

$$R_f = \frac{l_f}{\mu_r \mu_0 S} \simeq \frac{1}{3 \cdot 10^2 \cdot 10^{-7} \cdot 25 \cdot 10^{-4}} = 13{,}3 \cdot 10^6 \frac{dGb}{Wb}.$$

Se observă deci marea reluctanță pe care întrefierul o introduce în circuit.

Pentru întreținerea în circuit a unui flux de aceeași valoare ca în lipsa întrefierului, curentul care străbate înfășurarea va trebui să fie de valoarea care se deduce din:

$$F = 4 \pi NI' = H_f l_f + H_a l_a$$

$$I' = \frac{H_f l_f + H_a l_a}{4\pi N},$$

unde H_f va fi tot de 5.10^4 m *Oe*, deoarece pentru Φ = const. rezultă $B = \frac{\Phi}{S}$ = const. și deci și H = const. și μ_r = const.

Pentru cîmpul magnetic din aer rezultă atunci valoarea

$$H_a = \frac{B}{\mu_0} = 1{,}5 \cdot 10^7 \text{ m} Oe$$

și prin urmare:

$$I' = \frac{5 \cdot 10^4 \cdot 1 + 1{,}5 \cdot 10^7 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot \pi \cdot 400} \simeq 13 \text{ } A,$$

un întrefier de numai 1 mm. necesitînd o creștere cu 3,4 a intensității curentului și deci a f.m.m. F tot de 3 ori.

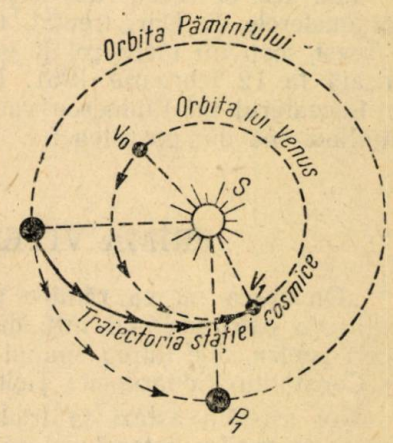
DRUM SPRE LUCEAFĂR

de ALEXANDRU STOENESCU

Un nou și strălucitor succes al științei și tehnicii sovietice în cosmonautică îl constituie lansarea la 12 februarie 1961, a unui satelit greu al Pămîntului și desprinderea de pe acest satelit a unei stații interplanetare automate, precum și dirijarea ei către planeta Venus. Pentru prima oară omul reușește să trimită un sol altei planete și să culeagă direct date din timpul călătoriei cosmice, precum și asupra unei planete a sistemului solar.

În greutate de 643,5 kg stația interplanetară este dotată cu aparatură necesară pentru determinarea coordonatelor ei, precum și transmiterii pe Pămînt, la o comandă dată de pe Pămînt, a măsurătorilor făcute asupra razelor cosmice, a cîmpurilor magnetice, a ciocnirilor cu meteoriți etc.

În schița alăturată sînt arătate orbitele Pămîntului și ale planetei Venus în jurul soarelui S, poziția lor P_0 și V_0 la 12 februarie 1961, precum și poziția lor P_1 și V_1 la 15—31 mai 1961, cînd stația se va apropia cel mai mult de Venus. Unghiul P_0SV_0 la lansare a fost de 35°; unghiul P_0SP_1 va fi de circa 91°—106°, iar unghiul V_0SV_1 de circa 147°—173°. Distanțele medii sînt $P_0S = 150\,000\,000$ km și $V_0S = 108\,000\,000$ km. Durata călătoriei stației interplanetare va fi de circa 92—108 zile terestre.



Menționăm în plus faptul deosebit de important că, pentru prima oară în cosmonautică, lansarea stației interplanetare nu s-a făcut direct de pe Pămînt, ci de pe platforma unui satelit greu al Pămîntului, cu ajutorul unei rachete cosmice speciale, diferită de trenul de rachete care a plasat pe orbită acest satelit.

Realizarea unei asemenea lansări arată că știința și tehnica sovietică au reușit să rezolve cu succes, cele mai dificile probleme ale rachetelor și să obțină aparate de dirijare și control de o precizie uimitoare.

Și acum, cîteva date despre planeta Venus, cea mai puțin cunoscută și deci, cea mai misterioasă planetă a sistemului nostru solar.

Venus este cel mai strălucitor astru din nopțile fără Lună. Cunoscută și iubită de ciobanii noștri sub denumirea de „steaua păstorului", Venus preîntîmpină în anumite zile răsăritul Soarelui și devine „luceafărul dimineții". În alte zile, Venus rămîne în urma Soarelui și strălucește puternic imediat după apusul lui; atunci capătă denumirea „luceafărul de seară" și este steaua de seară a marinarilor și inspiratoarea plină de farmec a poeților și compozitorilor. Acest astru al nopții și singurătății a fost mult îndrăgit de marele nostru poet Mihail Eminescu, care i-a închinat cea mai frumoasă dintre poeziile sale „Luceafărul". Venus este cea mai apropiată vecină a noastră putînd ajunge la numai circa 40 000 000 km depărtare.

Comparativ cu celelalte planete, din punct de vedere al dimensiunilor, volumului și masei, planeta Venus seamănă cel mai mult cu Pămîntul. Diametrul său este de circa 12 400 km cu vreo 200 km mai mic decît al Pămîntului, volumul său este de 0,9 din cel al Pămîntului, iar masa sa 0,8 din cea a Pămîntului.

Anul pe Venus cuprinde aproximativ 225 de zile.

Suprafața planetei este tot timpul acoperită de o perdea groasă de nori formînd o atmosferă densă (descoperită de marele învățat Lomonosov în 1761). Din cauza acestei atmosfere se cunosc foarte puține lucruri despre planeta Venus; nu se știe precis, dacă există apă pe planetă, nu i se cunoaște temperatura, relieful etc. și nici nu avem date precise asupra rotației proprii a planetei. O problemă care a rămas de asemenea nerezolvată este problema vieții pe Venus. Din anumite ipoteze, neconfirmate încă științific, condițiile de viață pe planetă ar fi destul de grele, întrucît Venus ar arăta o aceeași emisferă către Soare (ca și Luna față de noi); de aici ar rezulta că pe Venus nu există alternanța zi-noapte, ci sau zi eternă cu temperatură foarte ridicată sau noapte eterneă cu temperatură scăzută.

În lunetă, Venus prezintă faze ca și Mercur, putînd apare sub forma unei secere sau a unui corn subțire luminos.

Iată deci pe scurt, cum se prezintă planeta Venus și cît de numeroase sînt misterele ei. Dar, treptat, treptat, aceste mistere se vor dezvălui și în acest scop un mare rol îl joacă acum, stația interplanetară sovietică lansată la 12 februarie 1961. În curînd, toate tainele se vor spulbera, iar Luceafărul lui Eminescu va străluci mai departe și va aștepta vizita Cătălinei cea din povestea lui.

PRIMA VITEZĂ ASTRONAUTICĂ

„Omenirea nu va rămîne pe Pămînt, ci în goană după lumină și spațiu va pătrunde mai întîi dincolo de limitele atmosferei, iar apoi va cuceri pentru sine întreg spațiul sistemului solar" — scria marele savant rus Constantin Eduardovici Țiolkovski.

Noi asistăm astăzi la traducerea în fapt a cuvintelor fondatorului științei zborurilor interplanetare. Cucerirea spațiului cosmic s-a început. După lansarea sateliților artificiali ai Pămîntului, savanții și inginerii sovietici au lansat prima planetă artificială, au trimis o rachetă în lună și au obligat cea de a treia rachetă cosmică sovietică să înconjoare Luna, iar de curînd o stațiune interplanetară a fost trimisă spre planeta Venus.

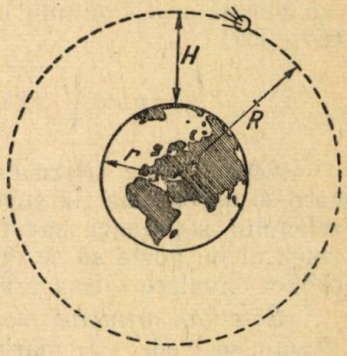
În cele ce urmează vom încerca să lămurim de ce un satelit artificial nu cade pe Pămînt, deși după cum știm toate corpurile ridicate deasupra Pămîntului, sub acțiunea forței de atracție a acestuia, cad îndărăt. Cauza constă în viteza enormă, aproximativ 8 km pe secundă, care se comunică satelitului de către racheta cu mai multe trepte care îl plasează pe orbită.

Căpătînd această viteză, un corp nu mai poate să cadă pe Pămînt și se transformă într-un satelit artificial al său. Forța de atracție a Pămîntului îi curbează doar traiectoria, obligîndu-l să descrie o elipsă închisă în jurul planetei noastre.

În particular, orbita satelitului poate fi un cerc cu centrul în centrul Pământului. Să deducem formula vitezei satelitului pe o astfel de orbită, adică așa numită *viteză astronautică* sau *circulară*.

Satelitul este reținut pe orbita circulară de o forță centripetă care în acest caz este forța de atracție a Pământului. Dacă notăm masa satelitului cu m, viteza cu v, iar raza orbitei sale cu R, mărimea forței centripete F se va găsi după cum știm din formula

$$F = m\frac{v^2}{R}.$$



Pe de altă parte conform legii atracției universale aceeași forță este egală cu

$$F = k\frac{mM}{R^2},$$

unde M este masa Pământului iar k este așa numită constantă a gravitației. Prin urmare:

$$m = \frac{v^2}{R} = k\frac{mM}{R^2}.$$

De aici se deduce mărimea vitezei circulare:

$$v = \sqrt{\frac{kM}{R}}.$$

Dacă înălțimea orbitei satelitului deasupra suprafeței Pământului este egală cu H, iar raza Pământului egală cu r (v. figura) avem:

$$v = \sqrt{\frac{kM}{r+H}}.$$

Pentru ușurința calculelor formula obținută poate fi transformată. Să ne amintim că pe suprafața Pământului forța de atracție este egală cu mg. Din legea atracției universale avem:

$$mg = k\frac{mM}{r^2},$$

de unde

$$kM = gr^2.$$

Prin urmare, obținem pentru viteza circulară la înălțimea H deasupra Pământului următoarea formulă:

$$v = \sqrt{\frac{gr^2}{r+H}}$$

sau:

$$v = r\sqrt{\frac{g}{r+H}}.$$

Trebuie ținut seama că în această formulă g este accelerația gravitației la suprafața Pământului.

Dacă înălțimea H a orbitei nu este mare în raport cu raza Pămîntului r se poate lua aproximativ $H \approx 0$; atunci formula vitezei circulare se simplifică:

$$v = r\sqrt{\frac{g}{r}} \quad \text{sau} \quad v = \sqrt{rg}.$$

Dacă în ultima formulă înlocuim $g = 9{,}81$ m/s^2, $r = 6378$ km (raza ecuatorială a Pămîntului), găsim așa-numita primă viteză astronautică (cosmică):

$$v = \sqrt{9{,}81 \cdot 10^{-3} \frac{km}{s^2} \, 6378 \, km} = 7{,}9 \frac{km}{s}.$$

Aceasta este viteza care trebuie să fie atinsă de un satelit artificial care se mișcă chiar la suprafața Pămîntului. În realitate, desigur, datorită reliefului suprafeței terestre și mai ales datorită rezistenței atmosferei, satelitul nu poate să se miște pe o astfel de orbită. Cu creșterea înălțimii orbitei circulare viteza orbitală scade.

Satelitul artificial staționar. Din formula vitezei circulare a satelitului se vede că mărimea vitezei circulare și prin urmare durata unei rotații a satelitului în jurul Pămîntului variază cu altitudinea de zbor. Evident, la o anumită înălțime rotația satelitului se va efectua exact în 24 de ore. Dacă în afară de aceasta un astfel de satelit se va mișca în planul ecuatorului de la apus spre răsărit, viteza sa unghiulară va fi egală cu viteza unghiulară de rotație a Pămîntului în jurul axei sale și deci, el va apare fix deasupra unui punct oarecare al ecuatorului. Un astfel de satelit se numește *staționar*. Să determinăm viteza unui satelit staționar.

Perioada T a unei rotații a unui satelit care se mișcă pe o orbită circulară este egală cu raportul dintre lungimea circomferenței $2\pi (r + H)$ și viteza circulară $v_c = r\sqrt{\frac{g}{r+H}}$

$$T = \frac{2\pi (r+H)}{r\sqrt{\frac{g}{r+H}}}.$$

Din această ecuație se poate exprima altitudinea H prin celelalte mărimi T, r, g

$$\frac{T \cdot r\sqrt{g}}{2\pi} = (r + H)\sqrt{r+H}.$$

Făcînd să dispară radicalii obținem:

$$(r + H)^3 = \frac{T^2 r^2 g}{4\pi^2}.$$

Extrăgînd rădăcina cubică din ambii membri, avem:

$$H = \sqrt[3]{\frac{T^2 r^2 g}{4\pi^2}} - r.$$

Pentru un satelit staționar durata unei rotații în jurul Pământului trebuie să fie egală cu o zi siderală, adică 23 ore 56 minute 4 secunde sau 86 164 secunde. În expresia lui H să înlocuim valorile $T = 86\,164$ s, $r = 6\,378\,000$ m (raza ecuatorială a Pământului), $g = 9{,}81$ m/s^2) accelerația gravitației terestre:

$$H = \sqrt[3]{\frac{(86\,164\text{ s})^3 \cdot (6378\text{ km})^2 \cdot 9{,}81 \cdot 10^{-3}\text{ km/s}^2}{4\pi^2}} - 6378\text{ km} \approx 35\,800\text{ km}.$$

Știind altitudinea de zbor $H = 35\,800$ km și ținînd seama că $r + H \approx 42\,200$ km se calculează ușor viteza circulară:

$$v_c = r\sqrt{\frac{g}{r+H}} = 6378\text{ km}\sqrt{\frac{9{,}81 \cdot 10^{-3}\text{ km/s}^2}{42200\text{ km}}} \approx 3{,}1\text{ km/s}.$$

Așadar, satelitul artificial care se mișcă pe orbită circulară deasupra ecuatorului de la apus spre răsărit, la înălțimea de 35 800 km cu viteza circulară $v_c = 3{,}1$ km/s se va găsi tot timpul deasupra aceluiași punct de pe ecuator. Un astfel de satelit poate fi observat simultan de pe o porțiune imensă a globului terestru; pentru fiecare punct satelitul se va vedea mereu în același punct al cerului. Natural că și invers, întreg acest teritoriu se va găsi în cîmpul de vedere al unui observator care se găsește pe satelitul artificial.

Fixitatea satelitului staționar față de suprafața terestră și raza enormă de vizibilitate de pe el, au generat nenumărate proiecte de folosire a acestuia ca stație de retransmisie pentru emisiunile de televiziune.

(prelucrare din limba rusă)

NOTE MATEMATICE

ASUPRA UNOR PROBLEME DE DIVIZIBILITATE

În cele de mai jos vom generaliza cîteva probleme de divizibilitate din Gazeta Matematică și Fizică seria B.

1. *Dacă $n+p+2$ este pătratul unui număr întreg mai mare ca p, expresia*

$$E = \frac{(n-p^2+p+2)(n-p^2+3p+1)(n-p^2+5p-2)\ldots(n+p+1)\sqrt{n+p+2}}{(2p+1)!} \quad (1)$$

este un număr întreg, oricare ar fi n întreg și pozitiv.

Soluție: Într-adevăr, notînd

$$n + p + 2 = k^2, \quad \text{unde } k > p$$

expresia (1) devine:

$$E = \frac{(k^2-p^2)\,[k^2-(p-1)^2]\,[k^2-(p-2)^2]\ldots\ldots(k^2-1)\,k}{(2p+1)\,!}$$

sau :

$$E = \frac{(k-p)[k-(p-1)][k-(p-2)]\ldots(k-1)k(k+1)\ldots}{(2p+1)!} \quad (2)$$
$$\underline{\ldots[k+(p-2)][k+(p-1)](k+p)} =$$

= întreg, căci produsul a „$2p+1$" numere întregi consecutive se divide cu $(2p+1)$!

Observații : a. În cazul cînd p și n sînt pari ; sau cînd p e impar și n este par, expresia :

$$E_1 = \frac{(n-p^2+p+2)(n-p^2+3p+1)\ldots\sqrt{n+p+2}}{(2p+2)!} \quad (3)$$

este un număr întreg.

Într-adevăr, cînd p și n sînt pari $k^2 = n+p+2$ e par, deci $k = p+2l > p$, unde ($l = 1, 2, 3, \ldots$) e par și obținem :

$$(n-p^2+p+2)\ldots\sqrt{n+p+2} = (k-p)[k-(p-1)]\ldots(k-1)k(k+1)\ldots$$
$$\ldots[k+(p-1)](k+p) = 2l(2l+1)\ldots(p+2l-1)(p+2l)(p+2l+1)\ldots$$
$$\ldots(2p+2l-1)(2p+2l) = \mathfrak{M}(2p+2)!$$

căci este produsul a „$2p+2$" numere întregi consecutive. Deci E_1 este întreg.

Cînd p este impar și n e par, $k^2 = n+p+2$ e impar, deci $k = p+2l > p$, ($l = 1, 2, 3, \ldots$) rezultînd ca mai sus E_1 = întreg. $E_1 > p$ ($l = 1, 2, 3, \ldots$) .

b) În cazul cînd p este impar, iar n impar sau par, obținem o generalizare a problemei 2425 din G.M.F. seria B, 12—1956, enunțînd astfel :

„Să se arate că dacă $n+p+2$ este patratul unui număr întreg mai mare ca p impar, expresia :

(4) $E_2 = (n-p^2+p+2)(n-p^2+3p+1)(n-p^2+5p-2)\ldots(n+p+1)\sqrt{n+p+2}$ se *divide exact prin $(2p+1)!$ cînd n e impar și prin $(2p+2)!$ cînd n e par.* Demonstrația se face exact ca mai sus. În cazul particular cînd $p = 3$ rezultă chiar problema 2425 propusă de C. Ionescu-Țiu.

c) Cînd $n+p+2 = n^2$ expresia (1) devine :

$$E = \frac{(n-p)[n-(p-1)]\ldots(n-1)n(n+1)\ldots[n+(p-1)](n+p)}{(2p+1)!} =$$
$$= \frac{(n^2-p^2)[n^2-(p-1)^2]\ldots\ldots(n^2-1)n}{(2p+1)!} = \frac{n\,P_{2p}(n)}{(2p+1)!}$$

Punînd $n^2 = x$ obținem :

$$E = \frac{(x-p^2)[x-(p-1)^2]\ldots(x-1)\sqrt{x}}{(2p+1)!} = \sqrt{x}\,\frac{P_p(x)}{(2p+1)!} =$$
$$= \sqrt{x}\,\frac{x^p + a_1x^{p-1} + a_2x^{p-2} + \ldots\ldots + a_{p-1}x + a_p}{(2p+1)!}$$

sau

$$E = n\,\frac{n^{2p} + a_1 n^{2p-2} + a_2 n^{2p-4} + \ldots + a_{p-1} n^2 + a_p}{(2p+1)!}$$

unde

$$a_1 = -\sum_1^p x_i = -\sum_1^p p^2 = -\frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$$

$$a_2 = \sum_{i \neq j = 1}^{p} x_1 x_j = \frac{1}{2}\left[(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_p)^2 - (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_p^2)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + p^2)^2 - (1 + 2^4 + 3^4 + \ldots + p^4)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{p^2 (p+1)^2 (2p+1)^2}{36} - \frac{1}{30} p (p+1)(2p+1)(3p^2 + 3p - 1)\right]$$

Calculînd, rezultă

$$a_2 = \frac{(2p-2)(2p-1)\,2p\,(2p+1)(5p+6)(p+1)}{1440},$$

iar

$$a_3 = -\sum_{i \neq j \neq x = 1}^{p} x_i x_k x_k$$

$$a_p = x_1 x_2 x_3 \ldots\ldots x_p = 1 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \ldots p^2 = (p!)^2$$

Deci (1) devine:

$$E = \frac{n^{2p+1}}{(2p+1)!} - k_1 \frac{n^{2p-1}}{(2p-1)!} + k_3 \frac{n^{2p-3}}{(2p-3)!} - k_5 \frac{n^{2p-5}}{(2p-5)!} +$$

$$+ \ldots - k_{2p-3} \frac{n^3}{3!} + k_{2p-1}\, n = \text{întreg, unde } k_j \text{ se deduc din coeficienții}$$

de mai sus. Aceasta constituie o generalizare a problemei 3690 din G.M.F.-B nr. 6-1959.

Cînd $p = 2$. și cum $(-k)!$ n-are sens, rezultă:

$E = \frac{n^5}{5!} - k_1 \frac{n^3}{3!} + k_3 \frac{n}{1!}$ unde, pentru cazul general:

$$-k_1 = \frac{a_1}{2p(2p+1)} = -\frac{p(p+1)(2p+1)}{6 \cdot 2p(2p+1)} = -\frac{p+1}{12}$$

$$k_3 = \frac{a_3}{(2p-2)(2p-1)\,2p\,(2p+1)} = \frac{(5p+6)(p+1)}{1440}$$

Pentru $p = 2$ avem $= k_1 = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$, $k_3 = \frac{16 \cdot 3}{1440} = \frac{1}{30}$

Deci :

$E = \frac{n^5}{120} - \frac{n^3}{4 \cdot 6} + \frac{n}{30} =$ întreg, adică tocmai problema 3690, din G.M.F.-B nr. 6/1959.

2. *Dacă 3 numere întregi a, b, c satisfac relația* $ab = \mathfrak{M}c$, *atunci avem :*

$$N_1 = (a + c)^n - (a + b)^n + b^n = \mathfrak{M}.c. \quad (5)$$

$$N_2 = (a - b)^{2n+1} + (c - a)^{2n+1} + b^{2n+1} = \mathfrak{M}.c. \quad (6)$$

n fiind un număr întreg.

Soluție. Într-adevăr, ținînd seama de regula binomului lui Newton, avem :

$$N_1 = a^n + C_n^1 a^{n-1} \cdot c + C_n^2 a^{n-2} c^2 + \ldots + C_n^{n-1} c^{n-1} \cdot a + c^n - a^n - C_n^1 a^{n-1} b -$$

$$\ldots - C_n^{n-1} a b^{n-1} - b^n + b^n = \mathfrak{M}.c.$$

Căci $ab = \mathfrak{M}.c$.

La fel :

$$N_2 = a^{2n+1} - C_{2n+1}^1 a^{2n} b + C_{2n+1}^2 a^{2n-1} b^2 - \ldots + C_{2n+1}^{2n} a b^{2n} - b^{2n+1} + C^{2n+1} -$$

$$- C_{2n+1}^1 c^{2n} a - \ldots + C_{2n+1}^{2n} c a^{2n} - a^{2n+1} + b^{2n+1} = \mathfrak{M}.c,$$ căci $ab = \mathfrak{M}.c$.

Cazuri particulare :

a) Dacă $a = 735$, $b = 10\,152$, $c = 26\,460$ și $n = 8$, obținem din relația (5)

$$27195^8 - 10887^8 + 10152^8 = \mathfrak{M}.\ 26460$$

problema 1583 din G.M.F.-B nr. 3/1955.

b) Dacă $a = 361$, $b = 189$, $c = 57$, relația (5) devine

$$418^n - 550^n + 189^n = \mathfrak{M}.\ 57$$ căci evident

$$ab = 361 \cdot 189 = 19^2 \cdot 3 \cdot 63 = \mathfrak{M}.\ 57.$$

Mai putem scrie și :

$$418^n - 550^n + (2 \cdot 57 + 75)^n = \mathfrak{M}.\ 57$$ sau

$$418^n - 550^n + 75^n = \mathfrak{M}.\ 57.$$

Deci și $550^n - 75^n - 418^n = \mathfrak{M}.\ 57$ tocmai problema 2400 din G.M.F. seria B nr. 11. 1956.

c) Pentru $a = 14$, $b = 9$, $c = 21$, evident $ab = \mathfrak{M}.21$, relația (6) devine :

$$(14 - 9)^{2n+1} + (21 - 14)^{2n+1} + 9^{2n+1} = \mathfrak{M}.\ 21$$

sau

$$5^{2n+1} + 7^{2n+1} + 9^{2n+1} = \mathfrak{M}.\ 21$$

tocmai problema 3421 din G.M.F. seria B nr. 11. 1958.

3. *Să se arate că dacă* $m = \mathfrak{M}.\, ab$; $2n + 1 = \mathfrak{M}.\, a^2b$ *atunci expresia:* $E = m^{2n} + (2n)^m + 1$ *este divizibilă cu* $a^2\, b$; m, n, a *și* b *fiind întregi și pozitivi.*

Soluție: Într-adevăr, avem:

$$E = (\mathfrak{M}.\, ab)^{2n} + (\mathfrak{M}.\, a^2b - 1)^m + 1 = \mathfrak{M}.\, a^2b \tag{7}$$

evident ținînd seama de dezvoltarea binomului lui Newton.

Caz particular.

Pentru $a=3$, $b=7$ și $m=713 \cdot 3 \cdot 7 - 14973$, $2n+1=185 \cdot 3^2 \cdot 7=11655$ rezultă

$$E = 14973^{11654} + 11654^{14973} + 1 = \mathfrak{M}.\, 3^2 \cdot 7 = \mathfrak{M}.\, 63$$

adică tocmai problema 2741 din G.M.F.-B nr. 8. 1957.

4. *Să se arate că expresia:*

$$E = 1 + m^p + m^{2p} + \ldots + m^{(n-1)\,p} \tag{8}$$

se divide cu $m^n - 1$ *dacă* $p = nk \pm q$; $(q = 1, 2, 3, \ldots, n - 1)$

Soluție: Într-adevăr: avem:

$$1 + m^p + m^{2p} + \ldots + m^{(n-1)p} = \frac{(m^p)^n - 1}{m^p - 1} =$$

$$\frac{[(m^m - 1) + 1]^p - 1}{m^p - 1} = \frac{\mathfrak{M}.\, (m^m - 1)}{m^p - 1}$$

Pentru $p = nk$, avem $m^p - 1 = m^{nk} - 1 = \mathfrak{M}\, (m^n - 1)$. Deci expresia se divide cu $m^n - 1$, cînd $p \neq nk$, adică $p = nk \pm q$, $q = 1, 2, 3, \ldots, n - 1$.

Observație: Pentru $m = 3$, $n = 3$, obținem problema 1502 din G.M.F.-B. nr. 1/1955.

5. *Să se arate că numărul:*

$$N = [q(m^n - 1) - m^p]\, m^{nk-p} + 1 \tag{9}$$

este divizibil cu $m^n - 1$; $m^n - 1$ *fiind prim cu* m.

Soluție: Numărul m^p fiind prim cu $m^n - 1$ condițiile de divizibilitate nu se schimbă dacă înmulțim expresia cu m^p, adică

$$N_1 = [q(m^n - 1) - m^p]\, m^{nk} + m^p = [q(m^n - 1) - m^p] \cdot$$

$$\cdot [(m^n - 1) + 1]^k + m^p = [q(m^n - 1) - m^p]\, [\mathfrak{M}.\, (m^n - 1) + 1] + m^p =$$

$$= \mathfrak{M}.\, (m^n - 1) - m^p + m^p = \mathfrak{M}.\, (m^n - 1)$$

Observație: Cînd $m = 3$, $n = 3$, $p = 1$, obținem

$$N = (26q - 3) \cdot 3^{3k-1} + 1$$

adică problema 1812 din G.M.F.-B nr. 9/1955.

6. *Să ce arate că expresia:*

$$E = (a+x)^n - anx^{n-1} - x^n \tag{10}$$

e divizibilă cu a^2 *(problema 2291 din G.M.F. nr. 8. 1956).*

Soluție: Dezvoltînd după regula binomului avem:

$$E = a^n + nax^{n-1} + \mathfrak{M}a^2 + x^n - anx^{n-1} - x^n = \mathfrak{M}.\ a^2$$

Observații:

a. Pentru $x = 1$, și notînd $a + 1 = y$ rezultă din (10):

$$E = y^n - (y - 1)\,n - 1 = \mathfrak{M}.\ (y - 1)^2 \qquad (11)$$

adică tocmai problema 2708 din G.M.F. seria B n. 7. 1957.

b) Evident și pentru $n+1$.

$$E = y^{n+1} - (y - 1)\,(n + 1) - 1\,;\ \mathfrak{M}.\ (y - 1)^2$$

Punînd $y = 9$ rezultă:

$$E = 9^{n+1} \quad 8\,(n + 1) - 1, \quad \text{sau}$$

$E = 3^{2n+2} - 8n - 9 = \mathfrak{M}.\ 64$, adică tocmai problema 2060 din G.M.F. seria B nr. 3. 1956.

3. Punînd în (10) $x = 1$, $y = 3$, rezultă:

$E = 4^n - 3n - 1 = \mathfrak{M}.\ 9$ evident și

$E = 4^n - 3n - 1 + 18n = \mathfrak{M}.\ 9$ adică

$E = 4^n + 15n - 1 = \mathfrak{M}.\ 9$ problema 2240 din G. M. F. seria B nr. 6. 1956.

7. Vom considera problema 3320 din G.M.F.-B nr. 8/1958, adică să *se arate că polinomul:*

$$P(x) = np(n-p)x^4 + pm(p-m)x^4 + mn(m-n)x^p + (m-n)\,(n-p)\,(p-m) = \mathfrak{M}.\ (x-1)^3 \qquad (12)$$

Soluție: Notînd $x = y + 1$, trebuie arătat că $P(x) = P(y + 1)$ se divide cu y^3. Într-adevăr coeficientul lui y^2 este:

$$np\,(n - p)\,C_m^2 + pm\,(p - m)\,C_m^2 + mn\,(m - n)\,C_p^2 =$$

$$= \frac{mnp}{2}\,[(n - p)\,(m - 1) + (p - m)\,(n - 1) + (m - n)\,(p - 1)] = 0$$

Coeficientul lui y:

$$\sum np\,(n - p)C_m^1 = mnp\,(n - p + p - m + m - n) = 0$$

iar termenul liber este:

$\sum np\,(n - p)\,C_m^0 + (m - n)\,(n - p)\,(p - m) =$ o identitate cunoscută.

Deci:

$$P\,(y + 1) = \mathfrak{M}.\ y^3 \quad \text{sau} \quad P\,(x) = \mathfrak{M}.\ (x - 1)^3$$

Observație: Pentru $m = 101$, $n = 100$, $p = 1$, relația (12) devine:

$$P(x) = 100 \cdot 99 \cdot x^{101} - 101 \cdot 100 \cdot x^{100} + 101 \cdot 100x - 99 \cdot 100 = \mathfrak{M}.\ (x - 1)^3$$

evident și

$$99x^{101} - 101 \cdot x^{100} + 101x - 99 = \mathfrak{M}\ (x - 1)^3$$

sau

$$99(x^{101} - 1) - 101x\,(x^{99} - 1) = \mathfrak{M}.\ (x - 1)^3$$

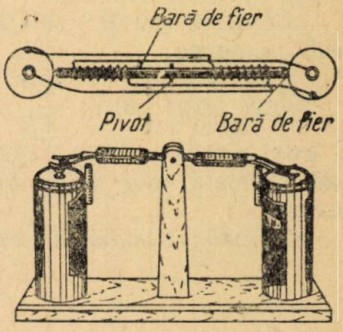
adică problema 2844 din G.M.F.-B nr. 11/1957.

Paul Popescu student an V, Fac. Electronică București

CEL MAI SIMPLU MOTOR ELECTRIC

Cu două baterii uscate, o bucată de fier și două bobine cu cîte 50 spire de sîrmă de sonerie, puteți construi un „motor electric oscilant".

Capetele bobinei din dreapta sînt conduse, după cum arată schema alăturată, la bornele bateriei uscate din stînga, în timp ce capetele bobinei din stînga fac contact, în același fel, cu bornele bateriei din dreapta Cîte un cui de fier este fixat vertical pe capetele fiecărei baterii, direct sub bara de fier pe care sînt fixate bobinele și care oscilează în jurul unui pivot.



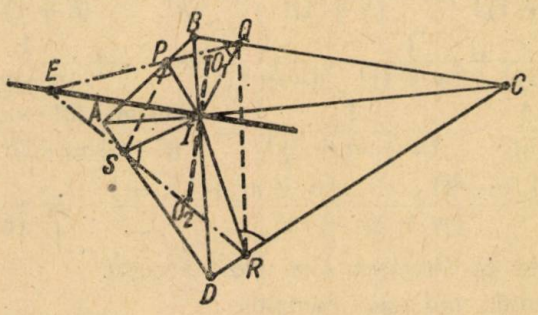
Cînd capetele bobinei din dreapta fac contact cu bornele bateriei din stînga, bobina mangetizează cuiul de fier astfel că extremitatea din dreapta a barei de fier este atrasă de cuiul de fier. Prin această mișcare se rupe contactul cu bateria din stînga și în același timp, firele din dreapta ating bornele bateriei și bobina din stînga devine activă, cu rezultatul că este atras capătul din stînga al barei de fier. Dispozitivul funcționează astfel fără încetare pînă la epuizarea bateriilor.

V. A.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 4178

Fie I intersecția diagonalelor AC, BD ale patrulaterului ortodiagonal ABCD și P, Q, R, S proiecțiile oblice de unghi α și de același sens ale lui I pe AB, BC, CD, DA. Notînd cu E intersecția laturilor PQ, RS



să se demonstreze că EI este perpendiculară pe linia O_1O_2 a centrelor cercurilor circumscrise patrulaterelor IPBQ și IRDS.

Gh. Buicliu

Soluție dată de *D. Ene*, elev Ploești. Avem : $\sphericalangle ASI = 180° - \alpha = 180° - \sphericalangle API$. Patrulaterul $APIS$ este inscriptibil.

La fel se arată că și patrulaterele $BPIQ$, $CQIR$, $DRIS$ sînt inscriptibile așa că putem scrie :

$\sphericalangle SPI = \sphericalangle SAI$; $\sphericalangle QPI = \sphericalangle QBI$; $\sphericalangle QRI = \sphericalangle QCI$ și $\sphericalangle SRI = \sphericalangle SDI$.

Dar, $\sphericalangle SAI + \sphericalangle SDI = 90°$ și $\sphericalangle QBI + \sphericalangle QCI = 90°$, de unde rezultă $\sphericalangle SPI + \sphericalangle QPI + \sphericalangle QRI + \sphericalangle SRI = 180°$ și deci, patrulaterul $PQRS$ este inscriptibil.

În acest caz PS și QR fiind antiparalele triunghiurile ESP și EQR sînt asemenea.

Vom avea deci : $\frac{EP}{ER} = \frac{ES}{EQ}$ sau $EP \cdot EQ = ER \cdot ES$, rezultă că E este așezat pe axa radicală a cercurilor de centre O_1 și O_2. Această axă radicală este chiar EI fiindcă I este un punct comun celor două cercuri.

Ca axă radicală EI este perpendicuară pe axa centrelor O_1O_2.

Problema 4183

Să se demonstreze identitatea :

$$\frac{n}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+2)!} + \ldots + \frac{n+m}{(n+m+1)!} = \frac{A_{n+m+1}^{m+1} - 1}{(n+m+1)!}$$

unde A_p^q *e simbolul aranjamentelor de* p *obiecte luate cîte* q.

M. Florescu, București

Soluție dată de *Șerban Strătilă*, elev Pitești.

Să arătăm că :

$$S = \sum_{k=n}^{n+m} \frac{k}{(k+1)!} = \frac{A_{n+m+1}^{m+1} - 1}{(n+m+1)!}.$$

Dar $\frac{k}{(k+1)!} = \frac{(k+1)-1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$, deci

$$S = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!} + \ldots + \frac{1}{(n+m)!} - \frac{1}{(n+m+1)!}$$

$$S = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+m+1)!} = \frac{(n+m+1)! - n!}{n!\,(n+m+1)!} =$$

$$= \frac{(n+1)\,(n+2)\ldots\ldots(n+m+1) - 1}{(n+m+1)!} = \frac{A_{n+m+1}^{m+1}}{(n+m+1)!}.$$

Soluția II-a, dată de *Dumitru Ene*, elev, Ploești.

Folosim metoda inducției complete :

a) Pentru $m = 0$ avem :

$$\frac{n}{(n+1)!} = \frac{A_{n+1}^{1} - 1}{(n+1)!}; \quad \frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \frac{n}{(n+1)!}$$

Pentru $m = 1$ avem:

$$\frac{n}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+2)!} = \frac{A^2_{n+2} - 1}{(n+2)!} \text{ adică:}$$

$$\frac{n(n+2)+n+1}{(n+2)!} = \frac{(n+2)(n+1)-1}{(n+2)!}, \text{ rezultat evident.}$$

b) Presupunem relația adevărată și pentru m. Să arătăm că ea este adevărată și pentru $m + 1$. Avem:

$$S_{m+1} = S_m + U_{m+1}$$

$$S_{m+1} = \frac{A^{m+1}_{n+m+1} - 1}{(n+m+1)!} + \frac{n+m+1}{(n+m+2)!} =$$

$$= \frac{(n+m+2)A^{m+1}_{n+m+1} - n - m - 2 + n + m + 1}{(n+m+2)!} = \frac{A^{m+2}_{n+m+2} - 1}{(n+m+2)!},$$

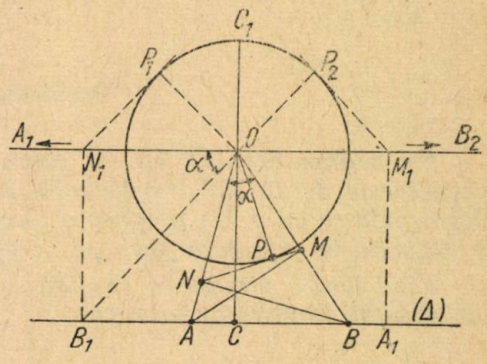
adică ceea ce trebuia demonstrat.

Problema 4191

Un triunghi are un vîrf în punctul fix O, iar celelalte două vîrfuri A și B, variabile pe o dreaptă (Δ), astfel încît $\sphericalangle AOB = \alpha$ (const). Se duc înălțimile AM și BN în triunghiul dat.

Să se arate că dreapta MN rămîne tangentă unui cerc cînd A și B se deplasează pe dreapta (Δ).

Se vor studia cazurile $\alpha < \frac{\pi}{2}$ și $\alpha > \frac{\pi}{2}$.



Emil Morțun

Soluție. a) Studiem cazul $\alpha < \frac{\pi}{2}$.

Se duce a treia înălțime OC care este fixă ca poziție și constantă ca mărime, precum și perpendiculara OP pe MN. Deoarece patrulaterul $ANMB$ este inscriptibil $\sphericalangle ONM = \sphericalangle OBC$. Rezultă că triunghiurile dreptunghice ONP și OBC sînt asemenea, iar din asemănarea lor rezultă:

$$\frac{OP}{OC} = \frac{ON}{OB} \qquad (1)$$

Din triunghiul dreptunghic OBN rezultă: $\frac{ON}{OB} = \cos\alpha$.

Iar din relația (1) deducem: $\frac{OP}{OC} = \cos\alpha$ sau $OP = OC\cos\alpha$.

Însă, pentrucă OC este constant rezultă că și OP este constant. Dar OP reprezintă distanța de la punctul O la dreapta MN; de aici rezultă că MN rămîne tangentă unui cerc cu centrul în O și cu raza $OP = OC\cos\alpha$.

Dacă punctul A se depărtează pe ($\triangle$) spre stînga, dreapta OA ia poziția limită OA_1, OB poziția limită OB_1, astfel ca $\sphericalangle A_1OB_1 = \alpha$, iar punctul N ia poziția limită N_1.

Poziția limită a dreptei MN se obține observînd că $\sphericalangle ONM = \sphericalangle OBC$ de unde rezultă că această poziție limită se obține ducînd prin N_1 o dreaptă care să formeze cu OA_1 un unghi egal cu $\sphericalangle OB_1C$, adică ducînd prin N_1 o paralelă la OB_1. Poziția limită a dreptei MN este deci N_1P_1, P_1 fiind punctul de contact cu cercul. Dacă punctul B se depărtează pe ($\triangle$) spre dreapta, în mod asemănător se obține pentru MN poziția limită M_2P_2, P_2 fiind punctul de contact cu cercul.

Deci, dacă $\alpha < \frac{\pi}{2}$ dreapta MN se deplasează rămînînd tangenta arcului de cerc P_1PP_2.

Dacă $\alpha < \frac{\pi}{2}$ triunghiul AOB este obtuzunghic, dreapta MN va fi exterioară triunghiului AOB și așezată deasupra dreptei OA_1. În acest caz dreapta MN rămîne tangentă arcului de cerc $P_1C_1P_2$. (Demonstrație analoagă cu precedenta).

Tot în acest caz $\left(\alpha > \frac{\pi}{2}\right)$, OP raza cercului nu mai are valoarea $OC \cdot \cos\alpha$ ci este egală cu $OC \cdot \cos(180 - \alpha)$.

Problema 4212

Un patinor are 42,7 kg, iar suprafața patinelor cu care se sprijină pe gheață este de 12 cm². Coeficientul de frecare pe gheață este $\mu = 0{,}002$. Deplasîndu-se cu 5 km pe gheață într-o după amiază de sport, ce căldură se dezvoltă la suprafața gheții și ce presiune exercită asupra gheții.

Cînd face o piruetă se sprijină cu o patină pe o suprafață de 5 mm². Ce presiune exercită în acest caz?

Petre Florian, profesor, Dej

Soluția autorului. Energia dezvoltată: $W = F \cdot S$ și $F = \mu G = 0{,}002 \cdot 42{,}7$ deci, $W = 42{,}7 \cdot 0{,}002 \cdot 5000 = 427$ kgm.

Echivalentul mecanic al caloriei este $J = 427$ kgm/kcal,

$J = \frac{W}{Q}$, de unde $Q = \frac{W}{J} = \frac{427}{427} = 1$ kcal $= 1000$ cal.

Presiunea în primul caz: $p = \frac{F}{S} = \frac{42{,}7}{12} = 3{,}558$ kgf/cm².

Presiunea în al doilea caz: $p_1 = \frac{F}{S_1} = \frac{42{,}7}{0{,}05} = \frac{4270}{5} = 854$ kgf/cm²

Problema 4213

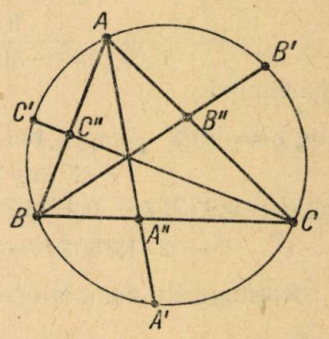
Dacă A', B', C' sînt intersecțiile cevienelor AA'', BB'', CC'' ale triunghiului ABC cu cercul circumscris, $A''B \cdot A''C = \lambda$, $B''C \cdot B''A = \mu$, $C''A \cdot C''B = \nu$ iar $AA'' = d_a$, $BB'' = d_b$, $CC'' = d_c$, să se demonstreze relația:

$$AA' \cdot d_a + BB' \cdot d_b + CC' \cdot d_c =$$

$$\lambda + \mu + \nu + d_a^2 + d_b^2 + d_c^2$$

(În legătură cu problema 3458).

Gabriel Tîrtan



Soluție. Avem: $AA' \cdot d_a = (AA'' + A''A') \cdot AA'' = d_a^2 + A''A' \cdot AA''$ Dar $A''A' \cdot AA'' = BA'' \cdot A''C = \lambda$, conform puterii punctului A''. Deci, $AA' \cdot d_a = d_a + \lambda$ Adunînd și analoagele relației de mai sus, membru cu membru, obținem relația propusă.

Problema 4214

Dîndu-se distanța soare-pămînt $d = 15 \cdot 10^7$ km, raza soarelui $R =$ $= 695\,300$ km și perioada de rotație a pămîntului în jurul soarelui $T =$ $= 365$ zile, să se deducă densitatea materiei în soare.

Mihai Săbăduș, elev, Făgăraș

Soluția autorului. Putem scrie $F = k \dfrac{Mm}{d^2} = \dfrac{m v^2}{d}$

$$\text{sau: } v^2 = k \frac{M}{d}, \qquad (1)$$

dar $M = V \varrho = \dfrac{4}{3} \pi R^3 \varrho$.

Înlocuind în (1) avem: $v^2 = k \dfrac{\frac{4}{3} \pi R^3 \varrho}{d}$, care se mai scrie:

$$\frac{4\pi^2 d^2}{T^2} = \frac{4k\pi R^3 \varrho}{3d}, \text{ de unde: } \varrho = \frac{3\pi d^3}{k T^2 R^3}$$

Să verificăm că ϱ din formulă are într-adevăr dimensiunile unei densități. Fie *CGS* sistemul în care lucrăm, $\varrho = \dfrac{3\pi d^3}{k T^2 R^3}$;

$$\varrho = \frac{\text{cm}^3}{\frac{dyn\ \text{cm}^2}{g^2} \cdot s^2 \cdot \text{cm}^3} = \frac{g^2 \cdot \text{cm}^3}{g \frac{\text{cm}^3}{s^2} \cdot s^2 \cdot \text{cm}^3} = \frac{g}{\text{cm}^3}.$$

Pentru calculul numeric ne vom fixa tot în *CGS*. Avem:

$$d^3 = 15^3 \cdot 10^{36}\ ;\ k = 6{,}67 \cdot 10^{-8}\ ;\ T^2 = 365^2 \cdot 24^2 \cdot 36^2 \cdot 10^4\ ;$$

$R^3 = 6953^3 \cdot 10^{21}$. După care scriem:

$$\varrho = \frac{3 \cdot 3{,}141 \cdot 15^3 \cdot 10^{36}}{6{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot 365^2 \cdot 24^2 \cdot 36^2 \cdot 10^4 \cdot 6953^3 \cdot 10^{21}} \cdot \frac{g}{cm^3}$$

logaritmînd:

$$\log \varrho = \log 3 + \log 3{,}141 + 3 \log 15 + 19 - \log 6{,}67 - 2 \log 365 - $$
$$- 2 \log 24 - 2 \log 36 - 3 \log 6953$$
$$\log \varrho = 0{,}47712 + 0{,}49707 + 3 \cdot 1{,}17609 + 19 - 0{,}82413 - 2 \cdot 2{,}56229 -$$
$$- 2 \cdot 1{,}38021 - 2 \cdot 1{,}55630 - 3 \cdot 3{,}84217 = 0{,}15422.$$

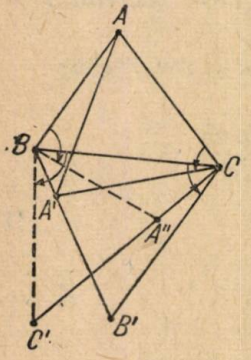
Antilogaritmînd obținem: $\varrho \approx 1{,}4265$ g/cm³

Problema 4215

Să se demonstreze că dacă rotim triunghiul ABC în planul său în jurul vîrfului C cu unghiul $\pi - 2B$ omoloagele A' și B' ale vîrfurilor A și B sînt colineare cu B.

Gh. Popescu, profesor, Lugoj

Soluție dată de *D. Ene*, Ploiești. Triunghiul ACA' e isoscel fiindcă $CA = CA'$.



$$\sphericalangle AA'C = \frac{\pi - \sphericalangle ACA'}{2} =$$

$$= \frac{\pi - \pi + 2B}{2} = \sphericalangle B$$

Patrulaterul $ACA'B$ este inscriptibil ($\sphericalangle AA'C = \sphericalangle B$),

$$\sphericalangle AA'B = \sphericalangle ACB = \sphericalangle C.$$

$$\sphericalangle BA'C = \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180° - \sphericalangle A \quad (1)$$

$$\sphericalangle ACB + \sphericalangle BCA' = \pi - 2B = \sphericalangle BCA' + \sphericalangle A'CB'$$

de unde $\sphericalangle ACB = \sphericalangle A'CB'$ și cum $AC = A'C$ și $BC = B'C$ triunghiurile ABC și $A'BC$ sînt egale așa că vom avea:

$$\sphericalangle CA'B' = \sphericalangle A \quad (2)$$

Adunînd (1) cu (2) obținem:

$\sphericalangle BA'C + \sphericalangle CA'B' = 180°$ care demonstrează că B, A', B' sînt colineare.

Observare: Din patrulaterul inscriptibil ACA'B avem: $\sphericalangle A'BC = \sphericalangle A'AC = \sphericalangle A'AC = \sphericalangle AA'C = \sphericalangle B$ deci AB și BB' sînt simetrice față de BC.

Dacă rotim în sens invers triunghiul ABC în planul său în jurul vîrfului B cu unghiul $\pi - 2C$, C', A' fiind omoloagele vîrfurilor C, A ele sînt colineare cu C.

In mod analog CC' și AC sînt simetrice față de BC așa că avem proprietatea: Dreptele determinate de punctele colineare (B, A', B') și (C, A'', C') se taie într-un punct simetric lui A față de BC.

Problema 4216

Se consideră un triunghi ABC și trisectoarele unghiului A: AA_1, AA_2. Se notează $AA_1 = c_1$, $AA_2 = b_1$, $BA_1 = a_1$, $A_1A_2 = a_2$, $A_2C = a_3$. Să se demonstreze relațiile:

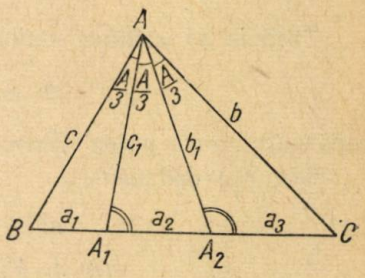
$$1)\ (b + b_2)\ (c + c_1) = 4\ bc\ \cos^2 \frac{A}{3}$$

$$2)\ \frac{\sin (C - B)}{\sin \frac{A}{3}} = \frac{a_2\,(a_1 - a_3)}{a_1a_3 - a_2^2}$$

C. V. Costăchescu

1) *Soluția autorului.* Avem: $S_{BAA_1} + S_{A_1AA_2} + S_{A_2AC} = S_{ABC}$

$$cc_1 \sin \frac{A}{3} + c_1b_1 \sin \frac{A}{3} + b_1b \sin \frac{A}{3} = bc \sin A = bc \left(3 \sin \frac{A}{3} - 4 \sin^3 \frac{A}{3}\right)$$



Rezultă, adunînd pe bc la ambii membri:

$$cc_1 + c_1b_1 + b_1b + bc = 4\ bc - 4\ bc \sin^2 \frac{A}{3},$$

$$(b + b_1)\ (c + c_1) = 4\ bc \cos^2 \frac{A}{3}.$$

2) Aplicăm de 2 ori formula celor 3 relevmente: (R.M.T., vol. XXIII, nr. 4, pp. 39—40 și G.M.F. nr. 3/1960):

$$\operatorname{cotg} A_1 = \frac{a_1 \operatorname{cotg} \frac{A}{3} - a_2 \operatorname{cotg} \frac{A}{3}}{a_1 + a_2}\ (1);\quad \operatorname{cotg} A_2 = \frac{a_2 \operatorname{cotg} \frac{A}{3} - a_3 \operatorname{cotg} \frac{A}{3}}{a_2 + a_3}\ 2)$$

Împărțim (1) cu (2):

$$\frac{\operatorname{cotg} A_1}{\operatorname{cotg} A_2} = \frac{(a_1 - a_2)\,(a_2 + a_3)}{(a_1 + a_2)\,(a_2 - a_3)} = \frac{a_1a_2 + a_1a_3 - a_2^2 - a_2a_3}{a_1a_2 - a_1a_3 + a_2^2 - a_2a_3}$$

$$\frac{\operatorname{cotg} A_1 + \operatorname{cotg} A_2}{\operatorname{cotg} A_1 - \operatorname{cotg} A_2} = \frac{\sin (A_1 + A_2)}{\sin (A_2 - A_1)} = \frac{2\ a_1a_2 - 2\ a_2a_3}{2\ a_1a_3 - 2\ a_2^2}$$

$$A_1 = B + \frac{A}{3};\quad A_2 = B + \frac{2\,A}{3}$$

$$\frac{\sin (A_1 + A_2)}{\sin (A_2 - A_1)} = \frac{\sin (2B + A)}{\sin \frac{A}{3}} = \frac{\sin (B + 180° - C)}{\sin \frac{A}{3}} =$$

$$= \frac{\sin (C - B)}{\sin \frac{A}{3}} = \frac{a_2\,(a_1 - a_3)}{a_1a_3 - a_2^2}$$

Problema 4220

Un con și un trunchi de con sînt echivalente și au înălțimile egale. Să se demonstreze că din razele bazelor lor se poate construi un triunghi. Să se determine unghiul ce mare al acestui triunghi.

L. M. Lopovok, Moscova

Soluție. Fie c raza bazei conului și a, b razele bazelor trunchiului de con.

Rezultă din enunț:

$$\frac{1}{3}\pi c^2 h = \frac{1}{3}\pi (a^2 + b^2 + ab)h$$

sau

$$c^2 = a^2 + b^2 + ab \qquad (1)$$

Trebuie să arătăm mai întîi că:

$$a + b > c \text{ și } a - b < c$$

după care se va putea afirma că, cu a, b, c se poate construi un triunghi.

Din (1) deducem:

$$a^2 + b^2 + ab > c^2 - ab,$$

$$(a + b)^2 > c^2, \text{ sau } (a + b) > c$$

și apoi $a^2 + b^2 + ab < c^2 + 3ab$; $(a - b)^2 < c^2$; $|a - b| < c$.

Deci cu a, b, c se poate forma un triunghi.

Teorema cosinusurilor aplicată în acest triunghi dă:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \qquad (2)$$

C fiind unghiul cel mai mare.

Comparînd relațiile (1), (2) rezultă: $ab = -2ab \cos C$ sau $\cos C = -\frac{1}{2}$. Deci $C = 120°$.

Soluții bune au mai dat: **D. Ene**, Ploiești, **Ghica Anton** și **Șerban Strătilă**, Pitești.

Problema 4225

Se dau două drepte (D_1) și (D_2) concurente în O și un punct fix A pe (D_1). Să se găsească pe (D_2) un punct M și pe (D_1) un alt punct B astfel ca suma $AM + MB$ să fie minimă [$\sphericalangle(D_1, D_2) < 45°$].

Bergthaler Cristian

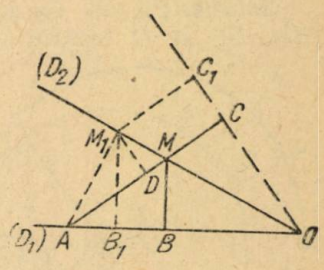
Soluție. Este evident că, dacă punctul M este cunoscut, B se obține imediat ducînd din M perpendiculara MB pe (D_1). Fie un punct M_1 pe

(D_2) și C_1 piciorul perpendicularei din M_1 pe simetrica lui (D_1) față de (D_2); iar M_1B_1 perpendiculara pe (D_1). Trebuie să avem:

$$AM_1 + M_1B_1 = AM_1 + M_1C_1 = \text{minim.}$$

Minimum are loc cînd A, M_1 și C_1 sînt colineare, deci cînd AM este perpendiculară pe simetrica lui (D_1) față de (D_2).

Într-adevăr, din dreptunghiul M_1C_1CD (M_1D și C_1C fiind perpendiculare pe AC) avem $M_1C_1 = DC$, iar $AM_1 + M_1B_1 = AM_1 + M_1C_1 > AD + DC = AM + MC = AM + MB$, deci $AM + MB = \text{minim.}$



În concluzie, M se obține ducînd perpendiculara din A pe simetrica lui (D_1) față de (D_2), iar B, ducînd din M perpendiculara pe D_1.

Observare. Cînd $\sphericalangle (D_1, D_2) > 45°$ problema se poate pune pentru $AM - MB$ minim.

Problema 4226

Să se demonstreze că expresia:

$$E = a^{6n+1} + b^{6n+1} + c^{6n+1} - 3abc$$

se divide cu $a + b + c = 6n - 1$, (a, b, c, n fiind numere naturale și $6n - 1$ număr prim absolut).

Tomescu Ion, elev, Ploiești

Soluția autorului. Expresia dată se mai scrie:

$$E = a^3 \cdot a^{6n-2} + b^3 \cdot b^{6n-2} + c^3 \cdot c^{6n-2} - 3abc =$$
$$= a^3 (a^{6n-2} - 1) + b^3 (b^{6n-2} - 1) + c^3 (c^{6n-2} - 1) +$$
$$+ a^3 + b^3 + c^3 - 3abc =$$
$$= a^3 (a^{(6n-1)-1} - 1) + b^3 (b^{(6n-1)-1} - 1) + c^3 (c^{(6n-1)-1} - 1) +$$
$$+ a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$$

Se știe că orice număr prim, în afară de 2 și 3 este de forma: $p = 6m \pm 1$, unde m este un număr natural. Deoarece numărul $6n - 1$ este număr prim absolut și din relația $a + b + c = 6n - 1$ se vede că a, b, c, sînt mai mici decît $6n - 1$, deci nu pot fi multipli ai acestui număr prim, deci sînt numere prime cu $(6n - 1)$.

Potrivit teoremei lui Fermat, $a^{(6n-1)-1} - 1 = \mathfrak{M}(6n - 1)$; $b^{(6n-1)-1} - 1 = \mathfrak{M}(6n-1)$; $c^{(6n-1)-1} - 1 = \mathfrak{M}(6n-1)$ potrivit celor arătate mai sus. Expresia devine:

$$E = a^3 \mathfrak{M}_a(6n-1) + b^3 \mathfrak{M}_b(6n-1) + c^3 \mathfrak{M}_c(6n-1) + a^3 + b^3 + c^3 - 3abc =$$
$$= a^3 \mathfrak{M}_a(6n-1) + b^3 \mathfrak{M}_b(6n-1) + c^3 \mathfrak{M}_c(6n-1) + (a+b+c) \cdot (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac).$$

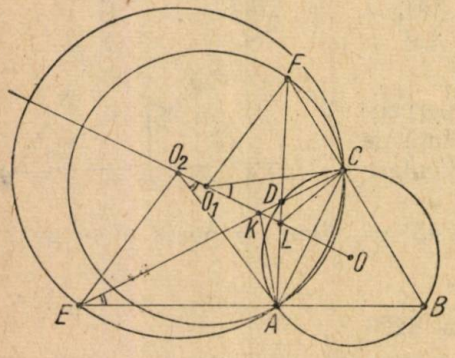
Cum $a+b+c=6n-1$, rezultă că $E = \mathfrak{M}(6n-1)$.

Problema 4227

Fie E și F intersecțiile perechilor de laturi opuse AB, CD și AD, BC ale patrulaterului inscriptibil $ABCD$. Să se demonstreze că EF trece prin unul din centrele de asemănare ale cercurilor ACE și ACF.

Gh. Buicliu

Soluție. Fie O_1, O_2 centrele celor două cercuri, S intersecția dreptelor O_1O_2, EF și O centrul cercului circumscris patrulaterului. Notăm încă, cu L și K intersecția dreptei O_1O_2 cu fiecare din dreptele AD și CD. Punctele O, O_1 O_2 sînt coliniare pe perpendiculara din O pe AC. În cercul O_1 avem: $\sphericalangle LO_1C \sphericalangle LFC$, ca avînd aceiași măsură, jumătate din arcul AC în O_1.



La fel în O_2 *avem*: $\sphericalangle KO_2A \sphericalangle KEA$, care arată că patrulaterele LO_1FC și KO_2EA sînt inscriptibile. Din al doilea patrulater se scoate:

$$\sphericalangle EO_2O_1 = \sphericalangle KAB = \sphericalangle KAL + \sphericalangle DAB = \sphericalangle KCL + \sphericalangle DCF = \\ = \sphericalangle LCF = \sphericalangle FO_1O_2$$

care arată că razele O_2E și O_1F sînt paralele, deci EF trece în cazul figurii, prin centrul de asemănare invers al cercurilor O_1 și O_2.

Problema 4229

Să se afle derivata expresiei:

$$y = \left[\frac{(1+\operatorname{cotg} x)^2 - (1+\operatorname{tg} x)^2}{(1+\operatorname{cotg} x)^2 + (1+\operatorname{tg} x)^2}\right]^2 + \left(\frac{\operatorname{cotg} x}{1+\operatorname{cotg}^2 x} + \frac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}\right)^2$$

și să se explice rezultatul.

* * *

Soluție. Înlocuind pe $\operatorname{cotg} x$ prin $\frac{1}{\operatorname{tg} x}$, expresia devine succesiv:

$$\left[\frac{\frac{(1+\operatorname{tg} x)^2}{\operatorname{tg}^2 x} - (1+\operatorname{tg} x)^2}{\frac{(1+\operatorname{tg} x)^2}{\operatorname{tg}^2 x} + (1+\operatorname{tg} x)^2}\right]^2 + \left(\frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}{\frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x}} + \frac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}\right)^2 =$$

$$= \frac{(1+\operatorname{tg} x)^2\left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} - 1\right)}{(1+\operatorname{tg} x)^2\left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} + 1\right)} + \left(2\,\frac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}\right)^2 = \frac{(1-\operatorname{tg}^2 x)^2}{(1+\operatorname{tg}^2 x)^2} +$$

$$+ \frac{4\operatorname{tg}^2 x}{(1+\operatorname{tg}^2 x)^2} = 1$$

Expresia dată fiind o constantă ($y = 1$) are derivata nulă ($y' = 0$).

Problema 4231

Fie $a_1, a_2, \ldots, a_k, b$, $k+1$ *numere pozitive astfel încît* $a_1^p + a^p + \ldots + a_k^p = b^p$. *Să se arate că dacă n este divizibil cu p, atunci* $a_1^n + a^n + \ldots + a_k^n < b^n$ *(în care n și p sînt numere naturale).*

(În legătură cu problema 3080).

Gh. M. Tudor, student

Soluție. Egalitatea se mai poate scrie:

$$(a_1^n)^{\frac{p}{n}} + (a_2^n)^{\frac{p}{n}} + (a_3^n)^{\frac{p}{n}} + \ldots + (a_k^n)^{\frac{p}{n}} = (b^n)^{\frac{p}{n}}$$

Ridicăm ambii membri la puterea $\frac{n}{p}$ și obținem:

$$a_1^n + a_2^n + \ldots + a_k^n + \lambda = b^n$$

unde λ reprezintă o sumă de temeni care sînt combinații între $a_1, a_2, \ldots, a_k$; acești termeni sînt pozitivi deoarece $\frac{n}{p} > 1$; deci $\lambda > 0$; prin urmare: $a_1^n + a_2^n + \ldots + a_k^n < b^n$, ceea ce trebuia arătat.

Observare. Dacă $p = 2$ și $k = 2$ obținem soluția problemei 3080 (G.M.F.-B, 4, 1958).

Problema 4232

În două tuburi capilare comunicate cu diametrele $d_1 = 0{,}5$ *mm și* $d_2 = 1$ *mm se află glicerină la temperatura de 20°C. Cunoscînd tensiunea superficială* $\sigma = 66$ *dyn/cm la temperatura de 20°C, densitatea* $\varrho_0 = 1{,}26$ *g/cm³ la temperatura de 0°C și coeficientul de dilatare absolută* $\alpha = 0{,}0005$ *grd⁻¹ ale glicerinei, se cere să se afle diferența ascensiunii capilare (diferența de nivel) a lichidului din cele două tuburi.*

C. Necșoiu

Soluția autorului. Densitatea glicerinei la temperatura de 20°C este egală cu:

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{1 + \alpha t} = \frac{1{,}26}{1 + 0{,}005 \cdot 20} = \frac{1{,}26}{1{,}01} = 1{,}25 \text{ g/cm}^3.$$

Ascensiunile capilare ale lichidului în cele două tuburi sînt respectiv egale cu:

$$h_1 = \frac{4\sigma}{d_1 \varrho g} \quad \text{și} \quad h_2 = \frac{4\sigma}{d_2 \varrho g},$$

unde g este accelerația gravitației în cm/s².

Diferența ascensiunii capilare a lichidului din cele două tuburi este egală cu:

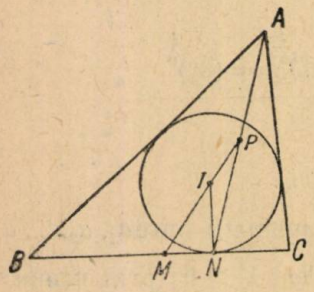
$$h_1 - h_2 = \frac{4\sigma(d_2 - d_1)}{d_1 d_2 \varrho g} = \frac{4.66\,(0{,}1 - 0{,}05)}{0{,}1 \cdot 0{,}05 \cdot 1{,}25 \cdot 981} \approx 2{,}15 \text{ cm}$$

Problema 4234

Să se construiască grafic triunghiul ABC în care cunoaștem poziția vîrfului A, a punctului de tangență a cercului înscris cu latura BC și mijlocul acesteia.

V. V. Băghină, profesor, Breaza

Soluția autorului. Ne bazăm pe proprietatea cunoscută care spune că dreapta ce unește mijlocul laturii BC cu mijlocul segmentului ce leagă vîrful A cu punctul de contact al cercului înscris cu latura BC trece prin centrul cercului înscris.



Notăm mijlocul lui BC cu M și punctul de contact cu N. Avem date deci, pozițiile punctelor A, M, N. Unind pe M cu P (mijlocul lui AN) și ducînd în N perpendiculara pe MN vom găsi la intersecția cu MP centrul I al cercului înscris. Construim acest cerc și din A ducem tangentele la el. Ele vor tăia dreapta MN tocmai în B, C celelalte două vîrfuri ale triunghiului.

Problema 4235

O bobină cu inductanța de 0,001 H formează un circuit oscilant cu un condensator variabil. Știind că frecvența maximă a circuitului este de 1500 kHz, iar intervalul de frecvență care se poate produce în acest circuit este de 100 kHz, să se afle:

a) *Capacitatea maximă și minimă a condensatorului în pF.*

b) *Presupunînd că acest circuit oscilant face parte dintr-un aparat de radiorecepție avînd asociată în paralel cu capacitatea lui o antenă cu capacitate proprie de 150 cm, să se găsească intervalul de lungimi de undă în metri, cu care se poate acorda circuitul.*

R. Sfichi, Fălticeni

Soluția autorului. a) Capacitatea maximă a circuitului este:

$$C_{max} = \frac{1}{4\pi^2 \nu_{min}^2 L} = \frac{1}{4\pi^2 (5 \cdot 10^5)^2 \cdot 10^{-3}} \cdot 10^{12} \approx 100\ pF = 90\ \text{cm}$$

în care $\nu_{min} = \nu_{max} - 1000 = 1500 - 1000 = 500\ kHz$.

Capacitatea minimă a circuitului este:

$$C_{min} = \frac{1}{4\pi^2 \nu_{max}^2 L} = \frac{1}{4\pi^2 (1{,}5 \cdot 10^6)^2 10^{-3}} \cdot 10^{12} \approx 11{,}11\ pF = 10\ \text{cm}.$$

b) Intervalul de lungime de undă cu care se poate acorda circuitul, exprimat în metri:

$$\lambda_{max} - \lambda_{min} = \frac{2\pi\sqrt{L}}{10^2}(\sqrt{C_{max} + C_A} - \sqrt{C_{min} + C_A}) =$$

$$= \frac{2\pi\sqrt{10^{-3} \cdot 10^9}}{10^2}(\sqrt{90+150} - \sqrt{10+150}) = 179\ \text{m}.$$

Problema 4237

Un condesator este construit din două discuri de metal cu diametrul de 10 cm și dielectric sticlă cu $\varepsilon = 26$ *și grosimea de 0,3 mm. Între cele două armături se crează un cîmp electric* $E = 30\,000$ *V/m.*

Se cere: a) *Cîți electroni se vor găsi pe fiecare placă a condensatorului;* b) *Cu ce forță se vor atrage armăturile. Calculele se vor face în CGS și MKSA.*

M Gogan, Turnu Severin

Soluția autorului. a) Calculăm capacitatea condensatorului:

$$C = \frac{\varepsilon S}{4\pi d} = \frac{6 \cdot 25 \cdot 3{,}14}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}03} = \frac{150}{0{,}12} = 1250 \text{ cm.}$$

Pentru a afla numărul de electroni trebuie să cunoaștem cantitatea de electricitate de pe fiecare placă:

$$Q = C\,V, \text{ dar } V = Ed, \text{ deci: } Q = C\,Ed$$

unde:

$$E = \frac{30\,000\,V}{m} = \frac{\frac{30\,000}{300}}{100} = \frac{30\,000}{30\,000} = 1 \; u.CGS\,e.s.$$

Deci: $Q = 1 \cdot 0{,}03 \cdot 1250 = 37{,}5$ *u CGS e, s.*

Cum sarcina electronului este $e = 4{,}8\ 10^{-10}$ *u CGS e, s.*

$$n = \frac{Q}{e} = \frac{37{,}5}{4{,}8 \cdot 10^{-10}} = 7{,}8 \cdot 10^{10} \text{ electroni}$$

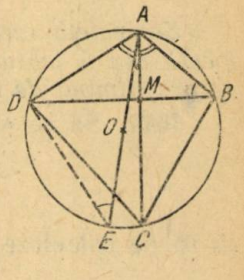
b) Forța de atracție dintre plăci va fi dată de: $F = \frac{CV^2}{2d}$, unde $V = Ed = 1 \cdot 0{,}03 = 0{,}03$ *u CGS e, s.*

$$F = \frac{1250 \cdot 0{,}03^2}{3 \cdot 0{,}03} = \frac{1550 \cdot 0{,}03}{2} = 18{,}75 \; dyn.$$

Problema 4265

Să se demonstreze că într-un patrulater inscriptibil cu diagonalele restangulare, diametrul care trece prin unul din vîrfuri este izogonal diagonalei care pleacă din acest vîrf.

Gh. Buidiu



Soluție: Trebuie să arătăm că AC și AO sînt izogonale. În triunghiul ABD ele sînt înălțimea și raza cercului circumscris ce pleacă din același vîrf. Proprietatea e cunoscută (vezi *„Geometria Triunghiului"* de *Traian Lalescu* ex. 18 pag. 15).

Într-adevăr dacă E este diametral opus lui A, avem:

$$\sphericalangle ABD = \sphericalangle AED, \text{ sau:}$$

$$90° - \sphericalangle ABD = 90° - \sphericalangle AED, \text{ adică:}$$

$\sphericalangle DAE = \sphericalangle BAC$ care arată că AO și AC sînt izogonale.

Soluții bune au dat: *Ene Dumitru*, Ploești

Problema 4266

Să se determine valoarea parametrului m și să se rezolve ecuația:

$$6\sin^4 x - 44\sin^3 x\cos x + m\sin^2 x\cos^2 x + \sin x\cos^3 x = 6\cos 2x$$

știind că două din rădăcinile ei satisfac relația:

$$x_1 + x_2 = 90^\circ\,(2k+1)$$

C. Săndulache, profesor Bacău

Soluția autorului. — Înlocuind $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = \cos^4 x - \sin^4 x$ și făcînd toate reducerile, obținem ecuația:

$$12\sin^4 x - 44\sin^3 x\cos x + m\sin^2 x\cos^2 x + \sin x\cos^3 x - 6\cos^4 x = 0.$$

Această ecuație omogenă în raport cu $\sin x$ și $\cos x$, se rezolvă prin împărțirea cu $\cos^4 x \neq 0$.

Obținem: $12\,\mathrm{tg}^4 x - 44\,\mathrm{tg}^3 x + m\,\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}\,x - 6 = 0$.

Ținînd seama de relația din enunț, urmează că avem:

$\mathrm{tg}(x_1 + x_2) = \pm\infty$, deci $1 - \mathrm{tg}\,x_1\,\mathrm{tg}\,x_2 = 0$, sau: $\mathrm{tg}\,x_1 \cdot \mathrm{tg}\,x_2 = 1$.

Notînd: $\mathrm{tg}\,x = y$ avem de rezolvat ecuația:

$$12y^4 - 44y^3 + my^2 + y - 6 = 0$$

cunoscînd relația $y_1 y_2 = 1$.

Folosind relațiile dintre rădăcini și coeficienți și ținînd seama și de relația suplementară dată mai sus, obținem următoarele rezultate:

$$y_1 + y_2 = \frac{5}{2};\ y_1 y_2 = 1;\ 2y^2 - 5y + 2 = 0;\ y_1 = \frac{1}{2};\ y_2 = 2;\ y_3 + y_4 = \frac{7}{6}$$

$$y_3 y_4 = -\frac{1}{2};\ 6y^2 7y - 3 = 0;\ y_3 = -\frac{1}{3};\ y_4 = \frac{3}{2} \text{ și } m = 41.$$

Avem deci: $\mathrm{tg}\,x_1 = \frac{1}{2}$; $\mathrm{tg}\,x_2 = 2$; $\mathrm{tg}\,x_3 = -\frac{1}{3}$; $\mathrm{tg}\,x_4 = \frac{3}{2}$.

CHESTIUNI DE EXAMEN *)

Subiectele lucrărilor scrise date la olimpiada de matematică, etapa locală din 5 februarie 1961. Pentru fiecare grupă, toate chestiunile obligatorii, timpul de lucru 3 ore.

4614. Să se simplifice expresia:

$$\frac{9x^2 + 4y^2 + 12xy - 6x - 4y + 1}{9x^2 - 4y^2 + 4y - 1}$$

și să se calculeze valoarea numerică pentru: $x = \frac{2}{3}$ și $y = -\frac{1}{2}$.

(Cl. VIII și an I șc. pedagogice). Lucia Țene

---

*) Soluțiile se primesc pînă la 1 august 1961.

*) VIII (4614, 4615, 4624, 4625, 4628, 4629, 4633); IX (4616, 4617, 4626, 4627); X (4618, 4619, 4620, 4630, 4631, 4632); XI (4621, 4622, 4623).

4615. Se dă un triunghi isoscel ($AB = AC$). Pe prelungirea laturei CA dincolo de A se ia un punct M din care se duce perpendiculara pe dreapta BC care întîlnește prelungirea laturilor BC și AB respectiv în punctele H și N. Să se arate că: a) triunghiul AMN este isoscel; b) $CN < CM$; c) Unde trebuie luat punctul M ca să avem relația $HN = \frac{MN}{4}$; d) $MC - BN =$ constant.

(Cl. VIII și an I șc. pedagogice). Lucia Țene

4616. a) Să se afle mulțimea valorilor lui x pentru care expresiile $\sqrt{(1-x)(12-5x-2x^2)}$ și $\sqrt{x(ax^2-x-3)}$ sînt simultan reale.
b) Să se simplifice fracția:

$$y = \frac{-\sqrt{(1-x)(2x^2+5x-12)}}{\sqrt{x(3+x-2x^2)}}$$

c) Să se afle mulțimea valorilor lui y pentru care x este real. Se va exprima mai întîi x în funcție de y.

(Cl. IX și an II șc. pedagogice). C. Ionescu-Țiu

4617. O parte din scheletul unei macarale are forma unui triunghi isoscel ABC avînd $AB = AC = b$ și unghiul $A = 30°$. Pentru consolidarea macaralei s-au mai pus barele BD și BE astfel că BD și BE sînt înălțimea și bisectoarea duse din B.

a) Să se calculeze lungimea barelor BD, BC și BE în funcție de lungimea b; b) Să se arate că perimetrul triunghiului ABC este egal cu $(4 + \sqrt{6} - \sqrt{2})\sqrt{S}$, unde S este aria triunghiului ABC.

(Cl. IX și an II șc. pedagogice) C. Ionescu-Țiu

4618. Folosind inducția matematică, să se demonstreze că:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2}$$

este un număr pozitiv pentru oricare valoare a numărului natural $n > 1$.

(Cl. X reală), O. Sacter

4619. a) Fiind dată o coardă AB a unui cerc de rază 1 să se exprime lungimea acestei coarde folosind numai cunoscutele definiții ale funcțiilor trigonometrice, știind că arcul AB este egal cu $2x < \pi$.

b) Din compararea lungimii coardei AB cu a lungimii unei linii poligonale regulate de n laturi înscrisă în arcul $AB = 2x$ și avînd extremitățile în A și B, să se deducă inegalitatea

$$\sin x < n \sin \frac{x}{n}, \text{ unde } x < \frac{\pi}{2}.$$

(Cl. X și an. III șc. pedagogice) O. Sacter

4620. Pe un teren orizontal în punctul B este înfipt în pământ un stîlp vertical a cărui înălțime deasupra solului este $BD = b$. Stîlpul este ancorat cu cablurile DA și DC. Triunghiul ABC este orizontal, dreptunghic în A și are catetele $AB = m$, $AC = a$. De cablul CD sînt legate firele AE și BF ambele perpendiculare pe CD. Se cere: a) Să se calculeze lungimile firelor AE și BF în funcție de a, b, m; b) Să se arate că $CD \times EF = AB^2$.

(Cl. X reală și an. III șc. pedagogice)

4621. Să se afle $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{mx^2+2x+1} - \sqrt{x^2+1})$.
Discuție.

(Cl. XI reală) C. Tempeanu, Hunedoara

4622. Se dă șirul al cărui termen general este:

$$a_n = \frac{2^n}{(1+2)(1+2^2)\ldots(1+2^n)}$$

și se cere: a) Să se scrie primii patru termeni ai șirului; b) să se demonstreze că șirul este convergent; c) să se afle limita șirului.

(Cl. XI reală)

4623. Se dă un cerc (O), o tangentă fixă (T) la acest cerc și paralela $(\triangle)$ dusă prin centrul O la tangenta (T). O tangentă variabilă taie tangenta fixă în M și dreapta $(\triangle)$ în N.

a) Să se afle locul geometric al intersecției perpendicularelor duse prin M și N respectiv, pe MN și $(\triangle)$. b) Să se cerceteze dacă locul geometric cerut este alcătuit din întreaga curbă găsită mai sus sau numai de o parte a ei.

Se vor lua ca axe Ox și Oy, dreapta $(\triangle)$ și perpendiculara pe $(\triangle)$ dusă prin O).

(Cl. XI reală) Gh. D. Simionescu

4624. Un trapez isoscel se taie dintr-o bucată circulară de tablă, astfel ca baza mică să fie egală cu latura exagonului înscris, iar baza mare egală cu latura triunghiului echilateral. a) Știind că diametrul plăcii circulare este de 350 mm și că un cm^2 din tablă cîntărește 4 g, să se afle greutatea materialului îndepărtat (deșeul); b) Dacă există mai multe soluții, care este cea mai economică?

(An. I șc. profesionale)

4625. a) Să se simplifice fracția:

$$\frac{ax^2 + bx^2 + 2bx - 2ax + a + b}{(ax+b)^2 - (bx+a)^2}$$

b) Să se afle cu două zecimale, valoarea fracției pentru $a = 0{,}5$; $b = 1{,}75$ și $x = \sqrt{2} - 1$.

(An. I șc. profesionale)

4626. a) Dimensiunile unei foi de tablă dreptunghiulară sînt exprimate prin două numere pare consecutive. Știind că aria foii de tablă este de 168 cm^2 să se afle cele două dimensiuni.

b) Dimensiunile foii se micșorează cu aceeași lungime x. Să se afle x, știind că aria foii dreptunghiulare astfel micșorate s-a redus la jumătate.

(An. II șc. profesionale)

4627. La punctul unde traseul unei linii de înaltă tensiune își schimbă direcția, stîlpul vertical de susținere este ancorat cu cabluri de 3 puncte fixe pe teren, care împreună cu piciorul stîlpului formează pe terenul orizontal, un dreptunghi. Să se afle cu precizie pînă la 0,01 m, înălțimea la care sînt prinse ancorele de stîlp, știind că au lungimile de 13 m, 15 m și 19 m.

(An. II șc. profesionale și an. III șc. meserii) N. Dumitru și I. Soare

4628. Pentru confecționarea unor piese metalice în serie, se decupează dintr-o tablă subțire dreptunghiulară cu dimensiunile de 24 dm și 18 dm, plăci în formă de triunghiuri dreptunghice, cu următoarele date: unghiul $A = 90°$, $AB = 6$ dm și $AC = 8$ dm. Din una din aceste plăci triunghiulare se decupează apoi, 3 plăcuțe tot triunghiulare, după liniile: BD (bisectoarea unghiului B) și DE (perpendiculara de la piciorul bisectoarelor pe latura BC).

a) Cîte plăci triunghiulare ABC se obțin din tabla dreptunghiulară? b) laturile celor trei plăcuțe; c) aria fiecărei plăcuțe.

(An. I șc. tehn. maiștri)

4629. Dintr-o foaie de tablă dreptunghiulară se taie o fîșie de-a lungul lungimii și una de-a lungul lățimii. Partea rămasă din lățime este de 32 dm, iar partea tăiată este 1/5 din cea rămasă. Lungimea foii nu se cunoaște. Se știe însă că: 20% din partea rămasă din lungimea adunată cu 40% din partea tăiată din ea, reprezintă 3/8 din partea rămasă din lățime. Diferența dintre partea rămasă din lungime și cea tăiată este de 43,5 dm. Să se calculeze aria tablei tăiate.

(An. I șc. tehn. maiștri)

4630. Un piedestal este tăiat dintr-un bloc de marmură și are forma unui trunchi de piramidă regulată cu bazele patrate și se continuă cu o prismă dreaptă a cărei bază inferioară coincide cu baza mică a trunchiului de piramidă. Pentru nevoile finisării s-a calculat aria laterală a piedestalului și s-a găsit 377 dm^2. Latura bazei prismei este de 4 dm, înălțimea prismei este suma dintre latura bazei mari și latura bazei mici a trunchiului de piramidă, iar apotema trunchiului de piramidă este jumătate din înălțimea prismei. Se cere: a) latura bazei mari a piedestalului; b) greutatea piedestalului, știind că greutatea specifică a marmorei este 2,5 kgf/dm^3.

(An. II șc. tehn. maiștri) Gh. D. Simionescu

4631. Se dă într-un plan unghiul drept xOy și o semidreaptă Oz care face unghiul α cu Ox. Se ia punctul A pe Ox care se proiectează

în A' pe Oz, iar A' se proiectează în A'' pe Oy. În mod asemănător se ia punctul B pe Oy, care se proiectează în B' pe Oz, iar B' se proiectează în B'' pe Ox. Să se determine poziția semidreptei Oz pentru care avem: $OA'' + OB'' = \frac{1}{4}(OA + OB)$.

(An. II, şc. tehn. maiştri)

4632. Dintr-o sferă metalică se construiește un trunchi de con, avînd ca baze secțiunile sferei cu două plane paralele, de o parte și de alta a centrului, la distanțele de 7 cm, respectiv 4 cm de centru. Să se afle: a) greutatea deșeurilor, densitatea fiind 8,9 și diametrul sferei 20 cm; b) volumele sectoarelor sferice formate.

(An III, şc. tehn. maiştri). N. Dumitru şi I. Soare

4633. Directivele Congresului al III-lea al P.M.R. prevăd că producția în 1965 de aparate de radio, de televizoare și frigidere la un loc va fi de 480 000 bucăți; producția de televizoare, biciclete și aparate de radio va fi de 880 000 bucăți; iar numărul bicicletelor va fi de 9 ori mai mare decît al frigiderelor. Se cere: a) cîte biciclete se vor produce în 1965; b) cîte aparate de radio și televizoare la un loc; c) se poate determina din problemă, numărul televizoarelor ce se vor produce în 1965?

(An III, şc. pedagogice)

PROBLEME PROPUSE *)

4634. Se dă un triunghi oarecare ABC. Să se ducă o dreaptă MN care să împartă perimetrul și aria triunghiului ABC în părți egale.

Tîrcă Ion, elev Pucioasa

4635. Viteza de șlefuire a unei pietre de polizor cu diametrul de 250 mm, este de 30 m/s.

Să se calculeze cu cît s-a uzat piatra, dacă pentru a avea aceeași viteză de șlefuire ea trebuie să aibă o viteză de rotație de 3500 rot/min.

Romulus Sfichi, profesor Suceava

4636. Două cercuri (O, R) (O_1, R_1) secante în A, A_1 sînt tangente unei drepte $(\triangle)$ în punctele C și B. Să se arate că

$$R^2_{ABC} = R^2_{A_1BC} = R_1R.$$

I. Hadîrcă, profesor Breaza

---

*) VIII (4645, 4658, 4659, 4665, 4668); IX (4634, 4635, 4636, 4640, 4646, 4650, 4657, 4663, 4464); X (4641, 4642, 4648, 4649, 4651, 4652, 4653, 4654, 4655, 4660, 4662, 4663, 4669, 4670); XI (4637, 4638, 4639, 4643, 4644, 4647, 4656, 4661, 4666, 4667, 4671).

4637. Un punct A de coordonate φ, λ; ziua Z, ora h, Soarele sub orizont.

Care este înălțimea punctului pe verticala lui A, de unde se vede Soarele, la orizontul geometric și în ce direcție?

Aplicație: București ($\varphi = +44°27'$, $\lambda = +26°05'$) 1 mai 1960, $\delta_* = 15°09'N$, $E_m = +2^m53^s$, $tf = 22^h$.

Pământul presupus perfect sferic cu $R = 6367$ km.

C. V. Costăchescu

4638. Să se afle soluțiile reale ale ecuației

$$\sin x + \sin x^2 = \cos x + \cos x^2$$

Ștefan Berți, profesor Sighet

4639. a) Să se reprezinte grafic funcțiile:

$$f_1(x) = \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$$

$$f_2(x) = \sqrt{|x|+2\sqrt{|x|-1}} + \sqrt{|x|-2\sqrt{|x|-1}}$$

$$f_3(x) = \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$$

$$f_4(x) = \sqrt{|x|+2\sqrt{|x|-1}} - \sqrt{|x|-2\sqrt{|x|-1}}$$

b) Să se afle intervalele pentru care fiecare funcție admite funcție inversă și să se determine funcția inversă respectivă.

C. Ionescu-Țiu

4640. Având triunghiul ascuțitunghic ABC notăm cu ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c puterile punctelor A, B, C, respectiv față de cercurile descrise pe BC, CA, AB ca diametre și cu ϱ puterea centrului radical al acestor trei cercuri față de cercul ABC. Să se stabilească relația:

$$\frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} + \frac{1}{\varrho_c} = \frac{1}{\varrho}$$

Toma Albu, elev Petroșani

4641. Notînd $S_k = a^k + b^k + c^k$, să se arate că dacă $a + b + c = 0$, există relațiile:

$$25 \cdot S_2 \cdot S_8 + 50 \cdot S_{10} = 14S_5^2$$

și

$$27 \cdot S_3 \cdot S_6 = 18 \cdot S_9 + 7S_3^3$$

N. Z. Cupcea, elev Buzău

4642. a) Între două coarde identice ale unui pian apar bătăi cu o frecvență de 90 bătăi pe minut. Frecvența uneia dintre coarde este de 253 Hz. Care este frecvența f a celeilalte coarde?

b) Dacă coardele sînt din oțel cu densitatea de 7,8 g/cm³ și au lungimea de 70,7 cm, diametrul de 0,4 mm, care sînt tensiunile T necesare pentru întinderea lor, pentru ca să dea respectiv frecvențele de 251,5; 253 și 254,5 Hz?

* * *

4643. Se dă o dreaptă $\triangle$ tangentă unui cerc O într-un punct fix T. Fie M un punct oarecare pe dreapta $\triangle$ și MT_1 tangenta dusă din acest punct la cercul O.

Dacă T_2 este punctul diametral opus lui T_1, iar T_3 piciorul perpendicularei din T pe T_1T_2, să se găsească locul geometric al intersecției dreptelor TT_3 și MT_2 cînd M descrie dreapta $\triangle$.

M. A. Stan, elev București

4644. Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\frac{5}{2^5}+\ldots+\frac{n}{2^n}+\ldots\right)=1$$

V. Pricopie, profesor Trusești

4645. Dintr-un tun cu masa de 2000 kg pornește un proiectil de 10 kg cu viteza inițială de 600 m/s. Să se calculeze viteza de recul a tunului. Socotind coeficientul de frecare al afetului de tun de 0,3 să se calculeze lungimea reculului.

* * *

4646. Pe laturile unui unghi drept xoy se iau punctele M și N. Bisectoarea unghiului MON taie dreapta MN în punctul P care se proiectează pe OM în R iar perpendiculara dusă în P pe dreapta OP taie pe ON în Q. Să se arate că:

a) Segmentul OQ este media armonică între segmentele OM și ON.

b) Ce relație există între OM și ON, dacă patrulaterul $MNQR$ este inscriptibil?

D. Catrina, student București

4647. Un disc cu diametrul de 1,6 m și cu greutatea de 490 kg., se rotește cu 600 rot/min. Pe suprafața lui cilindrică apasă o frînă cu forța de 20 kg. Coeficientul de frecare fiind 0,4 să se calculeze cîte rotații face discul pînă ce se oprește.

* * *

4648. Să se arate că dacă $a+b+c+d=0$, atunci avem relațiile:

$$5(a^2+b^2+c^2+d^2)(a^3+b^3+c^3+d^3)=6(a^5+b^5+c^5+d^5);$$

$$a^4+b^4+c^4+d^4=-(ab+ac+ad+bc+bd+dc)(a^2+b^2+c^2+d^2)-4abcd;$$

$$\frac{a^4+b^4+c^4+d^4}{a^2+b^2+c^2+d^2}=-(ab+ac+ad+bc+cd)+2\frac{abcd}{ab+ac+ad+bc+bd+cd}$$

V. V. Pravăț, Adjud

4649. Un ac de declinație perfect omogen, lung de 12 cm este făcut să stea orizontal. Greutatea p destinată să mențină echilibrul este fixată la 3 cm de mijlocul acului. Să se determine valoarea acestei greutăți știind că înclinația magnetică a locului este de 65° și că forța magnetică ce se exercită asupra polului sud este 140 dyn.

* * *

4650. Viteza unui avion fiind de 720 km/oră, ce denivelare coloană de mercur arată tubul Pitot de la aripa lui? Densitatea aerului este 0,0013 g/cm^3, a mercurului 13,6 g/cm^3, iar accelerația gravitației se ia 9,8 m/s^2.

* * *

4651. Dacă într-un triunghi, r_b este medie geometrică între r_a și r_c atunci există relația $\sin B = \dfrac{\sin A + \sin^2 C}{\sin A + \sin C}$; iar dacă r_b este media armonică între r_a și r_c, atunci $2 \sin \dfrac{B}{2} = \cos \dfrac{A - C}{2}$ (r_a, r_b, r_c sînt razele cercurilor exînscrise).

Corneliu Georgescu, Craiova

4652. Să se arate că polinomul

$$[(m-1)(x^3+x^2) - x + 1]^2 - (m-2)^2 x^3 (x^2 + 2x - 1)$$

se divide prin $x^3 + x^2 - x + 1$. Să se afle cîtul fără a face împărțirea.

* * *

4653. O sursă de lumină este așezată pe direcția care unește centrele a 2 corpuri opace sferice. Să se determine poziția sursei, pentru ca suma porțiunilor luminate pe cele 2 corpuri să fie maximă sau minimă. Discuție.

Gh. Popescu, profesor Lugoj

4654. Să se arate că:

$$nC_{2n}^n = (n+1)[C_n^0 C_n^1 + C_n^1 C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} C_n^n]$$

Ilie N. Constantinescu

4655. Se dă triunghiul ABC cu înălțimile BH_b, CH_c. Dacă I este centrul cercului înscris să se arate că H_b, I, H_c, pot fi coliniare numai dacă unghiul A este mai mic decît 60°.

Ene P. Dumitru, absolvent Ploiești

4656. Un generator de curent alternativ este format dintr-un tambur cilindric pe care se bobinează n spire dreptunghiulare legate în serie, așezate una lîngă alta. Planele spirelor formează un fascicul avînd ca axă, axa cilindrului. Tamburul se rotește într-un cîmp magnetic uniform. Fie α unghiul format între planele a două spire alăturate. Notînd cu e tensiunea electromotoare produsă de o singură spiră, să se afle tensiunea electromotoare a generatorului.

I. Buzu, profesor Roșiori de Vede

4657. În triunghiul ABC o paralelă la baza BC taie cercul circumscris în D, E. Dreptele AD, AE taie baza BC în M și N. Să se arate că :

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NB}{NC} = \frac{AB^2}{AC^2} \; ; \quad \frac{MB}{MC} : \frac{NB}{NC} = \frac{BD^2}{CD^2} .$$

N. Mihăileanu

4658. Să se demonstreze că diferența

$$65065 \ldots . 65065^2 - 56056 \ldots . 56056^2$$

este pătrat perfect.

Gh. Buicliu

4659. Să se arate că există un număr E în așa fel ca pentru orice a să avem $a * E = a$. Pentru acest număr, $E * E = E$. Să se arate dacă proprietatea de comutativitate și asociativitate, adică

$$a * b = b * a \quad \text{și} \quad (a * b) * c = a * (b * c)$$

este valabilă pentru operația cu steluță.

Operația $a * b$ se definește de relația $a * b = a + b + ab$.

(L'Education Mathématique, Paris)

4660. Prin trei puncte A, B, C să se ducă o sferă a) tangentă unei sfere (S), b) ortogonală sferei (S), c) să taie sfera (S) după un unghi α.

(Aplicație la articolul din G.M.F.-B, 1960, pag. 580).

* * *

4661. Fie M un punct mobil pe o parabolă de vîrf O, parametru p; tangenta în M taie axa în T; normala taie axa în N, iar perpendiculara în M pe MO taie axa în U.

a) Să se arate că avem relația $2\,OU - TN = \text{const} = 3p$;

b) Să se arate că centrul de greutate al triunghiului TMN descrie o parabolă.

N. Mihăileanu

4662. Să se elimine ωt între ecuațiile :

$$u_1 = U_1 \sqrt{2} \cos (\omega t - \psi)$$
$$u_2 = U_2 \sqrt{2} \cos 2\,\omega t.$$

Ce devine rezultatul eliminării pentru $\psi = 0$, $\frac{\pi}{4}$ și $\frac{\pi}{2}$?

Ion S. Antoniu

4663. Dacă a, b, c, sînt trei numere în progresie aritmetică să se arate că soluțiile sistemului de mai jos sînt în progresie aritmetică :

$$(a-b)x + (b-c)y = a^2 - c^2$$
$$(b-c)y + (c-a)z = b^2 - a^2$$
$$(c-a)z + (a-b)x = c^2 - b^2.$$

V. Grigoraș, elev Bacău

4664. Să se demonstreze egalitatea:

$$x^{p_1}\, x^{p_2} + \ldots + x^{p_n} = \frac{n-2}{2}\, x^{p_{n+1}}$$

unde $p_k = \dfrac{\log (\log x^k)^k}{\log x^k}$.

V. Virgolici, București

4665. Să se rezolve ecuația:

$$(x+a)^5 \cdot (b-c)^5 + (x+b)^5 \cdot (c-a)^5 + (x+c)^5 \cdot (a-b)^5 = 0.$$

Ion Strătescu, student

4666. Să se arate că funcția

$$f(x) = (x+2)^2 - \sqrt{x+1)^2} + \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{(x-1)^2} - \frac{x\sqrt{(x-1)^2}}{\sqrt{x^2}} + \sqrt{(2-x)^2}$$

se mai poate scrie

$$f(x) = (x+2)^2 - |x+1| + |x| \cdot |x-1| - \frac{|x| \cdot |x-1|}{x} + |x-2|$$

și apoi să se reprezinte grafic $y = f(x)$.
Se vor considera pe rînd intervalele $(-\infty, 2)$, $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$ și $(2, \infty)$.

C. Ionescu-Țiu

4667. Care este domeniul punctelor $M(x, y)$ din planul axelor de coordonate rectangulare xoy în care avem

$$x\sqrt{1+x^2} + y\sqrt{1+y^2} > 0,$$
$$x\sqrt{1+x^2} + y\sqrt{1+y^2} < 0,$$
$$x\sqrt{1+x^2} - y\sqrt{1+y^2} > 0,$$
$$x\sqrt{1+x^2} - y\sqrt{1+y^2} < 0.$$

C. Ionescu-Țiu

4668. Un corp cu greutatea de 10 kgf cade de la înălțimea de 98 m. Să se determine: a) energia cinetică și potențială în punctul mijlociu al căderii; b) energia cinetică și potențială cînd a ajuns la Pămînt; c) lucrul mecanic exprimat în ergi și kgm efectuat după $\frac{2}{3}$ de cădere.

(La an I școli profesionale, olimpiada 1961)

4669. — La o argintare se folosesc 40 de băi legate în serie prin care trece un curent de 5 A sub o tensiune de 120 V. Să se determine:

a) energia electrică consumată în toate băile pentru 5 ore de argintare;
b) cantitatea de argint depusă în 5 ore în toate băile.

(La an II școli profesionale, olimpiada 1961)

4670. Dacă $0 < \alpha - r < \alpha < \alpha + r < \frac{\pi}{2}$, atunci

$$\sin(\alpha - r),\ \sin\alpha,\ \sin(\alpha + r),$$

nu pot fi nici în progresie aritmetică, nici în progresie geometrică.

Ștefan Berți, profesor Sighet

4671. În ciocnirea elastică dintre un foton și un electron, fotonul este difuzat în direcția θ și electronul deviat cu viteza v. Să se afle lungimea de undă a razei incidente (fotonul incident) și lungimea de undă a razei difuzate (fotonul difuzat).

Se dau m, h, c. Aplicație $\theta = 30°$ și $v = 1000$ km/s.

Emilian P. Moflic, student București

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PROPUSE PENTRU ȘCOALA DE 7 ANI *)

E: 1661. a) Explicați dacă plugul se comportă ca o pîrghie.

b) Cum explicați fizic, că rărițatul culturilor dăunează creșterea lor.

c) Avem două tăvăluge cilindrice de aceeași lungime, aceeași greutate și de diametri diferiți. Care exercită o presiune mai mare asupra pămîntului?

S. I. Popescu

E: 1662. În raportul prezentat la Congresul al III-lea P.M.R. se prevede că în 1965 producția de lînă pieptenată, în economia națională, va crește la circa 12 000 t fire față de 4700 t în 1960 și față de 1200 t în 1938. Să se afle: a) cu cîte procente va crește în perioada celor 6 ani producția de lînă? b) de cîte ori va crește această producție față de 1960 și 1938?

B. Baieră

E: 1663. Raportul dintre înălțimea unui trapez dreptunghic $ABCD$ și înălțimea paralelogramului format prin construirea paralelei BE la CD, este de $\frac{4}{3}$. Să se afle aria trapezului știind că perimetrul paralelogramului $BECD$ este de 28 cm și că AD are 12,92 cm.

---

*) V .E: 1668, 1669, 1670, 1673); VI (E: 1661, 1662 1665, 1667); VII (E: 1663, 1664, 1666, 1671, 1672, 1674, 1675.

E: 1664. Să se arate că

$$(a+b-2c)^2+(b+c-2a)^2+(c+a-2b)^2=3[(a-b)^2+(b-c)^2+(a-a)^2].$$

$$(1-a+a^2)(1+a^3)(1+a^6)(1+a^{12})=a^{23}-a^{22}+a^{21}+a^{20}-a^{19}+a^{18}+$$
$$+a^{17}-a^{16}+a^{15}+a^{14}-a^{13}+a^{12}+a^{11}-a^{10}+a^9+a^8-a^7+a^6+a^5-a^4+$$
$$+a^3+a^2-a+1.$$

C. Ionescu-Țiu

E: 1665. În proiectul planului de stat pe anul 1961 se prevăd următoarele:

— Se vor însămînța cu porumb, 3 850 000 ha din care 350 000 ha pentru siloz; volumul investițiilor din fondul statului să se ridice la 27,9 miliarde lei, ceea ce reprezintă o creștere de 24% față de 1960, iar din totalul investițiilor industria va primi 15,6 miliarde lei, cu 26% mai mult decît în 1960; volumul investițiilor pentru necesitățile dezvoltării învățămîntului va fi de 429 milioane lei, care reprezintă o creștere de 42% față de 1960.

Să se afle procentul de porumb siloz din suprafața totală, volumul investițiilor din fondul statului, cît a primit industria și volumul investițiilor pentru învățămînt în 1960.

D. Bătinețu

E: 1666. Să se arate că dacă:

$$\frac{1}{x}+\frac{1+yzt}{a+y+z+t}=0, \text{ atunci mai avem:}$$

$$\frac{1}{y}+\frac{1+xzt}{a+x+z+t}=\frac{1}{z}+\frac{1+xyt}{a+x+y+t}=$$

$$=\frac{1}{t}+\frac{1+xyz}{a+x+y+z}=0.$$

C. Ionescu-Țiu

E: 1667. O gospodărie agricolă colectivă a însămînțat cu grîu o parcelă de formă dreptunghiulară cu perimetrul de 9000 m, avînd lungimea de 4 ori mai mare decît lățimea. De pe această parcelă s-a obținut o producție medie de 2 152 kg la ha. Știind că membrii gospodăriei au prestat 104 587,2 zile muncă și că pentru munca prestată li s-a împărțit 60% din producția de grîu, să se calculeze cantitatea de grîu retribuită pe zi muncă.

Ioan Candrea, profesor Sibiu

E: 1668. Am o sumă de bani. Dublez această sumă și iau după aceea din ea 20 lei. Suma rămasă o dublez iarăși și iau din ea 20 lei. A treia oară dublez din nou suma rămasă, iau din ea 20 lei și nu mai rămîne nimic. Cîți bani a avut la început?

* * *

E: 1669. În Raportul la cel de-al III-lea Congres al P.M.R., tovarășul Gheorghe Gheorghiu-Dej spune:

„...pînă în anul 1965 trebuie să ajungem ca, în condiții climaterice normale, să producem anual 16 milioane tone de cereale".

Dacă am scris toate numerele de la 1 la 16 000 000 inclusiv, de cîte cifre am avea nevoie?

D. M. Bătinețu

E: 1670. Costul unui aparat electrocasnic de 1 800 lei a fost plătit în monedă hîrtie de cîte 25 lei și de cîte 3 lei, în total plătind 182 monezi hîrtie. Să se afle cîte bucăți au fost de 25 lei și cîte de 3 lei.

* * *

E: 1671. Un trapez $ABCD$ are latura AB perpendiculară pe bază. Se dă $AB = 12$ cm, $BC = 17$ cm și $AD = 22$ cm. Fie M mijlocul laturii AB. Să se calculeze distanța de la M la latura CD.

C. Menciu

E: 1672. Viitoarea termocentrală de la Luduș, a cărei construcție va începe în acest an, va avea o putere de 600 000 kW. Să se calculeze:

a) Cîți metri cubi de gaz metan vor arde zilnic dacă randamentul cuptoarelor este de 30%, iar gazul metan are puterea calorică de 10 000 kcal/m³? b) Cîte becuri de 60 W pot fi alimentate de la această termocentrală? Dar de 100 W?

Gh. Cimoca, absolvent Cluj

E: 1673. Pentru transportul sfeclei de zahăr o gospodărie agricolă colectivă a folosit un camion și zece căruțe. Începînd lucrul la ora 7, după cît timp se vor întîlni din nou la gospodărie, știind că la plecare camionul străbate cei 6 km pînă la gară cu 20 km/oră, iar căruțele cu 5 km/oră? La întoarcere, camionul parcurge distanța cu 30 km/oră, iar căruțele cu 6 km/oră.

Pentru încărcare și descărcare, camionul are nevoie de cîte 17 minute, iar căruțele de cîte 6 minute.

Știind că pînă la întîlnirea din nou la gospodărie au transportat 53,6 t și că o căruță transportă de trei ori mai puțin decît camionul, să se afle încărcătura unei căruțe și încărcătura camionului; ce cantitate a transportat camionul și ce cantitate au transportat căruțele?

* * *

E: 1674. Să se calculeze de cîte ori în 24 ore la un ceas cu secundar central, secundarul este bisectoarea unghiului format de orar și minutar. Să se calculeze unghiul format de două bisectoare interioare consecutive, după ora 12.

* * *

E: 1675. Considerăm triunghiul ABC dreptunghic în A. Perpendicularele în B și C pe ipotenuză retaie laturile AC, AB în B', C'. Fie și AA' înălțimea din A. Notăm $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Să se arate că

$$AA' = \frac{bc}{a}, \quad BB' = \frac{ac}{b}, \quad CC' = \frac{ab}{c}$$

N. Mihăileanu

POȘTA REDACȚIEI

Drăgulescu Gh., Ploiești; *Oancea N.*, Bușteni, și alți corespondenți. Cărți neepuizate din Biblioteca S.S.M.F., nu se găsesc de vînzare la S.S.M.F., ci numai la librării.

Problemele rezolvate de corespondenți nu se pot trimite în același plic cele de matematică cu cele de fizică, deoarece plicurile cu probleme rezolvate de elevii claselor IX—XI se repartizează la redactori diferiți.

Preoteasa Petre, R. Vîlcea; *Coțoi Florea*, Craiova; *Clipii T.*, Deva; *Tănăsescu M.*, Horezu, *Cucoș V.*, București. Dintre problemele propuse alegem pe cele mai interesante, cu o soluție mai aparte sau sînt legate de practica din producție și preferăm problemele elevilor harnici rezolvitori de probleme din G.M.F.-B. De aceea sfătuim pe elevii care vor să propună probleme ca mai întîi să fie cît mai activi rezolvitori de probleme și să dea soluții judicios redactate și interesante.

Paraschiv I., Focșani. Pentru articolele de istoria matematicii să se indice pagina și volumul de unde au fost extrase datele trimise, pentru a se putea face confruntarea și verificarea celor afirmate, eventual și biblioteca unde poate fi găsit exemplarul consultat de autor, în cazul unei cărți rare.

Morariu V., Cluj și alți rezolvitori de probleme. Citiți modul de redactare anunțat pe ultima copertă a G.M.F.-B, adresat rezolvitorilor de probleme.

Unor colaboratori. Dacă pe plic nu treceți numele, clasa, școala și localitatea, iar rezolvările sînt nesemnate nu se poate anunța primirea acestor probleme. Localitatea Oradea sau Iași de pe ștampila poștei nu sînt suficiente.

— Evidențierea rezolvitorilor de probleme se face după numărul și calitatea rezolvărilor de probleme din G.M.F.-B primite în cursul unei luni ținîndu-se seama și de clasa pe care o urmează rezolvitorul.

— Dacă un rezolvitor are mai multe nume, este rugat să-și aleagă numai unul pentru a nu apare cu nume diferite.

— Problemele propuse, găsite interesante, sînt repartizate pe mai multe numere ale revistei, astfel ca în fiecare număr să apară probleme cît mai variate și din mai multe domenii.

— Dările de seamă asupra modului de desfășurare a olimpiadelor 1961, asupra cercurilor de elevi și privind activitatea extrașcolară la matematică și fizică trebuie să fie bine documentate, instructive; ele pot conține sugestii, propuneri și planuri de lucru, pentru ca prin publicarea lor să se realizeze un schimb de experiență.

— Reamintim colaboratorilor la G.M.F.-B că înscrierea școlilor medii la întrecerea pe țară, privind activitatea extrașcolară la matematică și fizică pe anul 1961, se poate face pînă la 1 iunie 1961; totodată se va alătura fișa respectivă, cuprinzînd punctele b, c, d, e, f, h, i din regulamentul întrecerii. Regulamentul întrecerii pe 1961 este publicat în G.M.F.-B nr. 2, pag. 97.

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

EVIDENȚIAȚI

Pînă la 1 ianuarie 1961 s-au mai evidențiat ca rezolvitori de probleme de matematică din G.M.F. seria B nr. 9—12/1960, după cum urmează:

1. Popa Nicolae (cl. XI Focșani), *2. Vidrașcu Traian* (student Iași), *3. Lungu Șerban* (student Cluj), *4. Ene P. Dumitru* (student București), *5. Tănăsescu Miron* (cl. XI Horezu), *6. Colbeanu Ion* (absolvent Buhuși), *7. Popa Alexandru* (cl. XI s.m. 20 București), *8. Stanciu Nicoleta* (cl. VII Haleș), *9. Ilie Mihai* (cl. XI s.m. 20 București), *10. Fințescu Elena* (cl. XI s.m. 10 București). *11. Raicu Viorel* (absolvent Drăgănești-Olt), *12. Boldea Ion* (cl. X Lugoj), *13. Chiva Petre* (cl. X s.m. 1 Pitești), *14. Longin Șerban* (cl. X s.m. 3 Ploești), *15. Dumitrescu Aurel* (cl. XI s.m. 3 Tîrgoviște), *16. Bluoss I. Hans* (cl. XI s.m. 7 București), *17. Grădeanu Gh.* (cl. XI Focșani), *18. Vodă Viorel* (cl. X s.m. 12 București), *19. Sfetcu Ion* (cl. XI Lugoj), *20. Dimovici Sorin* (cl. VIII s.m. 1 Pitești), *21. Banu Gheorghe* (cl. X Pucioasa), *22. Ciulei Mircea* (cl. XI s.m. 1 Sighișoara), *23. Drugea Gh.* (cl. XI s.m. 1 Ploești), *24. Ene Traian* (cl. XI s.m. 1 Ploești), *25. Cepoiu Mariana* (cl. VII s.m. 3 Ploești), *26. Abramovici Alexandru* (cl. XI s.m. 3 Timișoara), *27. Fotescu Constantin* (student București), *28. Țințăreanu Cristian* (cl. VIII s.m. 11 București), *29. Olteanu S. Victor* (cl. XI s.m. 19 București), *30. Driga Maria* (cl. VII Feteși), *31. Brezeanu Florin* (absolvent Tîrgoviște), *32. Chizinski Elena* (cl. VII Feteși), *33. Gheorghiu Rodica* (cl. VI s.m. 1 Timișoara) și *34. Grigorescu I. Șerban* (cl. IX s.m. 1 București).

*

Pînă la 1 ianuarie 1961 s-au primit soluții bune la probleme de matematică propuse în ultimele trei numere din „Gazeta matematică și fizică" seria B, după cum urmează:

AFUMAȚI (Reg. București) Cl. IX. Balica Sergiu (4319, 31, 33, 40, 53, 56, 65, 81, 99), Lumînare Stela (4342, 65, 69, 71, 80—82, 84, 90, 96), Nițulescu Dumitru (4319, 33, 38, 53, 56, 65, 69, 81, 82, 90). Cl. X. Alecu Șt. (4305, 38, 65, 69, 80, 82, 83, 91, 96), Grigore Maria (4365, 69, 71, 80—82, 84, 85, 90, 96), Mihalache Marcela (4365, 69, 71, 80—82, 84 85, 90, 96), Nicolae Elena (4365, 69, 71, 80—82, 84, 90, 91, 96), Nicolae Marin (4365, 69, 71, 80—83, 96), Stoica Maria (4305, 69, 71, 80—82, 85, 90, 91, 433). Cl. XI. Camburu Cristache (4343, 47, 59, 80, 86, 90, 91, 97, 412, 19, 20, 33), Neiner Gh. (4303, 07—09, 12, 14, 38, 51, 56, 64, 65, 69, 80—83, 91).

ALEXANDRIA (Reg. București). Cl. IX. Boștenaru Livius (4367, 69, 80—82, 84, 86, 90, 99, 412, 52).

ARAD. *S. m. 1* „Ion Slavici". Cl. VII. Schwartz Ioan (E: 1560, 70, 74, 75, 77, 79, 80, 84, 90, 94, 95), Stamovan Milivoi (E: 1574, 79, 80, 83, 84, 87, 90, 94, 95, 97), Szekely Ioan (E: 1574, 79, 80, 83, 84, 90, 91, 95—97), Than Francisc (E: 1560, 74, 77, 79, 80, 83, 84, 87, 90, 94, 95). Cl. VIII. Ardeleanu Dan (E: 1559, 60, 70, 71, 73, 74, 77, 79, 81, 84, 87, 96), Blaga Al. (4475, E: 1574, 79, 83, 84, 87, 97, 600, 10, 13, 14), Bogdan Viorel (E: 1550, 55, 57, 59—61, 64, 83, 84, 98), Păunescu Al. (E: 1559, 60, 70—75, 77, 79, 81, 84, 87, 96), Roșculeț Traian (E: 1559—61, 69, 70, 73, 74, 78, 79, 84, 83, 87, 96, 600, 03—05, 07—11), Vicol Viliam (4388, E: 1562, 67, 71, 79, 82, 84, 85, 87, 89, 91, 93, 94, 96, 98, 99, 600, 01, 04, 05, 10, 16). Cl. X. Ciurea Sorin (4342, 47, 48, 65, 69, 71, 80, 91, 419, 21, 32). Cl. XI. Macovei Rodica (4361, 62, 70, 71, 77, 99, 419—22), Popețiu Dorina (4348, 69—77, 80,82—84, 405, 10, 19, 23, 47, 42, 61, 84), Vîrșendaru Ioan (4360, 69, 79, 91, 98, 99, 407, 18—20, 23, 24, 43, 44, 52, 53, 55, 61, 64, 71, 72, 83, 97). *S. m. 2* Olga Bancic. Cl. VIII. Dinu Adela (E: 1540—43, 45, 47, 50, 54, 59, 70), Loșniță Elena (E: 1540—43, 45, 47, 49, 50, 53, 59, 70), Tiurbe Codruța (E: 1571—75, 77—79, 82, 84, 87, 89—98). *Școala medie germană.* Cl. VIII Mihalca Cornelia (E: 1541, 47, 59, 60, 65, 70, 74, 75, 77, 79, 84, 87, 89, 96, 97).

BACĂU. Cl. IX. Vlad Const. (4319, 51, 65, 69, 71, 80—82, 98, 99). Cl. XI. Flachs Iacob (4302—09, 21, 30, 38, 54, 62, 70, 80, 416).

Școala de 7 ani Păunești*-Adjud. Cl. VI. Anghel Lenuța (E: 1541, 43, 46, 58—60, 70, 74, 79), Berbece Georgeta (E: 1574, 79, 83, 88, 90, 92, 94, 95, 615, 40), Berbece Maria (E: 1546, 59, 60, 79, 91, 601), Cantiș Vasile (E: 1538, 43, 52, 59, 63, 70, 74, 79, 80, 83, 88, 94, 604, 08, 10), Manea Tatiana (E: 1574, 79, 83, 88, 90, 92, 94, 95, 97, 600, 08, 10), Mocanu Aurora (E: 1574, 79, 83, 88, 90, 92, 94, 95, 600, 06, 07, 08, 10, 15), Nica Costică (E: 1559, 60, 70, 74, 79, 83, 88, 94, 97), Novac Gh. (E: 1574, 77, 79—81, 83, 88, 94, 95, 97, 600, 04, 08, 10), Novac Nicolae (E: 1539, 43, 46, 54, 59, 60, 74, 79), Sandu Gh. (E: 1559, 60, 70, 74, 79, 88, 94), Săndulache Luca (E: 1573, 74, 79, 78, 89, 90, 92, 95, 97). Cl. VII. Dodu Virginia (E: 1558, 62,

Ignat Aurel (E: 1543, 59, 60, 76, 79, 83, 73, 76, 77, 81, 85, 87—90, 92, 95—97), 88, 94, 97), Matei Lenuța (E: 1574, 79, 83, 88, 90, 92, 94, 95, 97, 600, 08, 10), Savin Dumitru (E: 1573, 74, 76, 78, 79, 90, 92, 95, 97).

BARAȘTI (Vedea, reg. Argeș). Cl. VII. Fotescu Maria (E: 1540, 41—45, 47, 53, 56, 59—61, 64, 69, 70, 73, 74, 79, 81, 84, 91).

BEIUȘ (reg. Crișana). Ș.m. 1. Cl. X. Ovanez Mihai (4376, 80—82, 91, 420, 44, 48, 52).

BISTRIȚA (Reg. Cluj). Absolvent Verveagă T. (5304, 07, 09, 11, 38, 51, 54, 56, 82, 84, 90, 405). Cl. XI. Pașca Iuliu (4304, 48, 54, 56, 64, 81, 86, 96, 434, 42, 52).

BIRLAD (reg. Iași). *Complexul școlar.* An I. Bosinceanu Viorica (E: 1550, 59—61, 74, 78, 79, 83), Chiricuță Jenica (E: 1555, 59—61, 70, 71, 74, 79, 83), Crăiță Aurica (E: 1559—61, 70, 71, 74, 78, 79, 83), Donea Paraschiva (E: 1559, 61, 63, 70, 74, 83), Hamza Socrate (E: 1555, 59, 60, 63, 70, 71, 74, 79, 83), Melinte Maria (E: 1559—61, 63, 70, 71, 74, 79, 83), Miclăuș Valeria (E: 1559, 61, 68, 70, 71, 74, 83), Mursa Ioan (E: 1555, 59—61, 63, 70, 71, 74, 79, 83), Sanda Elena (E: 1559—61, 63, 70, 71, 74, 78, 79, 83), Todirechi Corina (E: 1559—61, 70, 71, 74, 78, 79), Turlea Maria (E: 1555, 59—61, 65, 70, 71, 74, 78, 79, 83). Cl. VIII. Boidache Gavrilă (E: 1559—61, 69—71, 73, 74, 77—79, 87, 92, 94), Borzași Corneliu E: 1559—61, 67, 68, 84, 89, 91, 93, 600, 10, 57, 65), Chirică Jachi (E: 1555, 59, 60, 70, 71, 73, 74, 79, 84, 87, 89), Epștein Max (E: 1571, 73—75, 77—79, 81, 84, 86, 87, 99, 600, 05, 10), Glieman Loșna (E: 1573, 74, 78, 81, 87, 89, 91, 93, 97, 600, 05, 10, 13), Gradu Mihai (E: 1573, 74, 77, 78, 81, 87, 93, 97, 600, 05, 10, 13), Jechiu Lucian (E: 1572, 74, 78, 81, 87, 89, 91, 93, 97, 600, 05, 10, 13), Partenie Magda (4365, E: 1558—60, 65, 70, 71, 77, 81). Cl. IX. Iordan Dumitru (4351, 52, 65, 67, 82, 89, 98, 99, 431, 34). Cl. XI. Tuțu Cicerone (4302—09, 15, 30).

BLAJ (reg. Brașov). *Ș.m.* „Iacob Mureșan". Cl. IX. Berar Aurel (4351, 65, 69, 71, 81, 82, 91, 420, 44, 81, 90), Cristea Rodica (4351, 65, 69, 71, 81, 82, 91, 420, 81, 90), Popa Monica (4365, 69, 71, 81, 82, 91, 419, 20, 52, 81), Radu Olga (4365, 69, 71, 81, 82, 91, 420, 44, 81, 90).

BORCA (Ceahlău-Bacău). Cl. VIII. Macovei Ileana (4452, E: 1571, 73, 74, 76—79, 81, 84, 89). Cl. IX. Dram Mihai (4312, 15, 59, 69, 71, 81, 82, 98, 99, 447, 53).

BOLINTINUL DIN VALE (Reg. București). Cl. VIII. Nicolescu Anton (4207, E: 1561, 71, 73, 74, 81, 84, 87, 89, 91, 93, 96, 98, 610), Tatulescu Ion (E: 1561, 71, 73, 77, 81, 84, 91, 610, 74, 89, 93, 96, 98).

BOTOȘANI (Reg. Suceava). Cl. V. Ionescu Mioara (E: 1555, 59, 63, 70, 74, 79, 83, 84, 94, 97). Cl. X. Dumbrăveanu Lucian (4098, 99, 105, 09, 31—34, 36, 42, 45, 52—54, 66, 68, 71, 75, 77). Cl. XI. Vaizer Gherta (4354, 55, 60, 62, 65, 68—70, 80—84, 96).

BRAILA. *Ș.m. 1.* Cl. VIII. Hendoreanu Emil (E: 1573, 78, 87, 89, 91, 605—09), Lang Lili (E: 1577, 78, 79, 81, 84, 89, 91, 600, 05, 16). Cl. IX. Gherguș Felicia (4369, 82, 89, 91, 98, 99, 433, 41, 52, 53). Cl. XI. Constanda Cristian (4302—09, 12, 14), Gherguș Georgeta (4365, 69, 80, 82, 91, 96, 418, 19, 33, 52), Miron Augustin (4303, 05—09, 12, 14, 24, 42, 47, 48, 54, 64, 65, 69, 70, 80—83, 91). *Ș.m 2* Cl. VIII Nicolae Maria (E: 1557, 59—61, 64, 69—71, 73, 74, 77, 79, 81, 87), Taganca Doru (E: 1559, 60, 65, 70, 74, 76, 78, 87, 88, 90). *Ș.m. 3.* Cl. IX. Cazacu Elena (4319, 44, 49, 69, 73, E: 1510, 12, 13, 15, 17, 22, 47, 52, 59—61, 84, 89—91, 95, 96). Cl. X. Alexandru Nicoleta (4381—83, 98, 99, 422, 31, 34, 43, 52), Andronescu Irina (4334, 47, 51, 52, 69, 71, 80—82, 90, 91, 420), Mociulski Radu (4302, 05, 07—09, 51, 67, 69, 80, 82, 98, 99), Pană Elena (4381—83, 98, 99, 422, 31, 34, 43, 52), Pană Gabriela (4381—83, 98, 99, 422, 31, 34, 43, 52), Preda Georgeta (4381—83, 98, 99, 422, 31, 34, 43, 52).

BREAZA (Ploești). Cl. VIII. Stpica Marian (E: 1541, 43—46, 48, 52—54, 71, 74, 79). Cl. XI. Loywski Mihai (4354, 65, 80—82, 84, 85, 90, 91, 96, 412).

BRAȘOV. *Student.* Gladcenko Gh. (4302—09, 11, 12, 18, 25, 33, 38, 44, 62, 65, 69—71, 75). *Ș.m. 1.* Cl. XI. Garabedian Rodica (4302, 04, 05, 07—09, 11, 16, 19, 23, 29, 34, 38, 43, 47, 51, 52, 69, 80—83, 90, 96, 98), Șerban Doina (4302, 05, 11, 38, 42, 52, 55, 69, 75). *Ș.m. 4.* Ștefan Gheorghiu. Cl. VIII. Pincovici Matei (E: 1571, 76, 77, 79, 84, 85, 91, 94, 96, 600, 05, 10, 16), Purghel Fiorian (E: 1571, 74, 77—79, 600, 07, 10, 11, 15, 16). *Ș.m. 5.* Unirea. Cl. VI. Munteanu Mihai (4318, 27, 37, E: 1540, 42, 43, 45, 47—49, 52, 53), Vătui Florin (E: 1555, 59—63, 69, 70, 72—74, 79, 80). Cl. XI. Pleșcan Petre (4343—47, 60, 62, 64, 69, 70, 80—82, 91), Sburan Mihai (4343, 47, 48, 56, 60, 62, 67, 69, 70, 80). *Școala tehnică de maiștri* Steagul Roșu. An I. Bunea Ionel (4351, 65, 69, 80—83, 90, 99, 416). Leahu Eugen (idem), Olaru Gh. (4315, 65, 69, 80—83, 90, 99, 416), Tîrcolea Mircea (idem).

BUCUREȘTI. *Studenți. Ene P. Dumitru (fac. mat.-fiz.)* (4275, 78, 89, 90, 95, 302—09, 14—16, 19, 22, 30, 33, 36—38, 41—43,

46, 47, 49, 51, 53—55, 59—65, 67—72, 75—84, P), *Fotescu Const.* (fac. mat.-fiz.) (4302—05, 08, 38, 48, 60, 62, 64, 65, 69—71, 73, 75—82, 84, 90, 411, 16, 19, 35, 38, 40, 44, 52, 53), Georgescu Ion (Inst. petrol-gaze) (4302—05, 08, 09, 51, 70, 77, 80—82), Marinescu Viorel (fac. mat.-fiz.) (4303—05, 07, 09, 38, 70, 76, 77, 80), Piscupescu Gabriel (Inat. petrol-gaze) (4330, 37, 47, 59, 71, 73, 76—79, 81, 82, 84, 91, 95, 96, 400, 18), Abs. Bîrcă Ecaterina (4362, 70, 71, 80—84, 90, 96).

Ş.m. 1. Cl. IX. *Grigorescu Şerban* (4380—82, 85, 91, 97, 400, 07, 12, 20, 21, 27, 31, 34, 41, 43, 44, 52, 53, 67, 78, 81—84, 86, 90). Lăzărescu Toma (4342, 47, 51, 65, 69, 71, 81, 82, 91, 416). Cl. X. Răzvan Vladimir (4302—05, 07—09, 31, 51, 54, 62, 65, 69, 80—83, 96, 416, 23, 47, P).

Ş.m. 3 Ion Neculce. Cl. VII. Popescu C. Radu (E: 1555, 60, 62, 70, 73, 74, 84, 87, 94, 97). Cl. IX. Ionescu Nişcov Stefana (4381, 82, 89, 98, 99, 419, 32, 41, 56, 67).

Ş.m. 4 Aurel Vlaicu. Cl. VIII. Baciu Valentin (E: 1561, 73, 74, 77, 79—81, 84, 87, 89, 93, 94), Băiaşu Brînduşa (E: 1573, 74, 77—79, 84 87, 89, 91, 92), Boronenaţ Const. (E: 1557, 61, 64, 65, 67—70, 73, 74, 79, 87), Dincă Aurel (E: 1555, 61, 64, 73, 77, 84, 87, 89, 93, 94), Dinulescu Rodrig (E: 1573, 74, 77—79, 81, 87, 89, 91, 93, 94, 98), Dumitrescu Carmen (E: 1561, 73, 74, 77, 79—81, 84, 87, 89, 91, 94), Grigoriu Moldova (E: 1571, 73, 74, 77—79, 81, 83, 89, 96), Hanu Mihai (E: 1555, 61, 73, 77, 81, 84, 87, 89, 91, 93, 94), Ionescu Al. (E: 1564, 67, 73, 74, 77, 79, 81, 84, 87, 91, 98), Martin Maria (4309, 55, 59, 64, 65, 67, 71), Moşteanu Maria (E: 1574, 77, 79—81, 84, 87, 91, 94, 96), Nicolau Elena (E: 1573, 74, 77—79, 84, 87, 89, 91, 92), Oprescu Const. (4365, E: 1571, 77, 80, 81, 83, 84, 87, 89, 91, 94, 96), Ostap Rodica (E: 1573, 74, 77—79, 84, 87, 98, 91, 92), Puiu Ion (E: 1555, 59, 60, 70, 71, 74, 77, 79, 81, 87, 91), Săcăliş Dănuţ (E: 1567, 73, 74, 77—79, 81, 84, 87, 91, 98), Şerbănescu Doina (E: 1573, 74, 77—79, 84, 87, 89, 91, 92), Ştefănescu Mircea (E: 1571, 73, 74, 77—79, 84, 91, 94), Vasiliu Ileana (4390, 447, E: 1584, 87, 89, 96—98).

Ş.m. 6 Ilie Pintilie. Cl. VII. Şerban Teodor (E: 1540, 43, 45, 50, 52, 53, 60, 61, 70, 79). Cl. VIII. Anton Al. (4349, 67, E: 1557, 59—62, 63, 65, 67, 69, 70).

Ş.m. 7 I. L. Caragiale. Cl. VI. Anastasescu Ioana (E: 1555, 59, 60, 70, 74, 79—81, 84, 87, 88). Cl. X. Havas Robert (4341, 44, 47, 81, 82, 84, 90, 91, 405, 44). Cl. XI. *Bluoss I. Hans* (4341, 43, 44, 48, 49, 52, 54, 55, 60, 62, 65, 67, 69, 70, 71, 75, 80—83, 88, 90, 91, 94, 96, 97—400, 05, 07—09 11, 12, 16, 17, 19, 23, 25, 29).

Ş.m. 8 Emil Racoviţă. Cl. VIII. Lascu Doina (E: 1571—74, 77, 79, 81, 87, 89, 96, 605, 10).

Ş.m. 10 Zoia Kosmodemianskaia. Cl. VI. Văiţiş Anca (E: 1573, 74, 79, 84, 94, 97, 600, 04, 10, 11, 13, 14). Cl. VII Popescu Radu (E: 1570, 84, 87, 90, 94, 97, 600, 07, 15, 16). Cl. IX. Niculescu Liliana (4341, 42, 47, 51, 65, 69, 81, 82, 85, 90, 411, 12, *Elena* (4377, 80—83, 86, 88—91, 94, 96—97, 420, 52, 53, 81, 90). Cl. XI. *Finţescu Elena* (4377, 80—83, 86, 88—91, 94, 96, 400, 404, 13, 16, 18—23, 25, 26, 29, 31, 34, 38, 41—44, 51—54, 83, 86, 95), Hoară Anghel (4342, 47, 51, 54, 59, 64, 65, 69, 71, 73, 75, 77, 80, 81, 83, 91, 94, 96, 98, 418).

Ş.m. 11 Dimitrie Cantemir. Cl. VI. Rădulescu Dorin (E: 1555, 60, 66, 70, 74, 79, 84, 88—98). Cl. VII. Sep George (E: 1573, 74, 78, 79, 86, 87, 93, 94, 96, 97), Ştefărescu Mihai (E: 1564, 71, 75, 77, 78, 81, 91, 93, 96), Ursulescu Octavian (E: 1557, 59—61, 65, 64, 70, 71, 73, 75, 87, 90). Cl. VIII *Ţinţăreanu Cristian* (4248, 57, 62, 83, 86, 98, 304, 07, 09, 33, 37, 38, 48, 65, E: 1529—32, 38—50, 52—54, 57, 59—62, 64—67, 69, 70). Cl. IX. Ursulescu Florin (4380—82, 91, 420, 44, 52, 53, P). Cl. X. Gianni Emanuel (4303—09, 12, 38, 54, 69, 80—83, 419, 81), Mihu Răzvan (4302, 04, 05, 07, 09, 19, 27, 33, 38, 42, 47—49, 51, 54, 65, 67, 69, 71, 81, 82, 90, 91, 98, 99, 407, 09), Moga Mina (4380, 82, 94, 420, 47, 52, 75, 81, 83, 84). Cl. XI. Cărănescu Vasile (4377, 80, 81, 88, 90, 91, 96, 416, 19, 20, 52, 53, 55, 80, 84).

Ş.m. 12 Spiru Haret. Cl. VIII. Cristescu Valentin (E: 1557, 59—61, 64, 67, 69, 70, 73, 79). Cl. X. Brill Erny (4381, 82, 90, 91, 94, 97, 408, 16, 44, 53, 65, 80, 81, 83, 84, P), Varujan Zahregian (4351, 60, 62, 67, 69, 75, 80, 81), *Vodă Viorel* (4342, 44, 48, 51, 55, 60, 62, 75, 78, 80—82, 84, 90, 94, 96, 97, 411, 12, 16, 17, 19, 20, 25, 38, 44, 59, 61, N, P). *Ş.m. 13* Mihai Viteazu. Cl. VIII. Marinescu Radu (4365, 453, E: 1564, 69, 71, 73, 75, 77, 78, 81, 91, 93). *Ş.m. 16* Gheorghe Coşbuc. Cl. VIII. Anghel Mioara (E: 1555, 59—61, 64, 70—74, 77—81). Cl. IX. Mendelsohn Marina (4304, 05, 09, 49, 52, 69, 81, 91, 98, 99), Morgenstern Schoel (4362, 69, 70, 80,—83, 86, 98, 99, 453, 54). *Ş.m. 17* Matei Basarab. Cl. X. Vass Gh. (4351, 54, 65, 71, 81, 82, 85, 91, 420, 53). *Ş.m. 18* Mihail Eminescu. Cl. IX. Moldoveanu Teodora (4351, 54, 60, 62, 65, 67, 70, 71, 73, 90). Cl. X. Buiumovici Al. (4172, 88, 92, 94—98, 210, 13, 15, 24, 36, 42). *Ş.m. 19* Ion Creangă. Cl. XI *Olteanu S.*

Victor (4376, 77, 79—85, 88, 90—400, 04, 05, 08—13, 16—18). *Ş.m. 20* Gheorghe Şincai. Cl. XI. Făgărăşanu Teodor (4341—44, 46, 47, 51, 53—55, 59, 65, 69—71), Hîrşan Doru (4342, 51, 69, 80—82, 90, 96, 419, 20, 23, 52, 55). *Ilie Mihai* (4341—44, 46, 47, 51, 53—55, 59—62, 68—71, 75, 77, 80—84, 90, 91, 96, 97, 400, 04, 08, 11—13, 16, 18—20, 24, 27, 29, 44, 47, 50, 53, 60), Ionescu Cristian (4342, 51, 54, 65, 69, 80, 82, 90, 416), *Popa Al.* (4303, 05, 06, 14, 15, 30, 41—43, 46—49, 51—54, 56, 58, 60—62, 64, 65, 67, 69—71, 73, 75, 80—83, 85, 90, 91, 94, 96, 98—400, 07—12, 15, 18). *Ş.m. 22* Gheorghe Lazăr. Cl. XI. Ceicu Mirella (4380—82, 84, 85, 88, 91, 93, 94, 96, 405, 08, 16, 19, 20, 27, 29, 44, 48, 52, 53, 60). *Ş.m. 28* Dr. Petru Groza. Cl. VIII. Pană Mihai (E: 1561, 64, 67, 71, 76, 77, 81, 87, 89, 91, 93, 96). *Ş.m. 32* Filimon Sîrbu. Cl. VII. Florea George (E: 1557—62, 64, 66—70). *Şcoala pedagogică de învăţători.* An I. Butunoi Victoria (E: 1559, 61, 63, 74, 78, 79, 83). *Şc. de 7 ani nr. 3.* Cl. VI. Becea Aurel (E: 1555, 60, 61, 70, 72—74, 79, 81, 83, 84, 88). *Şc. de 7 ani nr. 5.* Cl. VI. Răzvan Milena (E: 1574, 79, 85, 97, 600, 07, 08, 10, 15). *Şc. de 7 ani nr. 20.* Cl. IV. Petrescu Corneliu (E: 1574, 79, 80, 84, 90, 94, 95, 60, 07, 10). *Şc. de 7 ani nr. 21.* Cl. VI. Hohoi Felicia (E: 1582, 86, 88, 600, 04, 06, 08, 10, 11, 13). *Şc. de 7 ani nr. 24.* Cl. VII. Niţă Cristian (E: 1555, 59—61, 70, 73, 74, 77, 79, 84). *Şc. de 7 ani nr. 56.* Cl. VI. Enăceanu Florin (E: 1555, 59, 60, 70, 74, 79, 84, 90, 92, 94, 95, 97). *Şc. de 7 ani nr. 76.* Cl. VII. Zenezib Silvia (E: 1555, 57, 59, 60, 62, 64, 66, 67, 69, 70). *Şc. de 7 ani nr. 82.* Cl. VII Ludwig Al. (E: 1559—61, 69, 70, 73, 74, 77, 87, 88, 90 94, 96, 97). *Şc. de 7 ani nr. 123.* Cl. VIII. Ciuceanu Mircea (E: 1560, 61, 69, 70, 84, 87, 88, 90, 92, 97). *Şc. de 7 ani nr. 130.* Cl. VI. Nicolae Elena (E: 1528, 46, 50, 53, 55, 60, 70, 84, 97), Voichiţa Elisabeta (E: 1528, 38, 43, 52, 53, 60, 70, 84, 97). *Şc. de 7 ani nr. 135.* Cl. VI. Moţoi Marin (E: 1572, 74, 79, 81, 82, 85—88, 90, 94, 95, 601, 06, 07, 13). *Şc. de 7 ani nr. 145.* Ghencea. Cl. VI. Paraschivescu Dan (E: 1555, 58—60, 70, 74, 79, 84, 97, 600, 10). Cl. VII Curavale Virginica (E: 1551, 55, 60, 74, 78, 79, 97, 600, 10, 13), Groşanu Ion (E: 1555, 59, 60, 64, 77—79, 84, 87, 89). *Şc. de 7 ani nr. 173.* Cl. VII. Ghiţescu Lucian (E: 1544, 48, 55, 72—74, 79, 84, 86, 90, 94).

BUHUŞI (reg. Bacău). Absolvent *Colbeanu Ion* (4064, 66, 67, 69, 70, 72—74, 77 80—83, 85, 91, 105, 08, 09, 12, 16, 18, 25, 31—35, 42, 43, 45—49, 52—55, 62—66, 68, 69, 71—75, 77, 78, 80, 81).

BUZĂU. Cl. VIII. Cristudor Elena (E: 1571, 73, 74, 76—79, 81, 85, 87, 91—93, 97). Cl. X. Ilie Maria (4220, 22, 34, 49, 60, 98, 319, 27, 34, 38).

BUZIAŞ (reg. Banat). Cl. VI. Custura Mariana (E: 1574, 79, 83, 86, 97, 600, 08, 10, 13), Laiter Ana (E: 1574, 79, 83, 86, 600, 08, 10, 13), Lăieţu Ion (E: 1555, 59, 60, 73, 74, 79, 85, 87, 92, 95, 97). Cl. VIII. Avram Emil (E: 1574, 77, 79—81, 84, 87, 89, 610), Borchescu Ion (4399, E: 1574, 77, 80, 81, 84, 87, 89, 610), Doma Silvia (4381, 48, 99, 407, 75, E: 1574, 79, 87, 89, 96), Faure Ion (4398, 407, E: 1574, 76, 77, 79—81, 89, 610), Foale Titi (E: 1561, 73, 74, 77, 79, 80, 87, 97), Gagea Dorica (4407, E: 1574, 77, 79—81, 84, 87, 89, 610), Jirjuţ Inel (4398, 407, E: 1574, 76, 77, 79—81, 84, 87, 89, 90, 97, 610, 13, 15), Mieşcu Viorel (E: 1574, 77, 79, 84, 87, 97, 600, 04, 10), Ristea Vasile (4399, E: 1574, 77, 79—81, 84, 87, 89, 610), Rotariu Elena (4407, E: 1574, 77, 79—81, 84, 87, 89, 610), Sămaţ Emilia (4407, E: 1574, 77, 79—81, 84, 87, 89, 90, 610), Sîrbu Nicolae (4399, 407, E: 1574, 76, 77, 79—81, 89, 610), Tendrea Veronica (E: 1574, 79, 83, 86, 97, 600, 08, 10, 13).

CALAFAT (Reg. Oltenia). Cl. VIII. Dobriţă Marin (E: 1532, 33, 42, 47, 54, 59, 60, 64, 71, 75, 77, 81, 89, 93, 96), Leoveanu Dan (E: 1559, 60, 64, 70, 71, 73, 74, 77, 81, 89, 91), Popa Gh. (E: 1532, 33, 42, 47, 51, 54, 59, 60, 69, 70, 77, 78, 81).

CĂLĂRAŞI (Reg. Bucureşti). *Ş.m. 1.* Cl. X. Costea Gh. (4348, 51, 54, 60, 65, 69, 70, 80, 82, 83, 420), Moraciu Al. (4342, 51, 54, 60, 65, 69—71, 80, 82—84, 420, 47). *Ş.m. 2.* Cl. VIII. Chivulescu Gh. (4453, 75, E: 1594, 600, 04, 05, 10, 15, 16).

CARACAL (Reg. Oltenia). Cl. IX. Bădescu Pantelie (4380—82, 93, 98, 420, 48, 52, 53, 81), Popa Emil (4347, 51, 65, 69, 71, 81, 82, 96, 420, 17, 19, 45, 52, 53). Cl. X. Păunescu Doru (4380, 82, 83, 96, 98, 99, 407, 09, 21, 22, 34, 43, 56).

CARANSEBEŞ (Reg. Banat). *Ş.m. 1* Cl. X. Demetrovici Maria (4342, 69, 71, 80—82, 408, 52, 53). Cl. XI. Băheanu Dana (4302, 03, 05, 08, 65, 69, 70, 80—82), Dragu Doina (4302, 03, 08, 09, 12, 65, 69, 70, 80—83), Suru Dorina (4356, 65, 69, 70, 80—83, 91, 96), Terme Daniela (4302, 03, 05, 08, 12, 65, 69, 70, 80—84, 96).

CIMPINA (Reg. Ploeşti). *Ş.m. 1* Cl. VIII. Brezeanu Leonard (E: 1572, 74, 76—80, 90, 91, 95—98), Dima Const. (E: 1559, 60, 63, 67, 70, 87, 89, 92, 95, 96, 98), Cîrstoiu Margareta (4302, 05, 37, 42, 47, 65, 69, 71, 82, 91, 400, 19), Diaconu Maria (4302, 37, 47, 65, 69, 80—82, 91, 400, 19, 53), Horjea Rodica (4302, 05, 09, 37, 38, 42, 47, 65, 69, 80—82, 400, 19, 53), Ilie Elisabeta (4302,

05, 09, 12, 37, 42, 47, 65, 80—83, 400, 19, 53), Ionică Maria (4305, 37, 42, 53, 65, 67, 69, 80—82, 419), Petrescu Ruxandra (4302, 04, 05, 12, 37, 42, 65, 69, 81, 92 84, 91, 400), Popa Oolimpia (4305, 37, 42, 65, 69, 81, 82, 84, 400), Popescu Mihai (4303, 05, 65, 69, 80—82, 84, 90, 91, 98, 400, 16, 53), Săvulescu Lucia (4305, 11, 12, 37, 38, 42, 65, 69, 81, 82, 84, 91, 96, 400), Sîrbu Doina (4302, 04, 05, 38, 42, 65, 81, 82, 84, 91, 400). *Ş.m. 2.* Cl. X. Petrescu Margareta (4304, 05, 07, 09, 69, 80—82, 98, 415—17), Sedai St. (4351, 54, 65, 69, 71, 80—84, 91, 93, 400), Teodorescu Viorel (4351, 52, 54, 65, 67, 69, 80—84, 89, 91, 98—400, 12). *Şc. de 7 ani Brebu.* Cl. VII. Sănică Doina (E: 1509, 71, 77, 81, 87—89, 91, 93, 96).

CIMPULUNG MOLDOVENESC (Reg. Suceava). Cl. VII. Simion Petre (E: 1555, 59, 60, 83, 87, 88, 91, 97). Cl. VIII. Miu Ion (4390, E: 1578, 81, 83, 87, 89, 90, 92, 94, 95). Cl. X. Bruja Aurora (4342, 48, 51, 54, 59, 60, 62, 65, 69, 71), Cotlarciuc Nicolae (4348, 51, 54, 59, 60, 63, 65, 69—71), Cotoia Vasile (4347, 65, 71, 80—82, 91, 420, 27, 34, 43, 58), Daniliuc Valentina (4342, 48, 51, 54, 59, 60, 62, 65, 69, 71), Dinică Maria 4348, 51, 54, 59, 60, 62, 65, 69, 70), Frăţeanu Const. (4348, 51, 54, 59, 60, 62, 65, 69—71), Hmelevschi Ghertrude (4348, 51, 54, 59, 60, 62, 65, 69, 70, 71, 80—84, 91, 96), Lazăr Al. (4342, 48, 51, 52, 59, 60, 62, 65, 67, 69, 71), Maidaniuc Olga (4348, 51, 54, 59, 60, 62, 65, 69—71), Manek Oxana (4348, 51, 54, 59, 60, 62, 65, 69—71), Mihaiuc Oltea (4348, 51, 54, 59, 60, 62, 65, 69—71), Paraschiv Dragoş (4348, 51, 54, 59, 60, 62, 67, 69, 71), Platon Mihaela (4342, 48, 49, 51, 54, 59, 60, 62, 65, 72), Pintilie Dan (4348, 49, 51, 54, 60, 65, 69—71), Procopiuc Gh. (4380—84, 91, 94. 96, 408), Rosner Igo (4348, 51, 54, 59, 60, 62, 65, 69—71), Tăranu Nicolae (4342, 48, 49, 51, 52, 59, 60, 62, 65, 67, 69, 71). Cl. XI. Strul Al. (4353—55, 62, 64, 65, 69, 71, 75, 80).

CIMPULUNG MUSCEL (Reg. Argeş). Cl. X. Bădescu Lucian (4312, 42, 53, 54, 65, 69, 71, 73, 75, 80—86, 90, 91, 411, 12, 16, 18), Pescaru Ionel (4342, 47, 48, 51, 54, 58, 69, 71, 73, 75), Voiculescu Anca (4354, 65, 69, 80—82, 90, 419, 20, 26, 44, 52).

CIMPIA TURZII (Reg. Cluj). Cl. VIII. Suciu Mihail (E: 1555, 59, 60, 64, 65, 69, 71, 73, 74, 77, 79, 81, 85, 87). Cl. X. Suciu Ion (4347, 62, 65, 67, 69, 72, 81, 82, 91, 98, 420, 43, 44, 51, 52).

CLUJ. *Studenţi:* Brînzan Romanel (Inst. Politehnic) (4257, 65, 80, 81, 96, 405, 11, 12, 16, 19), *Lungu Şerban* (4304, 07—09, 14, 15, 18, 19, 31, 33, 36, 37, 49, 51, 52, 53, 56, 58, 60, 64, 65, 67, 69—71, 73, 76—84, 90, 94, 99—403, 05, 07, 09, 21, 22, 31, 32, 34, 37, 39, 41—43. *Ş.m. 4.* Cl. VII Ilian Virgil (E: 1555, 56, 59—63, 69, 70, 72, 74, 79, 80), Marian Iuliu (E: 1540, 43, 44, 47, 48, 50, 53, 54), Weiss Gh. (E: 1555, 59—62, 64, 66, 67, 69, 70), Cl. VIII. Zidveanu Mariana (E: 1557, 59—61, 64, 66, 67, 69, 70). Cl. X. Bodea Ecaterina (4308, 65, 69, 80—82, 91, 99, 433, 51), Morariu Simona (4308, 48, 65, 69, 80, 82, 85, 91, 98—99, 433), Peteanu Lelia (4305, 07—09, 51, 65, 69, 71, 81, 82, 84, 91, 433), Tăpălagă Livia (4305, 33, 56, 65, 69, 80—82, 91, 99). Cl. X. Georgescu M. (4349, 65, 69, 80—82, 84, 90, 412, 52), Neagoe Dumitru (4342, 47, 51, 59, 65, 69, 71, 80—82, 90, 416, 20, 53). Cl. XI. Morariu Vasile (4377, 80—83, 96, 419, 52), Pop Florin (4351, 68, 77, 80—84, 96, 409, 20). *Ş.m. 5.* Cl. VIII. Man Eugenia (E: 1557, 59—61, 64, 66, 69, 70, 72—74, 78, 79, 81, 83). Cl. XI. Iosibescu Dan (4380, 82, 98, 412, 34, 37, 42, 67, 70, 73, 81, 83, 84, 93). *Ş.m. 6.* Cl. VI. Laszlo Andrei (E: 1559, 60, 74, 79, 83, 90, 92, 95, 97). Cl. VII. Palade Const. (E: 1550, 70, 73, 74, 78, 83, 84, 87), Weisz Gh. (E: 1559—62, 69, 70, 73, 74, 80, 81). Cl. VIII Bejinaru Nicolae (E: 1559, 60, 70, 73, 79, 84, 87, 96—88), Filip Raluca (E: 1571, 73—75, 77, 79, 84, 89, 91, 96), Holan Suzana (E: 1555, 72—75, 77—79, 81), Săndulescu Const. (4398, 99, E: 1561, 70, 73, 74, 77, 79, 84, 90, 97). *Ş. m. 7.* Cl. V. Cîmpianu Radu (E: 1555, 74, 79, 84, 94, 97, 600, 04, 10, 11, 14). Cl. VI. Liteanu Victor (E: 1574, 79, 83, 84, 94, 97, 600, 01, 04, 08, 10). Cl. VIII. Cîndea Dan (E: 1560, 61, 67, 69—71, 73, 74, 89, 90, 96, 97), Cosma Ecaterina (E: 1561, 67, 69, 73, 76, 84, 87, 89, 91, 98), Feneşan Monica (E: 1567, 70, 71, 73, 74, 79, 84, 89, 91, 96, 98), Liteanu Margareta (E: 1559—61, 69, 70, 73, 74, 84, 87, 89, 91), Lupşa Ileana (E: 1561, 69—71, 74, 75, 79, 84, 87, 89, 91, 96), Mocanu Rodica (E: 1560, 51, 57, 70, 73, 77, 84, 87, 89, 91, 98), Petruţa Viorica (E: 1548, 55, 56, 60, 61, 70, 73, 74, 79, 89, 91, 98), Tessler Edita (E: 1561, 69—71, 73, 81, 84, 87, 89, 91, 96).

Inst. pedagogic de învăţători. An. II. Rezli Livia (4365, 81, 82, E: 1561, 69, 71, 73, 79, 81, 87), Rusu Cornelia (4365, 81, 82, E: 1561, 69, 71, 73, 79, 81, 87). An. III. Dan Florica (idem), Dobocan Maria (4365, 81, 82, E: 1561, 69—71, 73, 79, 81, 87), Farcaş Viorica (4365, 81, 82, E: 1561, 69, 71, 73, 79, 81, 87). *Şc. medie muzică.* Cl. VI. Farcaş Petru (E: 1555, 69, 53, 83—84, 87, 90, 92, 94, 95, 97). *Ş.m. educ. fizică.* Cl. X. Berinde Titus (4365, 69, 71, 80—82, 90, 98, 409, 16, 18).

CONSTANŢA (Reg. Dobrogea). *Abs.* Coman Dragoş (4376, 77, 79—84, 88, 91, 96,

400). *Ş.m. 1.* Cl. IX. Brînzănescu Vasile (4369, 71, 80—82, 412, 16, 20, 44, 52). Cl. XI. Bădică Dan (4356, 98, 99, 431, 34, 37, 41—44, 56).

CORABIA (Reg. Oltenia). Cl. VI. Bălteanu Nicolae (E: 1584, 92, 94, 95, 97, 98), Belu Constanţa (E: 1540, 43, 48, 74, 79, 80, 83, 84, 92, 97), Enăceanu Elena (E: 1540, 43, 48, 59, 70, 84, 92, 95, 97), Enescu Alexandra (E: 1540, 43, 44, 48, 74, 80, 84, 92, 95, 97), Roşca Viorica (E: 1540, 43, 48, 74, 79, 80, 83, 84, 92, 97), Segărceanu Florica (E: 1501, 38, 40, 42, 44, 52, 54, 84, 92), Steplecaru Iulia (E: 1540, 43, 48, 73, 74, 84, 92, 95, 97). Cl. VIII. Alexandru Nicolae (E: 1555, 59, 69, 72, 74, 78, 79, 84, 87, 90, 98), Bolborea Petre (E: 1555, 59, 60, 70, 74, 77, 79, 84, 94, 97), Dianu Florin (E: 1555, 69, 72, 74, 78, 79, 84, 87, 90, 98), Dimineaţă Elena (E: 1571, 73, 75, 77, 78, 81, 87), Dimulescu Aniela (idem), Filip Nicolae (E: 1540, 43, 44, 52, 74, 90, 92, 95, 97), Florica Ion (E: 1555, 59, 60, 70, 74, 77, 79, 84, 94, 97), Naftali Gh. (E: 1555, 69, 72, 74, 78, 79, 84, 87, 90, 98), Nina Sonia (E: 1571, 73, 75, 77, 78, 81, 87, 89), Poia Şt. (4419, E: 1555, 60, 66, 78, 86, 87, 93), Stoica Marina (E: 1553, 71, 75, 77, 78, 81, 87), Vîrdol Leonida (E: 1555, 59, 60, 70, 71, 73, 77, 79, 81, 84, 94). Cl. IX. Dădulescu Magdalena (4381, 82, 90, 91, 93, 98, 400), Cl. XI. Tătaru Al. (4315, 37, 54, 60, 62, 65, 79, 71, 73, 91, 96, 412).

CRAIOVA *Ş.m. 3.* Cl. X. Stănculescu Irina (4354, 69, 75, 80—84, 411, 16, 19, 27, 44, 51, 52), Stoia Manuela (4349, 53, 62, 80—82, 85, 90, 91, 93, 411—13, 16). Cl. XI. Pavel Radu (4307, 11, 38, 42, 48, 51, 54, 60, 62, 65, 67, 69, 70, 80, 82—84). *Ş.m. 4.* Ţînţăreanu Ermina (4460, 80, 81, 84, 94, 412, 18, 34, 39, 42, 43). *Şc. de 7 ani nr. 2.* Cl. VII. Iordănescu Ana (E: 1571—81).

*Şc. de 7 ani nr. 9.**). Cl. VI. Andrei Janeta (E: 1555, 59, 63, 70, 74, 79, 83, 84, 92, 94, 97), Boian Angela *(idem)*, Modîrcă Daniela *(idem)*, Perianu Elisabeta *(idem)*, Stancu Mariana *(idem)*, Tîrcă Aurelia *(idem)*. Cl. VII. Vasile Ion (E: 1562, 71—74, 77—79, 84—86, 90, 94—96). *Şc. de 7 ani nr. 10.* Cl. VII. Nicolaescu Vasile (E: 1557, 60—62, 70—75, 77, 79, 84—86). *Ş.m. electroputere.* Cl. VIII. Cotoi Florea (4475, E: 1577, 79, 84, 85, 95, 607, 08).

Şc. pedagogică de învăţători.* An. I. Ana Emilia (4416, E: 1573, 74, 76, 77, 79, 81, 83, 84, 89, 91), Catană Ilie (4416, E: 1574, 79, 80, 83, 84, 87, 89, 91, 94, 97, 98), Cîrstoiu Aurora (4416, E: 1513, 74, 76, 77, 79, 81, 83, 84, 89, 91), Cojocaru Elena (4416, E: 1571, 73, 74, 78, 79, 83, 84, 87, 89, 91, 93, 96—98), Cojocaru Gheorghiţă (4416, E: 1513, 74, 76, 77, 79, 81, 83, 84, 89, 91), Costache Nicolae *(idem)*, Curcă Angela *(idem)*, Dumitru Eugen (4416, E: 1574, 79, 80, 83, 84, 87, 89, 91, 94, 97, 98), Dumitru Maria *(idem* cu Cîrstoiu), Floricel Ion *(idem)*, Georgescu Gh. *(idem)*, Ghiţă Marin (4416, E: 1573, 74, 76—79, 81, 83, 87, 89, 81, 93, 96, 97), Georgi Ion *(idem* Cîrstoiu), Iordache Florin *(idem)*, Mihăilescu Mihai *(idem)*, Oproiu Ileana *(idem)*, Purcărelu Al. (E: 1574, 76—79, 81, 84, 87, 89, 91, 93, 95—97), Sandu Al. *(idem* cu Catană), Stan Viorica *(idem* cu Cîrstoiu), Stoian Maria *(idem* cu Catană), Uţă Ion (*idem* cu Cîrstoiu), Velea Florea *(idem)*, Vîlcu Gh. (4416, E: 1573, 74, 76, 78, 79, 84, 87, 89, 91, 93, 96, 97).

Ş.m. din Bechet (reg. Oltenia). Cl. VIII. Ozum Cezar (E: 1559—61, 67, 70—74, 77, 79, 81).

CRICOV (Ploeşti). Cl. VI. Matei Ion (E: 1480, 83, 84, 87, 88, 94, 99, 500, 06, 10), Tîrcă Mihail *(idem)*.

CUGIR (Braşov). *Ş.m. serală* Cl. VIII. Modoran Niţă (4349, 67, 69, 82, 89, 98, 99, 407, 32, 41—43, 52, 54, 56, E: 1577, 89, 91, 93, 96).

CURTEA DE ARGEŞ. Cl. VII. Dumitraşcu Liviu (E: 1543, 45, 50—52, 55, 59—61, 70, 71, 73, 74, 79).

DEVA (Hunedoara). Cl. VIII. Pătraşcu Maria (E: 1555, 57, 59, 60, 70, 77, 79, 91), Popescu Maric (E: 1555, 57, 59—61, 70, 86, 87, 91, 92). Cl. XI. Clipii Tudor (4302, 04, 07, 42, 69, 80, 81, 83, 96, P).

DEVESEL (Oltenia). Cl. VII. Bălăceanu Ion (E: 1574, 78, 83, 84, 94, 97, 600, 04, 08—10), Bărbuţ Gheorghiţă (E: 1574, 79, 83, 84, 97, 600, 04, 08—10), Bîrbărică Mioara (E: 1574, 79, 83, 94, 97, 600, 04, 09, 10, 14), Borugă Angela (E: 1574, 83, 84, 89, 94, 97, 600, 04, 09, 10, 14), Buligă Delia (E: 1574, 79, 83, 84, 97, 600, 04, 08—10), 14), Bumbea Dumitru (E: 1574, 79, 83, 84, 97, 600, 04, 09, 10), Curiman Şt. (E: 1574, 79, 83, 94, 97, 600, 04, 09, 10, 14), Deliu Teodora (E: 1574, 79, 83, 84, 94, 97, 600, 04, 10, 14), Drocan Cristian (E: 1574, 79, 83, 84, 97, 600, 04, 08, 14), Guţă Dan (E: 1574, 78, 83, 84, 94, 97, 600, 08—10), Ilena Ileana (E:1574, 79, 84, 94, 600, 04, 10, 14), Mimiş Cristian (E: 1574, 79, 83, 84, 94, 97, 600, 04, 09, 10, 19), Neagoe Şt. (E: 1574, 79, 83, 97, 600, 04, 08—10, 14), Pace Şt. (E: 1579, 83, 84, 97, 600, 04, 08—10), Stoica Gheorghiţă E: 1574, 79, 83, 84, 94, 97, 600, 04, 10, 14), Tigănete Valeria (E: 1574, 79, 83, 97, 600, 04, 08—10, 14), Vîlcu Silviu (E: 1574, 79, 83, 84, 97, 600, 04, 08—10, 14), Alfirii Cristiana (E: 1571, 73, 79, 83, 84, 87, 92, 94, 97), Căpăţînă Teodor (E: 1573, 74, 79, 83, 84, 86, 92, 94, 97), Cotarcea Angela (E: 1571, 73, 79, 83, 84, 92, 94, 97), Vlădimirescu Ion (E: 1571—74, 79, 82, 84, 87, 92, 94, 97). Cl. VII. Alca Dumitru (E: 1557, 60, 61, 67, 69, 72, 74,

77—79, 81), Bumbec Petre (E: 1574, 79, 83, 84, 94, 97, 604, 08—10, 14), Caraiman Ion (E: 1557, 59—61, 67, 69, 70, 72, 74, 79), Dobrin Tr. *(idem)*, Gîscă Ion (E: 1557, 60, 61, 67, 69, 71—74, 77—79, 81), Hogea Gheorghe *(idem* cu Dobrin), Iacobescu Dumitru (E: 1557, 60, 61, 67, 69, 71, 74, 77, 79, 81), Marinescu Elena (E: 1557, 59—61, 67, 69, 70—72, 74, 77, 79, 81), Perianu Șt. (E: 1557, 59—61, 67, 69, 70, 72, 74, 79), Spulbat Dumitru *(idem* cu Iacobescu).

DEJ. Cl. XI. Mican Nicolae (4380, 81, 90, 91, 416, 18—20, 44, 53), Pop Emil (4380, 82, 84, 90, 415, 16, 43, 72, 73, 80, 81, 83, 84, 96).

DIȚEȘTI (reg. Argeș). Cl. VII. Toader Gh. (E: 1555, 59—62, 69—74, 78—81, 83—87, 90, 91).

DRĂGĂNEȘTI-OLT (Argeș). Absolvent. *Raicu Viorel* (4364, 76, 77, 79—84, 90, 91, 93, 94, 96—98, 400, 07, 08, 11, 12, 15, 16, 19, 20, 22, 23, 25—27, 29, 31, 34, 37, 38, 41, 47, 48, 52, 53, 55, 59, 60).

DRĂGĂȘANI (Argeș). Cl. XI. Blidaru Ion (4360, 76, 77, 84, 88, 96, 412, 13, 19, 20, 44, 52, 53, 55, 61, 63, 72, 75, 81, 83, 84, 96, 97). Sacerdoțeanu Gh. (4360, 64, 69, 77, 80, 88, 96, 416, 44, 53, 72, 75, 84), Stănescu Cicerone (4303, 08, 48, 51, 52, 71, 80—82, 90, 91, 98, 412).

FĂGĂRAȘ (Brașov). Absolvent Vasile A. Ioan (4380—82, 420, 27, 44, 47, 53, 81, 83, 96).

FĂLTICENI (Suceava). Cl. V. Cojocaru Marinică (E: 1574, 79, 92, 97, 600, 04, 10, 11). Cl. XI. Cojocaru Mircea (4342, 48, 51, 54, 62, 64, 69, 80—83, 96, 98, 99), Cozmaniuc Const. (4302, 03, 05, 08, 42, 51, 54, 62, 64, 80—82). Marcu Maria (4302, 03, 05, 08, 14, 42, 48, 51, 54, 62, 80—82).

FETEȘTI *)-Gară (București). Cl. VIII. Anghel Marioara (E: 1546, 52, 53, 55, 57, 59, 60, 65, 70—72, 74, 77—79, 81, 84, 91, 95, 96, 600, 04, 08), Bălan Augustin (E: 1532, 46, 47, 50, 53—55, 57, 59—63, 70, 71, 77—79, 81). *Chipinski Elena* (E: 1543, 47, 52, 53—55, 59, 60, 62, 65, 67, 70—72, 74, 78, 79, 81, 84, 90, 91, 95, 96, 600, 04, 06, 08—11, 13), Cioacă Ion (E: 1532, 43, 46, 47, 50, 52—54, 60—63, 70, 74, 77—79, 81, 84, 86, 96, 99), Ciobanu Ion (4338, 47, E: 1543, 52, 53, 55, 57, 59, 60, 65, 71, 79, 85, 96), Costică Niculina (E: 1543, 47, 52, 55, 57, 59, 60, 63, 65, 70, 71, 74, 78, 79, 81), Crăciun Ioana (E: 1550, 55, 57, 59, 60, 63, 65, 70, 74, 78, 81, 89), Damian Elena (4547, E: 1543, 53, 57, 59, 60, 65, 70, 78, 79, 81), David Tudorița (E: 1543, 47, 52, 53, 60, 65, 70, 71, 74, 77—79, 81, 99), Dedu Adrian (E: 1543, 53—55, 65, 74, 96), Dima Ștefana (4369, E: 1552, 53, 55, 59, 60, 65, 70, 78, 81), Dumitrescu Didina (E: 1543, 45, 57, 60, 62, 63, 71, 74, 79, 81), Fălcescu Stanca (E: 1553, 57, 65, 70, 74, 78, 79, 81, 96), Gheorghescu Const. (E: 1546, 47, 52—54, 59, 63, 70, 78, 81), Grigore Tudorița *(idem)*. Iamandi Gh. (4575, E: 1552—54, 60, 65, 70, 77—79, 81), Ianca Stoiana (E: 1555, 57, 59, 63, 74, 78, 79, 81), Ionescu Lelia (E: 1547, 52, 53, 57, 59, 60, 65, 70, 74, 78, 79, 81, 96), Jercan Teodor (E: 1555, 57, 63, 65, 71, 79, 81, 96), Manea Biță (E: 1543, 52, 55, 57, 59, 60, 63, 74, 79, 81), Nedelcu Gh. (E: 1546, 52—55, 59, 60, 65, 70, 74, 77, 79, 81, 84, 86, 87, 91, 95, 96, 600, 04, 05, 08, 10, 11, 13), Olteanu Ion (4547, E: 1543, 52, 53, 55, 57, 59, 60, 65, 71, 79, 81, 96), Paraschiv Valentina (E: 1532, 43, 47, 55, 57, 59, 60, 63, 65, 70, 71, 74, 78, 81, 96), Pavel Maria (E: 1543, 46, 47, 52, 60, 61, 63, 65, 67, 70, 71, 74, 78, 81, 84, 91, 95, 96, 600, 04, 05, 08, 10, 11, 13), Petcu Ana (E: 1543, 47, 52, 53, 59, 60, 65, 70, 71, 74, 78, 79, 81, 84, 90, 91, 95, 600, 04, 05, 08, 10, 13, 57, 72), Petcu Eugenia (E: 1543, 46, 52, 53, 55, 57, 60, 65, 70—72, 74, 78, 79, 81, 84, 91, 95, 96, 99, 600, 04, 05, 08, 10, 11, 13), Prună St. (E: 1543, 46, 47, 53—55, 59, 60, 65, 70, 74, 78, 79, 81, 92), Spătaru Elena (E: 1543, 52, 53, 59, 60, 71, 74, 78, 81), Soare Rodica (E: 1553, 55, 57, 65, 70, 74, 78, 79, 81, 96), Stan Vasile (4575, E: 1552—54, 59, 60, 65, 70, 77—79, 81, 74), Stănescu Doru (E: 1543, 46, 47, 52, 53, 55, 59, 65, 70, 74, 78, 79), Stere Maria (E: 1543, 52, 53, 55, 57, 60, 65, 70, 71, 74, 78, 79, 81), Tatu Ion (E: 1532, 43, 46, 47, 50, 53—55, 57, 59—63, 70, 74, 77—79, 81, 86, 96), Tocariuc Georgeta (E: 1547, 52, 53, 56, 59, 65, 67, 69—72, 74, 78, 79, 81, 84, 91, 95, 96, 600, 04, 08—11, 13), Toma Maria (E: 1557, 59, 65, 70, 71, 74, 78, 79, 96), Vlad Margareta (E: 1543, 45, 46, 60, 72, 74, 84, 91, 96, 600, 04, 08—11, 13), Cl. X. Adam Ilie (4256, 78, 87, 98, 351, 81, 82, 405, 11, 12, 15, 18), Bectanir Ozdeu (4314, 51, 69, 80—82, 90, 98, 412, 16, 17), Bogdan Mariana (4305, 08, 09, 14, 51, 69, 80, 81, 405, 12), Bucur Ion (4333, 59, 62, 69, 70, 75, 80—82, 90, 99, 405, 09, 11, 12, 14, 15, 23, 25, 31, 33, 34), Chelu Aurel (4302, 05, 08, 14, 37, 51, 54, 62, 69, 80—82, 85, 90, 91, 93, 98, 99, 405, 11, 12, 15, 16, 18), Cosug Vasile (4302—04, 07—09, 12, 14, 51, 54, 62, 69, 71, 80—82, 90, 91, 405, 08, 11, 12, 15, 16, 18), Dadai Georgeta (4380—82, 90, 96, 98, 99, 405, 12, 15—17), *Drigă Maria* (4302, 05, 51, 54, 62, 69, 70, 75, 78, 80—82, 85, 90, 91, 99, 405, 09, 11, 12, 15—18, 23, 25, 31, 33, 34, 44, 47), Fumea Florica (4351, 69, 81, 90, 98, 99, 409, 11, 12, 16, 23, 31, 33, 34, 47), Gheorghe Dumitru (4405, 08, 14, 57, 80—82, 85, 90, 93, 98, 99, 405, 11, 12, 15—17), Ghiță Dumitru Dumitru (4351, 80—82, 85, 90, 93, 98, 99, 405, 11, 12, 15, 16), Grief Valente

(4333, 62, 69, 70, 75, 90, 409, 11, 12, 15, 16, 23, 25, 34, 44, 47), Iancu Elisabeta (4380—82, 98, 99, 405, 12, 15, 16, 25), Mărculeşteanu Maria (4351, 69, 80—82, 85, 90, 98, 99, 412, 16), Mocanu Const. (4351, 70, 75, 80, 82, 409, 11, 12, 18, 23, 25, 31, 34, 40, 43, 44), Oprea H. Stan (4351, 70, 75, 80, 85, 90, 405, 09, 11, 12, 15—17, 23, 25, 31, 34, 44), Peşte Mihai (4354, 62, 81, 85, 90, 93, 98, 99, 408, 11, 18, 69, 82, 91), Pismuş Lucia (4369, 80, 82, 85, 90, 99, 415, 16, 98), Pîrvu Elena (4351, 69, 80—82, 90, 98, 99, 412, 15—17), Popescu Marcel (4308, 16, 48, 51, 62, 69, 82, 90, 99, 416), Şerban Grigore (4351, 69, 70, 75, 80, 82, 90, 93, 98, 405, 11, 12, 16, 18), Stan Petre (4351, 69, 82, 405, 11, 12, 15, 18), Ştefan Tudor (4354, 62, 80, 85, 91, 93, 98, 99, 411, 15, 16), Tudorache Maria (4351, 69, 80, 81, 85, 90, 98, 99, 412, 15, 16), Văleanu Ion (4351, 69, 80, 85, 90, 98, 99, 405, 11, 12, 15, 16, 18), Văleanu Maria (4333, 34, 62, 70, 75, 80, 82, 90, 409, 16, 20, 31, 41, 47, 53), Cl. XI. Dobre Cornel (4342, 51, 54, 60, 69—71, 75, 80, 81, 83, 90, 92, 94, 96, 405, 08, 11, 12, 15, 16, 18, 33, 44).

FOCŞANI (Galaţi). Cl. VIII. Mendelson Rozica (4369, 486, E: 1564, 71, 81, 89, 91, 93, 96, 601, 09, 16), Cl. X. Kramer Eugenia (4272, 308, 80—83, 91, 400, 20, 27), Pantelimon Anton (4247—50, 56, 57, 65, 67, 71, 80, 73, 90, 95, 305—09, 16), Segal Zeilic (4302—05, 07—09, 12, 37, 54, 65, 69). Cl. XI. *Grădeanu Gh.* (4336, 43, 48, 51—53, 55, 57, 58, 61, 62, 64, 65, 67—70, 75, 77, 80—84, 88, 90, 91, 94, 96, 98, 99, 404, 11, 12, 16, 19, 23, 34, 43, 44), *Popa Nicolae* (4219, 25, 26, 28, 32—36, 68, 70, 73, 77, 79, 85—81, 96—99, 311, 17, 18, 30, 41—63, 65—85, 89—94, 96—99, 401—05, 07—09, 11—13, 16, 18).

GĂIEŞTI (Bucureşti). Cl. VIII. Ciobanu Viorel (4210, 365, 67, 80—82, 99, 405, 31, 32, 34, 51, 54, 75, 80—84). Cl. IX. Biolan Mihai (4365, 69, 80—82, 98, 99, 431—34, 52, 75, 81, 84, 86, 90, 96), Popescu Nicolae (4361, 69, 80—82, 452, 75, 81, 84, 90, 96).

GALAŢI. *Ş.m. 1.* Cl. X. Dragomir Nicolae (4381, 91, 405, 08, 20, 53, 75, 81, 83, 84), Ender Lucian (4344, 47, 51, 54, 59, 62, 65, 69—71, 73, 80, 81, 90, 93, 94, 412, 16, 18, 20, 27, 44, 52, 53). Cl. XI. Felea Victor (4341, 43—45, 47—49, 51 52, 54, 60, 62, 65, 67, 69, 71, 80—83, 90, 96, 98, 99, 412). *Ş.m. 2.* Cl. XI. Ghiţă Maria (4308, 08, 21, 80—82, 412, 16, 19, 20), Ioniţă Lidia (4377, 80, 82, 96, 418, 33, 55, 63, 75, 81, 83, 84). *Ş.m. 3.* Cl. VIII. Bălan George (4475, E: 1573, 74, 78, 79, 81, 99, 600, 04, 05, 09, 10, 13, 15), Bratu Vasile (E: 1571, 73, 74, 76, 79, 99—601, 04, 09—11, 14), Costescu Vasile (E: 1557, 59—61, 64, 66, 69, 70, 73, 75, 79, 80), Duda Gabriela (E: 1510, 71, 73, 74, 79, 81, 87, 99, 600, 09), Ismailescu Ileana (4360, 62, 64, 67, 80—82, 91, 96, 98, 99), Marcus Sergiu (E: 1557, 59—62, 64, 67, 69—75, 77, 79, 81), Zisu Vasile (E: 1574, 78, 84, 90, 92, 97, 99, 404, 05, 09, 10). *Ş.m. 4.* Cl. VIII. Aizenfeld Gineta (E: 1543, 46, 47, 52, 71—79, 81—92, 94, 96, 98), Cîrlan Const. (E: 1572—79, 81), Găzdaru Zoiţa (E: 1583—89, 91—93, 96—98), Mărăscu I. Dan (E: 1543, 46, 47, 50, 52, 71—79, 81), Melinte Iordache (E: 1555, 59—61, 71—79, 81, 87, 89, 90, 93, 97, 98), Popa Elena (E: 1557, 61, 64, 71—74, 76, 79, 81), Ţuchel Eugenia (E: 1543, 50, 52, 72—74, 77—79, 81). *Şcoala de 7 ani nr. 6.* Cl. VII. Contescu Dana (E: 1555, 60, 69, 70, 73, 74, 78, 81, 84, 89, 91, 92, 96), Dumitriu Felicia (E: 1555, 59, 60, 69, 70, 73, 74, 81, 84, 89, 91, 92), Segal Luiza *(idem)*, Ţuţuianu Emilia *(idem)*. *Şc. de 7 ani nr. 21.* Cl. VI. Bojin Gh. (E: 1555, 56, 60, 70, 74, 75, 80, 83, 87, 89, 90, 94, 97, 601, 04, 08, 10, 11), Hoha Felicia (E: 1555, 59, 60, 70, 72—74, 79, 83, 84), Ionescu Doina (E: 1555, 59, 60, 63, 72—74, 83, 84, 94), Nicolescu Dan (E: 1555, 59, 60, 70, 74, 79, 83, 84, 90, 92, 94, 87, 600, 01, 04, 08, 10, 11, 13, 14). Cl. VII. Dobrea Mariana (E: 1571, 73, 74, 78, 81, 89, 91, 93—96, 98), Teodor Sorin (4547, E: 1542, 54, 57, 58, 64, 67, 71, 78, 81, 96), Vaisman Mirel (E: 1559—61, 64, 67, 69, 70, 82—84).

GHIRDOVENI (Ploeşti). Cl. VI. Catinca Maria (E: 1529, 38, 41, 45, 50, 53, 55, 59, 60, 70), Ghica Viorica (E: 1529, 39, 41, 43, 53, 55, 59, 60, 70, 79), Nărea Georgeta (E: 1529, 38, 39, 41, 45, 50, 53, 55, 59, 60), Stănescu Mihaela (E: 1529, 38, 39, 41, 45, 53, 55, 59, 60), Ştefan Ana (E: 1529, 38, 41, 45, 50, 53, 55, 59, 70), Ştefănescu Const. (E: 1529, 38, 39, 41, 45, 50, 55, 60, 69, 70), Vîlceanu Stelian (E: 1529, 38, 41, 45, 50, 53, 55, 70, 74, 79).

GIURGIU (Bucureşti). *Ş.m. 1.* Perşoiu Zoe (4365, E: 1555, 57, 59—67, 69—74), Stănescu Veronica (E: 1559—61, 72—76, 78, 79).

GURA HUMORULUI (Suceava). Cl. VIII. Căileanu Dionisie (E: 1560, 69, 71, 74, 77—79, 87, 99, 604, 09—11), Raicher Osias (E: 1539, 60, 69, 71, 78, 79, 87, 604, 09—11, 77). Cl. X. Vaipan Neculai (4380—84, 419, 20, 23, 31, 33—35, 52, 70, 72, 75, 81, 83).

HALEŞ (Ploeşti). Cl. VI. Petre Elena (E: 1555, 59, 60, 70, 74, 79, 80, 84, 94, 98), Stanciu Cornelia (E: 1572, 74, 79, 80, 84, 88, 90, 92, 95, 97, 98). Cl. VII. Cîmpeanu Angela (E: 1564, 71—74, 77, 79—81, 84, 87, 88, 90, 93—95, 97), Lovin Georgeta (E: 1571—74, 77—81, 84, 88, 93, 94, 97), Negulescu Elena (E: 1564, 71—74, 77, 79, 81, 84, 87, 89, 90, 93, 95, 97), *Stanciu Nicoleta* (E: 1541, 43—45, 47—54, 71—79, 81, 83—85, 87—98, 600, 01, 04—08, 10, 11, 13—16), Vişan Victoriţa (E: 1561, 64, 72, 77,

84, 85, 87, 90, 93, 95, 97, 98), Zirnea Elena (E: 1561, 64, 77, 84, 85, 87, 90, 94, 95, 97, 98).

HAȚEG (Hunedoara). Cl. VIII. Petriu Emil (E: 1555, 59—66, 70—76, 78—81).

HOREZU (Argeș). Cl. VIII. Bălan Valeriu (E: 1559, 60, 70, 74, 76, 79, 89, 90, 97), Desrobitu Simion (E: 1559—61, 65, 67, 70, 73, 74, 75, 87, 89). Cl. IX. Munteanu Veronica (4305, 11, 33, 38, 48, 69, 80—82). Cl. X. Cocioabă Miko (4287, 302, 04, 09, 11, 38, 39, 60, 65, 80), Enea I. Aurel (4303, 05—07, 09, 33, 36, 48, 65, 69, 70—82, 412). Cl. XI. *Tănăsescu Miron* (4346, 48, 52—54, 64, 65, 71, 76, 80—84, 86, 91, 94, 96—98, 401, 03, 07, 08, 15, 17—20, 23, 29, 31, 33, 34, 42—44, 52, 54, 57, 60, 61, 70, 72, 75, 81, 83, 84, 86—88, 91, 95—98).

HUEDIN (Cluj). Cl. VIII. Jichici Sinișa (E: 1558, 59, 60, 70, 74, 79, 84, 87, 89, 90, 95, 99), Lazea Gh. *(idem)*.

HUNEDOARA. Absolvent Gruian Ștefan (4343, 44, 47, 48, 51, 54, 55, 60, 62, 64, 68—71, 73, 80—84, 90, 91, 94, 97, 416, 19, 20). Cl. X. Cuș Ioan (4381, 82, 85, 91, 98, 99, 407, 19, 20, 22, 31, 34, 43, 67, 70, 81).

HUȘI. (Iași). Cl. XI. Efstate Dan (4376, 77, 80—83, 97, 412, 20, 29, 44), prof. Vasilache Valeriu (P).

IAȘI. *Student Vidrașcu Traian* (fac. fizică). (4117—19, 25—29, 31—37, 40, 42—58, 62, 66, 67, 69—72, 74, 75, 77, 79, 80, 83, 85—87, 92—99, 203—08, 12—14, 20, 22, 24, 36, 38—41, 44, 46, 50, 56, 57, 65, 68, 86, 87, 98, 340, 02—05, 08, 09, 18, 33, P). *Ș.m. 1.* Cl. XI. Caceaunov Claudia (4348, 49, 51, 64, 69, 70, 77, 80—82, 85). *Ș.m. 2.* Cl. VII. Rogobete Gabriela (E: 1573, 77, 79, 80, 84, 87, 89, 94, 95, 97) Cl. VIII. Ignat Mariana (E: 1559, 60, 64, 69, 70, 73, 74, 79, 84, 87). *Ș.m. 3.* Cl. X. Bîrleanu Viorel (4353, 62, 65, 68, 70, 81, 97, 419, 44, 52, 53, 69, 71, 73), Preotu Corneliu (4342, 48, 51, 53, 55, 59, 65, 69, 80—82, 90, 93, 96, 416, 18). Cl. XI. Matei Dragoș (4342, 45, 47, 51, 53, 55, 59, 62, 80—83, 90, 91, 93, 94, 96, 97, 405, 16, 19, 20, 44, 47, 48, 52). *Șc. de 7 ani nr. 19.* Cl. VI. Baraboi Adrian (E: 1555, 58, 60, 70, 74, 79, 83, 84, 92, 97), Muscaloiu Gabriela *(idem)*.

LIPOVA (Banat). Lt. Pupăzan Nicolae (U.M. 01360) (4376, 77, 80—84, 88, 90, 91, 93, 94, 96, 415, 16).

LONEA (Hunedoara). Cl. X. Fărtat C. Radu (4406, 12, 18, 20, 27, 29, 35, 40, 47, 48, 52, 53).

LUGOJ (Banat). Cl. VII. Brînda Rodica (E: 1555, 59—62 65, 69, 70, 77, 79,). Cl. VIII. Cimponeriu Traian (E: 1540, 46, 47, 50, 54, 55, 71—74, 77, 79, 80), Doba Radu (E: 1555, 59—61, 65, 70, 83, 86, 87, 89, 91, 96). Cl. X. *Boldea Ion* (4380, 81, 83, 84, 88—91, 94, 96—400, 07, 09, 11, 12, 16—18, 20—23, 27, 31—35, 37, 41, 43, 44, 47, 52, 54, 56, 68, 70, 80, 82—84, 90). Cl. XI. *Sfetcu Ioan* (4354, 59—62, 64, 65, 69—71, 73, 75—77, 80—84, 90, 91—93, 94, 96, 97, 411, 12, 19, 20, 29, P).

Șc. de 7 ani. Cl. V. Arbalov Petru (E: 1555, 59, 60, 70, 74, 79, 84, 90, 94, 95). Cl. VII. Popovici Cornel (E: 1559, 84, 85, 88, 600, 04, 10, 70, 83, 92, 97).

MINDRA (Brașov). Cl. VII. Grama Ghiță (E: 1583, 84, 90, 92, 95, 97, 600, 04, 08, 10, 15).

MORENI (Ploești). Cl. V. Stailescu Const. (E: 1530, 46, 50, 52, 55, 60, 70, 74, 79). Cl. VI. Pleșanu Cornel (E: 1530, 38, 39, 43, 45, 50, 52, 55, 60, 74, 79). Cl. VIII. Bițică Vasile (E: 1541, 45, 46, 49, 50, 52—54), Nomicos Adrian (4390, 416, E: 1559, 60, 65, 67, 70, 74, 77, 79, 81, 84, 91, 98), Stiopu Doru (E: 1543, 49, 50, 52, 59, 73, 74, 78—80), Tocan Gabriel (E: 1555—62, 66, 70, 73, 74, 79, 80). Cl. XI. Paraschivoiu Ioan (4342, 54, 65, 67—71, 80—82, 420).

NOVACI (Oltenia). Cl. VIII. Popescu Doina (E: 1571, 73, 74, 77, 81, 87, 89, 91, 93, 96).

OCNIȚA (R. Vîlcea). Cl. VII. Hodorog Ion (E: 1573, 74, 77—79, 84, 87, 89, 90, 91), Teodorescu Vasile (E: 1573, 74, 77—79, 84, 87, 89—91).

OLTENIȚA (București). Cl. VIII. Dincă Corina (E: 1571, 73, 74, 78, 84, 87, 89, 91, 93—96, 98), Negrea Georgeta (E: 1584, 87, 89—92, 94—96, 98), Niculescu Margareta (E: 1574, 79, 84, 87, 89, 91, 93—96, 98), Postelnicu Floarea (E: 1574, 79, 84, 87, 89, 94—96, 98), Pană Elena (E: 1574, 79, 84, 87, 91, 93—96, 98).

ORADEA (Crișana). *Ș.m. 1.* Cl. X. Sarba Daniel (4365, 69, 71, 80—82, 84, 415, 20, 47, 52). Cl. XI. Hulea Ioan (4380—83, 444—60, 81, 96).

Ș.m. 4. Cl. VIII. Anonim (E: 1560—62, 64—66, 69—71, 73, 76, 78, 79, 81, 90, 91, 93, 95, 97), Ionescu Alina (E: 1571, 75, 78, 84, 87, 89, 91, 93, 96, 98), Lazăr Felicia (E: 1561, 64, 66, 67, 69, 74, 77, 79), Pleșca Romulus (E: 1559, 70—72, 75, 87, 89, 91, 93, 96, 97), Roșu Maria (E: 1561, 64, 66, 67, 69, 73, 74, 77, 79, 81), Weisz Robert (E: 1561, 64, 66, 67, 69, 73, 74, 77, 79, 81). Cl. XI. Fărcuș Irina (4307, 41, 42, 55, 56, 60, 80—84, 98, 99, 401, 03), Nistorescu Rodica (4302, 03, 05, 41—43, 55, 60, 81, 82).

ORAVIȚA (Banat). Cl. XI. Sasu Ramirol (4342, 48, 51, 54 64, 65, 69, 73, 80—83, 96).

OȚELUL ROȘU (Banat). Cl. V. Piesz Ivan (E: 1540, 41, 43, 45, 46, 48, 54, 55, 60, 74). Cl. VII. Munteanu Moise (E: 1540, 41, 45, 50, 53, 54, 59, 60, 70,. 74, 78, 79), Năvligu Ion (E: 1587, 90, 94, 95, 600, 04,

07, 08, 10, 11, 13), Roibu Emilian (E: 1558, 59, 71, 74, 76, 78, 79, 81, 88, 89).

PANCIU (Galați). Cl. VII. Anonim. (E: 1527, 29, 55, 57, 59, 60, 64, 70), Brabdapur Florin (E: 1555, 59, 60, 63, 73, 74, 78—80, 84), Filimon Mircea (E: 1555, 56, 59—61, 70, 79, 83, 87, 90, 95, 97), Manea Nelu (E: 1555, 59, 60, 63, 70, 74, 78—80, 84), Minculescu Gabriela (E: 1555, 59, 60, 63, 70, 74, 79, 80, 84, 92).

PAȘCANI (Iași). Cl. XI. Paraschiv Monica (4364, 80—83, 415, 18, 19, 44, 53).

PETROȘANI (Hunedoara). Cl. XI. Albu Toma (4342—45, 47, 54, 59, 65, 68—71, 73, N, P).

PIATRA NEAMȚ (Bacău). Cl. VIII. Tobias Sami (4475, 80, E: 1574, 77, 79, 84, 604, 10, 11). Cl. XI. Trifan Ioana (4359, 76, 77, 79—82, 84, 95, 420).

PITEȘTI (Argeș). *Ș.m. 1.* Cl. VIII. *Dimovici Sorin* (4309, 11, 19, 27, 38, 48, 65. 69, E: 1540—43, 45—50, 52—54, 57, 59—67, 70—74, 76—79, 81). Cl. IX. Mărgineanu Doru (4338, 40, 44, 47, 51, 65, 69, 71. 73, 75). Cl. X. Bejan Gh. (4381, 409, 20, 31, 34, 42, 44, 80—82), *Chiva Petre* (4302, 04—09, 12, 16, 28, 32, 33, 37, 38, 40, 54, 65—69, 71, 75, 80—84, 91, 94, 98, 99, 401, 11—16, 21, 22, 31—34, 43, 54), Petrescu Gh. (4312, 33, 40, 54, 67, 69, 75, 80—82, 98, 99, 409, 11, 15, 21, 22, 31, 34, 42 -45, 52, 81, 83, 84). *Ș.m. 3.* Cl. VIII. Grigorescu Const. (E: 1531, 32, 34, 38, 41—44 46, 47, 60), Ionescu Marcel (4365, 68, 439, 53, E: 1555, 57, 59, 60, 64, 70, 73, 74, 79, 81, 83, 84, 86, 87, 89, 90, 91, 94, 96, 98), Pană Emilia (E: 1532—34, 38—44, 48, 49).

PLOEȘTI. *Ș.m. 1.* I. L. Caragiale. *Cl. VI* Alecu Georgeta (E: 1574, 84, 87, 90, 94, 97, 600, 07, 08, 10), Andrei Const. (E: 1582, 84, 87, 88, 90, 94, 97, 600, 04, 10, 14), Andronescu Dan (E: 1584, 87, 90, 92, 95, 97, 604, 08, 10, 13), Bîzu Marius (E: 1569, 73, 74, 84, 87, 90, 94, 95, 97, 600, 07—10), Butufei Sorina (E: 1573 74, 79, 84, 87, 94, 97, 600, 04, 08, 10, 11, 13, 15), Călărașu Radu (E: 1573, 74, 84, 87, 600, 08, 10, 11, 13, 15, 79, 90, 94, 97), Dumitrescu Elena (E: 1574, 84, 87, 88, 90, 94, 97, 600, 08, 10), Georgescu Liliana *(Idem* cu Bîzu), Kapraghiaur Radu (E: 1559, 60, 74, 79, 84, 94, 97, 600, 10, 11), Pîrvu Const. (E: 1573, 74, 79, 84, 87, 94, 97, 600, 07, 08, 10, 15), Popescu Lidia (E: 1574, 84, 87, 88, 94, 97, 600, 04, 10), Saines Marius (E: 1573, 74, 79, 87, 94, 97, 600, 10), Tăbăcaru Lucia (E: 1574, 84, 87, 88, 90, 94, 97, 600, 08, 10), Tănăsescu Octav (E: 1584, 94, 95, 97, 600, 08—10, 13, 14), Ungran Adrian (E: 1559, 60, 74, 79, 84, 94, 97, 609, 10), Vasilescu Doina (E: 1573, 74, 79, 84, 87, 92, 94, 97, 600, 04, 10, 11), Vijoli Sorin (E: 1574, 84, 94, 87, 97, 600, 07, 08, 10, 79). *Cl. VIII.* Andronescu Gabriel (E: 1560, 70, 73, 74, 77, 79, 82, 84, 87, 89, 90, 97), Bădulescu Ciprian (E: 1557, 58, 61, 67, 68, 75, 77. 78, 81, 89, 91, 96), Enescu Liviu (E: 1547. 53, 59, 60, 65, 70, 72—74, 77), Filipescu Gabi (E: 1547, 53, 59, 60, 65, 70, 72—74, 77), Iancu Cezar (4405, E: 1557, 58, 61, 67, 77, 78, 81, 89, 91, 93, 96), Ionescu Lucia (E: 1558, 61, 64, 67, 68, 71, 75, 81, 91), Lampert Magdalena (E: 1557, 58, 61, 67—69, 71, 75, 78, 81, 89, 91, 93, 96), Leonte Filip (4305, 69, E: 1540—43, 45, 50, 52, 59, 61, 63, 64, 69, 70), Mendel Sorin (E: 1558, 61, 67, 68, 71, 77, 78, 89, 91, 96), Nica Vasile (E: 1571, 73, 74, 77—79, 81, 84, 87, 89, 91, 93, 96, 97, 99, 600, 01, 04, 05, 09, 10), Preda Const. (E: 1571—75, 77—81), Stoica George (E: 1571, 73, 74, 76, 77, 79, 84, 87, 89, 96, 97, 600, 04, 05, 10, 13), Tepșoiu Aurelian (E: 1556, 60, 61, 64, 69—71, 73, 74, 79), Vimard Nicolae (4405, E: 1558, 61, 67, 77, 87, 91, 93). *Cl. IX.* Aisner Sergiu (4359, 65, 68, 69, 80—82, 84, 90, 91, 400, 05, 11, 12, 20, 23, 53, 75, 81, 83, 90), Apostolescu Anca *(idem)*, Neacșu Viorel (4359. 65, 68, 69, 80—82, 90, 91, 405, 53). *Cl. X.* Bădescu Gh. (4347, 51, 80, 82, 90, 96, 416, 47, 52), Brănici Doru (4383, 90, 91, 412, 20, 33, 44, 52, 53, 61, 72, 81, 84, 96, 97), Bubeanu St. (4347, 51, 80, 82, 90, 96, 416, 47, 52), Butaciu Nicolae (4359, 71, 83, 86, 90, 91, 420, 44, 47, 52, 53, 61, 96, 97), Ciornei Lucian (4347, 51, 80, 82, 90, 96, 416, 47, 52), Cișman Ion (4380—83, 90, 91, 416, 20, 44, 47, 52, 53, 83, 84), Constantin Aurel (4359, 65, 69, 71, 80, 90, 444, 47), Cotorceanu Steliana (4342, 51, 59, 65, 69, 71, 80, 82—84, 90), Cruceru Șt. (4369, 90, 400, 33, 44, 47, 52, 53, 81, 84), Dumitrescu Dumitru (4371, 83, 84, 90, 444, 47, 52, 53, 97), Emanoil Constantin (4359, 65, 69, 71, 80—82, 84, 90, 420, 40, 44, 53), Geamănu Mihail (4371, 80, 82, 84, 90, 447, 52, 53, 61, 81), Gheorghiu Călina (4434, 42, 51, 65, 69, 71, 80, 82, 83, 90), Grigorescu Decebal (4342, 51, 59, 65, 69, 71, 80, 82, 84, 415, 44), Hristodorescu B. (4305, 42, 51, 54, 65, 69, 81, 82, 96), Ionescu Aurel (4359, 83, 90, 412, 20, 33, 44, 52, 53, 61, 81), Lazea Adrian (4302, 05, 08, 09, 42, 65, 69, 80—82, 84), Leonte Emilia (4362, 69, 80, 82—84, 86, 90, 415, 44, 52), Maxim Dan (4380—83, 90, 91, 416, 20, 44, 47, 52, 53, 83, 84), Marinescu Petre (4383, 96, 405, 18, 52, 53, 81, 84, 90, 96, 97), Matei Nicolae (4390, 412, 20, 33, 44, 47, 52, 53, 81, 84), Michețiu Const. (4347, 51, 80, 82, 90, 96, 416, 47, 52), Mihail Dan (4344, 47, 51, 80, 82, 90, 96, 452), Munteanu Mariana (4380, 82, 90, 412, 47, 52, 53, 61, 81, 97), Nicolae Ana (4342, 51, 65, 69, 71, 80, 82, 83, 90, 434), Nicolaescu Doina (4365, 69, 71, 83, 90, 420, 44, 52, 53, 97), Oprea Maria (4365, 69,

71, 83, 90, 420, 44, 52, 53, 97), Popescu Valentin (4342, 47, 51, 54, 55, 59, 60, 62, 69—71, 80, 90), Racoti Marina (4342, 51, 54, 65, 67, 59, 60, 75, 80—83, 90, 418, 19, 60, 61), Reghină Petre (4383, 84, 90, 411, 18, 20, 27, 33, 44, 47, 52, 53, 61, 74, 81, 84, 86, 96, 97), Seviatruschi Lucia (4357, 65, 69, 71, 80, 90, 443, 44, 49), Sîmbotelekan Const. (4381—83, 90, 412, 19, 44, 52, 81), Szekely Steliana (4442, 51, 59, 65, 69, 71, 80—84, 90), Teodorescu Cristian (4303, 04, 08, 09, 19, 51, 54, 65, 68, 71, 75, 81, 90, 400, 47, 84), Voicu Nicolae (4390, 411, 18, 33, 44, 47, 52, 53, 61, 81, 84), Zaharia Victor (4384, 90, 400, 33, 44, 47, 52, 53, 81, 84), Zamuel Saul (4371, 83, 90, 411, 18, 33, 44, 47, 51—53, 61, 72, 81, 84). *Cl. XI.* Andronescu Radu (4305, 51, 54, 83, 88, 444, 83, 84, 86, 96, 97), Apostol Nicolae (4302, 03, 05, 06, 08, 14, 51, 60, 80—83, 90, 94, 96, 98, 411, 31, 52), Biter Viorel (4342, 51, 54, 60, 62, 64, 65, 69—71), Chicireanu Radu (4380—84, 91, 96, 472, 81, 83, 84), Constantinescu Gabriel (4349, 51, 54, 55, 59, 60, 64, 65, 67, 69—71, 73, 75, 80—84, 89—91, 94, 96, 98—400, 09, 11), Constantinescu Iosefina (4354, 60, 62, 64, 65, 69, 75, 80—84, 90, 93, 418, 33, 48, 51—53), Costache Șt. (4342, 51, 54, 60, 65, 70, 71, 80, 481, 84), Dolete I. Ioan (4302—09, 54, 60, 63, 69, 80—93, 94, 96, 444), *Drugea Gh.* (4312, 14, 28, 53, 59, 64, 73, 75, 80—84, 89—91, 94, 96, 98—400, 09, 11, 19, 21, 22, 31, 32, 34, 43, 53, 55, 60, 61, 63, 70, 72, 75, 80, 81, 83, 96), Ene Nicolae (4380—84, 89—91, 94, 96, 98, 99, 407, 18, 22, 31, 43, 51—53), *Ene Traian* (4302, 03, 06, 08, 14, 19, 33, 37, 49, 51, 53—55, 59, 60, 62, 69—71, 73, 75, 80—83, 89—91, 93, 94, 96, 98—400, 09, 20, 34, 43, 47, 51), Gălățeanu Adrian (4351, 54, 75, 81, 83, 444, 72, 83, 84), Georgescu Ioan (4380—84, 89—91, 94, 96, 98, 99, 407, 18, 22, 31, 43, 52, 53), Grosescu Ioan (4365, 70, 81, 82, 412, 19, 72, 81, 83), Habat Paul (4305, 42, 58, 60, 62, 64, 65, 69, 70, 75, 80—84, 90, 418, 35, 51), Jelea Gabriel (4359, 60, 62, 64, 65, 69, 70, 75, 80, 83, 84, 90, 93, 94), Lungu Anca (4314, 54, 60, 62, 70, 74, 86—89, 93, 96, 99, 407, 18, 20, 31, 52), Manu Florian (4380, 81, 96, 411, 72, 80, 81, 96), Marinescu Al. (4354, 60, 62, 65, 69, 70, 74, 80—84, 90, 93, 94, 418, 25, 38, 52), Micu Octavian (4444, 51, 54, 60, 62, 83, 84, 96, 97), Nicolae Gh. (4307, 09, 53, 419, 21, 31, 34, 52, 61, 72, 80, 81, 96), Nicolae I. Nicolae (4341, 42, 51, 53, 60, 62, 64, 65, 67, 69, 70, 75, 77, 80, 82—84, 90, 93, 418), Nicolescu Mihaela (4304, 07, 14, 51, 60, 64, 67, 69, 70, 80—83), Oniga Sanda (4342, 48, 51, 54, 60, 61, 65, 67, 69, 70, 75, 77, 80—84, 90, 418, 19), Patron Nicolae (4305, 07, 09, 51, 96, 420, 26, 44, 53), Pechiu Traian (4377, 80—83, 419, 20, 29, 44, 63, 70, 83, 96), Piticu Mihai (4351, 75, 83, 444, 54, 72, 81, 83, 84, 90, 97), Rădulescu Mircea (4354, 75, 81, 83, 96, 419, 44, 52, 61, 83, 84, 96, 97), Reus Liviu (4305, 51, 54, 60, 62, 69, 75, 82, 83, 88), Ștefănescu Mihai (4354, 60, 62, 69, 75, 82, 83, 84, 96, 419, 20, 44, 52, 81, 83, 84, 96, 97), Vlășceanu N. Mihai (4365, 77, 96, 419, 20, 72, 81, 83, 84).

Ș.m. 2. Cl. IX. Georgescu Petre (4304, 09, 38, 65, 69, 71, 81, 82, 400, 05, 12, 20). Cl. X. Bulău Emilia (4342, 51, 59, 65, 69, 81, 82, 90, 98, 420, 44), Haralambie Elisabeta (4351, 62, 69, 76, 80—83, 419, 44, 52), Petrac Al. (4342, 51, 65, 69, 81, 82, 91, 98, 420, 44), Petrescu Teodor (4351, 65, 67, 69, 81, 82, 91, 98, 420, 43, 44), Stere Vasile (4342, 44, 51, 65, 69, 81, 82, 91, 98, 420). Cl. XI. Dogaru Sanda (4351, 56, 94, 419—22, 31, 34, 41—43), Vetrici Mariana (4342, 51, 69, 70, 75, 80—82, 88, 94, 420). *Ș.m. 3.* Cl. VII. *Cepoiu Mariana* (E: 1540, 41, 43,—46, 49, 51, 52, 54, 55, 57, 59—64, 66, 67, 79—71, 73, 75, 77, 78, 80, 83, 84, 86, 87, 89—91, 93, 95—98). Cl. IX. Stăvaru Cristina (4308, 44, 51, 65, 71, 80—82, 90, 412, 16, 18—20, 52). Cl. X. Florescu Mihai (4369—71, 75, 80—82, 411, 19, 20), Stănoiu Cezar (4341, 70, 75, 84, 411, 15, 19, 20, 44, 53). *Ș.m. 5.* Ionescu Adrian (4365, 69, 71, 75, 91, 97, 400, 08, 12, 16), Zamfir Luca (4312, 16, 19, 20, 41, 42, 44, 47, 90). *Ș.m. 6.* Cl. IX. Pătrașcu Tudor (4302, 04, 05, 07—09, 51, 73, 82, 411, 12). *Șc. de 7 ani Tisău.* Cl. V. Cîmpeanu Valerica (E: 1555, 59, 63, 70, 74, 79, 81, 84, 95, 99), Vișan Maria (E: 1555, 59, 63, 70, 74, 79, 81, 84, 95, 99).

PREDEAL. Cl. VII. Ioniță Maria (E: 1561, 69, 71—73, 77, 78, 80, 81, 83, 84, 87, 89—95, 99).

PUCIOASA. Cl. VIII. Matei Gh. (4369, E: 1564, 67, 69, 73, 78, 91, 96—98), Struciu Eugenia (E: 1560, 65, 70, 73, 74, 77, 79, 81, 87, 88, 91, 92, 96), Cl. IX. Ene Ioan (4304, 05, 09, 19, 38, 47, 59, 67, 69, 71 81, 82), Rădoi Nicolae (4380—82, 90, 93, 98, 400, 07, 11, 31, 34, 44, 56). Cl. X. *Banu Gh.* (4342, 47, 52, 75, 76, 80—84, 83—91, 94, 96, 97, 407, 09, 11, 12, 15, 16, 18, 21, 22, 31—34, 40—44, 47, 52—54, 56, 61, 75, 84, 97), Constantin Mircea (4302, 43, 47, 69, 80—83, 90, 93, 416). Davidescu Victor (4337, 42, 43, 47, 69—83, 90, 93, 416), *Longhin Șerban* (4342, 68, 71, 75, 76, 80—84, 88, 90, 91, 93, 94, 96—400, 07, 09, 11, 12, 15—22, 24, 27, 31—35, 40—44, 47, 51—54, 56, 61), Popa Nicolae (4302—09, 15, 19, 21, 26, 27, 33, 37, 38, 54, 65, 69), Popescu Gh. (4342, 43, 47, 48, 54, 56, 62, 65, 67, 69—71, 80—83, 90, 93, 416), Radu Gh. (4302, 04—09, 11, 12, 15, 37, 38, 41, 42, 47, 51, 54, 59, 65, 69, 71, 80—83, 90, 91, 93, 96, 97, 412, 16), Sencovici Mihaela (4303, 05, 42, 48, 54, 62, 65, 67, 69, 87), Stoica Aurelian (4303,

05, 08, 11, 19, 21, 27, 42, 48, 54, 59, 70, 80, 81). Cl. XI. Popescu S. Gh. (4303—06, 08, 12, 14, 15, 18, 19, 33, 81, 84, 87, 90, 98, 99, 407, 19—22, 34, 35, 42).

REȘIȚA. Cl. VI. Farbaș Enric (E: 1541, 45, 48, 53, 60, 70, 74, 79, 84, 94, 97), Peter Gabriela (E: 1541, 45, 46, 48, 49, 53, 70, 74, 79, 84, 94, 97), Raica Ana (E: 1515, 38, 39, 43, 45, 50, 52, 53, 59, 60, 70). Cl. VII. Köstner Edith (E: 1543, 52, 60, 61, 70, 79, 83—87, 89—95, 97).

RIMNICU VILCEA. (Argeș). Cl. VII. Cismaru Valentin (E: 1560, 70, 73, 74, 79, 84, 87, 90), Droașcă Bogdan (E: 1560, 62, 64, 73, 78, 85, 87, 88, 90, 95, 96), Timplaru Const. (E: 1573, 74, 77—79, 84, 87, 89—91). Cl. VII. Răduț Monica (4389, 98, 9, E: 1571—81). Cl. X. Preoteasa Petre (P). Cl. XI. Mihăescu Adrian (4345, 47, 54, 64, 65, 69, 73, 80, 81, 83), Mironescu Mircea (4341, 42, 44, 45, 47, 51, 54, 59, 60, 62, 64, 69, 70, 75), Popescu Virgiliu (4377, 80—84, 94, 96, 98, 412, 15, P).

ROMAN. Cl. VIII. Borș Adrian (4338, E: 1542, 43, 51, 53, 57, 64, 69, 81). Cl. IX. Niculescu G. G. (4347, 59, 65, 69, 71, 81, 91, 93, 400, 53, P). Cl. XI. Cănilă Const. (4351, 54, 59—62, 65, 69—71, 77, 80—85, 91, 94, 96, 416).

SĂVENI (Suceava). Cl. VII. Ciubotaru Nati (E: 1559, 60, 67, 74, 77, 79, 81, 96). Cl. VIII. Sanitescu Gh. (4418, 33, E: 1555, 59—61, 67, 69—71, 73, 74, 79, 81). Cl. X. Zoler David (4348, 81—84, 86, 96, 413, 18, 33, 52).

— Elevii claselor IX—XI nu vor trimite soluții la problemele propuse pentru școala de 7 ani. Problemele rezolvate trebuie să fie din ultimele trei numere apărute ale G.M.F.B. și vor fi trimise numai odată în cursul unei luni. Problemele de matematică vor fi expediate într-un singur plic și vor fi însoțite de un borderou cu numerele problemelor scrise în ordine crescîndă. Idem pentru problemele de fizică. Pe plic se va scrie localitatea și școala pe care o urmează rezolvitorul. La rubrica rezolvitorilor nu se vor anunța decît cel puțin 10 probleme bine rezolvate.

CONCURS PENTRU ELABORAREA UNOR PROBLEME LEGATE DE PRACTICĂ

Gazeta matematică și fizică seria B organizează un concurs pentru grupuri de probleme cu un conținut care să reflecte legătura matematicii și fizicii cu practica. În acest scop, participanții la acest concurs vor trimite pînă la 1.X.1961 un număr de cel puțin 15 probleme împreună cu soluțiile lor într-un plic cu un motto, iar în interiorul plicului se va pune un altul mai mic, sigilat pe care se scrie același motto și care va conține numele și adresa autorului sau a autorilor.

Nu vor fi luate în considerare decît acele probleme care nu au apărut în alte cărți și reviste.

În funcție de calitatea și numărul problemelor se vor acorda premii în bani și se va asigura publicarea lor în periodicile Societății de științe matematice și fizice din R.P.R.

Pe plicurile trimise pe adresa redacției din str. Academiei nr. 14 — București, se va face mențiunea „Pentru concursul de probleme practice".

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ ȘI FIZICĂ 1961

pentru elevii școlilor medii, profesionale, pedagogice, tehnice.

Etapa finală va avea loc în zilele de 23—25 aprilie 1961, la București; ea va consta din: lucrări scrise, probe orale și lucrări de laborator.

CĂTRE REZOLVITORII DE PROBLEME

Corespondenții care ne trimit probleme rezolvate trebuie să redacteze fiecare problemă separat, însoțind-o de toate calculele necesare și de figuri desenate cu îngrijire. Nu se vor trimite soluțiile mai multor probleme pe aceeași foaie. Problemele rezolvate de fizică se vor trimite separat, iar pe plic se va scrie: *Pentru redacția de fizică.*

Se primesc lunar cel puțin zece soluții numai la problemele și exercițiile din ultimele trei numere apărute. Pe plic se va scrie localitatea și școala pe care o urmează rezolvitorii, pentru a se evita confuzii la întocmirea rubricii rezolvitorilor de probleme și a listei celor evidențiați. Soluții la problemele propuse pentru școala de 7 ani se primesc numai de la elevii claselor V—VIII, sau ai școlilor profesionale.

Problemele care se propun de către colaboratorii revistei să fie clar alcătuite și însoțite de soluții, să fie personale, iar nu luate din cărți sau reviste. Elevii sînt sfătuiți să înceapă a propune probleme numai după ce au rezolvat un număr destul de mare de exerciții și probleme. Problemele propuse, dar necorespunzătoare, nu se pot publica. Dacă un corespondent constată că unele probleme propuse au fost publicate în cărți sau reviste, este rugat să ne arate precis volumul și pagina unde a mai apărut enunțul sau soluția problemei respective.

Corespondentul nostru care a citit și a înțeles deplin multe din soluțiile publicate, a rezolvat multe din problemele propuse, poate și este îndemnat să încerce să schițeze cîte o notă rezultată dintr-o observație făcută cu ocazia rezolvării unei chestiuni mai grele. Aceste note să fie *refăcute de mai multe ori înainte de a fi trimise,* pentru ca redactarea lor să fie *cît mai clară și concisă.* Figurile să fie făcute separat. În redactare se vor evita prescurtările. Nu se va scrie: $\parallel$, $\perp$, $\parallel =$, Δ, $\sphericalangle$, Tr., etc. iar trecerea de la un calcul la altul să fie explicată pentru a se putea urmări ușor desfășurarea unei demonstrații. Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

La publicarea problemelor rezolvate se vor menționa rezolvitorii care au dat o bună redactare și o soluție interesantă, sau mai multe metode de rezolvare.

Tovarășii colaboratori elevi sînt rugați să ne trimită date asupra activității lor extrașcolare la matematică și la fizică, asupra activității cercurilor de matematică și de fizică la care iau parte, pentru ca apoi, prin revistă, să se poată realiza cu succes un schimb de experiență. Dările de seamă concrete se vor publica în G.M.F.-B.

Autorii sînt rugați ca la întocmirea articolelor și notelor să țină seama de următoarele: articolele sau notele să fie scrie clar cu cerneală sau dactilografiate la două rînduri și pe o singură parte a foii, figurile să fie desenate îngrijit și pe o foaie separată. Problemele propuse să fie însoțite de una sau mai multe soluții.

Autorul să semneze clar lucrarea personală pe care o trimite pentru publicat, de asemenea să scrie adresa și data trimiterii lucrării.

— Materialele care nu corespund profilului G.M.F.-B, nu vor fi publicate.

Colecții și numere din anii precedenți

Societatea de Științe Matematice și Fizice din R.P.R., posedă exemplare mai vechi din G.M.F.-B., și G.M.F.-A.

Cititorii noștri își pot procura colecții ca și numere disparate, depunînd banii la poștă prin mandat poștal pe numele Societății de Științe Matematice și Fizice, strada Academiei nr. 14, contul 070.004 la B.R.P.R., filiala Lenin.

Prețul unui exemplar este de lei 3 pentru G.M.F.-A și de lei 1,50 pentru G.M.F.-B. Cheltuielile de transport sînt de 0,20 lei de exemplar.

ABONAMENTE — Societatea de Științe Matematice și Fizice din R.P.R. primește abonamente începînd cu nr. 1/1961 la oricare din publicațiile sale:

a) Pentru instituții, școli, biblioteci la prețul de lei 60 anual, pentru fiecare din periodicile sale: G.M.F.-A, G.M.F.-B, M.F.L., Bulletin Mathématique și 40 lei anual la „Mathematica".

b) Pentru profesori și elevi la prețul de 18 lei la G.M.F.-B sau M.F.L. de 36 lei la G.M.F.-A, de 60 lei la Bulletin Mathématique și de 40 lei la „Mathematica".

— Fiecare abonat este rugat să facă cunoscută G.M.F.-B și altor colegi, pentru a face abonamentele din vreme în vederea planificării tirajului lunar.

— Abonamentul se poate face individual sau colectiv prin oficiile poștale locale sau prin factorii poștali.

Tipografia Învățămîntului, București — c. 666

Lei 1,50

E 1426

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE
DIN R. P. R.

GAZETA MATEMATICĂ ȘI FIZICĂ

(SERIA B)

Anul XII mai 1961

5

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

(SERIA B)

Anul XII, nr. 5 — mai 1961

SUMARUL

	Pag.
1. O glorioasă aniversare	257
2. Transformări geometrice în optică de Constantin Ionescu-Bujor	260
3. Cibernetica de Edmond Nicolau	269
4. Asupra unor sume de Dan V. Bretan	276
5. Ce sînt electreţii (traducere)	280
6. Probleme rezolvate (4224; 4242; 4246; 4251; 4254; 4267; 4271; 4272; 4278; 4282; 4283; 4288; 4295; 4312; 4313; 4315; 4316; 4317; 4318; 4319; 4323; 4325)	282
7. Chestiuni de examen (4672—4681)	302
8. Probleme propuse (4682—4715)	303
9. Exerciţii şi probleme propuse pentru şcoala de 7 ani (E: 1676 — E: 1687)	309
10. Din activitatea cercului de matematici pe Capitală pentru clasa a X-a	310
11. Cărţi noi	313
12. Rubrica rezolvitorilor de probleme	313

ANUL XII **5** MAI

COMITETUL DE REDACŢIE

Ailincăi M., profesoară; *Atanasiu V.*, lector, redactor pentru fizică; *Boiangiu D.*, lector; *Ionescu-Bujor C.*, prof. univ.; *Ionescu-Tiu C.*, profesor, redactor pentru matematică; *Manolescu St.*, profesoară; *Muşat I.*, profesor; *Petrovanu A.*, profesor; *Sacter O.*, conf. univ., redactor şef; *Simionescu D. Gh.*, conf. univ.; *Csiki Zoltan*, asistent.

REDACŢIA: Str. Academiei, 14 — Tel. 14.46.53 — Bucureşti I

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar putea interesa redacţia noastră se vor trimite pe adresa de mai sus.

GAZETA MATEMATICĂ ȘI FIZICĂ

(SERIA B)

PUBLICAȚIE LUNARA PENTRU TINERET

Anul XII, nr. 5 mai 1961

O GLORIOASĂ ANIVERSARE

Oamenii muncii din țara noastră au sărbătorit la 8 mai 1961, unul din cele mai însemnate evenimente din istoria poporului romîn: aniversarea a 40 de ani de la înființarea Partidului Comunist din Romînia.

În preajma acestei aniversări, în întreprinderi și instituții, pe șantiere și în mine, în unitățile socialiste din agricultură, în școli și universități, în toate sectoarele de activitate s-au desfășurat întreceri socialiste. Muncitorii, inginerii și tehnicienii au luptat cu avînt pentru îndeplinirea și depășirea planului de producție, pentru ridicarea calității produselor. Țărănimea muncitoare a muncit cu însuflețire pentru ca anul acesta pămîntul să dea roade cît mai bogate. Profesorii și învățătorii, studenții și elevii s-au străduit pentru obținerea celor mai bune rezultate în munca lor. Toate acestea oglindesc odată mai mult, dragostea adîncă, prețuirea nețărmurită de care se bucură partidul în rîndurile tuturor oamenilor muncii, în rîndurile tineretului.

Înființarea Partidului Comunist din Romînia a constituit o victorie istorică a leninismului împotriva oportunismului și reformismului în mișcarea muncitorească din țara noastră. Continuînd și ridicînd pe o treaptă superioară mișcarea muncitorească revoluționară, partidul comunist, călăuzit de știința marxist-leninistă și urmînd exemplul P.C.U.S. a chemat poporul muncitor sub conducerea clasei muncitoare, la luptă neînfricată pentru independența națională, pentru democrație și socialism. Sub steagul partidului comunist s-au desfășurat puternicele mișcări greviste din Valea Mureșului, Arad, București etc., acțiunile țăranilor împotriva poverilor fiscale, a executărilor silite și altele. Au fost create numeroase organizații de masă legale, ca Liga Muncii, Comitetul Național Antifascist, asociația „Amicii U.R.S.S.", Blocul Democratic, Frontul studențesc democrat etc; alături de ziarele și revistele ilegale a fost editat un mare număr de publicații legale, cu caracter democratic, progresist.

Sub conducerea partidului comunist clasa muncitoare din țara noastră a înscris pagini glorioase de eroism revoluționar în istoria

poporului romîn. Eroicele lupte ale muncitorilor ceferiști și petroliști din ianuarie-februarie 1933, prin înaltul lor nivel de organizare, prin amploarea și spiritul lor revoluționar au marcat o cotitură în desfășurarea luptelor revoluționare din țara noastră, au frînat ofensiva capitalistă împotriva condițiilor de muncă și de viață ale oamenilor muncii, au dat o lovitură puternică politicii de fascizare a țării, au contribuit la creșterea conștiinței politice și la îmbogățirea experienței de luptă a proletariatului.

Cu prețul vieții lor, comuniștii au luptat fără preget împotriva dictaturii militare-fasciste, au organizat sabotarea mașinii de război hitleriste. Orientîndu-se just în condițiile internaționale și interne create de victoriile uriașe ale U.R.S.S. în războiul contra Germaniei hitleriste, de starea de spirit antihitleristă care creștea în rîndurile poporului și ale armatei, Partidul Comunist din Romînia a apreciat că insurecția armată constituie unicul mijloc de salvare a poporului romîn de la dezastrul pricinuit de războiul antisovietic. Încă din luna august a anului 1943, cadrele de bază ale partidului, supunînd unei multilaterale analize situația internă și internațională pe plan politic și militar au trecut la elaborarea planului de organizare a insurecției armate. Înfăptuirea acestui plan a început prin înlăturarea din conducerea partidului a elementelor trădătoare și capitulante, ceea ce a făcut posibilă mobilizarea tuturor forțelor partidului pentru lărgirea frontului antihitlerist și pregătirea răsturnării guvernului antonescian. Organizînd și conducînd insurecția armată comuniștii au salvat țara și poporul de la o catastrofă națională. Insurecția armată victorioasă a constituit începutul revoluției populare pentru lichidarea rămășițelor feudale și desăvîrșirea revoluției burghezo-democratice, pentru înfăptuirea unui șir de reforme democratice care să deschidă larg drumul progresului economic și social.

Partidul comunist a condus lupta maselor pentru democratizarea țării, pentru refacarea economiei naționale și pentru instaurarea regimului de democrație populară. Sub conducerea partidului, cu sprijinul frățesc și multilateral al Uniunii Sovietice, poporul nostru a obținut succese istorice în făurirea orînduirii noi socialiste. Învingînd greutățile începutului, clasa muncitoare, oamenii muncii, sub conducerea partidului, au ridicat în întreaga țară sute de noi întreprinderi înzestrate cu tehnică modernă, au imprimat un ritm înalt dezvoltării industriei și celorlalte ramuri ale economiei. Numai în ultimii 10 ani industria și-a sporit producția de 3,5 ori. Astfel, în 1960, în mai puțin de 11 săptămîni a fost realizată o producție egală cu întreaga producție a anului 1938. Producția industriei constructoare de mașini a crescut în ultimii 10 ani de 7 ori, producția de energie electrică și termică a crescut de 4,2 ori. Pe ogoarele patriei lucrează astăzi, 44 000 tractoare (fizice), circa 17 600 combine și aproape 34 000 semănători. În ultimii 10 ani s-a ridicat simțitor nivelul de trai al oamenilor muncii. Salariul real a crescut cu aproape 85 la sută.

Planul de 6 ani și schița planului de dezvoltare economică în perspectivă a țării noastre, elaborate de Congresul al III-lea al partidului, deschid în fața poporului perspective luminoase de viitor. Transpunerea în viață a acestor planuri va determina dezvoltarea impetuoasă a industriei și a agriculturii, ridicarea continuă a nivelului de trai al celor ce muncesc, va asigura desăvîrșirea construcției socialismului în țara noastră.

Pentru tineretul școlar, aniversarea partidului înseamnă manifestarea dragostei și recunoștinței pentru tot ce partidul a făcut pentru el. În țara în care altădată, milioane de copii rămîneau analfabeți, astăzi nu mai există copii de vîrstă școlară care să nu fie școlarizați, iar 96% din absolvenții clasei a IV-a din anul trecut au fost cuprinși în clasa a V-a, pentru a urma școala de 7 ani. S-a introdus gratuitatea manualelor pentru toți elevii de la clasa I-a pînă la clasa a VII-a inclusiv. În învățămîntul elementar și mediu de cultură generală, în școlile pedagogice, în învățămîntul profesional și tehnic sînt cuprinși aproape 2 800 000 elevi. Dintre aceștia, numai în școlile medii de cultură generală, profesionale și tehnice învață astăzi 435 000 elevi, față de 88 500 în 1938. Avem astăzi de 4 ori mai multe facultăți decît în 1938, iar numărul studenților care a intrat în acest an în anul I echivalează cu cel al tuturor studenților din Romînia anului 1938.

Aproape două treimi din numărul lor primesc burse, locuiesc în cămine, iau masa la cantine. Școlile medii și institutele sînt înzestrate cu laboratoare bine utilate, ateliere și mobilier corespunzător. În învățămîntul de toate gradele se desfășoară astăzi o variată activitate cultural-educativă care asigură o dezvoltare armonioasă, multilaterală a omului nou, a constructorului noii societăți.

Pregătirea oamenilor de tip nou, cu o cultură generală solidă și cu o bună pregătire practică, începe încă de pe băncile școlii. Directivele Congresului al III-lea au trasat ca sarcină, generalizarea învățămîntului de 7 ani și trecerea treptată la învățămîntul general de 8 ani, astfel încît durata școlii medii de cultură generală să ajungă la 12 ani. Se prevede de asemenea, dezvoltarea învățămîntului seral, dîndu-se posibilitate oricărui tînăr să absolve școala medie și institutele superioare, lucrînd în același timp în producție. Un rol important privind cultivarea dragostei pentru matematică și fizică, a tineretului școlar, îl are Societatea de științe matematice și fizice din R.P.R. creată din inițiativa partidului. Olimpiadele organizate de S.S.M.F. și-au creat o bună tradiție. La etapele olimpiadelor participă anual, zeci de mii de elevi. Caracterul de masă al concursurilor constituie un fenomen constant, îmbucurător. Aceste prime contacte ale elevilor cu un studiu aprofundat al matematicii și fizicii crează o bază solidă pentru viitoarea cercetare, pentru o profundă cunoaștere a acestor domenii de largă aplicabilitate în prezent, pentru folosirea cunoștințelor în rezolvarea problemelor ridicate de producție.

Se poate vorbi astăzi, de o adevărată mișcare de tineret în domeniul matematicii și fizicii, consecință firească a condițiilor optime de studiu, a grijii permanente a partidului față de tineretul studios. Tinerii din patria noastră, fericiți că trăiesc aceste vremuri minunate, sînt conștienți că asemenea realizări se datoresc luptei eroice de zi cu zi, a clasei muncitoare în frunte cu partidul ei.

Păsind în al cincilea deceniu de existență a partidului, tineretul nostru, alături de toți oamenii muncii va contribui cu însuflețire la lupta pentru victoria deplină a socialismului și comunismului în scumpa noastră patrie, avînd în frunte, ca întotdeauna, pe încercatul său conducător marxist-leninist — Partidul Muncitoresc Romîn.

TRANSFORMĂRI GEOMETRICE ÎN OPTICĂ

de *CONSTANTIN IONESCU-BUJOR*

1°. Interpretarea matematică a rezultatelor obținute în fizică prin experiență constituie un mijloc principal de construcție a teoriilor privitoare la desfășurarea fenomenelor fizice; iar teoria fenomenului fizic ajută folosirea lui, aplicarea lui în practică.

Traiectoria : observație sau experiență, abstractizare, aplicație este însăși traiectoria creației științifice. De aceea, este necesar ca tineretul nostru din școli să se deprindă cu interpretarea rezultatelor date de experiență, cu generalizarea lor și cu aplicarea acestora în practică.

În acest cadru se situează articolul de față scris pentru tineretul școlar, articol în care vom examina din punct de vedere geometric unele cunoștințe simple din domeniul opticii, mai precis din capitolul lentilelor.

2°. *Transformări punctuale realizate cu lentile.*

a) *Transformarea prin lentilă biconvexă.* Să considerăm o lentilă

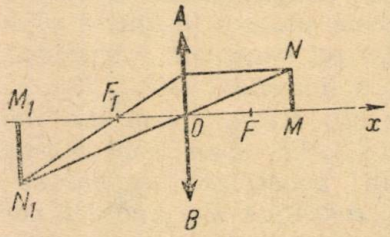


Fig. 1.

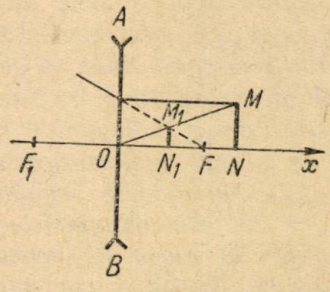


Fig 2.

biconvexă subțire AB, avînd centrul optic în O, cu focarele în F, F_1. Din optică se știe că imaginea unui segment de dreaptă MN, perpendicular pe axa optică FF_1 a lentilei este segmentul M_1N_1 perpendicular pe dreapta

FF_1, construit ca în figura 1. Punctul N_1 este imaginea punctului N (în cele ce urmează nu facem distincție între imaginile reale și cele virtuale). De aceea, putem considera că lentila biconvexă AB determină o transformare punctuală a spațiului, care face să corespundă unui punct N imaginea sa N_1 prin construcția din fig. 1.

În optică se arată că între M, proiecția punctului N pe axa optică a lentilei și M_1, imaginea punctului M, există relația:

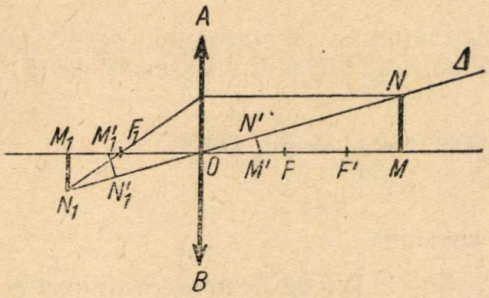


Fig. 3.

$$\frac{1}{OM_1} - \frac{1}{OM} = \frac{1}{OF}. \quad (1)$$

b) *Transformarea prin lentilă biconcavă.* În mod analog, vom considera că o lentilă biconcavă subțire AB, cu focarele F, F_1 și centrul optic O (fig. 2), determină o transformare punctuală, care transformă punctele M, N ($MN \perp FF_1$) în punctele M_1, N_1 astfel încît

$$M_1N_1 \perp FF_1 \text{ și } \frac{1}{OM_1} - \frac{1}{OM} = -\frac{1}{OF}. \quad (2)$$

3°. *Teoremă. Fie dată o lentilă biconvexă sau biconcavă AB, având centrul optic în O și o dreaptă Δ care trece prin O. Dacă N_1 este imaginea prin lentilă a unui punct N situat pe Δ, dacă N', N_1' sînt transformatele punctelor N, N_1* prin inversiunea I de *pol O și modul $\lambda > 0$, segmentul $N'N_1'$ rămîne constant, cînd punctul N descrie dreapta Δ* {1, 2*}.

Să presupunem că AB este o lentilă biconvexă cu focarele F, F_1 și să reprezentăm în fig. 3 datele teoremei. Notăm cu M, M_1 proiecțiile punctelor N, N_1 pe axa FF_1. Întrucît M_1 este imaginea prin lentilă a punctului M, avem relația:

$$\frac{\lambda}{OM_1} - \frac{\lambda}{OM} = \frac{\lambda}{OF}. \quad (3)$$

Dacă F', M', M_1' sînt transformatele punctelor F, M, M_1 prin inversiunea I avem:

$$OF \times OF' = \lambda, \quad OM \times OM' = \lambda, \quad (4)$$
$$OM_1 \times OM_1' = \lambda,$$

cu care relația (3) devine:

$$OM_1' - OM' = OF'$$

sau

$$M'M_1' = -OF'. \quad (5)$$

---

*)Pentru noțiuni asupra transformării numită „Inversiune", a se vedea punctele 1, 2 din bibliografie.

Întrucît punctele M', N' sînt transformatele punctelor M, N prin inversiunea I, patrulaterul $MNN'M'$ este inscriptibil, deci:

$$M'N' \perp ON.$$

De asemenea, pentru că M_1', N_1' sînt transformatele punctelor M_1, N_1 prin I, patrulaterul $M_1N_1N_1'M_1'$ este inscriptibil, deci:

$$M_1'N_1' \perp ON.$$

Rezultă că segmentul $N'N_1'$ este proiecția segmentului $M'M_1'$ pe dreapta ON. Notînd cu α unghiul dreptei $\triangle$ cu OF și ținînd seama de (5), avem în valoare absolută:

$$N'N_1' = \mathrm{pr}_{\triangle}\, M'M_1' = |\, OF' \cos\alpha\,| = \mathrm{pr}_{\triangle}\, OF',$$

deci:

$$N'N_1' = \text{constant},$$

oricare ar fi poziția punctului N pe $\triangle$. Conchidem că pentru orice punct N situat pe $\triangle$ punctele N_1' se deduc din N' printr-o translație definită de un vector cu direcția $\triangle$, cu sensul către O și cu mărimea $(\mathrm{pr}_{\triangle}\ OF')$.

La fel se demonstrează teorema cînd AB este o lentilă divergentă.

Consecință. Pentru a construi imaginea prin lentila convergentă AB a unui punct N situat pe dreapta $\triangle$ de aceeași parte cu focarul F, se aplică succesiv următoarele transformări:

a) *Inversiunea* I de pol O și modul $\lambda > 0$, care transformă punctul N în N' și focarul F în F'.

b) *Translația* T al cărei vector are direcția $\triangle$, sensul de la N către O și mărimea egală cu proiecția segmentului OF' pe $\triangle$. Prin această translație punctul N' se transformă în N_1'.

c) *Inversiunea* I, definită mai sus, care transformă punctul N_1' în N_1.

Punctul N_1 este imaginea lui N prin lentila biconvexă AB sau transformatul lui N în transformarea prin lentilă biconvexă definită de AB.

Rezultă că transformarea prin lentila biconvexă AB a punctelor semidreptei $\triangle$, situate de aceiași parte cu F, se realizează prin produsul de transformări ITI {3*}.

Pentru a construi imaginea prin lentila divergentă $A'B'$ de centru O a unui punct N situat pe dreapta $\triangle$, de aceeași parte cu focarul F, se aplică succesiv: *inversiunea* I, *o translație* T', al cărei vector are direcția $\triangle$, sensul de la O către N și mărimea egală cu proiecția segmentului OF' pe $\triangle$ (F' este transformatul focarului F prin inversiunea I), apoi din nou *inversiunea* I.

Cînd lentila biconvexă AB și lentila biconcavă $A'B'$ ocupă aceeași poziție, au aceleași focare, ele sînt *lentile omofocale*. Dacă $A'B'$ este o lentilă omofocală cu lentila AB, atunci translația T' este inversa {3*} translației T și se notează T^{-1}. În acest caz, transformatele punctelor semidreptei $\triangle$ situate de aceeași parte cu focarul F, prin lentila biconcavă $A'B'$, se obțin prin produsul de transformări $I\ T^{-1}\ I$.

---

*) A se vedea pentru definirea produsului de transformări și a inversei unei transformări punctul 3 din bibliografie.

4°. *Extinderea și definiția geometrică a transformărilor prin lentile.* Ținînd seama de teorema precedentă și de consecințele ei, putem da următoarea extindere și definiție geometrică transformărilor prin lentile convergente sau divergente:

Fie dat un plan Z numit lentilă, un punct F exterior numit focarul lentilei și un punct N situat de aceeași parte cu F față de planul Z. Numim centru optic al lentilei piciorul O al perpendicularei dusă din F pe Z.

Dacă I este inversiunea de pol O și modul $\lambda > 0$, F' transformatul punctului F prin I, iar T o transformare care pe dreapta ON operează ca o translație definită de un vector avînd direcția ON, sensul către O și mărimea egală cu proiecția lui OF' pe ON numim:

a) *transformare prin lentilă biconvexă (convergentă), definită de planul Z și de focarul F, transformarea:*

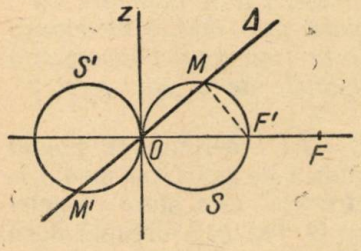


Fig. 4.

$$L = ITI;$$

b) *transformare prin lentilă biconcavă (divergentă), definită de planul Z și de focarul F, transformarea.*

$$D = IT^{-1}I.$$

Transformările L și D se aplică tuturor punctelor spațiului (aceasta reprezintă extinderea geometrică, față de fenomenul optic).

Numim translație convergentă definită de vectorul OF' transformarea T. Ca urmare, T^{-1} este o translație convergentă definită de vectorul $-\overrightarrow{OF'}$.

5°. *Transformarea prin lentilă biconcavă D este inversa transformării prin lentilă biconvexă omofocală L.*

În adevăr, avem:

$$LD = (ITI)\ (IT^{-1}I) = ITI^2T^{-1}I = ITT^{-1}I,$$

întrucît se știe că:

$$I^2 = 1,$$

1 fiind transformarea identică. De asemenea, produsul a două transformări inverse este egal cu transformarea identică. Ca urmare:

$$TT^{-1} = 1,$$

deci:

$$LD = I^2 = 1.$$

Rezultă:

$$L^{-1}LD = L^{-1},$$

deci:

$$D = L^{-1},$$

adică transformarea prin lentilă biconcavă D este inversa transformării prin lentila biconvexă omofocală L.

Desprindem următoarele concluzii:

a) Transformarea prin lentilă biconvexă $L = ITI$, are ca transformare inversă L^{-1} pe $L^{-1} = IT^{-1}I$.

b) Teoria lentilelor biconvexe și biconcave se poate unifica, se poate concentra într-o teorie unică a lentilelor biconvexe.

c) Avem și:

$$L = D^{-1}.$$

6°. *Sfera caracteristică.*

Să considerăm transformarea prin lentilă biconvexă $L = ITI$, definită de planul lentilă Z și de focarul F, unde I este inversiunea cu polul în centrul optic O al lentilei Z și cu modulul $\lambda > 0$ și fie F' transformatul punctului F prin inversiunea I.

Numim sferă caracteristică a transformării L sfera S de diametru OF'.

Punctele sferei caracteristice S a transformării prin lentilă biconvexă L distincte de O se transformă în punctul O prin translația convergentă T, iar punctul O se transformă în punctele distincte de O ale sferei S', simetrica sferei S în raport cu O.

În adevăr, să considerăm transformarea $L = ITI$ definită de planul lentilei Z și de focarul F (fig. 4), I fiind inversiunea de pol O și modul λ, care transformă pe F în F'. Sfera S de diametru OF' este sfera caracteristică, iar S' este simetrica sferei S în raport cu O. Fie $\triangle$ o dreaptă dusă prin O, care intersectează sferele S, S' în M, M'.

Am arătat că translația convergentă T operează asupra punctelor dreptei $\triangle$ ca o translație definită de un vector cu direcția $\triangle$ cu sensul de la M către O și cu mărimea egală cu proiecția segmentului OF' pe $\triangle$. Cum unghiul OMF' este drept,

$$OM = \mathrm{pr}_{\triangle} OF'$$

și astfel $\overline{MO}$ este vectorul acestei translații. Ca urmare, translația convergentă T, transformă punctul M al sferei caracteristice S în O. Întrucît

$$\overline{MO} = \overline{OM'},$$

T transformă pe O, considerat ca punct al dreptei $\triangle$ în M' situat pe S'. Considerînd alte drepte duse prin O se demonstrează la fel proprietatea din enunț.

Notă: La fel se arată că prin translația convergentă T^{-1} punctele sferei S' distincte de O se transformă în O, iar punctul O se transformă în punctele sferei S distincte de O.

7°. *Transformarea planului focal.*

a) Numim *plan focal* al transformării prin lentilă definită de planul lentilă Z și de focarul F, planul paralel cu Z dus prin focarul lentilei.

b) *Într-o transformare prin lentilă convergentă punctele planului focal se transformă în puncte de la infinit ale spațiului.*

Considerăm planul lentilă Z și focarul F (fig. 5), care definesc transformarea prin lentilă biconvexă $L = ITI$, unde I este inversiunea cu polul în centrul optic O al lentilei și cu modulul $\lambda > 0$. Notăm φ planul focal al transformării L și F' transformatul focarului F prin inversiunea I. Sfera S de diametru OF' este sfera caracteristică a transformării L.

Inversiunea I transformă planul focal φ în sfera caracteristică S. În adevăr, se știe {2} că planul φ se transformă prin inversiunea I într-o sferă care trece prin O polul inversiunii I, avînd ca diametru porțiunea din perpendiculara dusă din pol pe φ, cuprinsă între pol și transformatul piciorului acestei perpendiculare prin inversiunea I. Această sferă este astfel sfera de diametru OF', deci sfera caracteristică S.

Fie Δ o dreaptă dusă prin O și M, M' intersecțiile ei cu planul φ și sfera S. Întrucît sfera S este transformata planului φ prin inversiunea I, punctul M se transformă în M' prin această inversiune.

Am arătat însă în paragraful precedent că punctele sferei S se trans-

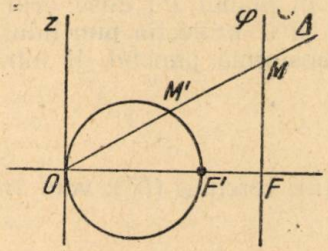


Fig 5.

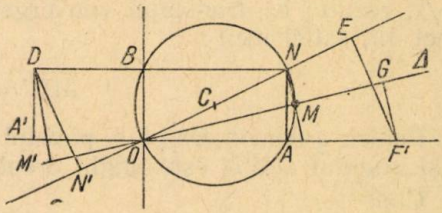


Fig. 6.

formă în O prin translația convergentă T. Deci M' se transformă în O prin T.

Cum prin inversiunea I polul O se transformă într-un punct la infinit, conchidem că prin produsul de transformări ITI, deci prin L punctul M al planului focal φ se transformă într-un punct la infinit al spațiului.

8°. *Teoremă. Fiind dat planul lentilă Z și focarul F, care definesc o transformare prin lentilă biconvexă L = ITI, un plan P, care conține axa optică și un cerc (C) situat în acest plan, cerc trecînd prin centrul optic O, să arătăm că translația convergentă T transformă punctele cercului (C) distincte de O în puncte ale unui cerc (C'), situat în planul P. Cercul (C') trece de asemenea prin O și are coarda comună cu (C) situată în planul Z.*

Fie F' transformatul focarului F prin inversiunea I de pol O și modul λ și Oz dreapta de intersecție a planelor Z, P (fig. 6).

Cercul (C) cu centrul în C intersectează dreptele OF', Oz în A, B.

Aplicînd translația convergentă T punctului A, acesta se transformă într-un punct A' situat pe OF', astfel încît:

$$\overline{AA'} = \overline{F'O}.$$

Rezultă:

$$A'O = AF'.$$

Perpendicularele duse din A', B respectiv pe AA', Oz se intersectează într-un punct D. Să arătăm că transformatul prin T al oricărui punct distinct de O al cercului (C), aparține cercului (C') circumscris dreptunghiului $OA'DB$.

Fie N punctul diametral opus lui O în cercul (C). Dacă E este proiecția lui F' pe ON, atunci punctul N se transformă prin T într-un punct N', astfel încît:

$$\overline{NN'} = \overline{EO}.$$

Cum punctele D, B, N sînt coliniare și

$$DN = AA' = OF', \tag{6}$$

rezultă egalitatea triunghiurilor $NN'D$, OEF', deci $\sphericalangle NN'D = \sphericalangle DEF'$. Urmează că unghiul $ON'D$ este drept și astfel conchidem că punctul N' aparține cercului (C') de diametru OD.

Fie acum o dreaptă oarecare $\triangle$, situată în planul P, dusă prin O. Notînd M intersecția dreptei $\triangle$ cu cercul (C) și G proiecția punctului F' pe $\triangle$, rezultă că translația convergentă T transformă punctul M într-un punct M', astfel încît:

$$\overline{MM'} = \overline{GO}.$$

Pentru a demonstra că și punctul M' aparține cercului (C'), vom arăta că și unghiul $OM'D$ este unghi drept.

Cum:

$$MM' = GO = pr_{\triangle} OF'$$

ținînd seama de egalitățile (6), și de paralelismul dreptelor OF', DN, avem

$$MM' = \mathrm{pr}_{\triangle} DN. \tag{7}$$

Dar dreapta NM fiind perpendiculară pe $\triangle$, punctul M este proiecția lui N pe $\triangle$. Egalitatea (7) ne arată că M' trebuie să fie proiecția punctului D pe $\triangle$, adică:

$$DM' \perp \triangle.$$

În concluzie, punctele cercului (C), distincte de O se transformă prin T în puncte ale cercului (C'), distincte de O.

9°. *Transformarea unei drepte care intersectează axa optică.*

Transformarea prin lentilă biconvexă transformă o dreaptă care intersectează axa optică într-o dreaptă care intersectează axa optică.

Fie dată transformarea prin lentilă biconvexă $L = ITI$, definită de planul lentilă Z, de focarul F, unde I este inversiunea cu polul în centrul optic O și cu modulul $\lambda > 0$.

Considerăm o dreaptă $\triangle$ care intersectează axa optică OF în M. Dreptele $\triangle$, OF determină un plan P. Să urmărim cum se transformă în acest plan dreapta $\triangle$ prin aplicarea produsului de transformări ITI, deci prin transformarea L.

a) *Dacă M coincide cu O*, atunci prin fiecare transformare a produsului ITI, punctele dreptei $\triangle$ se transformă în puncte ale dreptei $\triangle$ deci dreapta se transformă în ea însăși prin L.

b) *Dacă M nu coincide cu O.*

Se știe {1,2} că o inversiune plană transformă o dreaptă care nu trece prin polul inversiunii într-un cerc care trece prin polul inversiunii. Ca

urmare, inversiunea I transformă dreapta $\triangle$ într-un cerc (C) care trece prin O, situat în planul P.

Acest cerc (C) se transformă prin translația convergentă T, conform celor arătate în teorema precedentă, într-un cerc (C') situat în planul P și trecînd prin O.

Inversiunea I transformă cercul (C') într-o dreaptă $\triangle'$ care nu trece prin O, ci intersectează axa optică OF într-un punct M', transformatul lui M prin produsul de transformări ITI.

Conchidem că transformarea prin lentilă convergentă transformă dreapta $\triangle$ într-o dreaptă $\triangle'$.

10°. *Transformarea prin lentilă biconvexă transformă o dreaptă care intersectează axa optică, perpendiculară pe această axă, într-o dreaptă paralelă cu dreapta dată.*

Păstrăm notațiile din paragraful precedent și presupunem că $\triangle \perp OF$.

Se știe {1,2} că prin inversiunea I, $\triangle$ se transformă într-un cerc (C), care trece prin O polul inversiunii și că dreapta care unește pe O cu C centrul cercului (C) este perpendiculară pe $\triangle$. Rezultă că punctul C aparține axei optice, deci (C) este tangent dreptei Oz, intersecție a planelor Z, P. Ca urmare, prin translația convergentă T, cercul (C) se transformă într-un cerc (C') de asemenea tangent în O dreptei Oz.

Centrul cercului (C') aparține deci axei optice OF. Cum prin inversiunea I acest cerc se transformă într-o dreaptă $\triangle'$, perpendiculară pe OC' situată în P {1,2} conchidem că $\triangle' \parallel \triangle$. Dar $\triangle'$ deducîndu-se din $\triangle$ prin aplicarea succesivă a transformărilor I, T, I, este transformata dreptei $\triangle$ prin L.

Observare. Am dedus astfel din definiția dată transformării prin lentilă biconvexă proprietatea cunoscută din optică: dacă obiectul este perpendicular pe axa optică, imaginea sa prin lentila convergentă este paralelă cu obiectul.

11°. *Transformarea prin lentilă biconvexă transformă un plan perpendicular pe axa optică într-un plan perpendicular pe axa optică.*

Considerăm transformarea prin lentilă biconvexă $L = ITI$ definită de planul lentilă Z și de focarul F, unde I este inversiunea avînd ca pol centrul optic O și modulul λ.

Fie P un plan care intersectează axa optică OF în M, perpendicular pe OF. Notăm M_1 transformatul punctului M prin L.

Dacă d, $\triangle$ sînt două drepte ale planului P, concurente în M, ele se transformă prin L în dreptele d_1, $\triangle_1$ concurente în M_1 (§ 10°), astfel încît:

$$d_1 \parallel d, \quad \triangle_1 \parallel \triangle.$$

Întrucît d, $\triangle$ sînt perpendiculare pe OF, rezultă că d_1, $\triangle_1$ sînt de asemenea perpendiculare pe OF și determină deci un plan P_1 perpendicular pe OF. Planul P_1 este transformatul planului P prin transformarea L. În adevăr, considerînd un punct oarecare N în planul P și notînd cu N_1 intersecția dreptei ON cu planul P_1, dreptele NM, N_1M_1 sînt perpendiculare pe OF. Ele aparțin planului Q determinat de dreptele OF, NN_1.

Ca urmare $NM \parallel N_1M_1$. Cum dreapta NM, perpendiculară pe OF se transformă prin L într-o dreaptă paralelă, situată în planul Q și cum M_1

este transformatul punctul M prin L, rezultă că N_1 este transformatul punctului N prin L.

La fel se arată că transformarea prin lentilă convergentă L transformă orice punct al planului P într-un punct al planului P_1.

12°. *Transformarea prin lentilă biconvexă transformă o dreaptă perpendiculară pe axa optică, nesituată în același plan cu axa optică, într-o dreaptă perpendiculară pe axa optică, nesituată în același plan cu axa optică.*

Considerăm transformarea prin lentilă biconvexă L definită de planul lentilă Z și de focarul F, centrul optic fiind O. Se dă dreapta $\Delta \perp OF$, Δ, OF nefiind situate în același plan.

Notăm P planul determinat de dreapta Δ și de punctul O. Întrucît M_1 transformatul prin L al unui punct M al dreptei Δ aparține dreptei OM, punctul M_1 este situat în planul P.

Deci transformatele punctelor dreptei Δ prin L aparțin planului P.

Fie Q un plan dus prin Δ, perpendicular pe OF. Acest plan se transformă prin L într-un plan Q_1 perpendicular pe OF (§ 11°).

Planul Q_1 conține de asemenea transformatele punctelor dreptei Δ prin L. Rezultă că transformatele punctelor dreptei Δ prin L se află pe dreapta Δ_1 de intersecție a planelor P, Q_1. Dreapta Δ_1 este deci transformata dreptei Δ prin L. Dreapta Δ_1, fiind conținută de planul $Q_1 \perp OF$ este perpendiculară pe OF.

13°. *Teoremă. Fie $L = ITI$ o transformare prin lentilă biconvexă și $D = IT^{-1}I$ o transformare prin lentilă biconcavă definite de același plan lentilă Z și de același focar F, I fiind inversiunea cu polul în centrul optic O și cu modulul $\lambda > 0$.*

Dacă M_1, M_1' sînt transformatele unui punct M respectiv prin transformările L, D, atunci punctele M_1, M_1' sînt conjugate armonic în raport cu O și M.

În adevăr, punctele M_1, M_1' aparțin dreptei OM și avem :

$$\frac{1}{OM_1} - \frac{1}{OM} = \frac{1}{O\varphi}$$

$$\frac{1}{OM_1'} - \frac{1}{OM} = -\frac{1}{O\varphi},$$

φ fiind intersecția planului focal cu OM,

de unde rezultă :

$$\frac{1}{OM_1} + \frac{1}{OM_1'} = \frac{2}{OM}.$$

Ori, această relație arată {4*} că punctele M_1, M_1' sînt conjugate armonic în raport cu O, M.

Pe baza acestei proprietăți se poate construi transformatul punctului M prin D, atunci cînd se cunoaște transformatul său prin L.

Notă. Fie $[L]$ mulțimea transformărilor prin lentilă biconvexă definite de același plan lentilă Z și avînd ca focare punctele unei drepte Ox perpendiculară pe Z, fie $[D]$ mulțimea transformărilor prin lentilă biconcavă definite de aceleași elemente.

---

*) A se vedea punctul 4 din bibliografie.

Transformatele unui punct M prin două transformări L, D omofocale sînt puncte corespondente într-o involuție avînd ca puncte duble pe O și M. {5*}.

Proprietatea rezultă din teorema precedentă.

BIBLIOGRAFIE

1. *Jacques Hadamard:* Lecții de geometrie elementară. Geometrie plană, pag. 158—164. Editura tehnică 1960.
2. *Constantin Ionescu-Bujor:* Elemente de transformări geometrice. Partea II, cap. XI. Biblioteca Societății de Științe Matematice și Fizice din R.P.R. nr. 37, 1959.
3. *Constantin Ionescu-Bujor:* Elemente de transformări geometrice. Partea I, cap. I. Biblioteca Societății de Științe Matematice și Fizice din R.P.R., nr. 33, 1958.
4. *Constantin Ionescu-Bujor:* Elemente de transformări geometrice. Partea II, § 225.
5. *Constantin Ionescu-Bujor:* Elemente de transformări geometrice. Partea II. Cap. XVI.

CIBERNETICA

Prof. univ. *EDMOND NICOLAU*

Deși este foarte tînără, cibernetica și-a cucerit un loc trainic în cadrul științelor contemporane. Cibernetica este o știință a cărei istorie s-a desfășurat sub ochii noștri. Termenul de cibernetică a fost pus în circulație în lumea științifică în anul 1948, prin apariția unei cărți cu același titlu și datorită matematicianului N. Wiener.

După cum sublinia cu dreptate într-un articol recent acad. A. I. Berg, în prezent nu există încă o definiție univocă și unanim acceptată a termenului de cibernetică. În literatura sovietică de specialitate, uneori, cibernetica este definită ca *„știință a legilor de comandă a sistemelor dinamice complexe"*. Astfel de sisteme dinamice complexe există atît printre automatele create de om, cît și în natura vie, ca și în societatea umană.

De la început trebuie subliniat de asemenea că prin îmbrățișarea unor domenii variate de activitate, cibernetica contribuie la dezvoltarea reciprocă a acestor domenii. Cibernetica contribuie la introducerea unor metode exacte de gîndire matematică și în unele domenii ale cercetării științifice în care aplicarea acestor metode a fost pînă acum exclusă sau limitată.

Cibernetica prezintă o importanță deosebită și din punct de vedere al concepției despre lume. Din acest punct de vedere, ca și celelalte ramuri ale științelor naturii, ea ne oferă un material foarte bogat, care exemplifică în mod strălucit tezele materialismului dialectic. În mod reciproc, trebuie subliniat că numai de pe pozițiile materialismului dialectic sînt posibile aprecierea justă a teoriilor cibernetice și stabilirea locului lor adevărat în procesul cunoașterii.

Revenind la definița dată de acad. A. I. Berg asupra ciberneticii, trebuie precizat că prin sisteme dinamice complexe se înțeleg acele sisteme capabile să-și modifice starea în conformitate cu anumite legi. De obicei,

*) A se vedea punctul 5 din bibliografie.

este vorba de sisteme de reglaj automat care se autoadaptează, adică în permanență își potrivesc parametrii astfel, încît procesul să decurgă în condiții optime.

În ceea ce privește cibernetica, se disting mai multe împărțiri ale ei. Astfel, se deosebește o cibernetică tehnică de alta teoretică.

Un alt mod de a clasifica cibernetica se poate face după preocupările ei. În această direcție putem deosebi următoarele curente principale: teoria informației; calculatoarele electronice; sistemele cu reacție.

Să facem o scurtă caracterizare a acestor domenii de activitate.

Teoria informației

Teoria informației este acea ramură a ciberneticii care se ocupă cu transmiterea informației.

Deoarece noțiunile acestei discipline sînt noi, este indicat să facem o precizare a termenilor.

Pentru aceasta să considerăm o experiență oarecare. Spunem că experiența aceasta ne aduce o informație, atunci cînd nu cunoaștem dinainte rezultatul ei. Pentru a se trece însă la o știință cantitativă este necesar să introducem un criteriu cantitativ de apreciere a informației; cu alte cuvinte este necesar să introducem conceptul de *cantitate de informație*.

Pentru introducerea acestei noțiuni să recurgem la o experiență; anume să considerăm că într-o urnă sînt N bile, fiecare de altă culoare. Extragerea fiecărei bile ne informează asupra culorii pe care o are bila extrasă. Dacă punem bila la loc și repetăm extragerea, obținem o altă culoare și așa mai departe. Se pune problema de a se determina cantitatea de informație obținută din m extrageri. Pentru aceasta este necesar să calculăm numărul total de șiruri de bile, care se puteau forma din m extrageri. Este clar că, în total $N = n^m$ astfel de șiruri, deoarece fiecare bilă din șir poate avea oricare din cele n culori.

Acum să trecem la problema stabilirii unei legături între numărul de șiruri diferite și cantitatea de informație. S-ar putea adopta în primul rînd ca măsură a cantității de informație chiar cantitatea N, dar aceasta ne-ar duce la o creștere exponențială a cantității de informație în funcție de numărul extragerilor.

Pentru a ajunge la definiția adoptată astăzi, să considerăm că de fapt bilele nu sînt specificate prin culoarea lor, ci prin o literă ce e scrisă pe ele. În acest caz n este numărul literelor din alfabet. Un text oarecare se obține extrăgînd bile din urnă. Textul nostru trebuie însă referit la *mulțimea tuturor șirurilor posibile* și de aceeași lungime.

Deoarece în mod obișnuit admitem că un text ne dă o informație cu atît mai mare cu cît este mai lung, putem admite că și cantitatea de informație este proporțională cu lungimea textului. În acest caz trecem de la definiția dată anterior, introducînd o măsură logaritmică pentru cantitatea de informație pe care o notăm cu I. Astfel, scriem:

$$I = \log N \quad \text{și} \quad I = Am \log n,$$

unde A este o constantă ce depinde de baza în care se ia logaritmul. *Valoarea medie* a informației pe literă este $H = A \log n$.

Problema aceasta a fost rezolvată, admițînd că toate literele sînt la fel de frecvente. Dar în realitate, cu toții știm că unele litere sînt mai

frecvente decît altele. Revenind la cazul expus anterior al urnei cu bile colorate, vom admite că proporția de bile este diferită după culori. Se pune atunci problema de a se evalua cantitatea de informație pe care o obținem dintr-o extragere de lungime m, cunoscîndu-se proporțiile diferitelor culori din urnă.

Să admitem că există N_a bile albe, N_g bile galbene, N_r bile roșii etc. Proporția bilelor albe va fi:

$$p_a = \frac{N_a}{N},$$

iar proporția bilelor galbene:

$$p_g = \frac{N_g}{N},$$

N fiind suma tuturor bilelor din urnă:

$$N = N_a + N_g + \ldots.$$

Se observă că toate aceste proporții sînt subunitare.

Pentru a defini cantitatea de informație ce rezultă în medie dintr-o extragere din urnă în aceste condiții, se introduce noțiunea de *entropie*, definită prin formula:

$$H = -\sum_i p_i \log p_i.$$

Această noțiune de entropie s-a dovedit a fi deosebit de utilă, deoarece cu ajutorul ei se pot stabili legături foarte interesante, de exemplu între teoria informației și termodinamică. În treacăt menționăm că definiția adoptată pentru entropie în cadrul teoriei informației este formal identică cu definiția entropiei termodinamice.

În formula de definire a entropiei, logaritmul se ia de obicei în baza 2. În acest caz entropia se evaluează într-o unitate specială, și anume în biți/simbol. Simbolul poate să fie o literă, o culoare, sau, în general, evenimentul pe care îl urmărim.

Noțiunea de informație s-a găsit a fi deosebit de valoroasă, într-un sens fiind comparabilă cu noțiunea de energie.

Într-adevăr, între aceste două mărimi există asemănări importante, dar și unele deosebiri. Astfel, după cum energia nu se pierde schimbîndu-și forma, tot așa și informația poate să-și modifice forma, păstrîndu-și conținutul. De exemplu, informația poate să fie scrisă sau citită. Apar însă și diferențe în sensul că energia se conservă în alt sens decît informația.

În legătură cu teoria informației, trebuie precizat că ea are numeroase aplicații practice, fiind foarte utilă inginerilor de telecomunicații.

Menționăm că probleme de telecomunicații, legate de teoria informației, au fost studiate la noi în țară de prof. S. Condrea și G. Cartianu de la Institutul Politehnic București. Studii teoretice valoroase au fost efectuate de prof. O. Onicescu, prof. G. Mihoc și conf. M. Roth Rosenblatt de la Universitatea C. I. Parhon. Unele studii privind aplicarea teoriei informației la problemele de lingvistică au fost efectuate de autorul acestui articol.

În ceea ce privește bazele teoretice ale acestei discipline, trebuie amintit că ele au fost puse de Cl. Shannon. Lucrări deosebit de valoroase în această direcție au cunoscuții savanți sovietici A. N. Kolmogorov și A. T. Hincin.

Calculatoarele electronice

A doua direcție importantă de dezvoltare a ciberneticii o constituie calculatoarele electronice. Acestea la rîndul lor pot să fie clasificate în mai multe categorii. Se distinge astfel categoria calculatoarelor digitale sau cifrice sau cu acțiune discretă, și aceea a calculatoarelor analogice, numite și modele sau calculatoare cu acțiune continuă.

Calculatoarele digitale reprezintă forma cea mai perfecționată a număratului pe degete, ca și a etapelor intermediare a abacelor și a vechilor mașini aritmetice.

Actualmente aceste calculatoare lucrează de obicei cu impulsuri electrice, care transcriu informația într-un sistem de semnale electrice care poate fi pus în legătură cu numerele în transcriere binară.

Pentru a fixa ideile, să presupunem că dorim să considerăm numărul 22. În transcriere binară el devine

10110.

După cum se observă, în transcriere binară nu avem nevoie decît de două simboluri: 0 și 1. Aceste două simboluri pot să fie concretizate prin orice dispozitiv care are numai două stări stabile. Dacă se consideră un sistem format din două tuburi electronice în montajul numit *circuit basculant bistabil*, atunci am realizat un astfel de dispozitiv. Sistemul se caracterizează prin faptul că în mod normal unul din tuburi conduce curent, iar celălalt nu conduce. Prin aplicarea unui semnal de comandă, sistemul trece dintr-o stare în starea cealaltă. Astfel, de exemplu, dacă la început conducea tubul din dreapta, iar cel din stînga era blocat, după primirea comenzii situația se inversează, astfel încît tubul din stînga conduce, iar cel din dreapta este tăiat, blocat.

Este suficient acum să punem în corespondență starea sistemului cu numerele. Putem admite de exemplu, că starea 0 corespunde cu starea sistemului în care conduce tubul din stînga.

Deoarece aceste montaje electronice pot să treacă foarte repede dintr-o stare în alta — cu o cadență de ordinul milioanelor de treceri pe secundă — rezultă că aceste dispozitive sînt foarte indicate pentru a se alcătui cu ele calculatoare rapide.

Schema unui calculator digital este bineînțeles foarte complexă, însă schema bloc este relativ simplă. Astfel, ea cuprinde o parte din intrare, în care se introduc numerele cu care trebuie să lucrăm; o parte aritmetică, care efectuează operațiile; o parte de memorie, în care se înregistrează datele inițiale, rezultatele intermediare și programul de lucru; circuitele de ieșire, care imprimă rezultatele finale; o parte de control central.

Desigur că nu este posibil să intrăm aici în toate detaliile mașinii, dar credem că este util să precizăm unele noțiuni. Astfel, prin *program* se înțelege ordinea în care mașina trebuie să efectueze singură diferitele operații asupra numerelor care i-au fost date.

Rezultatele la care s-a ajuns astăzi cu aceste mașini sînt de-a dreptul spectaculoase. Astfel, există circuite de intrare care acceptă informația sub forma unor perforații efectuate într-o bandă de hîrtie. Viteza de lucru în acest caz este de ordinul a cîtorva numere pe secundă. Există însă alte

sisteme mai perfecționate care „citesc" direct cifrele din registrele contabililor, și aceasta cu o viteză foarte mare, de cîteva sute de cifre pe secundă. În ceea ce privește circuitele de ieșire, ele pot fi uneori mașini de scris electrice. În acest caz viteza de lucru este de ordinul a cîtorva cifre pe secundă. Există însă și sisteme mai perfecționate care utilizează tuburi electronice speciale și aparate care filmează literele și cifrele ce apar pe ecranul acestor tuburi. În acest caz viteza de lucru este cu mult mai mare, de ordinul sutelor de mii de caractere pe secundă.

În ultimul timp s-au realizat progrese considerabile și în ceea ce privește viteza de lucru a părții aritmetice. Astfel, s-a trecut de la mașinile cu tuburi electronice la mașini cu alte tipuri de circuite ce pot traduce informația în semnale electrice. Printre cele mai moderne dispozitive sînt elementele numite *parametron,* la care viteza de lucru poate atinge ordinul miilor de milioane de treceri pe secundă.

Calculatoarele digitale se întrebuințează astăzi cu succes în rezolvarea celor mai variate probleme. Astfel, grație lor pot să fie abordate probleme de rezolvare a sistemelor de sute de ecuații cu sute de necunoscute. Aceste mașini electronice au schimbat felul de a se rezolva a numeroase probleme puse de știință și tehnică. De exemplu, în astronomie problema celor trei corpuri nu este rezolvată complet analitic. Analiza matematică și mecanică cerească clasică nu ne dau metode cu ajutorul cărora să putem rezolva problema trimiterii unei stații automate interplanetare de pe Pămînt spre Venus. Această problemă a putut să fie rezolvată de către savanții sovietici, cu exactitate, ținîndu-se seama de influența Pămîntului, a Lunii, a Soarelui și a lui Venus, numai grație utilizării calculatoarelor electronice.

În Uniunea Sovietică calculatoarele digitale se utilizează cu succes în rezolvarea a numeroase probleme. Mașinile Ural, BESM, Strela, sînt bine cunoscute tuturor specialiștilor.

La noi în țară problema acestor calculatoare a fost în atenția partidului și a guvernului. La Institutul de Fizică Atomică din București, un colectiv condus de inginerul Victor Toma a construit calculatoarele CIFA-1, 2 și 3. Calculatorul CIFA-1 a fost primul calculator digital construit și dat în exploatare într-o țară de democrație populară.

Alte mașini digitale s-au construit la Institutul de Calcul al Academiei din Cluj și la Institutul Politehnic din Timișoara.

Trebuie precizat că pentru exploatarea acestor calculatoare este necesar să se formeze cadre de specialiști cu înaltă calificare, atît electroniști cît și matematicieni. Problema integrării numerice este în atenția Institutului de calcul din Cluj al Academiei R.P.R. Lucrările efectuate în această direcție de prof. Tiberiu Popovici și prof. D. V. Ionescu sînt bine cunoscute.

În ceea ce privește formarea de cadre de specialiști, la Universitatea C. I. Parhon există o secție care pregătește cadre de matematicieni ce vor lucra cu astfel de calculatoare. Dintre cursurile ce se țin aici, menționăm cursul de programare al acad. Gr. C. Moisil.

Calculatoarele digitale au nenumărate aplicații și nematematice. Printre acestea menționăm, în primul rînd, aplicarea lor în industrie la comanda mașinilor-unelte. După cum se știe, și în raportul prezentat de tovarășul Gheorghe Gheorghiu-Dej la cel de-al III-lea Congres al partidului, se

trasează ca sarcină introducerea calculatoarelor electronice în industria prelucrătoare.

Calculatoarele digitale se întrebuințează și la efectuarea unor traduceri dintr-o limbă în alta. La noi în țară această problemă a fost studiată de acad. Gr. C. Moisil. Algoritmul traducerii din engleză în romînă a fost elaborat de E. Domoncos.

Alături de calculatoarele digitale, cele analogice sînt chemate să joace un rol important în rezolvarea celor mai variate probleme.

Metoda care stă la baza funcționării acestor calculatoare este metoda similitudinii. Se știe anume că în natură există fenomene de esențe diferite, a căror legi sînt totuși exprimate prin aceleași ecuații. După cum arăta V. I. Lenin în „Materialism și empiriocriticism", aceasta nu arată decît unitatea materială a lumii.

Metoda modelării constă în a studia un fenomen pe alt fenomen mai accesibil dar a cărui lege este exprimată prin aceeași ecuație. De obicei, se recurge la o instalație electrică a cărei stare este descrisă de ecuații formal identice cu cele ale fenomenului investigat. Rezultatul se obține în acest caz măsurînd tensiuni și curenți. Astfel de dispozitive analogice se utilizează cu succes acolo unde se cer instalații simple, robuste, și care să dea soluția cu o precizie nu prea mare.

La noi în țară s-au construit calculatoare analogice la : Academia militară tehnică, Institutul energetic al Academiei R.P.R., I.F.A-Cluj, Institutul Politehnic București.

Trebuie precizat că în timp ce calculatoarele digitale pot rezolva orice problemă, dar au o construcție complexă, calculatoarele analogice pot să fie specializate, astfel încît pot rezolva relativ simplu și cu o investiție mică unele probleme care altfel ar necesita un calculator digital scump.

De exemplu, la Institutul Politehnic București s-a realizat un model de reactor nuclear cu ajutorul căruia se pot studia fenomenele care au loc într-un reactor real, ceea ce are o importanță mare didactică. Modelul este mic, avînd dimensiunile a două mașini de scris de birou.

În ultimul timp calculatoarele electronice — atît cele digitale cît și cele analogice — se întrebuințează cu succes și pentru rezolvarea problemelor economice. Aici ele servesc fie la studierea unor probleme de programare liniară, fie la rezolvarea unor probleme de investiție optimă.

Și la noi în țară există pe lîngă Comisia de automatizare a Academiei R.P.R. un cerc care studiază utilizarea calculatoarelor electronice în probleme economice.

Această problemă este de altfel în atenția conducerii statului nostru. După cum arată tovarășul Gheorghe Gheorghiu-Dej în raportul prezentat la cel de-al III-lea Congres al partidului, „în curînd la noi va începe folosirea mașinilor electronice de calcul și a altor sisteme de programare electronică pentru automatizarea complexă a unor procese de producție la rafinării, instalații ale industriei chimice, precum și automatizarea unor lucrări de calcule economice și de statistică" (Gheorghe Gheorghiu-Dej, raport la cel de-al III-lea Congres al Partidului Muncitoresc Romîn, Editura Politică, 1960, pag. 68).

Cibernetica tehnică

După cum aminteam la început, una din direcțiile importante de dezvoltare a automatizărilor moderne o constituie sistemele automate cu reacție. Aceste sisteme se caracterizează prin faptul că la ele există o circulație de informație atît de la punctul de comandă spre obiectul comandat, cît și de la obiectul comandat spre punctul de comandă. Prin aceasta se realizează performanțe superioare în sistemul automat.

Calculatoarele electronice au permis trecerea la o treaptă și mai evoluată a automatizărilor. Astfel, grație acestor calculatoare s-au putut construi fabrici complet automatizate, care funcționează fără intervenția omului, chiar atunci cînd materia primă își variază în timp proprietățile.

Unul dintre cele mai interesante exemple îl constituie rafinăria automată. Aici problema constă în a modifica permanent procesul tehnologic, astfel încît la ieșire să se obțină mereu aceleași produse (benzină, petrol lampant etc.), indiferent de cum variază în timp țițeiul de la intrare. Se știe că după sonda de la care provine, țițeiul are o compoziție diferită. Totuși, procesul tehnologic trebuie astfel condus, încît funcționarea să se facă în mod optim pe întreaga instalație. Acesta este un exemplu de problemă concretă care poate să fie rezolvată cu ajutorul calculatoarelor electronice.

În Uniunea Sovietică s-au realizat progrese foarte mari în ceea ce privește utilizarea calculatoarelor în industrie. Există astăzi cuptoare electrice de oțel automatizate și există și strunguri grele, comandate de dispozitive electronice. Și la noi în țară se studiază astfel de probleme.

Unele probleme filozofice ale ciberneticii

Cibernetica prin realizările sale a pus din nou în discuție problema raporturilor dintre om și mașină. După părerea noastră această problemă poate fi pusă atît în ceea ce privește problema cunoașterii, cît și în ceea ce privește problema socială.

O primă problemă este aceea a raporturilor dintre gîndire și mașină. Astfel, se discută astăzi dacă mașina gîndește sau nu. Evident că dacă afirmăm că mașina gîndește, nu dăm un răspuns greșit la problema fundamentală a filozofiei, care afirmă primatul existenței materiei asupra gîndirii. Dar, un studiu mai atent ne arată că sistemul nervos al omului este de o complexitate ce depășește cu mult orișice calculator electronic. Astfel încît, după părerea noastră, este greșit să afirmăm că, cel puțin în stadiul actual, calculatoarele electronice se apropie de gîndirea umană. Evident un calculator poate să efectueze anumite operații mai rapid decît omul, dar asta nu înseamnă că ele gîndesc. Și ceasul dă mai exact ora decît un om, dar nu are noțiunea de timp.

În ceea ce privește problema socială, în primul rînd trebuie să ne gîndim la automatizare. Aici trebuie avut în vedere faptul că automatizarea totală nu este posibilă decît numai în socialism. În adevăr, în capitalism, prin introducerea automatizării, numărul șomerilor crește și implicit scade numărul cumpărătorilor, astfel încît se ajunge la o ascuțire a crizei. Procesul de frînare în introducerea automatizării este produs și de anarhia caracteristică economiei capitaliste ce nu se împacă cu ritmul și organizarea pe care le impune automatizarea. Din contra în socialism automa-

tizarea permite eliberarea omului de povara muncilor grele și de rutină. Numai în socialism este posibil ca pe baza automatizării, să se treacă la micșorarea zilei de muncă, fără o reducere a salariului.

În ceea ce privește perspectivele cibernetice, ele sînt deosebit de importante. Trebuie știut că, apreciind în mod just realizările ciberneticii, în Uniunea Sovietică pe lîngă Academia de Științe a U.R.S.S. s-a creat Consiliul științific pentru cibernetică. Și la noi în țară, pe lîngă Comisia de automatizare a Academiei R.P.R. funcționează un cerc de cibernetică.

Grație politicii înțelepte a partidului, tehnica nouă în general și cibernetica în special vor cunoaște o dezvoltare încă neîntîlnită, contribuind astfel la desăvîrșirea construirii socialismului în țara noastră. Aceasta se reflectă și în Hotărîrea Comitetului Central al Partidului Muncitoresc Romîn și a Consiliului de Miniștri al R. P. Romîne cu privire la ridicarea nivelului tehnic al producției. În Hotărîre se arată că „este necesar să se înceapă studierea și introducerea aplicațiilor ciberneticii prin folosirea mașinilor electronice de calcul sau a altor sisteme de programare electronică, pentru automatizarea producției — de exemplu la rafinării, instalații ale industriei chimice, mașini-unelte — sau pentru automatizarea unor lucrări de calcule economice și statistice" (Scînteia nr. 4877 din 3 iulie 1960).

PENTRU CERCURILE DE ELEVI

ASUPRA UNOR SUME

1. Fie două progresii aritmetice:

$$\div a_1, a_2, \ldots a_m \text{ și } \div b_1, b_2, \ldots b_n, \text{ cu aceeași rație } r.$$

În funcție de numărul termenilor celor două progresii aritmetice m și n și de relația dintre ei ne propunem să calculăm sumele:

$$S_1 = a_1 a_2 \ldots a_m + \sum_{i=1}^{n} b_1 b_2 \ldots b_i a_{i+1} \ldots a_m \tag{1}$$

$$S_2 = a_1 a_2 \ldots a_m + \sum_{i=1}^{m} b_1 b_2 \ldots b_i a_{i+1} \ldots a_m \tag{2}$$

$$S_3 = a_1 a_2 \ldots a_m + \sum_{i=1}^{m} b_1 b_2 \ldots b_i a_{i+1} \ldots a_m + \sum_{i=m+1}^{n} b_{i-m+1} \cdot b_{i-m+2} \ldots b_i \tag{3}$$

după cum m este mai mare, egal sau mai mic decît n. Sumele de mai sus au $(n+1)$ termeni, iar fiecare termen al sumei are m factori.

2. Fiind dată o funcție $\varphi(i)$ și o funcție $F(i)$ care să satisfacă egalitatea:

$$F(i+1) - F(i) = \varphi(i) \tag{4}$$

sau:

$$\Delta F(i) = \varphi(i) \tag{4'}$$

Dacă în (4) dăm lui i valori de la 1 la n şi sumăm egalităţile obţinute, rezultă :

$$F(n+1) - F(1) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(i) \tag{5}$$

relaţie pe care o vom folosi în cele ce urmează *).

3. Considerăm funcţia :

$$F(i) = b_1(b_1+r)\dots[b_1+(i-1)r][a_1+(i-1)r]\dots[a_1+(m-1)r]$$

căreia îi calculăm pe $\Delta F(i)$:

$$\Delta F(i) = b_1(b_1+r)\dots(b_1+ir)(a_1+ir)\dots[a_1+(m-1)r] -$$
$$- b_1(b_1+r)\dots[b_1+(i-1)r][a_1+(i-1)r]\dots[a_1+(m-1)r] = \tag{7}$$
$$= b_1(b_1+r)\dots[b_1+(i-1)r][(a_1+ir)\dots[a_1+(m-1)r](b_1-a_1+r)$$

Dacă în această relaţie (7) vom însuma de la 1 la n în ambii membri ai egalităţii va rezulta :

$$\sum_{i=1}^{n} b_1 b_2 \dots b_i a_{i+1} \dots a_m = \frac{b_1 b_2 \dots b_{n+1} a_{n+1} \dots a_m - b_1 a_1 a_2 \dots a_m}{b_1 - a_1 + r} \tag{8}$$

Adunînd în ambii membri ai lui (8) pe : $a_1 a_2 \dots a_m$ rezultă :

$$S_1 = \frac{a_1 a_2 \dots a_m (r - a_1) + b_1 b_2 \dots b_{n+1} a_{n+1} \dots a_m}{b_1 - a_1 + r} \tag{9}$$

pe care o vom mai scrie şi sub forma :

$$S_1 = \frac{b_1 b_2 \dots b_{n+1} a_{n+1} \dots a_m - a_0 a_1 a_2 \dots a_m}{b_1 - a_0} \tag{9'}$$

unde : $a_1 - r = a_0$.

4. O demonstraţie pentru calculul sumei (1) prin inducţie completă.

Pentru $n = 0$ avem :

$$S_1^1 = a_1 a_2 \dots a_m = \frac{a_1 a_2 \dots a_m (b_1 - a_1 + r)}{b_1 - a_1 + r} = \frac{a_1 a_2 \dots a_m (r - a_1) + b_1 a_1 a_2 \dots a_m}{b_1 - a_1 + r}$$

şi pentru $n = 1$ rezultă :

$$S_1^2 = a_1 a_2 \dots a_m + b_1 a_2 \dots a_m = \frac{a_2 a_3 \dots a_m (a_1 + b_1)(b_1 - a_1 + r)}{b_1 - a_1 + r} =$$

$$= \frac{a_2 a_3 \dots a_m [a_1 (r - a_1) + b_1 (b_1 + r)]}{b_1 - a_1 + r} = \frac{a_1 a_2 \dots a_m (r - a_1) + b_1 b_2 a_2 \dots a_m}{b_1 - a_1 + r}$$

*) A. O. Ghelfond — „Calculul cu diferenţe finite", Editura Tehnică 1956, pag. 293 - 294.

Presupunem adevărată suma:

$$S_1^{(n+1)} = \frac{a_1a_2\dots a_m(r-a_1)+b_1b_2\dots b_{n+1}a_{n+1}\dots a_m}{b_1-a_1+r}$$

și ne propunem să calculăm pe $S_1^{(n+2)}$. Avem atunci:

$$S_1^{(n+2)} = \frac{a_1a_2\dots a_m(r-a_1)+b_1b_2\dots b_{n+1}\cdot a_{n+1}\dots a_m}{b_1-a_1+r} + b_1b_2\dots b_{n+1}a_{n+2}\dots a_m$$

$$= \frac{a_1a_2\dots a_m(r-a_1)+b_1b_2\dots b_{n+1}a_{n+2}\dots a_m(a_{n+1}+b_1-a_1+r)}{b_1-a_1+r}$$

Însă: $a_{n+1} = a_1+nr$, iar $b_1+(n+1)r = b_{n+2}$ așa că suma de mai sus se scrie:

$$S_1^{(n+2)} = \frac{a_1a_2\dots a_m(r-a_1)+b_1b_2\dots b_{n+2}a_{n+2}\dots a_m}{b_1-a_1+r}$$

ceea ce trebuia arătat.

5. Cînd $m=n$ atunci din (9) rezultă suma (2):

$$S_2 = \frac{a_1a_2\dots a_m(r-a_1)+b_1b_2\dots b_{m+1}}{b_1-a_1+r} \tag{10}$$

6. Pentru calculul sumei (3) o desfacem în două sume:

$$S_3' = a_1a_2\dots a_m + \sum_{i=1}^{m} b_1b_2\dots b_i a_{i+1}\dots a_m \tag{11}$$

$$S_3'' = \sum_{i=m+1}^{n} b_{i-m+1}b_{i-m+2}\dots b_i \tag{12}$$

Ținînd seama de (10) suma (11) se scrie imediat:

$$S_3' = \frac{a_1a_2\dots a_m(r-a_1)+b_1b_2\dots b_{m+1}}{b_1-a_1+r} \tag{11'}$$

Mai rămîne de calculat suma (12). Se observă ușor prin dezvoltare, sau printr-o schimbare de indici că:

$$\sum_{i=m+1}^{n} b_{i-m+2}\dots b_i = \sum_{i=1}^{n-m} b_{i+1}b_{i+2}\dots b_{i+m} \tag{13}$$

Din (8), schimbînd între ei pe a_i și b_i, rezultă:

$$\sum_{i=1}^{n} a_1a_2\dots a_i b_{i+1}\dots b_m = \frac{a_1a_2\dots a_{n+1}b_{n+1}\dots b_m - a_1b_1b_2\dots b_m}{a_1-b_1+r} \tag{14}$$

Luînd în egalitatea (14) $a_i = b_{m+i}$ rezultă:

$$\sum_{i=1}^{n} b_{i+1}b_{i+2}\dots b_{i+m} = \frac{b_{n+1}b_{n+2}\dots b_{n+m+1} - b_1b_2\dots b_m b_{m+1}}{(m+1)r} \tag{15}$$

Dacă în (15) înlocuim n cu $n-m$ obținem:

$$\sum_{i=1}^{n-m} b_{i+1}b_{i+2}\dots b_{i+m} = \frac{b_{n-m+1}b_{n-m+2}\dots b_{n+1} - b_1b_2\dots b_mb_{m+1}}{(m+1)r} \qquad (15')$$

care este S_3''.

Însă: $S_3 = S_3' + S_3''$ așa că înlocuirea valorilor lui S_3' și S_3'' cu cele găsite în (11') și (15') rezolvă problema.

7. Dacă adunăm în ambele părți ale egalității (15) pe $b_1b_2\dots b_m$ atunci rezultă:

$$\sum_{i=0}^{n} b_{i+1}b_{i+2}\dots b_{i+m} = \frac{b_{n+1}b_{n+2}\dots b_{m+n+1} + b_1b_2\dots b_m\,[(m+1)r - b_{m+1}]}{(m+1)r} \qquad (16)$$

unde înlocuind pe $b_{m+1} = b_1 + mr$ se va obține:

$$\sum_{i=0}^{n} b_{i+1}b_{i+2}\dots b_{i+m} = \frac{b_{n+1}b_{n+2}\dots b_{m+n+1} + b_1b_2\dots b_m(r-b_1)}{(m+1)r} \qquad (16')$$

8. În cele ce urmează calculăm sumele valorilor inverse care derivă din S_1.

Împărțim ambii membri ai egalității (9) cu produsul $a_1a_2\dots a_mb_1b_2\dots b_n$

În acest caz va rezulta:

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{a_1a_2\dots a_ib_{i+1}\dots b_n} = \frac{a_1a_2\dots a_n(r-a_1) + b_1b_2\dots b_nb_{n+1}}{(b_1-a_1+r)\,b_1b_2\dots b_na_1a_2\dots a_n} \qquad (17)$$

9. În suma de mai sus facem $a_i = b_{n+i}$ și rezultă:

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{b_{i+1}b_{i+2}\dots b_{i+n}} = \frac{b_{n+1}b_{n+2}\dots b_{n+n}(r-b_{n+1}) + b_1b_2\dots b_nb_{n+1}}{(b_1-b_{n+1}+r)\,b_1b_2\dots b_nb_{n+1}\dots b_{n+n}} \qquad (18)$$

sau după calcule ținînd seama că $b_{n+1} = b_1 + nr$ avem:

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{b_{i+1}b_{i+2}\dots b_{i+h}} = \frac{b_nb_{n+1}\dots b_{n+n} - b_1b_2\dots b_nb_{n+1}}{(n-1)\,r\,b_1b_2\dots b_nb_{n+1}\dots b_{n+n}} \qquad (18')$$

10. Dacă în suma (16') vom face $b_i = i$; $m = p$; $n = m$; $r = 1$ va rezulta:

$$\sum_{i=0}^{m} (i+1)(i+2)\dots(i+p) = \frac{(m+1)(m+2)\dots(m+p+1)}{p+1}$$

sau dezvoltat:

$$1\cdot2\cdot3\dots p + 2\cdot3\cdot4\dots(p+1) + \dots + (m+1)(m+2)\dots(m+p) = \frac{(m+1)(m+2)\dots(m+p+1)}{p+1}$$

care este chiar soluția problemei 3442 din GMF (B) 6—1958, pag. 345.

În cazul particular $p=2$ iar $m=n-1$ rezultă:

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

adică problema 2715 din GMF (B) 7—1957, pag. 381.

În suma (13″) facem: $p=2$ și rezultă:

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{b_{i+1}\cdot b_{i+2}}=\frac{b_n b_{n+1} b_{n+2}-b_1 b_n b_{n+1}}{r b_1 b_n b_{n+1} b_{n+2}} \tag{19}$$

sau încă:

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{b_{i+1}\cdot b_{i+2}}=\frac{1}{r}\left(\frac{1}{b_1}-\frac{1}{b_{n+2}}\right) \tag{19'}$$

În cazul că $b_1=1$; $b_{n+2}=100$; $r=1$ rezultă soluția problemei 2519 din GMF (B) 2—1958, pag. 102.

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots\ldots+\frac{1}{99\cdot 100}=\frac{99}{100}$$

Dacă $b_1=1$; $b_{n+2}=3n+1$; $r=3$ atunci rezultă:

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots.+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}.$$

Dan V. Bretan, Timișoara

CE SÎNT ELECTREȚII ?*)

Există o serie de substanțe și de amestecuri, care au niște proprietăți în mare măsură analoage proprietăților magneților, dacă sînt topite și lăsate să se întărească într-un cîmp electric omogen de intensitate mare (fig. 1). Se dovedește că aceste substanțe după scoaterea lor din acel cîmp, au devenit purtători de electricitate permanentă, adică pe o substanță în formă de bară, la un capăt se găsesc numai sarcini pozitive, iar la celălalt capăt numai sarcini negative. Fizicianul englez Oliver Heaviside a introdus pentru aceste analoage electrice ale magneților permanenți numirea de *electret*.

Deși primele indicații asupra acestui efect au apărut deja de mult în literatura de specialitate, electreții au rămas relativ necunoscuți pînă acum. Cauza este în primul rînd faptul că încă nu s-a reușit să se dea o explicație teoretică univocă acestui fenomen, al cărui mecanism trebuie privit ca fiind neclarificat. Nesiguranța care rezultă de aici la formarea electreților a împiedicat pînă acum aplicații mai largi ale acestora. Deși în trecut s-au făcut experiențe pentru a fabrica electreți practic utilizabili, totuși aceste experiențe n-au reușit să asigure cunoașterea unei legități generale. Cei mai mulți cercetători au dat ca rezultat al lucrărilor lor pro-

*) v. și articolul „Electreții" publicat în nr. 1/1956 al G.M.F.-B.

cedee de fabricație pentru care însă produsul inițial a fost de cele mai multe ori insuficient de exact definit pentru a asigura în caz de repetare un succes sigur.

De cele mai multe ori s-au folosit amestecuri pe bază de ceruri și rășini diferite. De aceea fabricarea electreților a rămas pînă azi în fază experimentală. În ultimul timp se folosesc și alte materiale pentru formarea electreților, în special acelea bazate pe materii ceramice. În ce măsură vor fi utilizabile masele plastice, va arăta viitorul. Pînă în prezent nu există rezultate remarcabile în această direcție.

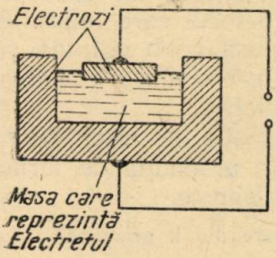


Fig. 1.

Primul electret utilizabil a fost fabricat de cercetătorul japonez Eguchi. El a folosit părți egale de rășină și ceară de Karnauba — o ceară care se scoate din frunzele nucii de palmier sud-american, așa numitul palmier de Karnauba — și a lăsat să se răcească acest amestec într-un cîmp electric omogen de cca. 10 kW/cm. În mod analog pot fi fabricați și magneți: se încălzește o bară de oțel peste o anumită temperatură și se lasă să se răcească într-un cîmp magnetic.

Cum s-a dovedit ulterior, trecerea de la starea lichidă la cea solidă nu este necesară la formarea electreților. Anumite substanțe pot deveni electreți și în stare solidă sub acțiunea unui cîmp electric.

Cercetînd proprietățile unui electret se poate constata că multe din ele sînt analoage cu cele ale unui magnet. În mod principial nu putem folosi energia unui electret sau a unui magnet, deoarece neexistînd sarcini libere, nu se poate genera nici un curent. De aceea un electret poate fi scurt circuitat fără a distruge polaritatea lui.

O proprietate comună a electreților și magneților este conservarea polarității la fragmentare. Dacă tăiem de exemplu, un magnet în formă de bară, atunci părțile obținute posedă proprietăți magnetice, adică fiecare parte are, ca și bara inițială, un pol nord și un pol sud. Aceeași proprietate o are și electretul care la împărțire furnizează de asemenea, electreți noi.

La electreți apare însă, un fenomen așa-numit de transmutare, care nu este cunoscut la magneți. Orice magnet își păstrează polaritatea care i s-a indus într-un pol oarecare. La unii electreți — nu la toți — s-a putut constata că polaritatea dispare după un anumit timp și apare mai tîrziu cu semn contrar. În locul în care se găsea la început polul pozitiv se găsește acum polul negativ. Această polaritate se conservă atunci timp îndelungat cu condiția ca electretul să fie păstrat în mod corespunzător, în special să fie ferit de orice influență a umidității. În afară de aceasta, la păstrarea electreților, aceștia trebuie feriți de sarcini pe care le-ar putea lua din mediul înconjurător, compensîndu-și sarcina proprie. De aceea vor fi înfășurați în hîrtie de staniol sau se vor păstra în cutii de tablă.

Ca posibilități de aplicație ale electreților avem de exemplu, construcția de transformatori electroacustici *), care se bazează pe principii electrostatice, deci la difuzoare electrostatice și la microfoane cu condensator. Micro-

*) Un transformator electro-acustic este un aparat care transformă energia electrică în energie acustică și invers, de exemplu, diapazoanele și microfoanele.

foanele cu condensator, la care oscilează o mebrană din electret, sînt cunoscute mai ales în Japonia. Un alt domeniu de aplicație a electreților este în tehnica măsurătorilor electrice. Ca exemplu, dăm construcția unui electrometru. Acesta este un aparat de măsură care folosește forța de respingere între sarcinile electrice de același semn, respectiv forța de atracție între sarcini electrice de semn contrar, pentru a măsura tensiunea. Dacă tensiunea de măsurat este trecută la două plăci metalice între care se găsește un electret, atunci asupra acestuia lucrează o forță care imprimă o mișcare de rotație. Această rotație poate fi transpusă pe o oglindă și poate fi astfel indicată. Mărimea unghiului de rotație este o măsură pentru mărimea tensiunii care există la aceste două plăci metalice.

Fără îndoială că viitorul va permite și alte aplicații ale electreților. De aceea uzinele ceramice Hermsdorf, cunoscute prin producția de ferite și-au pus problema de a fabrica electreți în scopuri tehnice.

(traducere din l. germană)

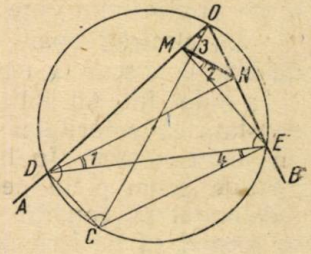
PROBLEME REZOLVATE

Problema 4224

În interiorul unghiului AOB se ia un punct C. Din acesta se duc perpendicularele CD pe latura OA; CE pe OB. Din punctele D și E se duc perpendicularele: EM pe OA; DN pe OB. Să se demonstreze că OC și MN sînt perpendiculare între ele.

(Cl. VIII. Olimp. 1959, Moscova)

Soluția I. Evident, patrulaterul *ODCE* e inscriptibil iar *OC* e diametru. Latura *MN* e o latură din triunghiul ortic al triunghiului *ODE*, și ea este perpendiculară pe raza cercului circumscris dusă în vîrful corespunzător. (V. Geom. tirung. *T. Lalescu* 1.22).



Soluția II. Din patrulaterul inscriptibil *DEMN* rezultă că $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$, iar din patrulaterul inscriptibil *DCEO* rezultă că $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 4$. Cum $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 4$ ca alterne interne, rezultă că $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 3$, însă laturile *EM* și *OM* sînt perpendiculare, deci și *OC* este perpendiculară pe *MN*.

Problema 4242

Să se rezolve sistemul:

$$\frac{xy}{ay+bx} = \frac{yz}{bz+cy} = \frac{zx}{cx+az} = \frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}$$

(Din „Matematyka", Warszawa, 1957)

Soluția I. Pentru a obține o soluție a sistemului, primele două rapoarte ne dau:

$\frac{x}{ay+bx} = \frac{z}{bz+cy}$ sau: $bxz + cxy = ayz + bxz$ de unde: $cx = az$

În mod analog obținem relațiile: $ay = bx$ și $cy = bz$.
Relațiile de mai sus se pot scrie și sub forma:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$$

Ridicînd la pătrat și aplicînd proprietatea cunoscută a unui șir de rapoarte egale, se obține:

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}; \text{ deci: } \frac{x^2}{a^2} = \frac{xy}{ay+bx} = \frac{xy}{2ay}$$

Deoarece $ay = bx$.

De aici scoatem $x = \frac{a}{2}$ și în mod analog, $y = \frac{b}{2}$ și $z = \frac{c}{2}$.

Soluția II. Inversînd avem:

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y} = \frac{b}{y}+\frac{c}{z} = \frac{c}{z}+\frac{a}{x} = \frac{a^2+b^2+c^2}{x^2+y^2+z^2}$$ din care deducem că:

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$ pe care le punem egal cu $\frac{1}{t}$.

Ultimul raport este egal cu: $\frac{a^2+b^2+c^2}{x^2+y^2+z^2} = \frac{a^2+b^2+c^2}{t^2(a^2+b^2+c^2)} = \frac{1}{t^2}$

deci: $\frac{ay+bx}{xy} = \frac{1}{t^2}$, sau: $\frac{abt+abt}{ab\,t^2} = \frac{1}{t^2}$, deci $t = \frac{1}{2}$ sau $t = 0$,

din care scoatem $x = y = z = 0$ și $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{b}{2}$, $z = \frac{c}{2}$.

Soluții bune au dat: *M. Stan*, S. m. 1, București și *D. Ene*, Ploești.

Problema 4246

Dacă $0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$ *și* $0 \leqslant \beta < \frac{\pi}{2}$ *atunci* $\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} \leqslant \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{2}$.

(*Olimpiada matematică*, R. P. Polonă, 1959)

Soluția I. dată de *M. Stan*, elev, București. — Trebuie dovedit că

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}+\frac{2\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}}\right)$$

sau notînd $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = x$ și $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = y$, x și y fiind pozitive subunitare,

$\frac{x+y}{1-xy} \leqslant \frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}$. Inecuația dată se reduce astfel la:

$(x+y)(1-x^2)(1-y^2) \leqslant (1-xy)[x(1-y^2)+y(1-x^2)]$, sau

$$(x+y)(1-x^2)(1-y^2) \leqslant (1-xy)^2 (x+y),$$
$$(1-x^2)(1-y^2) \leqslant (1-xy)^2.$$

Pentru a demonstra aceasta pornim de la inegalitatea cunoscută: $x^2+y^2>2xy$ care înmulțită cu -1 ne dă: $-x^2-y^2<-2xy$. Adunînd acum, la ambii membri ai inecuației, astfel obținute, $1+x^2y^2$ se obține:

$$1-y^2-x^2+x^2y^2 \leqslant 1+x^2y^2-2xy$$
$$1-y^2-x^2(1-y^2) \leqslant (1-xy)^2$$
$$(1-x^2)(1-y^2) \leqslant (1-xy)^2,$$

adică ceea ce trebuia demonstrat.

Soluția II dată de elev *D. Ene*, Ploești. Relația cerută devine:

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{2\cos\alpha\cos\beta} - \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} \geqslant 0$$

sau simplificînd cu $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$ care rămîne pozitiv fiindcă, atunci cînd $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$ și $0 \leqslant \beta < \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \sin\frac{\alpha+\beta}{2} < 1$, obținem

$$\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\alpha\cos\beta} \geqslant \frac{1}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}},$$

sau:

$$\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \leqslant 0,$$

adică:

$$\frac{\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2} - \cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} \leqslant 0,$$

sau

$$\frac{2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} - 1 + \cos(\alpha-\beta) - 2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} \leqslant 0$$

De unde $$-\frac{1-\cos(\alpha-\beta)}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} \leqslant 0,$$

inegalitate adevărată fiindcă $1 - \cos(\alpha - \beta) = 2\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2} > 0$ și $1 \geqslant \cos\frac{\alpha+\beta}{2} > 0$ cînd $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$ și $0 \leqslant \beta < \frac{\pi}{2}$. Inegalitatea devine egalitate cînd $\alpha = \beta = 0$.

Problema 4251

Printr-un punct fix F din plan, cuprins între două cercuri concentrice de raze R și r (R>r) se duce o dreaptă mobilă care intersectează cercul de rază r în punctele M, M', iar perpendiculara dusă din F pe FM taie cercul de rază R în punctele N și N'.

a) *Să se arate că* $MM'^2 + NN'^2 = \text{const.}$

b) $FM^2+FM'^2+FN^2+FN'^2=\text{const.}$

c) *Cum trebuie luat punctul F pentru ca punctul M să fie ortocentrul triunghiului M'N'N?*

d) *Să se arate că locul geometric al mijloacelor segmentelor MN, MN', M'N, M'N' este un cerc cu centrul la mijlocul lui OF.*

Olimpiada 1960, București, (C. Coșniță)

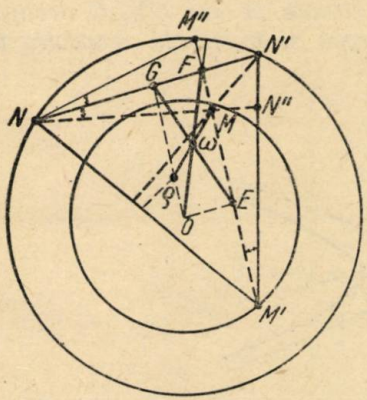
Soluție. a) Avem

$$\left(\frac{NN'}{2}\right)^2 = R^2 - OG^2,\ \left(\frac{MM'}{2}\right)^2 = r^2 - OE^2,$$

deci

$$NN'^2 + MM'^2 = 4\,[R^2 + r^2 - (OG^2 + O^2E)].$$

Dar $OG^2 + OE^2 = OF^2$ deoarece $OEFG$ este un dreptunghi.



Deci $NN'^2 + MM'^2 =$
$= 4\,(R^2 + r^2 - OF^2) = \text{constant.}$

b) Putem scrie:

$$FM^2+FM'^2+FN^2+FN'^2=(FM'-FM)^2+2FM\cdot FM'+(FN+FN')^2-2FN\cdot FN'=MM'^2+2FM\cdot FM'+NN'^2-2FN\cdot FN'. \quad (1)$$

Conform teoremei puterii punctului față de cerc, avem:

$$FM\cdot FM' = OF^2 - r^2 = \text{constant și}$$
$$FN\cdot FN' = R^2 - OF^2 = \text{constant.}$$

Înlocuind cu (1) obținem:

$$FM^2+FM'^2+FN^2+FN'^2 = MM'^2+NN'^2+2\,(OF^2-r^2-R^2+OF^2) = MM'^2+NN'^2+4OF^2-2\,(R^2+r^2).$$

Înlocuind pe $MM'^2 + NN'^2$ cu $4(R^2 + r^2 - OF^2)$ obținem:

$$FM^2 + FM'^2 + FN^2 + FM'^2 = 2(R^2 + r^2) = \text{constant.}$$

c) Dacă M ar fi ortocentru, atunci MN ar fi înălțime, s-ar forma patrulaterul inscriptibil $NFN''M'$, în care $\sphericalangle M''M'N' = \sphericalangle N'NN''$.

Dar $\sphericalangle N'M'M'' = \sphericalangle M''NN' = \frac{1}{2}$ arc $M''N'$.

Deci pentru ca M să fie ortocentru trebuie ca și $\sphericalangle N'NN'' = \sphericalangle M''NN'$.

În acest caz triunghiul $M''NM$ este isoscel deoarece NF și MM'' sînt perpendiculare iar $\sphericalangle M''NN' = \sphericalangle N'NN''$.

Deci și $FM'' = FM$, adică F trebuie să se afle la mijlocul distanței dintre cele două cercuri, pe cercul de rază $\frac{R+r}{2}$ și centrul O.

d) Mijloacele segmentelor $M'N$ și $M'N'$, precum și mijloacele segmentelor MN' și MN, se află pe cercul lui Euler.

Centrul acestui cerc se află în ω mijlocul segmentului QM, Q fiind centrul cercului circumscris triunghiului MNN'.

Prin ω trece și segmentul EG, E fiind mijlocul lui MM', G al lui NN'; ω se află chiar în mijlocul lui EG.

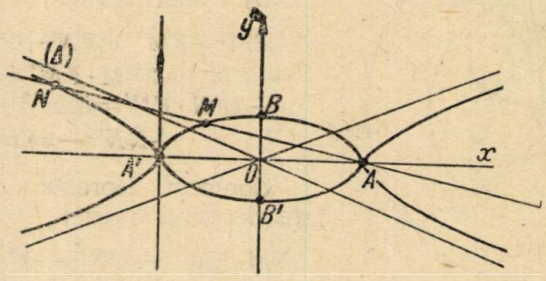
(Culegere de probleme de geometrie de Țițeica — 1929 — cap. V — pr. 16 și 3).

Dar prin mijlocul lui EG (diagonală în dreptunghiul OEFG) trece și cealaltă diagonală OF, împărțită de ω în două părți egale, deci ω se află la mijlocul lui OF.

Problema 4254

Se dau: elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ *și hiperbola* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

Fie, A,A' vîrfurile axei mari ale elipsei situate pe axa OX. O dreaptă variabilă care trece prin A taie din nou elipsa și hiperbola respectiv în M și N.



a) *Să se arate că proiecțiile punctelor M,N pe axa OX împreună cu vîrfurile A,A' formează o diviziune armonică.*

b) *Să se arate că între ordonatele* y_1 *și* y_2 *ale punctelor M și N există relația:*

$$\frac{1}{y_1^2} - \frac{1}{y_2^2} = \frac{1}{b^2}$$

Să se deducă în ce punct taie elipsa o paralelă dusă prin A la una din asimptotele hiperbolei.

c) *Care este locul geometric al intersecției tangentelor în M și N respectiv la elipsă și hiperbolă.*

(Olimpiada de matematică 1960, cl. XI-a, Gh. D. Simionescu

Soluția dată de *Olteanu S. Victor*, elev ș. m. 19 București.

a) Dacă notăm $M(x_1, y_1)$ și $N(x_2, y_2)$, ecuația dreptei ce trece prin A este: $(\Delta) \equiv mx - y - ma = 0$, unde m este panta dreptei; intersecția dreptei (Δ) cu elipsa este $M\left[\frac{a(a^2m^2-b^2)}{a^2m^2+b^2}; \frac{-2mab^2}{+a^2m^2+b^2}\right]$, iar cu hiperbola este $N\left[\frac{a(a^2m^2+b^2)}{a^2m^2-b^2}; \frac{2mab^2}{a^2m^2-b^2}\right]$.

Pentru ca proiecțiile M,N pe axa Ox să fie conjugate armonic cu A,A' este necesară condiția: $a^2 = x_1x_2$ sau $a^2 = \frac{a(a^2m^2-b^2)}{a^2m^2+b^2} \cdot \frac{a(a^2m^2+b^2)}{a^2m^2-b^2}$, ceea ce este evident.

b) Avem: $\left(\frac{a^2m^2+b^2}{-2mab^2}\right)^2 - \left(\frac{a^2m^2-b^2}{2mab^2}\right)^2 = \frac{1}{4m^2a^2b^4} \cdot (2m^2a^2b^2 + 2m^2a^2b^2) = \frac{4m^2a^2b^2}{4m^2a^2b^4} = \frac{1}{b^2}$ și deci, între ordonatele y_1 și y_2 ale punctelor M,N există relația $\frac{1}{y_1^2} - \frac{1}{y_2^2} = \frac{1}{b^2}$.

În particular, dacă dreapta Δ este paralelă cu una din asimptotele hiperbolei, înseamnă că panta dreptei va fi $m = \pm\frac{b}{a}$ și punctul de intersecție cu elipsa va fi $(0; \mp b)$, adică punctele B' și B.

c) Ecuația tangentei în M la elipsă este $\frac{x_1}{a^2}x + \frac{y_1}{b^2}y - 1 = 0$ sau $\frac{a^2m^2-b^2}{a(a^2m^2+b^2)}x - \frac{2ma}{a^2m^2+b^2}y - 1 = 0$, iar ecuația tangentei în N la hiperbolă este $\frac{x_2}{a^2}x - \frac{y_2}{b^2}y - 1 = 0$ sau $\frac{a^2m^2+b^2}{a(a^2m^2-b^2)}x - \frac{2ma}{a^2m^2-b^2}y - 1 = 0$.

Rezolvînd sistemul format de cele două ecuații de mai sus în raport cu x și y, găsim: $x = -a$, $y = -ma$, ceea ce arată că locul geometric al intersecției tangentelor în M și N respectiv la elipsă și hiperbolă este dreapta $x = -a$, adică paralela dusă prin A' la Oy.

Problema 4267

Să se arate că dacă între unghiurile unui triunghi ABC există relația

$$\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A-C}{2}} = -\frac{\sin B \sin\frac{B}{2}}{\sin C \sin\frac{C}{2}}$$

atunci $2 \operatorname{cosec} A = \operatorname{cosec} B + \operatorname{cosec} C$.

Grecu I. Eftimie

Soluție. — Relația din enunț se mai poate scrie astfel:

$$\frac{\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A-C}{2}\sin\frac{B}{2}} = -\frac{\sin B}{\sin C}$$

sau:

$$\frac{\cos\frac{A-B-C}{2} - \cos\frac{A-B+C}{2}}{\cos\frac{A-C-B}{2} - \cos\frac{A-C+B}{2}} = -\frac{\sin B}{\sin C}$$

sau:

$$\frac{\cos(90°-A)-\cos(90°-B)}{\cos(90°-A)-\cos(90°-C)} = -\frac{\sin B}{\sin C}$$

sau:

$$\frac{\sin A - \sin B}{\sin A - \sin C} = -\frac{\sin B}{\sin C}.$$

Efectuînd toate calculele obținem: $\sin A = \frac{2 \sin B \sin C}{\sin B + \sin C}$ de unde relația ce trebuia demonstrată: $2 \operatorname{cosec} A = \operatorname{cosec} B + \operatorname{cosec} C$.

Problema 4271

Să se demonstreze că dacă $a < b < c$ *atunci*

$$\frac{a+b+c}{3} < \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc}{6}} < c.$$

Se va presupune că a,b,c sînt pozitive.

Gh. D. Simionescu

Soluție. — Dacă notăm radicalul cu E și dacă înlocuim pe a și b prin c, care este mai mare, avem evident:

$$E < \sqrt{\frac{6c^2}{6}} = c$$

Radicalul se mai poate scrie:

$$E = \sqrt{\frac{3\Sigma a^2 + 3\Sigma ab}{18}} = \sqrt{\frac{2(a+b+c)^2 + \Sigma a^2 - \Sigma ab}{18}},$$

însă $\Sigma a^2 - \Sigma ab = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] > 0$, de unde rezultă că

$$E > \sqrt{\frac{2(a+b+c)^2}{18}} = \frac{a+b+c}{3}.$$

Așa dar,

$$\frac{a+b+c}{3} < E < c.$$

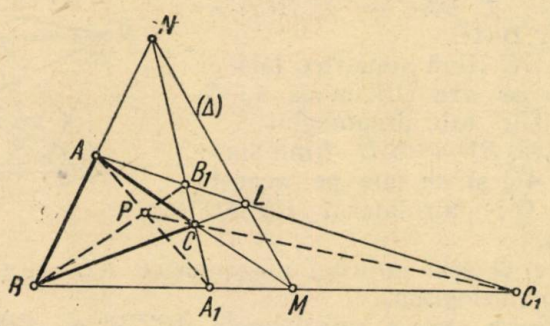
Problema 4272

Transversala Δ taie prelungirile laturilor BC, CA, AB ale triunghiului ABC în L, M, N. Fie $A_1 \equiv (BM; CN)$, $B_1 \equiv (CN; AL)$, $C_1 \equiv (AL; BM)$. Să se arate că AA_1, BB_1, CC_1 sînt concurente.

Iacob I. Voia, Timișoara

Soluția I-a. Triunghiurile ABC și $A_1 B_1 C_1$ sînt omologice căci intersecțiile laturilor omoloage sînt coliniare (L, M, N). Rezultă că AA_1, BB_1 și CC_1 sînt concurente.

Soluția II-a dată de *Nicula Virgil*, absolvent București. Cunoaștem că



într-un patrulater complet o diagonală este împărțită armonic de celelalte două (teorema lui P a p p u s). Deci, în patrulaterul complet $MC_1\ LC$, unde CC_1, ML și AB sînt diagonale avem: $\frac{NB}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1$ (1) (P fiind intersecția lui CC_1 *cu* AB) adică N, B, P, A formează o diviziune armonică.

Aplicăm teorema lui Menelaos transversalei $NA_1\ B_1$ în triunghiul ABC_1: $\frac{NB}{NA} \cdot \frac{B_1A}{B_1C_1} \cdot \frac{A_1C_1}{A_1B} = 1$ (2). Împărțim relația (1) prin relația (2), obținem: $\frac{PA}{PB} \cdot \frac{A_1B}{A_1C_1} \cdot \frac{B_1C_1}{B_1A} = 1$, adică condiția necesară și suficientă pentru ca AA_1, BB_1, CC_1 să fie concurente.

Soluția III-a dată de *V. Olteanu*, ș.m. 19 București și *D. Ene* Ploiești. Se constată că punctele: $L(BC\,;\,B_1C_1)$, $M(AC\,;\,A_1C_1)$, $N(AB\,;\,A_1B_1)$ sînt 3 puncte colineare deoarece astfel au fost luate prin ipoteză, fiind situate pe dreapta Δ.

Înseamnă că, pe baza reciprocei teoremei lui Desargues, triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sînt triunghiuri omologice și deci, dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sînt concurente în punctul P care este centrul de omologie al celor două triunghiuri.

Generalizare. Deoarece teorema lui Desargues nu impune condiții în privința poziției axei de omologie Δ, rezultă că oricare ar fi transversala Δ față de triunghiul ABC, dacă se face aceeași construcție impusă prin ipoteză, vom obține de asemenea că intersecțiile $(AB\,;\,A_1\,B_1)$, $(BC\,;\,B_1\,C_1)$, $(CA\,;\,C_1\,A_1)$ sînt puncte colineare, aflate pe dreapta Δ. Rezultă că triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sînt omologice și deci, teorema este valabilă indiferent dacă Δ taie prelungirile laturilor triunghiului, sau taie două laturi și prelungirea celei de-a treia.

Problema 4278

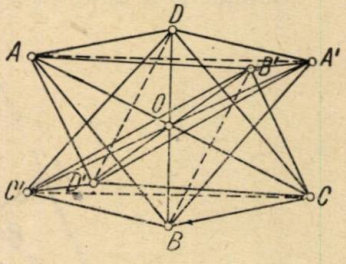
Se dă un paralelogram $ABCD$ cu centul O. Simetricele vîrfurilor acestui paralelogram față de diagonalele lui sînt A', B', C', D'. Să se arate că:

a) Patrulaterele $ACB'D$ și $ACBD'$ sînt trapeze isoscele egale.

b) Patrulaterele $AA'\,CC'$ și $BB'\,DD'$ sînt dreptunghiuri cu același centru O.

c) Patrulaterele $A'B'C'D'$, $A'DC'B$ și $AB'CD'$ sînt paralelograme concentrice cu paralelogramul dat.

Corneliu Georgescu, Craiova



Soluție. — a) Avem: $AD = BC = AD' = B'C$; $\sphericalangle DAC = \sphericalangle BCA = \sphericalangle B'CA = \sphericalangle D'AC$.

b) $A'C' = AC$ fiind simetrice față de DB și se taie pe axa DB, adică în O. Rezultă că $AA'CC'$ este dreptunghi.

De asemenea, $BD = B'D'$ fiind simetrice față de AC și se taie pe această axă, adică în O; patrulaterul $BB'DD'$ este dreptunghi.

c) Deoarece O este mijlocul diagonalelor $A'C'$ și $B'D'$, patrulaterul $A'B'C'D'$ este paralelogram.

Pentru aceleași motive patrulaterele $AB'CD'$ și $A'BC'D$ sînt paralelograme.

Problema 4282

Să se stabilească identitatea:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin^3 k\alpha - \sin^3\left(\frac{\pi}{3} - k\alpha\right)}{\sin k\alpha + \sin\left(k\alpha - \frac{\pi}{3}\right)} = \frac{3}{4}\,n$$

Ioan St. Mușat

Soluția autorului. — Membrul întîi al identității mai poate fi scris:

$$E_1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin^3 k\alpha - \sin^3\left(\frac{\pi}{3} - k\alpha\right)}{\sin k\alpha - \sin\left(\frac{\pi}{3} - k\alpha\right)}$$

sau:

$$E_1 = \sum_{k=1}^{n}\left[\sin^2 k\alpha + \sin k\alpha\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos k\alpha - \frac{1}{2}\sin k\alpha\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos k\alpha - \frac{1}{2}\sin k\alpha\right)^2\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\sin^2 k\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin k\alpha\cos k\alpha - \frac{1}{2}\sin^2 k\alpha + \frac{3}{4}\cos^2 k\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin k\alpha\cos k\alpha + \frac{1}{4}\sin^2 k\alpha\right) =$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{4}(\sin^2 k\alpha + \cos^2 k\alpha) = \frac{3}{4}n.$$

Problema 4283

Să se arate că dacă $a+b+c=0$ atunci:

$$10(a^7 + b^7 + c^7) = 7(a^5 + b^5 + c^5)(a^2 + b^2 + c^2) \text{ și}$$
$$6(a^7 + b^7 + c^7) = 7(a^4 + b^4 + c^4)(a^3 + b^3 + c^3).$$

V. Nicula și A. Tudorică

Soluție. — Considerăm pe a, b, c ca rădăcini ale ecuației

$$x^3 + px + q = 0.$$

Relațiile între rădăcini și coeficienți sînt: $a+b+c=0$; $ab+ac+bc=p$; $abc = -q$; $S_1 = a+b+c = 0$; $S_2 = a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+ac+bc) = -2p$.

Dacă exprimăm că a, b, c verifică ecuația dată se obțin relațiile:

$$a^3 + pa + q = 0; \quad b^3 + pb + q = 0; \quad c^3 + pc + q = 0 \qquad (1)$$

Făcînd suma acestor relații se obține:

$$S_3 + pS_1 + 3q = 0 \quad \text{deci:} \quad S_3 = -3q$$

Înmulțim relațiile (1) respectiv cu a, b, c și adunîndu-le obținem

$$S_4 + pS_2 + qS_1 = 0 \text{ deci, } S_4 = -pS_2 = 2p^2.$$

Înmulțim relațiile (1) respectiv cu a^2, b^2, c^2 și adunînd, obținem $S_5 + pS_3 + qS_2 = 0$. Vom avea deci, $S_5 = -pS_3 - qS_2 = 3pq + 2pq = 5pq$.

Înmulțind relațiile (1) respectiv cu a^4, b^4, c^4 și adunăm. Deducem $S_7 + pS_5 + qS_4 = 0$, de unde $S_7 = -pS_5 - qS_4 = -5p^2q - 2p^2q = -7p^2q$.

Relațiile ce trebuiau demonstrate sînt acum evidente:

$$-70\,p^2q = 7 \cdot 5pq\,(-2p) \text{ și}$$
$$-42\,p^2q = 7 \cdot 2p^2\,(-3q)$$

Problema 4288

Să se demonstreze că dacă avem:

$\cos A = \cos\alpha \sin\beta$; $\cos B = \cos\beta \sin\gamma$; $\cos C = \cos\gamma \sin\alpha$ și $A + B + C = \pi$, atunci mai avem $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma = 1$.

(Journal de mathématiques élémentaires)

Soluție dată de *Victor Olteanu*, București

Pentru a demonstra relația de mai sus, trebuie să găsim relația dintre funcțiile unghiurilor α, β, γ și deci, vom elimina pe cos A, cos B, cos C în identitatea condiționată, cunoscută:

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A \cos B \cos C$$

și deci, vom avea:

$\cos^2\alpha\sin^2\beta + \cos^2\beta\sin^2\gamma + \cos^2\gamma\sin^2\alpha = 1 - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$,

sau prin împărțirea egalității la $\cos^2\alpha \cdot \cos^2\beta \cdot \cos^2\gamma$, avem:

$\operatorname{tg}^2\beta \sec^2\gamma + \operatorname{tg}^2\gamma \sec^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha \sec^2\beta = \sec^2\alpha \sec^2\beta \sec^2\gamma - 2\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma$;

sau

$$\operatorname{tg}^2\beta\,(1 + \operatorname{tg}^2\gamma) + \operatorname{tg}^2\gamma\,(1 + \operatorname{tg}^2\alpha) + \operatorname{tg}^2\alpha\,(1 + \operatorname{tg}^2\beta) =$$
$$= (1 + \operatorname{tg}^2\alpha)(1 + \operatorname{tg}^2\beta)(1 + \operatorname{tg}^2\gamma) - 2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma;$$

de unde

$$(\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta + \operatorname{tg}^2\gamma) + (\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta + \operatorname{tg}^2\beta\operatorname{tg}^2\gamma + \operatorname{tg}^2\gamma\operatorname{tg}^2\alpha) =$$
$$= 1 + (\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta + \operatorname{tg}^2\gamma) + (\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta + \operatorname{tg}^2\beta \cdot \operatorname{tg}^2\gamma + \operatorname{tg}^2\gamma \cdot \operatorname{tg}^2\alpha)$$
$$+ \operatorname{tg}^2\alpha \cdot \operatorname{tg}^2\beta\operatorname{tg}^2\gamma - 2\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma;$$

sau

$$\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta\operatorname{tg}^2\gamma - 2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma + 1 = 0,$$

deci

$$(\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma - 1)^2 = 0 \text{ și prin urmare } \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma = 1$$

Problema 4295

Considerăm următoarele trei numere:

$$C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \ldots;\ C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + \ldots;\ C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + \ldots$$

Să se demonstreze că două dintre ele sînt egale, iar al treilea diferă de ele printr-o unitate.

(cl. X., Olimpiada 1959, Moscova)

Soluția dată de *Victor Olteanu*, București.

Considerăm binomul lui Newton:

$$(x+1)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} + C_n^3 x^{n-2} + \ldots + C_n^k x^{n-k} + \ldots$$

unde înlocuim pe x cu α, una din rădăcinile cubice complexe ale unității și considerăm pe rînd: $n=3p$; $n=3p+1$ și $n=3p+2$.

Vom avea 3 cazuri:

$1^0)$ $(-\alpha^2)^{3p}=(C_n^0+C_n^3+C_n^6+\ldots)+\alpha(C_n^2+C_n^5+C_n^8+\ldots)+\alpha^2(C_n^1+C_n^4+C_n^7+\ldots)$

sau:

$$(C_n^1+C_n^4+C_n^7+\ldots)\alpha^2+(C_n^2+C_n^5+C_n^8+\ldots)\alpha+(C_n^0+C_n^3+C_n^6+\ldots\pm 1)=0,$$

de unde rezultă că: $C_n^1+C_n^4+C_n^7+\ldots=C_n^2+C_n^8+C_n^3+C_n^6+\ldots\pm 1$.

În acest caz, avem numerele $S_{3k+1}=S_{3k+2}$, iar numărul S_{3k} diferă de ele cu o unitate.

$2^0)$ $x=\alpha$ și $n=3p+1$; rezultă că

$$(\alpha^2)^{3p-1}=(C_n^1+C_n^4+C_n^4+C_n^7+\ldots)+\alpha(C_n^0+C_n^3+C_n^6+\ldots)+\alpha^2(C_n^2+C_n^5+C_n^8+\ldots)$$

sau:

$$(C_n^2+C_n^5+C_n^8+\ldots\pm 1)\alpha^2+(C_n^0+C_n^3+C_n^6+\ldots)\alpha+(C_n^1+C_n^4+C_n^7+\ldots)=0$$

de unde rezultă că: $C_n^2+C_n^5+C_n^8+\ldots\pm 1=C_n^0+C_n^3+C_n^6+\ldots=C_n^1+C_n^4+C_n^7+\ldots$

În acest caz, avem numerele $S_{3k}=S_{3k+1}$, iar numărul S_{3k+2} diferă de ele cu o unitate.

$3^0)$ $x=\alpha$ și $n=3p+2$; rezultă că:

$$(-\alpha^2)^{3p+2}=(C_n^2+C_n^5+C_n^8+\ldots)+\alpha(C_n^1+C_n^4+C_n^7+\ldots)+\alpha^2(C_n^0+C_n^3+C_n^6+\ldots)$$

sau:

$$(C_n^0+C_n^3+C_n^6+\ldots)\alpha^2+(C_n^1+C_n^4+C_n^7+\ldots\pm 1)\alpha+C_n^2+C_n^5+C_n^8+\ldots)=0,$$

de unde rezultă că: $C_n^0+C_n^3+C_n^6+\ldots=C_n^1+C_n^4+C_n^7+\ldots\pm 1=C_n^2+C_n^5+C_n^8+\ldots$

În acest caz, avem numerele $S_{3k}=S_{3k+2}$, iar numărul S_{3k+1} diferă cu o unitate de celelalte două numere egale.

Se constată că în toate cazurile posibile, două numere sînt egale, iar al treilea diferă de ele cu o unitate.

Problema 4312

Ce relație există între x și y dacă:

a) $\sin x\sqrt{1-\sin^2 y}+\sin y\sqrt{1-\sin^2 x}=0$

b) $\sin x\sqrt{1-\cos^2 y}-\cos y\sqrt{1-\sin^2 x}=0$

c) $\cos x\sqrt{1-\cos^2 y}+\cos y\sqrt{1-\cos^2 x}=1$

d) $\sin x\sqrt{1-\cos^2 y}+\cos y\sqrt{1-\sin^2 x}=1$

C. Ionescu-Țiu

Soluție. a) Deoarece radicalii sînt aritmetici, singura posibilitate este ca: $\sin x = -\sin y$, adică: $\sin x + \sin y = 0$. Deci trebuie ca $x+y=2k\pi$ sau: $x-y=(2k+1)\pi$

b) Din aceleași motive trebuie ca $\sin x = \cos y$ sau:

$$\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) \text{ și } \sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = 0.$$

Deci trebuie ca: $x + y = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ sau: $x - y = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$

c) Relația se mai poate scrie:

$$\cos x \cdot |\sin y| + \cos y \cdot |\sin x| = 1.$$

Prin urmare, cos$x$ și cos$y$ trebuie să aibă semnul + (plus).
Avem: $\cos x \sin y + \cos y \sin x = 1$ sau:

$$\sin(x + y) = 1 \text{ sau: } \sin(x + y) = \sin\frac{\pi}{2} \text{ și}$$

$$\sin(x + y) - \sin\frac{\pi}{2} = 0. \text{ Deci trebuie ca:}$$

$x + y = \frac{(4k+1)\pi}{2}$; x și y nu pot fi în cadranele II sau IV.

d) Deoarece radicalii sînt aritmetici trebuie ca $\sin x$ și $\cos y$ să aibă semnul — (minus).
Relația devine: $\sin x \cdot |\sin y| + \cos y \cdot |\cos x| = -1$ sau:

$$\cos(x - y) = \cos\pi \text{ sau } x - y = (2k+1)\pi.$$

Soluție bună a dat Popa Nicolae, elev cl. XI S.M.U. Focșani.

Problema 4313

Paralelele duse prin centrul de greutate al unui triunghi oarecare ABC la laturile triunghiului taie înălțimile duse din vîrfurile opuse în punctele A_1, B_1, C_1. Perpendicularele din ortocentru pe medianele din A, B, C intersectează aceste mediane respectiv în A_2, B_2, C_2. Să se arate că:

a) *Punctele A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 sînt situate pe cercul cu diametrul GH, iar triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sînt asemenea.*

b) *Dreptele A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 sînt concurente, iar intersecțiile laturilor triunghiului $A_1B_1C_1$ cu laturile corespunzătoare triunghiului $A_2B_2C_2$ sînt coliniare.*

c) *Intersecțiile laturilor triunghiului ABC cu laturile corespunzătoare triunghiului $A_1B_1C_1$ sau cu laturile respective ale triunghiului $A_2B_2C_2$ sînt de asemenea coliniare.*

Să se afle și alte proprietăți ale figurii.

Alexandru Ioachim, elev ș.m. 1 București

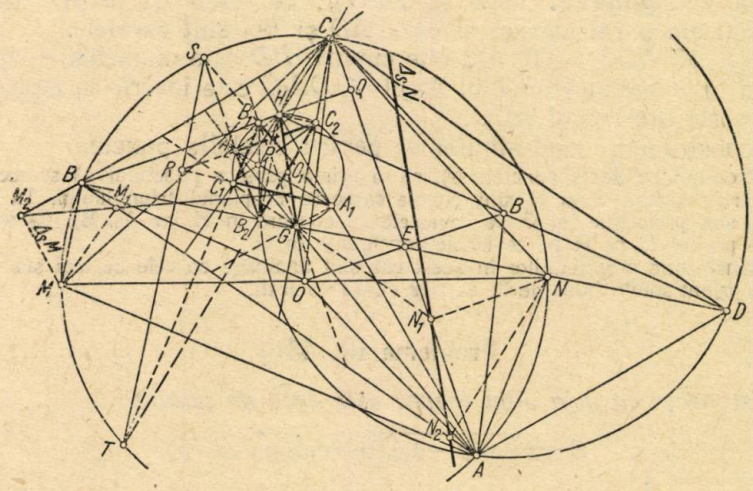
Soluție. a) Deoarece GB_1 este paralelă cu AC, unghiul GB_1H este drept. La fel demonstrăm că și unghiurile GA_1H și GC_1H sînt drepte și se sprijină pe GH. Prin construcție GA_2H, GB_2H și GC_2H sînt drepte și se

sprijină tot pe GH. În consecință, punctele A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 se găsesc pe cercul de diametru GH. Avem evident: $\sphericalangle A_1 = \sphericalangle CHQ = \sphericalangle A$.

Analog, $\sphericalangle B_1 = \sphericalangle B$; $\sphericalangle C_1 = \sphericalangle C$.

Triunghiul $A_1B_1C_1$ este asemenea cu triunghiul ABC.

b) Dreptele A_1B_1, A_2C_2, B_1C_1, A_2B_2, A_1C_1, B_2C_2 sînt respectiv laturile 1, 2, 3, 4, 5, 6 ale unui exagon concav înscris într-un cerc. Conform teo-



remei lui Pascal intersecțiile laturilor 1 cu 4, 2 cu 5, 3 cu 6 sînt coliniare.

Conform reciprocei teoremei lui *Désargues*, triunghiurile $A_1B_1C_1$ și $A_2B_2C_2$ sînt omologice. Deci A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 sînt concurente în P.

c) AA_1, BB_1, CC_1 sînt concurente în H, ca înălțimi în triunghiul ABC. Deci triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sînt omologice de unde, potrivit teoremei lui Désargues, rezultă proprietatea.

Aceeași demonstrație și pentru perechea ABC, $A_2B_2C_2$ cu mențiunea că AA_2, BB_2, CC_2 sînt concurente în G, ca mediane ale triunghiului ABC.

Observări. 1) Considerăm întîi, paralelele la laturile triunghiului $A_1B_1C_1$. Paralelele prin A și prin C se taie în N. Unghiul ANC are laturile paralele cu ale unghiului $A_1B_1C_1$; avem:

$$\sphericalangle BNC = 180 - \sphericalangle B_1 = 180 - \sphericalangle B$$

deci, N aparține cercului.

În mod similar arătăm că și paralelele din A și B se taie pe cerc într-un punct N' ce se confundă cu N.

În privința perpendicularelor avem o demonstrație aproape similară. Perpendicularele din A și C se taie în M. Avem:

$$\sphericalangle AMC = \sphericalangle B_1 = \sphericalangle B$$

deci M aparține cercului.

Dreapta MC este perpendiculară pe A_1B_1. Însă A_1B_1 este paralelă cu NC, deci $\sphericalangle BCN$ este drept. Rezultă că MN este diametru, deci trece prin O.

Se știe că dreptele lui Simson a două puncte M și N fac între ele un unghi egal cu acela înscris în cercul circumscris măsurat prin jumătatea arcului MN (v. Geometria de Tr. Lalescu).

În cazul nostru, M și N sînt diametral opuse, deci cele două drepte sînt perpendiculare.

2) Fie cercul AHC de centru O. Se știe că acest cerc este egal cu ABC. Deoarece $AOCO_B$ este romb, laturile sînt raze egale ale celor două cercuri avem: $OE = O_BE$. Însă, $OB = O_BD$ și $\sphericalangle OEB = \sphericalangle DEO_B$. Rezultă egalitatea triunghiurilor OEB și DEO_B, de unde $BE = ED$. Reiese că $ABCD$ este un paralelogram și deci, AD și BC sînt paralele.

Avem: $\sphericalangle HAD = 90°$. Cu alte cuvinte HD este diametru — trece prin O_B — și în consecință unghiul drept $\sphericalangle DB_2C$ este înscris în cerc. Punctul B_2 face parte din cercul AHC.

Demonstrăm în mod similar și pentru celelalte puncte.

3) Proprietățile de la punctele b), c) și prima parte a punctului a) se mențin și în cazul general în care G și H sînt puncte oarecare în planul triunghiului. În acest caz A_1, B_1, C_1 sînt proiecțiile lui G pe cevienele ce concură în H iar A_2, B_2, C_2 se obțin în același fel proiectînd pe H pe cevienele concurente în G.

Demonstrațiile proprietăților în acest caz sînt analoage cu cele de mai sus.

S-au primit soluții bune de la *D. Ene* cl. XI Ploiești.

Problema nr. 4315

Să se arate că aria unui trapez este dată de relația

$$S = \sqrt{p(p-d_1)(p-d_2)(p-a-b)}$$

(d_1, d_2, a, b, $\frac{p}{2}$ sînt respectiv diagonalele, laturile paralele și media aritmetică a celor patru mărimi).

* * *

Soluție: Fie trapezul $ABCD$ unde AB este baza mică.

Paralela dusă prin C la diagonala BD taie dreapta AB în E.

Aria triunghiului ACE este egală cu aria trapezului fiindcă $A_{BCE} = A_{BCD} = A_{ACD}$ și $A_{ABC} = A_{ABD}$

Dar $A_{ACE} = A_{ABC} + A_{BCE} = A_{ACD} + A_{ABC} = A_{ABCD}$.

Dar laturile triunghiului ACE sînt d_1, d_2 și $a + b$.

Deci aplicînd formula lui Heron, avem:

$$S = \sqrt{p(p-d_1)(p-d_2)(p-a-b)},$$

unde

$$p = \frac{d_1+d_2+a+b}{2}.$$

Aceasta este tocmai formula din enunț.

Problema 4316

Să se rezolve sistemul:

$$a(y+z+t) = b(z+t+x) = c(t+x+y) = d(x+y+z) = xyzt$$

Virgil Virgolici, student București

Soluția autorului. Sistemul se mai poate scrie:

$$\frac{1}{x}\left(\frac{1}{yz}+\frac{1}{zt}+\frac{1}{ty}\right)=\frac{1}{a}$$
$$\frac{1}{y}\left(\frac{1}{zt}+\frac{1}{tx}+\frac{1}{xz}\right)=\frac{1}{b}$$
$$\frac{1}{z}\left(\frac{1}{tx}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{yt}\right)=\frac{1}{c}$$
$$\frac{1}{t}\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)=\frac{1}{d}$$

Adunînd cele patru ecuații se obține:

$$3\left(\frac{1}{xyz}+\frac{1}{yzt}+\frac{1}{ztx}+\frac{1}{txy}\right)=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$$

Combinînd pe rînd ultima ecuație cu primele patru, obținem:

$$\frac{1}{yzt}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}-\frac{2}{a}\right) \qquad (1)$$
$$\frac{1}{ztx}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{a}-\frac{2}{b}\right)$$
$$\frac{1}{txy}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{2}{c}\right)$$
$$\frac{1}{xyz}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{2}{d}\right)$$

Înmulțind ultimele patru ecuații obținem:

$$\frac{1}{xyzt}=\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}-\frac{2}{a}\right)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{a}-\frac{2}{b}\right)\cdot\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{2}{c}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{2}{d}\right)} \qquad (2)$$

Din ecuațiile (1) și (2) scoatem:

$$x=\sqrt[3]{\frac{3\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}-\frac{2}{a}\right)^2}{\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{a}-\frac{2}{b}\right)\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{2}{c}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{2}{d}\right)}}$$

Prin permutarea circulară a literelor a, b, c, d obținem pe rînd valorile y, z, t.

Problema 4317

Un pendul de masă m_0 are firul trecut peste un scripete fix și este echilibrat cu un număr n_0 de rondele metalice egale. Dacă se adaugă fără șoc o rondelă în plus, sistemul se va mișca cu accelerația a_1 și în timp de 2,73 s, perioada pendulului scade la jumătate. Dacă se iau 6 rondele sistemul se

va mișca cu o accelerație de 7 ori mai mare și în 3,1 s, perioada pendulului devine de trei ori mai mare.

Să se calculeze:
l_0 și T_0 (lung. inițială și perioada inițială a pendulului),
a_1 și a_2 (accelerațiile căpătate de sistem),
n_0 și m (nr. inițial de rondele și masa m a uneia din ele în funcție de masa m_0 a pendulului).

C. Savu, profesor Urlați

Soluția autorului. Avem:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l_0}{g}}.$$

Cînd pendulul urcă accelerat perioada lui scade din două cauze: a) lungimea l_0 a pendulului scade cu timpul și b) la numitorul fracției de sub radical avem $g + a_1$ în loc de g.

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l_0 - \frac{a_1 t_1^2}{2}}{g + a_1}}.$$

Cînd pendulul coboară fenomenul e invers.

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{l_0 + \frac{a_2 t_2^2}{2}}{g - a_2}}$$

Conform datelor problemei avem:

$$a_2 = 7a_1;\ T_0 = 2T_1;\ T_2 = 3T_0;\ t_1 = 2{,}73;\ t_2 = 8{,}1$$

$$2\pi \sqrt{\frac{l_0}{g}} = 2 \cdot 2\pi \sqrt{\frac{l_0 - \frac{a_1 t_1^2}{2}}{g + a_1}};\ l_0 (g + a_1) = 4g \left(l_0 - 7{,}45 \frac{a_1}{2} \right)$$

$$2\pi \sqrt{\frac{l_0 + \frac{a_2 t_2^2}{2}}{g - a_2}} = 3 \cdot 2\pi \sqrt{\frac{l_0}{g}};\ g l_0 (g - a_2) = g \left(l_0 + \frac{9{,}61 a_2}{2} \right)$$

$$l_0 g + l_0 a_1 = 4 g l_0 - 14{,}9\, g a_1 \qquad l_0 = \frac{14\,9\, g a_1}{3g - a_1}$$

$$l_0 (3g - a_1) = 14{,}9\, g a_1$$

$$9 l_0 g - 9 l_0 a_2 = g l_0 + \frac{9{,}61\, g a_2}{2} l_0 = \frac{9{,}61\, g a_2}{2(8g - 9a_2)}$$

$$l_0 (8g - 9a_2) = \frac{9{,}61\, g a_2}{2} \qquad a_2 = 7a_1$$

deci:

$$\frac{14{,}9\, g a_1}{3g - a_1} = \frac{9{,}61 \cdot g \cdot 7 a_1}{2(8g - 63 a_1)};\ \frac{14{,}9}{3g - a_1} = \frac{7 \cdot 9{,}61}{2(8g - 63 a_1)}$$

sau :

$$238{,}4g - 1877{,}4a_1 = 201{,}81g - 67{,}27a_1$$

$$36{,}59g = 1810{,}13a_1 \cdot \rightarrow a_1 = \frac{36{,}59 \cdot 9{,}8}{1810{,}13} \approx 0{,}2\ \frac{m}{s^2}$$

$$a_2 = 7a_1\ ;\ a_2 \approx 1{,}4\ \frac{m}{s^2}\ .$$

$$l_0 = \frac{9{,}61 \cdot 9{,}8 \cdot 1{,}4}{2(8 \cdot 9{,}8 - 9 \cdot 1{,}4)} = \frac{4 \cdot 9{,}61 \cdot 4{,}9 \cdot 0{,}7}{4(4 \cdot 9{,}8 - 9 \cdot 0{,}7)} = \frac{32{,}9623}{32{,}9} \approx 1$$

$$mg = (2m_0 + m)a_1\ \ ;\ \ m \cdot 9{,}8 = (2m_0 + m)0{,}2$$

$$49m = 2m_0 + m\ \ ;\ \ 48m = 2m_0;\ m = \frac{m_0}{24}\ ;\ \ n = 24.$$

$$R:\ l_0 = 1m;\ a_1 = 0{,}2\ \frac{m}{s^2}\ ,\quad a_2 = 1{,}4\ \frac{m}{s^2}\ ;\ \ n = 24,\ \ m = \frac{m_0}{24}$$

Problema 4318

Un transformator cu randamentul de 90% este conectat la rețeaua orașului care are tensiunea de 6000 V. Tensiunea la bornele înfășurării este de 220 V. Să se determine raportul de transformare a transformatorului și curentul în înfășurarea secundară, dacă puterea absorbită de transformator, este de 25 kW și factorul de putere al circuitului secundar este 0,9.

C. d. p.

Soluție : Pentru raportul de transformare folosim formula

$$k = \frac{U_1}{U_2} = \frac{6000}{220} = 27{,}27$$

Pentru aflarea puterii debitate de transformator folosim :

$$P_1 = \frac{P\eta}{100} = \frac{25 \cdot 90}{100} = 22{,}5\ kW.$$

Curentul în circuitul secundar se află aplicînd formula :

$$I = \frac{P_1}{U \cos \varphi} = \frac{22\,500}{220 \cdot 0{,}9} \approx 115\ A.$$

Problema 4319

La ce distanță r de axa de rotație este necesar să așezăm o piesă de prelucrat pentru a obține o viteză de șlefuire v = 25 m/s, știind că viteza de șlefuire este viteza deplasării sculei de șlefuit pe piesa în prelucrare. Șaiba de șlefuit face 800 rot/min.

C. d. p.

Soluție. Viteza unghiulară care corespunde cu 800 rot/min este egală, conform formulei: $\omega/s = \frac{\pi N}{30}$ rot/min, unde N este numărul de rotații pe minut. $\omega = \frac{\pi}{30} N = \frac{800\,\pi}{30} \cdot \frac{1}{s}$.

Înlocuind valoarea lui ω și a vitezei de șlefuire $v = 25$ m/s în formula $v = \omega r$, obținem:

$$25 = \frac{800\,\pi}{30} \cdot r, \text{ de unde: } r = \frac{25 \cdot 30}{800\,\pi} \approx 0{,}3 \text{ m} = 30 \text{ cm}.$$

Problema 4323

Într-un vas cilindric cu secțiunea interioară de 24,23 π cm² se află un lichid cu tensiunea superficială σ = 73 dyn/cm, a cărui suprafață se găsește la 2 cm de marginea superioară a vasului. a) Să se calculeze accelerația maximă cu care putem deplasa rectiliniu vasul, pentru ca lichidul să nu se verse; b) Să se găsească creșterea energiei potențiale a suprafeței lichidului cînd deplasăm vasul cu lichid cu accelerația găsită mai sus.

Tomescu Ion, elev, Ploești

Soluția autorului. Raza vasului cinlindric: $\sqrt{\frac{24{,}23\pi}{\pi}} = 4{,}92$ cm.

Deplasînd vasul cu apă cu o accelerație constantă, suprafața lichidului se înclină în sens invers deplasării datorită inerției. Considerăm o particulă foarte mică de lichid (chiar o moleculă) pe suprafața apei.

Forța $F_a = m.a$ (m — masa particulei și a accelerația vasului) acționează în sens invers deplasării vasului și se descompune după forța F_4, care compunîndu-se (respectiv însumîndu-se, căci are același sens) cu F_2 apasă asupra lichidului și după forța F_3 egală, de aceeași direcție însă de sens contrar cu F_1, care menține particula în echilibru.

Obținem valoarea unghiului α scriind că $F_3 = F_1$ (molecula este în echilibru pe suprafața lichidului).

$$F_1 = G \sin\alpha\,; \quad F_3 = F_a \cos\alpha$$

Deci: $$G \sin\alpha = F_a \cos\alpha,$$

sau: $$m\,g \sin\alpha = m\,a \cos\alpha,$$

de unde: $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{g}.$$

Deoarece se cere accelerația maximă, $BC = 2$ cm (distanța dintre suprafața lichidului și marginea superioară a vasului), iar $AB = 2r = 2.4{,}92$ cm, avem:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{2}{2 \cdot 4{,}92} = 0{,}2032$$

$$a = g \operatorname{tg}\alpha = 9{,}81 \cdot 0{,}2032 = 2 \text{ m/s}^2.$$

Deci, accelerația maximă cu care putem deplasa vasul pentru ca lichidul să nu se verse este de 2m/s² (N-am ținut seama de efectele tensiunii superficiale, neglijabile în cazul problemei de față).

b) Se știe că $\Delta W_p = \sigma \Delta S$, unde σ este tensiunea superficială a lichidului.

Deci creșterea energiei potențiale a suprafeței lichidului, cauzată de modificarea suprafeței lichidului este egală cu $\sigma(S_1 - S_2)$, unde am notat cu S_1 suprafața lichidului cînd vasul execută o mișcare uniform accelerată cu $a = 2 m/s^2$ suprafața lichidului (respectiv a apei), cînd aceasta este în echilibru.

Se observă că S_2 este proiecția lui S_1 sub unghiul α, deci $S_2 = S_1 \cos \alpha$.

Deci: $\Delta W_p = \sigma(S_1 - S_1 \cos \alpha) = \sigma S_1 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$.

Se știe că $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}2032$. In tabele găsim $\alpha = 11°30'$

$\frac{\alpha}{2} = 5°45$; $\sin 5°45' = 0{,}09874$

$2 \sin^2 5°45' = 2 \cdot (0{,}09874)^2 = 2 \cdot 0{,}00968169 \approx 0{,}018363$.

$\Delta W_p = 73 \cdot 24{,}23 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}01836 = 1{,}3956 \cdot 73 \approx 102$ erg.

Deci creșterea energiei potențiale a suprafeței lichidului este de $\approx$ 102 erg.

Problema 4325

Dacă un aparat electrocasnic este conectat la o rețea de 220 V și discul unui contor face 660 rotații timp de o oră, să se afle din ce material este făcută rezistența acestui aparat. (diametrul sîrmei este $d = 0{,}4$ mm, iar lungimea sîrmei: $l = 13{,}68$ m).

— Care este cantitatea de căldură utilizabilă în acest timp, dacă randamentul termic este 0,8?

(Se dă constanta contorului: $c = 1500$ rot/kWh).

Pavel N. Radu, elev Craiova

Soluția autorului: Energia consumată timp de o oră este egală cu

$$W = \frac{660}{1500} \cdot 1 \text{ kWh} = 0{,}44 \text{ kWh}.$$

Puterea aparatului este egală cu:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{0{,}44}{1} = 0{,}44 \text{ kW} = 440 \text{ W}.$$

Curentul absorbit de aparat este:

$$I = \frac{P}{U} = \frac{440}{220} = 2 A$$

Conform legii lui Ohm putem scrie:

$$I \cdot R = U; \; R = \frac{U}{I} = \frac{220}{2} = 110 \, \Omega.$$

Rezistența unui conductor se calculează cu ajutorul următoarei relații:

$$R = \varrho \frac{l}{s}, \text{ deci } \varrho = \frac{Rs}{l} = \frac{110 \cdot \frac{\pi d^2}{4}}{13{,}68} \approx 1{,}1$$

Deci materialul din care este făcut firul este cromnichel.

2) Cantitatea de căldură totală dezvoltată de aparat este:

$$Q = 0{,}24\, U\, It = 0{,}24 \cdot 220 \cdot 2 \cdot 3600 = 600\,160 \text{ cal.}$$

Cantitatea de căldură utilizabilă este egală cu

$$Q_u = \eta Q = 600 \cdot 160 \cdot 0{,}8 = 480\,148 \text{ cal.}$$

CHESTIUNI DE EXAMEN

Din problemele date pentru pregătirea olimpiadei de matematică din 1961 în U.R.S.S.

4672. Pe laturile AB și BC a triunghiului ABC ca baze se construiesc în afară pătratele: $ABMN$ și $BCQP$. Să notăm centrele lor cu literele O_1 și O_2, mijlocul laturei AC cu K iar mijlocul segmentului MP cu L. Să se demonstreze că O_1LO_2K este un pătrat.

(clasa a VIII-a, etapa pregătitoare Olimpiada 1961, U.R.S.S.)

4673. Se dă un exagon avînd un centru de simetrie. Pe laturile sale ca baze se construiesc în afară triunghiuri echilaterale. Să se demonstreze că mijloacele segmentelor care unesc vîrfurile triunghiurilor învecinate formează un exagon regulat.

(clasa a VIII-a, etapa pregătitoare Olimpiada 1961, U.R.S.S.)

4674. Pe o tablă de șah (64 pătrate) 50 pătrate sînt numerotate cu numerele de la 1—50. În afară de aceasta există 50 de piese numerotate de asemenea de la 1—50. Piesele sînt așezate arbitrar pe tablă. Printr-o „mișcare" orice piesă poate fi deplasată pe orice cîmp liber. Să se demonstreze că în 75 de mutări piesele pot fi aranjate în așa fel încît fiecare să stea pe cîmpul cu același număr. Să se demonstreze că există poziții excepționale ale pieselor pentru care această aranjare în mai puțin de 75 de mutări este imposibilă.

(clasa a VIII-a, etapa pregătitoare Olimpiada 1961, U.R.S.S.)

4675. Se dă un patrulater convex $ABCD$. Să se găsească locul geometric al punctelor O pentru care ariile patrulaterelor $OBCD$ și $OBAD$ sînt egale.

(Clasa a IX-a, etapa pregătitoare, Olimpiada 1961, U.R.S.S.)

4676. Într-un patrulater convex $ABCD$ dat să se găsească un punct O în așa fel încît ariile tuturor triunghiurilor OAB, OBC, OCD, ODA să fie egale.

(Clasa a IX-a, etapa pregătitoare, Olimpiada 1961, U.R.S.S.)

4677. Pe cercul bazei superioare a unui cilindru cu volumul egal cu 1, se ia un punct A. Fie BC un diametru al bazei inferioare, punctele A și B aparținînd aceleași generatoare. Fie MN un diametru al bazei inferioare perpendicular la BC. Să se demonstreze că volumul mărginit de suprafața cilindrului și planul care trece prin punctele A, M și N este cuprins între $1/4$ și $1/6$.

(Clasa a X-a, etapa pregătitoare, Olimpiada 1961, U.R.S.S.)

4678. Să se demonstreze că oricare ar fi numerele pozitive $a_1, \ldots a_n$, $b_1, \ldots b$ are loc inegalitatea:

$$\sqrt[n]{(a_1+b_1)\ldots.(a_n+b_n)} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\ldots.a_n}+\sqrt[n]{b_1b_2\ldots.b_n}$$

(Clasa a X-a, etapa pregătitoare, Olimpiada 1961, U.R.S.S.)

4679. Să se studieze funcția y în raport cu variabila x

$$y = 2x - 1 - \sqrt{y^2 - 2xy + 3x - 2}\,.$$

Să se traseze graficul funcției.

(Clasa a X-a, etapa pregătitoare, Olimpiada 1961, U.R.S.S.)

4680. Un tor se obține prin rotația unui cerc de rază r în jurul unei axe care se află în planul cercului la distanța d de centru ($d > r$). La rîndul său torul se rotește în jurul unei alte axe care trece prin centrul cercului generator și care intersectează axa torului sub un unghi de 45°. Să se determine aria și volumul corpului de rotație obținut.

(Clasa a X-a, etapa pregătitoare, Olimpiada 1961, U.R.S.S.)

4681. În orice piramidă a cărui vîrf se proiectează în centrul cercului înscris în bază, raportul dintre volum și aria laterală este egal cu produsul dintre $1/3$ din raza cercului înscris în poligonul de bază și sinusul unghiului diedru de la baza piramidei.

(Clasa a X-a, etapa pregătitoare, Olimpiada 1961, U.R.S.S.)

PROBLEME PROPUSE *)

4682. Fie ABC un triunghi oarecare. Se rotesc laturile lui în spre exterior, cu un același unghi α și anume: BC în jurul vîrfului B, CA în jurul lui C și AB în jurul lui A.

Fie BC', CA' AB' noile poziții ale laturilor. Se notează cu D, E, F mijloacele laturilor BC, CA, AB, cu D', E', F' mijloacele laturilor $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$, cu M, N, P mijloacele segmentelor AA', BB', CC' și cu L piciorul înălțimii din A a triunghiului ABC. Se cere:

*) VIII (4685, 4694, 4698, 4700, 4701, 4702, 4709, 4714); IX (4684, 4703, 4704, 4710); X (4683, 4686, 4690, 4693, 4697, 4699, 4705, 4707, 4708, 4711, 4713, 4715); XI (4682, 4687, 4689, 4691, 4692, 4695, 4696, 4706, 4712).

a) să se demonstreze că triunghiul MLN este dreptunghic.

b) Să se afle locurile geometrice ale intersecțiilor perechilor de drepte (ML, BP) și (NL, CC'), cînd α variază.

c) să se afle locul geometric al mijlocului k al segmentului MN cînd unghiul α variază.

d) să se arate că punctele F, K, F' sînt coliniare și să se deducă de aici locul geometric al lui F', mijlocul laturii $A'B'$.

e) să se demonstreze că $F'D$ și AC' sînt paralele și să se deducă de aici ai centrul de greutate al triunghiului $A'B'C'$ coincide cu centrul de greutate G al triunghiului ABC, oricare ar fi unghiul α.

Gh. D. Simionescu

4683. Să se arate că într-un triunghi oarecare avem inegalitatea

$$(m^2-2m+1-\sqrt{2})\left(\cos\frac{A}{4}+\sin\frac{A}{4}\right)+\sin\frac{B}{4}+\sin\frac{C}{4}+\cos\frac{B}{4}+\cos\frac{C}{4}>0,$$

unde m este un parametru oarecare:

C. Ionescu-Țiu

4684. Într-un alambic de sticlă care cîntărește 5 g, avînd densitatea de 2,5 g/cm³ se introduc 8 cm³ de hidrogen la presiunea de 760 torr (greutatea hidrogenului se poate neglija) și se scufundă totul în apă. Să se calculeze: a) forța ascensională în funcție de adîncime; b) adîncimea la care această forță este zero și să se analizeze comportarea alambicului în jurul acestui punct.

M. Müller, profesor Tg. Mureș

4685. Un corp A de masă $M = 800$ g este așezat pe un plan pe care poate aluneca fără frecare. Acest corp este fixat la una din extremitățile unui fir trecut peste un scripete, la cealaltă extremitate fiind atîrnat un corp B de masă $m = 700$ g. a) Care trebuie să fie înclinarea planului pentru ca sistemul lăsat liber să capete o accelerație de 196 cm/s$_2$, mișcarea masei B avînd loc de sus în jos? b) Este posibil să avem o accelerație de aceeași mărime dar de sens opus? c) În ce caz accelerația sistemului va fi de 400 cm/s²?

E. Jaliu, Brașov

4686. O sursă de curent avînd rezistența interioară de 1 Ω și tensiunea electromotoare de 12 V alimentează un circuit format din 10 becuri legate în paralel, purtînd inscripția: 3,5 V; 0,2 A și un reostat cu cursor avînd rezistența de 24Ω și lungimea de 30 cm. Să se determine poziția cursorului pentru ca becurile să funcționeze în regim normal.

M. Müller, profesor Tg. Mureș

4687. Fie x_1, x_2,... x_p, p numere reale și pozitive, iar m și n două numere naturale.

Dacă $m \leqslant n$ să se stabilească inegalitatea:

$$(x_1^m + x_2^m + \ldots + x_p^m)^n \geqslant (x_1^n + x_2^n + \ldots + x_p^n)^m$$

(În legătură cu problema 3387)

4688. Fie cercurile O_1 și O_2 tangente în A și unghiul T_1AT_2 constant. (T_1 pe cerc O_1 și T_2 pe cerc O_2). T_1T_2 taie cercurile O_1 și O_2 respectiv în B și C.

Să se afle locurile geometrice ale punctelor M_1 și M_2 intersecțiile respective ale: O_1T_1 cu O_2T_2 și O_1B cu O_2C, cînd unghiul T_1AT_2 se rotește în jurul lui A.

Locot. N. V. Pupăzan

4689. Să se afle limita expresiei $E = (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$ cînd x tinde către $\frac{\pi}{4}$.

D. M. Timuș, absolvent Ploiești

4690. Să se arate că dacă $a + b + c + d = 0$, atunci

$$\frac{a^7+b^7+c^7+d^7}{a^5+b^5+c^5+d^5} = (a^4+b^4+c^4+d^4) + \frac{(a^2+b^2+c^2+d^2)^2}{12} + \frac{abcd}{6}$$

* * *

4691. Considerăm o elipsă de centru O și excentricitate e. Fie M un punct mobil pe elipsă, care se proiectează pe axa mică în P. Normala în M taie axa mare în N.

a) Avem relația $\frac{ON}{MP} = e^2$.

b) Să se arate că mijlocul segmentului NP descrie o elipsă.

N. Mihăileanu

4692. Să se reprezinte grafic:

$$(x+y)\sqrt{2-(x+y)^2} + (x-y)\sqrt{2-(x-y)^2} = 0,$$
$$(x+y)\sqrt{2-(x+y)^2} - (x-y)\sqrt{2-(x-y)^2} = 0,$$
$$(x+y)\sqrt{2-(x+y)^2} + (x-y)\sqrt{2-(x-y)^2} = 2,$$
$$(x+y)\sqrt{2-(x+y)^2} - (x-y)\sqrt{2-(x-y)^2} = 2.$$

C. Ionescu-Țiu

4693. Să se demonstreze că dacă numerele 1961 și $a - b$ sînt prime între ele, iar $a^3 - b^3$ e divizibil cu 1961, atunci și $(a+b)^6 - b^6$ e divizibil cu 1961.

* * *

4694. Găleata unei fîntîni cu scripete se găsește la o adîncime de 12,8 m și în urma unui șoc începe să oscileze. Să se calculeze viteza cu care găleata e scoasă afară în mișcare uniformă, dacă în timp de 6,3 secunde perioada găleții scade cu 6,28 secunde.

C. Savu, profesor Urlați

4695. Prin punctele O și A trec două drepte variabile D_1 și D_2 care fac cu OA unghiurile α și respectiv 2α. Distanța $OA = a$ Se cere: a) Să se calculeze coordonatele punctului M de intersecție a celor două drepte, b) Să se stabilească locul geometric al lui M cînd α variază; c) Din O se duce o perpendiculară pe dreapta D_1; intersecția ei pe dreapta D_2 se notează cu N. Să se calculeze coordonatele lui N; d) Să se stabilească locul geometric al lui N cînd α variază.

La Inst. Petrol și Gaze București 1960)

4696. Să se reprezinte grafic funcțiile:

$$2y_1 = \sqrt{1+x+2\sqrt[4]{x^2}} + \sqrt{1+x-2\sqrt[4]{x^2}};$$

$$2y_2 = \sqrt{1+x+2\sqrt[4]{x^2}} - \sqrt{1+x-2\sqrt[4]{x^2}};$$

$$y_3 = y_1 + y_2;\ y_4 = y_1 - y_2;\ 4y_5 = y_1y_2;\ y_6 = \frac{y_1}{y_2}.$$

C. Ionescu-Țiu

4697. Se dă semicercul de diametru $AB = 2R$. Fie P mijlocul razei OB. Perpendiculara pe OB dusă prin P, taie cercul în punctul M. Dreapta AM taie în T tangenta dusă la cerc în B. Se cere:

a) Să se calculeze $\sphericalangle MOP$ și aria segmentului circular de coardă BM; b) Să se calculeze lungimile segmentelor MP, AM, BT, AT; c) Întreaga figură rotindu-se în jurul diametrului AB, să se calculeze aria calotei generate de arcul MB și volumului trunchiului de con generat de trapezul $MTBP$.

La Inst. Petrol și Gaze București 1960)

4698. Un corp este aruncat sub un unghi $\alpha = 30°$ față de orizontală, cu o viteză inițială $V_0 = 1961$ cm/s.

Să se calculeze: a) înălțimea maximă la care se ridică, b) distanța orizontală corespunzătoare acestei înălțimi, c) depărtarea maximă față de punctul de plecare.

* * *

4699. Se consideră un triunghi dreptunghic ABC, $B > C$, O mijlocul laturei BC. Pe OA ca diametru, se construiește un cerc. Laturile triunghiului determină în cerc, trei segmente de cerc de arii, s_a, s_b, s_c. Să se exprime $s_a + s_b + s_c$ în funcție de ipotenuza $BC = a$ și unghiul B.

C. V. Costăchescu

4700. Un vagon cu masa de 4900 kg, se mișcă la început uniform cu viteza de 4,8 m/s, apoi sub acțiunea unei forțe viteza lui crește la 9 m/s. Știind că vagonul a străbătut distanța de 72,45 m de la punctul de pornire, se cere să se calculeze forța care a acționat asupra lui.

* * *

4701. Două mărfare s-au îndreptat simultan unul spre celălalt din gara A și B, între care este distanța de 70 km. După o oră de la plecare

ele au trecut unul pe lîngă celălalt și au continuat drumul cu aceeași viteză. Primul mărfar a sosit în B cu 35 minute mai devreme decît al doilea în gara A. Care este viteza fiecărui mărfar.

* * *

4702. Un avion a decolat dintr-un oraș spre altul. O parte din drum a făcut-o cu 180 km/h. Restul drumului care era cu 320 km mai mic decît cel parcurs, avionul l-a făcut cu 250 km/h. Viteza mijlocie a avionului pe toată distanța parcursă a fost de 200 km/h. Care este distanța între cele două orașe.

* * *

4703. Două trenuri — unul mărfar avînd 490 m lungime și unul de pasageri lung de 210 m, se deplasează unul spre celălalt pe două drumuri paralele. Mecanicul trenului de pasageri a observat mărfarul, cînd se găsea la distanța de 700 m de el ; peste 28 secunde după aceasta ele s-au întîlnit. Stabiliți viteza fiecărui tren, dacă este cunoscut că mărfarul folosește pentru a trece pe lîngă semafor cu 35 secunde mai mult decît cel de pasageri.

* * *

4704. Un punct M se află pe un cerc în care se dau două diametre AB și CD perpendiculare. Dreptele DM și CM taie pe AB în P și Q. Fie N mijlocul lui PQ. Să se arate că MN este tangentă la cerc. Dacă R este intersecția dreptelor CM și AD, să se arate că cercul AMR este tangent la AB.

C. Menciu

4705. Un radioamator vrea să-și construiască un ciocan de lipit cu puterea de 400 W, pentru tensiunea de 220 V, din fir de cromnichel $\left(\varrho = 1{,}10\ \frac{\Omega\ \text{mm}^2}{\text{m}}\right)$, cu diametrul de 0,15 mm.

Ce intensitate de curent va circula prin elementul de încălzire și ce lungime de fir va folosi ?

Care este cantitatea de căldură produsă în elementul de încălzire în timp de o oră ?

Ce lungime de fir de nichelină de același diametru $\left(\varrho = 0{,}42\frac{\Omega\text{mm}^2}{\text{m}}\right)$, trebuie să folosească radioamatorul pentru construirea ciocanului de aceeași putere ?

R. Sfichi, profesor Fălticeni

4706. Se consideră sistemul de ecuații :

$$\alpha^2 - 2\alpha x = \beta^2 - 2\beta y = x^2 + y^2 - a^2, \quad \alpha^2 + \beta^2 = a^2$$

Se cere : a) Să se elimine parametrii α și β ; b) Să se reprezinte grafic funcția obținută.

Gh. Popescu, profesor Lugoj

4707. Să se demonstreze că pentru orice n

$$n^{8888} - n^{7777} + 1$$

este divizibil prin $n^2 - n + 1$.

Kacsó Ferenc (M.F.L.)

4708. Să se construiască unghiul x care verifică ecuația:

$$a \cos x + b \sin x = 0.$$

Matematika tanitasa

4709. Un corp cade liber de la înălțimea de 1960 m. Să se determine: a) distanța parcursă în secunda a 10-a; b) distanța parcursă în ultima secundă; c) timpul în care sînt parcuși ultimii 60 m.

Nu se ține seamă de rezistența aerului.

(La cl. VIII, olimpiadă februarie 1961) Virgil Atanasiu

4710. O sferă de fier goală în interior cîntărește 3,9 kg. Cufundată în apă distilată cîntărește 2 kg. a) Să se calculeze volumul interior al sferii știind că densitatea fierului este 7,8 g/cm^3; b) Ce cantitate de căldură este necesară pentru a mări volumul exterior al sferii cu 15 cm^3? Căldura specifică a fierului este 0,1 cal/g. grd. și coeficientul de dilatare liniară este 10^{-5} grad^{-1}; c) Cu cîte grade trebuie încălzită sfera pentru ca volumul ei să crească cu 15 cm^3.

(La cl. IX, olimpiada februarie 1961) Nicolae Hangea

4711. Un reostat cu rezistența $R = 20\ \Omega$ este legat în serie cu trei lămpi care sînt legate între ele în paralel și au rezistențele: $R_1 = 200\ \Omega$, $R_2 = 240\ \Omega$ și $R_3 = 300\ \Omega$. Rețeaua de iluminat are tensiunea de 150 V. Să se determine: a) intensitatea curentului care trece prin reostat; b) intensitatea curentului care trece prin fiecare lampă; c) costul total al energiei consumate timp de 10 ore, dacă 1 kWh costă 0,60 lei.

(La cl. X și an IV. Șc. Ped. olimpiada februarie 1961) Coriolan Rusu

4712. Un generator de curent alternativ dezvoltă o putere de 300 C.P. într-un circuit-serie compus dintr-o rezistență activă de 25 Ω și o inductanță de 10^8 cm. Care este tensiunea la bornele generatorului și intensitatea curentului în circuit, dacă decalajul între curent și tensiune este de T/12, iar curentul are frecvența industrială de 50 Hz?

I. Mercheș, profesor Botoșani

4713. Muchiile și diagonala unui paralelipiped dreptunghic sînt exprimate prin numere întregi, iar suprafața și volumul sînt exprimate prin același număr. Un patrat de aceeași arie se poate diviza în șase părți care să fie fețele paralelipipedului. Care sînt numerele care exprimă muchiile?

(1080, Matematikai Lapok, Budapesta)

4714. Să se explice de ce numerele de forma 91; 9091; 909091 etc., înmulțite cu 87 dau ca produs chiar aceste numere la care se așază înainte și după ele, cifra 7.

Exemplu: $9091 \cdot 87 = 790\,917$.

Alexanrdu Stoenescu

4715. Să se arate că resturile împărțirii lui $10^n - 1$ prin 37 sînt patrate perfecte pentru orice n număr natural.

I. Tomescu, student București

EXERCIŢII ŞI PROBLEME PROPUSE PENTRU ŞCOALA DE 7 ANI *)

E : 1676. În urma creşterii productivităţii muncii şi a depăşirilor de plan, treptat au scăzut preţurile de cost la diferite articole de larg consum; astfel un costum de haine bărbătesc, în 1959 a costat 810 lei. La începutul anului 1960, s-au aplicat într-o perioadă scurtă, două reduceri consecutive de cîte 5%. În trimestrul al III-lea, s-a mai făcut o reducere de 2%. Să se afle :

a) Cît costă acelaşi costum după ultima reducere ?

b) Cîte procente reprezintă această triplă reducere de cost aplicată sumei reduse ?

B. Baieră, Păuneşti Adjud

E : 1677. Pentru 20 kg fidea, 10 kg zahăr şi 5 kg unt, s-a plătit 300 lei. Cît costă cîte un kg din fiecare fel de produs dacă, un kg de zahăr costă cît 2 kg fidea ,iar un kg de unt costă cît 2 kg de zahăr ?

E. Tilici, prof. Focşani

E : 1678. Paralel cu punerea în funcţiune a unor termocentrale este prevăzută construirea hidrocentralelor : Bratsk, Stalingrad, Krasnoiarsk şi Votkivsk care vor avea o putere totală de 11 300 000 kW. Să se afle puterea fiecărei hidrocentrale, ştiind că triplul puterii hidrocentralei Votkivsk întrece cu 470 000 kW puterea hidrocentralei Stalingrad şi e mai mic cu 600 000 kW decît puterea hidrocentralei Bratsk, iar puterea hidrocentralei Krasnoiarsk e mai mică cu 860 000 kW decît dublul puterii hidrocentralei Stalingrad.

D. Bătineţu, student Bucureşti

E : 1679. Să se arate că dacă $\frac{1}{d} = \frac{abc + ab + ac + bc}{x - abc}$,

atunci avem şi relaţiile $\frac{1}{a} = \frac{bcd+bc+bd+cd}{x-bcd}$; $\frac{1}{b} = \frac{acd+ac+ad+cd}{x-acd}$

şi $\frac{1}{c} = \frac{abd + ab + ad + bd}{x - abd}$.

C. Ionescu-Ţiu

E : 1680. Costel merge cu un km pe oră mai mult decît Ionel şi astfel în 3 ore străbate distanţa pe care Ionel o face în 4 ore. Care este iuţeala de mers a fiecăruia ?

* * *

E : 1681. O gospodărie agricolă de stat are 920 ha pămînt arabil, fineţe şi păşune. Pămîntul arabil este de trei ori cît păşunea, iar fineaţa este cu 200 ha mai puţină decît pămîntul arabil. Să se calculeze ariile pămîntului arabil, păşunii şi fîneţii.

* * *

*) E: 1677, 1680, 1681, 1683, 1685) ; VI (E: 1676, 1682, 1684) ; VII (E: 1678, 1679, 1686, 1687).

E : 1682. În cursul planului septenal productivitatea muncii a muncitorilor din industrie în Uniunea Sovietică va crește cu 50%. Cu cîte procente va scădea timpul necesar fabricării unui produs industrial ?

* * *

E : 1683. O gospodărie agricolă colectivă își mărește fondurile sale bănești în fiecare an cu o pătrime a fondurilor inițiale. Din aceste fonduri anual se cheltuiesc 87 000 lei pentru creșterea productivității medii pe un hectar și pentru mașini. Astfel fondurile colectivului în doi ani au crescut de 1,5 ori față de fondurile inițiale. Să se calculeze fondurile inițiale ale colectivului.

* * *

E : 1684. Venitul național al Uniunii Sovietice în anul 1959 a fost cu 9% mai mare decît în anul 1957, iar în 1965 va fi cu 65% mai mare decît în 1958. Cu cîte procente va crește venitul național al Uniunii Sovietice în 1965 față de 1957 ?

* * *

E : 1685. Care este numărul de patru cifre, care înmulțit cu 10 dă un patrat perfect, iar înmulțit cu 175 dă un cub perfect ?

K. E. (M.F.L.)

E : 1686. Să se arate că numărul :

$$E = 5555^{2222} + 2222^{5555}$$

este divizibil cu 231.

Bogosi Jenő (M.F.L.)

E : 1687. Dacă înmulțim o panglică de lungime 25 m, grosime 0,1 mm pe o țeavă, obținem un cilindru de grosime 1 dm. Se cere diametrul țevii.

* * * (M.F.L.)

DIN ACTIVITATEA CERCULUI DE MATEMATICI PE CAPITALĂ PENTRU CLASA A X-A

Societatea de științe matematice și fizice din R.P.R. în scopul lărgirii orizontului matematic al elevilor a înființat în luna decembrie 1960, cercul de matematici pe Capitală. Cercul activează pe clase, iar ședințele se țin bilunar, miercuri între orele 18—20 în amfiteatrele Facultății de matematică și fizică.

Participă elevi fruntași de la toate școlile medii din București. S-au înscris 342 elevi, iar la ședințe nu vin decît maximum 150.

Pentru noi elevii, acest cerc are o mare importanță, deoarece ne dezvoltă gîndirea matematică, ne învață să lucrăm ordonat și perseverent — condiții esențiale pentru un bun matematician.

În ședința de deschidere din 14 decembrie 1960, tov. prof. Gh. Dumitrescu făcînd o scurtă incursiune în istoria matematicii a vorbit despre rolul matematicii în cercetarea și sintetizarea fenomenelor naturii și despre legătura ei cu celelalte științe și cu arta. S-au studiat teoremele lui Menelaus și Ceva (demonstrate cu ajutorul ariilor), teorema lui d'Alembert (centrele de omotetie directă a trei cerçuri oarecare sînt coliniare) și raportul armonic.

În încheiere au fost propuse probleme în legătură cu tema tratată.

În ședința a doua din 28 decembrie au fost rezolvate problemele propuse anterior. Spre exemplu. Să se arate că *mijloacele diagonalelor unui patrulater complet sînt pe aceeași dreaptă* (dreapta Newton-Gauss). Elevul Vodă G. Viorel, ș.m. 12, a dat următoarea soluție:

În patrulaterul complet *ABCDEF* fie *L, M, N* mijloacele diagonalelor *AC, BD, EF*, iar H_i ($i = 1, 2, 3, 4$) ortocentrele triunghiurilor *ABF, ADE, CBE, CDF*. Dacă A_1, B_1, F_1 sînt picioarele înălțimilor AH_1, BH_1, FH_1 ale triunghiului *ABF*, din asemănarea triunghiurilor dreptunghice (H_1B_1A; H_1A_1B) și (H_1F_1A; H_1A_1F), rezultă relațiile: $H_1A \cdot H_1A_1 = H_1B \cdot H_1B_1 = H_1F \cdot H_1F_1$ ceea ce arată că punctul H_1 are aceeași putere în raport cu cercurile avînd ca diametre diagonalele *AC, BD, EF* ale patrulaterului complet dat.

Analog, se arată că și H_2, H_3, H_4 se bucură de aceeași proprietate. Deoarece există în planul a trei cercuri mai multe puncte distincte avînd aceeași putere în raport cu fiecare din aceste cercuri, se poate spune că ele sînt pe aceeași dreaptă care este axa radicală comună a celor trei cercuri luate două cîte două.

Altă soluție. Considerăm triunghiul *GHK* format prin unirea două cîte două a mijloacelor laturilor triunghiului *BCE*. Latura *HK* trece prin punctul *L*, mijlocul lui *AC*, *GK* trece prin *M* mijlocul lui *BD* și *GH* prin *N*. Este necesar și suficient să demonstrăm că există relația: $GM \cdot KL \cdot HN = MK \cdot HL \cdot GN$. Dar fiecare din aceste segmente este jumătatea segmentului corespunzător pe care transversala *ADF* îl determină pe laturile triunghiului *BCE*. În adevăr, $2GM = ED$, $2KM = CD$ etc. Deci, relația scrisă este adevărată, căci segmentele de lungime dublă dau tocmai relația lui Menelaos în triunghiul *BCE* tăiat de transversala *ADF*.

După aceea, a fost enunțată și demonstrată teorema triunghiurilor omologe (teromea lui Désargues):

Dacă două triunghiuri au vîrfurile două cîte două pe trei drepte concurente, laturile lor se întretaie două cîte două în trei puncte situate pe o dreaptă.

Pentru ședința următoare au fost propuse următoarele probleme:

1) *Să se arate că laturile opuse ale unui exagon înscris într-un cerc se taie două cîte două în trei puncte coliniare* (teorema lui Pascal);

2) *Într-un patrulater complet fiecare diagonală este împărțită armonic de celelalte două* (teorema lui Pappus);

3) Într-un triunghi oarecare dreptele care unesc vîrfurile cu punctele de contact ale cercului înscris se întretaie într-un punct (punctul lui Gergonne). Aceeași proprietate pentru fiecare cerc înscris (punctele adjuncte ale lui Gorgonne).

În ședința a 3-a s-au studiat următoarele teoreme:

a) Dacă prin vîrful A al triunghiului ABC se duc două drepte simetrice în raport cu bisectoarea unghiului A (ceviene izogonale) care întîlnesc latura BC în M și N, atunci există relația:

$$\frac{CM}{BM} \cdot \frac{CN}{BN} = \frac{AC^2}{AB^2}$$ (teorema lui Steiner)

(se demonstrează cu ajutorul suprafețelor).

b) Într-un triunghi simedianele sînt concurente (punctul lui Lemoine). (Într-un triunghi simetrica unei mediane în raport cu bisectoarea care pleacă din același vîrf cu mediana se numește simediană).

Observare. Punctul lui Lemoine este punctul a cărui sumă a pătratelor distanțelor la cele trei laturi ale triunghiului este minimă. Fie x, y, z aceste distanțe. După identitatea lui Lagrange avem:

sau:

$$(a^2+b^2+c^2)\cdot(x^2+y^2+z^2) = (ax+by+cz)^2 + (ay-bx)^2 + (bz-cy)^2 + (cx-az)^2, \text{ sau: } (a^2+b^2+c^2)\cdot(x^2+y^2+z^2) = 4S^2 + (ay-bx)^2 + (bz-cy)^2 + (cx-az)^2.$$

Distanțele punctului Lemoine la laturile triunghiului ABC sînt proporționale cu laturile triunghiului: $x/a = y/b$, $y/b = z/c$, $z/c = x/a$ (v. Tr. Lalescu, Geometria triunghiului, p. 57, ex. 5.19).

Deci, pentru acest punct, suma $(x^2 + y^2 + z^2)$ este minimă și egală cu $4S^2/(a^2 + b^2 + c^2)$.

În ședința a patra am intrat în studiul Transformărilor geometrice (prin simetrie, omotetie, inversiune, polare reciproce), asupra cărora se va insista în ședințele viitoare. S-a propus spre rezolvare problema 39, cap. VII, p. 33 din C.d.P. de Gh. Țițeica și alte probleme din G.M.F.-B.

Prima parte a ședinței a cincea a fost consacrată rezolvării unor probleme. A mai fost demonstrată teorema:

Proiecțiile pe laturile unui triunghi ale unui punct oarecare situat pe cercul său circumscris sînt trei puncte coliniare (dreapta lui Simson).

Ca o consecință imediată avem proprietatea: Cercul circumscris al unui triunghi este locul geometric al punctelor ale căror proiecții pe cele trei laturi ale triunghiului sînt coliniare.

Tov. prof. Gh. Dumitrescu ne-a vorbit despre cercetările lui Tr. Lalescu asupra dreptei lui Simson. Marelui nostru matematician îi revine paternitatea triunghiurilor ortopolare denumite de el, triunghiuri S. (Două triunghiuri înscrise în același cerc sînt denumite triunghiuri S sau ortopolare, cînd cele șase drepte Simson relative vîrfurilor primului triunghi în raport cu al doilea triunghi și ale vîrfurilor acestuia în raport cu primul sînt concurente).

În privința participării elevilor la cerc putem spune că elevii școlilor medii 17, 20, 21, 25 au o frecvență regulată, iar cei de la școlile medii 13, 15, 22, 28, 30 au o frecvență slabă. S-au evidențiat ca rezolvitori, elevii: Victor Marinescu, ș.m. 7, Dan Achim ș.m. 26, Doina Buiculescu ș.m. 8, Gabriel Bolocan ș.m. 26, Ciocan I. C. ș.m. 12 ș. a. Este de dorit ca un număr cît mai mare de elevi să-și înfrîngă timiditatea și să atace cu curaj problemele propuse la cerc și în G.M.F.-B.

Vodă Gh. Viorel ș.m. 12 București

CĂRȚI NOI

A. I. Markușevici — „Numere complexe și reprezentări conforme" — Biblioteca Societății de științe matematice și fizice nr. 39, Editura Tehnică, 1961.

In această lucrare sînt expuse noțiunile de număr complex și funcție elementară de variabilă complexă (este dată și funcția lui N. E. Jukovski cu aplicația acesteia la stabilirea profilului aripilor de avion).

Expunerea este atractivă și nu presupune cunoștințe prealabile în acest domeniu. Broșura se adresează elevilor din ultimele clase și tuturor iubitorilor de matematici.

V. A. Uspenski — „Unele aplicații ale mecanicii în matematică" — Biblioteca Societății de științe matematice și fizice nr. 42, Editura Tehnică, 1961.

In această broșură sînt rezolvate cîteva probleme din geometrie (probleme care privesc tangenta la cerc, elipsă, hiperbolă și parabolă, teorema lui Ceva etc.) și din teoria numerelor, prin considerații de mecanică. Această metodă, se arată în lucrare, are o deosebită importanță practică, întrucît aplicarea legilor mecanicii în matematică este un caz particular al unei metode generale, care constă în folosirea reciprocă a legăturii dintre fenomenele naturii și descrierea lor matematică.

Broșura se adresează elevilor.

V. G. Bolteanski — „Ce este derivarea ? — Biblioteca Societății de științe matematice și fizice nr. 43, Editura Tehnică, 1961.

In această broșură sînt prezentate unele noțiuni din matematică superioară (derivata, ecuația diferențială, numărul e, logaritmul natural) într-o formă accesibilă elevilor și iubitorilor de matematici cu nivelul mediu de cunoștințe. In vederea acestui scop sînt folosite multe exemple, din fizică îndeosebi (închiderea unui circuit electric, dezintegrarea radioactivă, micile oscilații ale unui pendul, circuitul oscilant etc.).

Aceste exemple arată totodată că noțiunile matematice reflectă proprietăți ale unor procese reale care se petrec în natură.

G. N. Berman — „Despre numere și studiul numerelor" — Biblioteca Societății de științe matematice și fizice nr. 44, Editura Tehnică, 1961.

In lucrare sînt prezentate într-o formă accesibilă cîteva capitole din teoria numerelor. Astfel sînt expuse unele sisteme de numerație vechi și noi, divizibilitatea numerelor prime și proprietățile lor, „mica", și „marea" teoremă ale lui Fermat.

Pentru înțelegerea conținutului broșurii sînt necesare doar cunoștințe de aritmetică și algebră elementară. Cartea se adresează elevilor, studenților din primii ani de studii și profesorilor din învățămîntul mediu și elementar.

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

(urmare din G.M.F.-B nr. 4, 1961)

SATU MARE. Cl. VIII. Embec Mircea (E: 1573, 75, 77—79, 84, 87, 89, 91, 96), Friedman Gabriela (E: 1540, 42, 43, 47, 54, 59, 60, 63), Herșkovitz Ecaterina (E: 1559, 60, 70, 73, 74, 77, 79, 81, 87, 98), Herkovitz Samuel (E: 1559, 60, 70, 72, 74, 78, 79, 91, 93, 97), Maier Robert (E: 1559—62, 73, 74, 77—79, 83, 90, 92, 600, 01, 04, 10, 13), Samuel Judita (E: 1557, 60, 70, 71, 83, 89, 91, 93, 96, 98), Weisz Andrei (E: 1571, 73, 74, 77—79, 81, 83, 87, 89).

SCAENI (Ploești). Cl. IX. Goțonoagă Rodica (4384, 400, 11, 12, 20, 23, 72, 75, 81, 83, 90).

SFÎRLEANCA (Ploești). Cl. VI. Marin Steluța (E: 1555, 59, 60, 70, 83, 84, 86, 88, 92, 95, 97).

SIBIU *Ș.m. 1.* Cl. IX. Cramarencu Pavel (4353, 81, 91, 413, 65, 69, 80, 82, 85, 90), Păcuraru Iuliu (4353, 65, 69, 80—82, 85, 90, 91, 413). Cl. XI. Balasopol Radu (4343, 91, 94, 97, 416, 19, 20, 72, 80, 81). *Ș.m. 2.* Cl. VIII. Trif Maria (E: 1555, 59, 60, 65, 70, 73, 74, 76—79). *Ș.m. 3.* Cl. VIII. Bîrleanu Luminița (4365, 420, E: 1555, 57, 59, 60, 63, 64, 67, 69, 70, 74, 78, 79, 87, 92, 93). Cl. XI. Micu Doina (4349, 52, 53, 60, 62, 67, 70, 80—83, 98, 99, 402, 07, 09), Sigmireanu Gabriela (4351, 69, 80, 81, 408, 17, 19, 20, 44, 49, 52, 96). *Șc. elementară nr. 9.* Cl. VII. Boac Monica (E: 1575, 80, 83—89, 94, 97), Dinulescu Aurelian (E: 1555, 69, 73—75, 79, 83, 87, 90, 94), Fleacă Mariana (E: 1555, 60 69, 70, 74, 79, 83, 93, 97), Grindiu Ioan (E: 1555, 70, 75, 83, 84, 87—89, 93, 94, 97), Hușanu Aurelia (E: 1555, 59, 60, 69, 70, 74, 79, 84, 89, 94), Marcu Grigore (E: 1555, 70, 75, 83, 84, 87, 89, 94, 95, 97), Sähleanu Lucia (E: 1555, 59, 60, 70, 74, 79, 83, 84, 93, 97), Ștefănescu Manuela (E: 1545, 46, 49, 53—55, 59, 60, 63, 70, P). *Șc. de 7 ani nr. 12,* Cl.

VI. Trif Nicolae (E: 1555, 59, 60, 70, 74, 79, 83—85, 94). Cl. VII. Bulea Al. (E: 1555, 59, 60, 70, 74, 79, 84, 88, 94, 95), Meţiu Nicolae (E: 1555, 60, 62, 70, 73, 74, 85, 96, 97). *Şcoala de 7 ani nr. 15.* Cl. VII. Bucur Delia (E: 1567, 68, 73—75, 77—84, 86—95, 97, 98).

SIGHET. Cl. X. Smicală Ioan (4380—83, 91, 96, 416, 18, 20, 44). Cl. XI. Tiplea Ioan (4342, 43, 54, 60, 62, 65, 69, 70 80—82, 90, 96, 405, 73, 80, 83, 84).

SIGHIŞOARA. *Ş.m. 1.* Cl. VIII. Floca Margareta (4390, E: 1555, 59, 60, 70, 74, 79, 84, 85, 92, 94, 95). Cl. IX. Serachitopol Adrian (4367, 69, 80, 81, 98, 99, 405, 21, 42, 56). Cl. X. Ajtag Maria (4381, 420--22, 31, 34, 35, 43, 44, 54). Cl. XI. *Ciulei Mircea* (4302, 19, 33, 40, 41, 43, 49, 51, 54, 60, 62, 67—71, 75, 80—83, 90, 91, 94, 96—99, 401, 07, 12, 19—22, 31, 32, 34, 37, 42, 44, 52, 53), Neagu Gh. 4361, 70, 89, 95, 313, 16, 47, 51, 68, 75). *Ş.m. 2.* Cl. VIII. Duca Dan (E: 1577—79, 81, 84, 97, 99, 610, 13, 15, 16), Iacobi Mihaela (4365, 99, E: 1556, 57, 59, 61, 62, 64, 65, 69, 70, 73, 74), Kessler Herbert (E: 1574, 79, 81, 89, 91, 96, 600, 05, 10, 16). Cl. IX. Karl Günther (4344, 65, 69, 75, 80, 82, 85, 411, 12, 27, 44). Cl. XI. Brăteanu Silviu (4342, 48, 51, 69, 80—83, 86, 412, 18), Engberth Dieter (4344, 47, 48, 51, 60, 62, 63, 69, 70, 75), Kessler Peter (4342, 44, 51, 54, 60, 62, 69, 70, 75, 411, 16), Klingspohr Fritz (4364, 69, 75, 77, 80—82, 84, 88, 411, 72), Schotsch Herta (4344, 51, 60, 64, 69, 70, 75, 77, 81, 82, 412).

SLATINA. Cl. VII. Diaconescu Radu (E: 1555, 59—62, 70, 73, 79, 83, 85, 92), Gugui Maria (E: 1555, 59, 60, 62, 70, 73, 59, 84, 85, 87), Lungu Marcel (4381—83, 96, 97, 408, 72, 75, 81, 83).

STREHAIA (Oltenia). Cl. VIII. Bilteanu Georgeta (E: 1555, 59, 60, 70, 73, 74, 77--79, 81), Bora Al. (E: 1555, 59—61, 70, 74, 77, 79, 81), Bran Mircea (E:1555, 59, 70, 71, 73—75, 77—79, 81), Cioplea Floarea (E: 1559—61, 70, 73, 74, 77, 79, 81), Colţan Emil (E: 1555—66), Epuran C. Ion (E: 1555, 60, 61, 71, 73, 74, 76, 78—81). Gheorghiţă Ion (E: 1555, 59, 60, 67, 69, 71, 74, 76, 78, 79, 81), Gonciulea Iulica (E: 1555, 59, 60, 70, 73, 74, 77—79, 81), Lupşoiu Const. (E: 1555, 59—61, 70, 71, 73—75, 77—79), Mihăilescu Gabriela (E: 1555, 59, 60, 70, 74, 77, 79), Mîndreanu Eugen (4574, E: 1555, 57, 59—61, 69—71, 73—79, 81) Cl. IX. Ancuţescu Elisabeta (4302, 05, 18, 80, 82, 98, 99, 419, 52), Bolocan Ion (4369, 80—82, 91, 98, 9, 419), Dănciulescu Gh. (4369, 80—82 91, 98, 99), Fianu Virgil (4369, 81, 91, 92, 98, 99, 419, 52), Popescu M. Gh. (idem).

SUCEAVA. Cl. XI. Sorohan Liviu (4347, 48, 51, 80—83, 90, 400).

TECUCI. *Ş.m. 2.* Cl. VII. Banu Maria (E: 1570, 71, 73, 74, 78—80, 83, 84, 86, 87, 97), Borş Vasilica (E: 1559, 70, 73, 74, 78—80, 83, 84, 86, 94, 97), Croitoru Petrică (E: 1570, 71, 73, 74, 77—80, 83, 84, 86, 87), Marian Ştefania (E: 1573, 74, 77, 78, 80, 83, 84, 86, 87, 90, 94, 97), Panovici Silvia (E: 1555, 59—61, 63, 69, 70, 73, 74, 79, 80), Pîrîianu Octavia (E: 1560, 61, 70, 71, 83, 84, 87, 90, 92, 94, 97), Petrovici Dan (E: 1571, 73, 74, 77—80, 83, 84, 86, 87, 94), Popescu Florentina (E: 1571 73, 74, 78—80, 83, 84, 86, 87), Cl. VIII. Adam Ionel (E: 1555, 59, 60, 65, 69, 70, 73, 74, 77, 79), Chiscop Liliana (E: 1571, 73, 74, 77—80, 83, 84, 86, 92), Cojocaru Marian (E: 1573, 74, 76, 77, 84, 87, 89, 90, 92), Ecea Gh. (E: 1555, 59—61, 63, 69, 70, 73, 79, 83, 84, 86, 94, 97), Gheorghiu Olimpia (E: 1555, 59, 60, 74, 77, 79, 80, 90, 95, 97, 98), Mihailovici Deli (E: 1555, 59, 60, 74, 77, 79, 80, 90, 95, 97, 98), Niculescu Dan (E: 1559, 60, 70, 71, 73, 74, 78, 79, 83, 86, 87), Tătaru Ioan (E: 1551, 59, 60, 69, 70, 73, 4, 77—79, 89, 97, 98). Cl. X. Adrian Lidia (4362, 70, 71, 82, 91, 98, 99, 409, 16, 31). Bubulac Marioara (4381, 82, 96, 98, 416, 18, 22, 31, 32, 34, 42, 44), Ene Lucia (4362, 70, 71, 81, 82, 91, 98, 99, 416, 20, 31, 34). Cl. XI. Moscovici Henri (4321, 54, 55, 56, 60, 65, 70, 71, 73, 84, 90, 410, 16), Tătaru Petru (4360, 62, 67, 69, 80, 82, 83, 409, 18, 31, 37).

TIMIŞOARA. *Ş.m. 1.* Cl. VI. *Gheorghiu Rodica* (E: 1541, 43, 45, 46, 52—54, 60, 70, 73, 74, 79—83, 84, 92, 94, 600, 09, 10—13, 14). Cl. XI. Comşulea Cornelia (4314, 27, 42, 51, 65, 69, 71, 80—82, 91, 95, 412). *Ş.m. 2.* Cl. VIII. Nediu Alina (E: 1571, 73, 74, 77—79, 81, 87, 89, 600, 05, 10), Popescu Viorela (E: 1558, 59, 61, 67, 69--71, 77, 79, 84, 87), Taşal Cornelia (E: 1559, 60, 70, 73, 74, 77, 79, 84, 87, 89). Cl. X. Bangert Eckhardt (4342, 65, 80—82, 98, 9, 407, 20—22, 31, 34). Cl. XI. Bohn Erich (4344—47, 80—83, 96, 97, 411, 12). *Ş.m. 3.* Cl. XI. *Abramovici Al.* (4302, 04, 07—09, 30, 38, 41, 44, 45, 47, 53, 54, 65, 69, 71, 79, 81, 82, 84, 85, 90, 91, 93, 400, 04, 05, 11, 16). *Ş.m. 5.* Cl. VIII. Lungociu Mircea (E: 1557, 59, 69, 71, 74, 79, 81, 84, 89), Ristiu Lucian (E: 1561, 74, 77—81, 84, 87), Rusu Lucia (E: 1558—61, 64, 67, 69, 71, 73, 74, 77 ,79, 81, 84, 89), Stan Paulina (E: 1558—61, 64, 67, 69, 71, 73, 74, 77, 81, 84), Weinberger Juditha (E: 1558—61, 67, 72, 73, 74, 77, 79, 81, 84, 89). Cl. XI. Chelici Al. (4376, 80—84, 90, 94, 419, 20, 44, 52). *Ş.m. 7.* Cl. X. Fuchs Wolfgang (4373, 70, 71, 416, 19, 20, 26, 27, 29).

TIRGOVIŞTE. Absolvent *Brezeanu Florin*

(4252—54, 56—63, 67, 71, 74, 78, 80, 89, 90, 402—09, 11, 14—16, 19, 27, 29, 37, 38). *Ş.m. 1.* Cl. X. Frăţiloiu Gh. (4302, 04, 05, 07, 09, 33, 38, 41, 49, 51, 65, 67, 69). Cl. XI. Şerban Ilie (4302, 03, 05—09, 14, 38, 42, 48, 51, 54, 60, 62, 65, 69—71, 82—84, 90, 94, 416). *Ş.m. 2.* Cl. VIII. Tîrcă Gh. (4333, E: 1555, 59, 60, 68, 71, 73, 74, 76, 79). *Ş.m. 3.* Cl. VII. Niculescu Const. (E: 1552, 55, 59, 64, 66, 69, 73, 76, 78, 81, 84, 87, 90, 95, 601, 04, 07, 10, 13). Cl. X. Frîncu M. Zaharia (4302—08, 27, 33, 38, 42, 48, 49, 51, 52, 54, 60, 62, 65, 67, 69—71, 80—83, 89, 91, 96, 98, 412, 16, P). Cl. XI. *Dumitrică Aurel* (4342—46, 49, 51—56, 58—65, 67, 69, 71, 73, 77, 80—84, 90, 91, 93, 94, 96—401, 04, 07, 09, 10, 12, 16, 17, P). *Ş.m. uzina metalurgică.* Cl VIII. David Gh. (E: 1555—57, 59—61, 64, 67, 69, 70), Vlăsceanu Florea (E: 1555—57, 59, 61 64, 67, 69, 70).

TIRGU CĂRBUNEŞTI (Oltenia). Cl. XI. Guşiţă Marcel (4342, 48, 62, 65, 69, 70, 75, 80, 81, 83, 417), Stăiculescu Const. (4305, 06, 08, 09, 37, 42, 48, 54, 65, 69, 70, 75, 80, 83).

TIRGU JIU. Cl. X. Manta Marcel (4342, 69, 80—82, 412, 16, 44, 81, 90). Cl. XI. Stănculescu Marcela (4342, 62, 64, 80—82, 90, 434, 52, 54). *Ş.m. 2.* Cl. X. Ivăşchescu Nicolae (4236, 38, 41, 42, 44, 302, 04, 05, 08, 08, 09, 42, 62, 80—82, 412, 16, 33, 44, 52, 80, 81), Roangheş C. Ion (4342, 62, 69, 90, 412, 17, 44, 52, 75, 82, 84, 96), Stănculescu Traian (4342, 62, 69, 80—82, 90, 444, 52, 54).

TIRGU MUREŞ. Cl. VIII. Kancsar Marton (4475, E: 1571, 89, 91, 93, 96, 99, 602, 03, 05, 09, 16).

TIRNAVENI (Braşov). Cl. IX. Petruţa Al. (4365, 69, 71, 81, 82, 91, 420, 44). Cl. X. Costea I. Viorel (4371, 98, 99, 400, 07, 21, 41, 42, 52, 53).

TRUŞEŞTI (Suceava). Cl. X. Melinte Mihai (4342, 62, 80—83, 98, 99, 415, 52), Noroc Ioan (4352, 62, 80—84).

TULCEA. *Ş.m. 1.* Cl. X. Marcu Aneta (4351, 60, 69, 80, 82, 83, 96, 419, 31, 33, 34, 42), Porneală Sava (4369, 80—82, 84, 91, 400, 12, 19, 20, 34, 43, 44).

TURDA. *Ş.m. 1.* Cl. VII. Olariu Adrian (E: 1560, 70, 73, 74, 79, 87, 94, 600, 10, 13). Cl. IX. Balea Vasile (4348, 51, 65, 67—69, 82, 90, 91, 98, 448), Creţu Caian (4348, 51, 65, 67, 69, 82, 90, 91, 98, 448).

TURNU MĂGURELE. Cl. VIII. Drăgulinescu Dumitru (E: 1557, 60, 61, 64, 69, 70, 83, 84, 87—91, 93, 94, 96, 97). An. I. Eremia Dinu (4342, 47, 51, 61, 62, 64, 67, 70, 76, 77, 79—84, 98, 404, 18).

TURNU SEVERIN. Cl. VI. Roată Carmen (E: 1559—61, 70, 73, 74, 79, 84, 87, 94). Cl. VII. Coravu Mihai (E: 1559, 60, 70, 73, 74, 78, 79, 84, 87, 90, 97). Popescu Valentin (E: 1555, 59, 60, 70, 74, 77, 79, 89, 95, 97), Vulpescu Dan (E: 1561, 73, 77, 80, 81, 84, 87, 94, 97, 610). Cl. XI. Roată Radu (4303, 05, 07—09, 25, 33, 37, 51, 62, 67, 69 70).

VALEA REA (Ploeşti). Cl. VI. Negulescu Elena (E: 1512—18, 21, 22, 25, 27).

ZALĂU. Cl. IX. Gajzogo Maria (4341, 43, 44, 53, 65, 68, 69, 99, 405, 07, 12). Cl. XI. Gajzogo Katalin (43 1—43, 46, 47, 64, 70, 75, 77, 80—85, 90, 97, 405, 12—14, 19).

Problemele rezolvate trebuie să fie din ultimele trei numere apărute ale G.M.F.-B şi vor fi trimise numai odată în cursul unei luni. Problemele de matematică vor fi expediate într-un singur plic şi vor fi însoţite de un borderou cu numerele problemelor scrise în ordine crescîndă. Pe plic se va scrie localitatea şi şcoala şi clasa pe care o urmează rezolvitorul. La rubrica rezolvitorilor nu se vor anunţa decît cel puţin 10 probleme bine rezolvate.

EVIDENŢIAŢI

Pînă la 1 februarie 1961 s-au mai evidenţiat ca rezolvitori de probleme de matematică din GMF-B, nr. 10—12 din 1960 şi nr. 1 din 1961, după cum urmează:

1. **Popa Nicolae**, cl. 11 Focşani; 2. **Lustig Gheorghe**, cl. 11 ş.m. 5 Timişoara; 3. **Sîrghie Mircea**, cl. 10 Rădăuţi; 4. **Popescu Dorel**, cl. 11 Arad; 5. **Olteanu S. Victor**, cl. 11 ş. m. 19 Bucureşti; 6. **Bădescu N. Lucian**, cl. X Cîmpulung-Muscel; 7. **Garabedian Rodica**, cl. 11 ş. m. 1 Braşov; 8. **Neagu Gheorghe**, cl. 11 Sighişoara; 9. **Piscupescu Gabriel**, student (IPGG) Bucureşti; 10. **Stănescu Cicerone**, cl. 10 Drăgăşani; 11. **Dumitrică V. Aurel**, cl. 11 Tîrgovişte; 12. **Popa Radu**, cl. 8 Petroşani; 13. **Creţu Gh. Dumitru**, cl. 10 Tîrgovişte; 14. **Tănase Virgil**, cl. 10 Sinaia; 15. **Paxino C. Gh.**, cl. 10 Sinaia; 16. **Iorga Valeriu**, cl. 11 Lugoj; 17. **Năstăsescu Constantin**, cl. 10 Pucioasa; 18. **Drugea I. Gheorghe**, cl. 10 ş. m. 1 Ploieşti; 19. **Persache Octavian**, cl. 8 ş. m. 11 Bucureşti; 20. **Teodorescu Catrinel**, cl. 11 ş. m. 10 Bucureşti; 21. **Marinescu Emil**, cl. 9 ş. m. 10 Bucureşti; 22. **Benderschi Boris**, cl. 9 ş. m. 10 Bucureşti; 23. **Georgescu Stelian**, cl. 10 ş. m. 10 Bucureşti; 24. **Băluţă Gheorghe**, cl. 11 Adjud; 25. **Moţit M. Horia**, cl. 10 Brăila; 26. **Sucitu Gheorghe**, cl. 10 ş. m. 3 Bucureşti; 27. **Şerban Doina**, cl. 11 ş. m. 1 Braşov; 28. **Chiriţă Marcel**, absolvent Bucureşti; 29. **Buiumovici Alex.**, cl. 10 ş. m. 18 Bucureşti; 30. **Bolocan C. Gabriel**, cl. 10 ş. m. 26 Bucureşti; 31. **Stoicescu T. Ion**, cl. 11 ş. m. 1 Buzău; 32. **Grădeanu C. Gh.**, cl. 11 Focşani; 33. **Vasiliu Dan**, cl. 8 Lugoj; 34. **Drăgănescu Lavinia**, cl. 7 Moreni; 35. **Boboc Dănuţ**, cl. 8 P. Neamţ; 36. **Lazăr Dan**, cl. 10 ş. m. 10 Bucureşti; 37. **Pop**

Valer, cl. 11 Turda; 38. **Demetrian Romulus**, cl. 10 ş. m. 1 Ploieşti; 39. **Opriş Ion**, cl. 10 ş. m. 1 Ploieşti; 40. **Diaconescu C. Radu**, cl. 10 Pucioasa; 41. **Ciulei Mircea**, cl. 11 Sighişoara; 42. **Niţă Constantin**, cl. 10 Pucioasa; 43. **Vlăduţiu Mircea**, cl. 10 ş. m. 2 Sighişoara; 44. **Popescu S. Gheorghe**, cl. 10 Pucioasa; 45. **Ceapă C-tin**, cl. 8 ş. m. 3 Tg. Jiu; 46. **Mihai M. M.**, absolv. Tg. Ocna; 47. **Dumitrescu Emilia**, cl. 10 ş. m. 10 Bucureşti; 48. **Bărbulescu Aurelia**, cl. 11 ş. m. 4 Oradea; 49. **Barbu S. Cornel**, cl. 11 Drăgăşani; 50. **Pavel H. Nicolae**, cl. 11 ş. m. 3 Iaşi; 51. **Năstase Aurel**, cl. 11 Focşani; 52. **Moraru Liliana**, cl. 8 ş. m. 4 Cluj; 53. **Stancu Ion**, cl. 10 ş. m. 1 Piteşti; 54. **Nemet Doina**, cl. 11 Lugoj; 55. **Ciocan Dan**, cl. 8 Cîmpulung-Mold.; 56. **Drăguşanu Constantin**, cl. 8 ş. m. 4 Galaţi; 57. **Vodă Viorel**, cl. 10 ş. m. 12 Bucureşti; 58. **Tărăbuţă Mihai**, cl. 9 ş. m. 1 Piteşti; 59. **Oltenescu F. Nicolae**, cl. 8 Mizil; 60. **Călăraşu Ovidiu**, cl. 7 Moreni; 61. **Crihană Lascăr**, cl. 8 Petroşani; 62. **Negruţiu I. Vasile**, cl. 7 Săcădat; 63. **Busuioc Mihaela**, cl. 8 ş. m. 8 Bucureşti; 64. **Marcus Sergiu**, cl. 8 ş. m. 3 Galaţi; 65. **Dabu Dan**, cl. 8 Lugoj; 66. **Cimpeneriu Traian**, cl. 8 Lugoj; 67. **Florea George**, cl. 7 ş. m. 32 Bucureşti; 68. **Steica Aurel**, cl. 11 Cluj.

Pînă la 1 februarie 1961 s-au mai primit soluţii bune la problemele de matematică propuse în G.M.F.-B nr. 10—12/1960, după cum urmează:

ADJUD (Bacău). Cl. XI. **Băluţă Gheorghe** (4360, 62, 65, 69, 70, 77, 80—83, 88, 90, 94, 96, 97, 412, 15, 18—20, 22, 31, 32, 34, 43, 52, 60, 61, 63, 72, 73, 75, 78, 81, 83, 84, 90, 93, 97), Morărașu Gh. N. (4362, 70, 90, 94, 97, 99, 431, 32, 61, 72, 73, 75, 81, 83, 84).

Şcoala de 7 ani. Cl. V. Isvoranu Silviu (E: 1574, 79, 83, 84, 88, 94, 97, 600, 04, 08, 10, 11). Cl. VI. Săraru Adrian (E: 1574, 79, 83, 84, 88, 94, 97, 600, 04, 08, 10).

AIUD (Cluj). **Ş. m.** Avram Iancu. Cl. VIII. Reff Radu (E: 1571, 74, 75, 77, 84, 87, 95, 98, 609, 10, 13, 14). Cl. X. Leţia Ioan (4347, 81—84, 91, 405).

ALBA IULIA. **Absolvent.** Gruian Ştefan (4393, 96, 400, 12, 17, 18, 25, 27, 29, 33, 48, 52, 53, 61, 72, 74, 79—84, 90, 96, 97).

ANINA (Banat). Cl. VII. Petric Mircea (E: 1573, 74, 76, 78, 79, 87, 88, 90, 92, 94, 95, 97, 600, 01, 07, 08, 10, 11, 13, 14).

ARAD. **Ş. m. 1.** Ion Slavici. Cl. VII. Olariu Eleonora (E: 1584, 94, 97, 98, 600, 04, 07, 09—11, 13, 14), Selmereanu Radu (E: 1571—74, 78, 79, 81, 83, 86, 90). Cl. VIII. Pănescu Alexandru (E: 1578, 83, 89, 93, 97, 98, 600, 09, 10, 16; 4393, 99), Vicol Viliam (E: 1603, 07, 08, 11, 13, 17, 18, 21, 24, 27, 31). Cl. IX. Goguţă Doina (4342, 80, 82, 420, 33, 44, 75, 81, 83, 84), Olariu Ştefan (4383, 83, 90, 91, 400, 19, 20, 27, 44, 53, 81, 83, 84, 90), Silvestru Aurelia (4380—82, 98, 99, 421, 31, 43, 48, 53, 86, 94). Cl. X. Crivăţ Dan (4359, 81—83, 96, 419, 20, 47, 81, 96), Ferentz Militon (4376, 80—84, 88, 90, 91, 405, 13, 16, 20, 29, 33, 44, 47, 52, 53, 60, 61), Puia Doru (4385, 91, 419, 22, 31, 34, 43, 61, 96, 97). Cl. XI. Macovei Rodica (4410, 23, 27, 29, 44), **Popescu Dorel** (4349, 54, 55, 59, 60, 62, 64, 65, 67, 69, 70, 76, 77, 80—84, 89—91, 93, 94, 96—400, 07, 09, 12, 16, 19—22, 31, 32, 34, 35, 37, 40—44, 52, 53, 55, 60, 61, 63, 80, 83, 84, 87, 95—97), Vărşendeanu Ioan (4409, 21, 27, 29, 67, 83, 97, 509, 36, 40).

Ş. m. 2 Olga Bancic. Cl. VII. Szücz Iuliana (E: 1584, 87, 89, 90, 94, 97, 600, 04, 10, 15), Dinu Adela (E: 1571—74, 79, 81, 84, 86, 91, 98), Loşniţă Felicia (E: 1571—74, 77—79, 81, 86, 89—91, 96, 98), Stana E. Mircea (E: 1571—74, 78, 79, 81, 83, 86, 90). Cl. X. Ciurea Sorin (4380, 83, 429, 44, 81, 82, 89, 91, 96, 97).

Ş. m. 3. Cl. VII. Quit Rodion (E: 1571—74, 77, 89, 91, 96, 600, 10). Cl. IX. Soreanu Petru (4380—82, 84, 419, 20, 23, 27, 53, 81).

BACĂU. **Ş. m. 1.** Absolvent Pintilie Manole (4376—84, 86, 88, 90, 91, 96, 405, 08, 10). Cl. XI. Dabu Răzvan (4380—82, 91, 96, 98—400, 07, 10, 12, 31, 32, 34, 35).

Şcoala de 7 ani Păuneşti—Adjud—Bacău. Cl. VI. Anghel Costică (E: 1583, 89, 97, 600, 04, 11, 13), Berbece Georgeta (E: 1597, 601, 04, 08, 09, 11, 13), Dobre Maria (E: 1574, 600, 01, 04, 08, 10, 11), Dodu V. (E: 1600, 04, 08, 10, 11, 13), Manea Tatiana (E: 1574, 600, 01, 04, 08, 10, 11), Mocanu Aurora (E: 1597, 601, 04, 08, 09, 11, 13), Novac St. Nicolae (E: 1588, 96, 97, 600, 04, 08, 10), Sandu N. Gheorghe (E: 1583, 97, 600, 04, 08, 10, 11, 13), Săndulache L. (E: 1583, 88, 92, 94, 97, 601, 04, 08, 10). Cl. VII. Bogdan Maria (E: 1571, 79, 97, 600, 04, 08, 10), Filiti M. (E: 1574, 96, 601, 04, 06, 08, 10, 11), Ignat Aurel (idem), Savin Dumitru (E: 1585, 87, 88, 94, 98, 600, 04, 10, 15).

BAIA DE ARAMĂ (Oltenia). **Ş. m. 1.** Cl. VIII. Răcănel Valeriu (E: 1559, 60, 70, 71, 73—75, 77, 81, 87, 89, 91, 96). Cl. X. Bolţ Nicolae (4380—83, 420, 29, 44), Gurgu Ion (4351, 80—83, 420, 29, 44, 52). Cl. XI. Răcănel Ion (4377, 80—83, 98, 99, 420, 28, 29, 44, 52).

BAIA DE ARIEŞ (Cluj). Cl. IX. Ciura I. Alexandru (4384, 400, 16, 21, 31, 34, 41, 43, 52, 53). Cl. X. Totolici Gabriel (4305, 37, 64, 80, 82, 452, 81, 83, 84).

BAIA MARE (Maramureş). **Ş. m. 1.** Cl. VIII. Rafan Tarcviniu (4484, E: 1571, 77—79,

81, 83, 91, 603, 19). Cl. IX. Heiner Margareta (4342, 69, 81, 82, 84, 452, 75, 81), Ilieşu Florin (4380, 82, 417—19, 26, 33, 53, 81, 96). Cl. X. Rafan Iosif (4380, 82, 96, 420, 52, 72, 80, 83, 84, 90).

BALŞ (Oltenia). Cl. VIII. Voiculescu Florian (E: 1571—75, 78—80, 83, 84, 87, 89, 91, 93, 95, 96, 98). Cl. XI. Dinu Gheorghe (4419, 20, 22, 29, 31, 33, 34, 40, 52, 54, 61, 63, 72, 88, 96).

BECHET (Oltenia). Cl. VII. Epuran Aneta (E: 1574, 79, 83, 89, 95, 98, 600, 04, 08, 10). Cl. VIII. Ozon Cezar (4475, E: 1584, 86, 87, 89—95, 97—601, 03, 04, 07—16), Păceană Angela (E: 1574, 76, 77, 79, 83, 88, 604, 10, 13), Ţene Floarea (E: 1574, 77, 79, 83, 84, 89, 97, 604, 10, 13).

BEIUŞ (Crişana). Ş. m. „Petru Groza". Cl. VII. Moga Mihai (E: 1600—02, 04, 05, 07—11, 13, 15). Cl. XI. Nica Tănase (4419, 20, 29, 44, 48, 52, 53, 61, 72, 81).

BICAZ (Bacău). Cl. VII. Nistor C. Dinu (E: 1559, 60, 70, 71, 73—75, 77—79, 81, 83, 84, 87—89, 91, 96, 97, 600, 05, 10, 15). Cl. X. Covar Eugen (4380—82, 85, 87, 90, 91, 96, 412).

BISTRIŢA (Cluj). Cl. VII. Ciorceriu Brînduşa (E: 1571, 73, 74, 77—81, 84, 87, 94). Cl. XI. Paşca Iuliu (4349, 75—77, 94, 99, 407, 19, 20, 22, 31, 34, 43, 44, 47, 53, 55, 72, 81, 84, 95).

BÎRLAD. **Complexul şcolar.** Cl. VIII. Aftenie Lilica (E: 1571, 73, 74, 77, 78, 81, 87, 89, 92, 96), Armeanu Corneliu (E: 1571, 74, 77, 79, 84, 85, 87, 89—91, 94, 600, 05, 07—11, 15, 16), Calmanovici Liviu (E: 1587, 89, 97, 600, 01, 05, 08, 10, 11, 13), Chirica Gachi (E: 1577, 81, 90, 91, 600, 05, 07—11, 16), Ilie Gabriela (E: 1571, 73, 77, 78, 81, 87, 89, 91, 92, 96), Parfene M. (4452, 56, E: 1573, 78, 85, 87, 89, 91, 92, 96), Popica Chiriachiţa (E: 1583, 84, 87, 89, 91, 93—97). Cl. X. Bernstein Monica (4381, 418, 20, 75, 81, 84), Bostan Maria (4381, 82, 90, 420, 75, 81, 84), Iordan Speranţa (4381, 82, 84, 99, 420, 22, 31, 34, 41, 52, 54, 67, 81), Feraru M. Ioan (4380—82, 90, 91, 405, 17, 47, 54—56, 70, 75, 81, 84), Matecescu Liliana (4380—84, 90, 96, 416—18, 44, 47, 48, 52), Miron Petruţa (4381, 82, 90, 93, 98, 420, 22, 31, 34, 41, 43, 54, 70, 75, 81, 84), Ursu Onorica (4381, 82, 84, 99, 420, 22, 31, 34, 41, 52, 54, 67, 81), Vicol Dorina (4418, 20, 75, 81, 84).

BOLINTINUL DIN VALE (Bucureşti). Cl. VIII. Coca Vasile (E: 1561, 71, 73, 74, 81, 84, 87, 89, 91, 93, 95, 98, 610). Cl. IX. Ghiţă Teodor (4342, 47, 54, 61, 62, 64, 69, 70, 80, 82, 85, 86, 90, 95), Grămescu Nicula (E: 1517, 61, 73, 74, 81, 84, 89, 91, 96, 98).

BORZEŞTI (Bacău). **Grupul şcolar de petrol-chimie.** An. I. Dorobăţ Nicolae (4382, 90, 400, 18—20, 27, 44, 80, 81, 83, 84).

BOTOŞANI (Suceava). Ş. m. 1. August Treboniu Laurian. Cl. VIII. Litman Augustin (E: 1574, 79, 84, 89, 603, 10, 11), Pincu Iosef (4543, E: 1571, 74, 87, 89, 91, 92, 98, 600, 03, 10, 31). Cl. IX. Bucătaru Margareta (4405, 33, 40, 52, 53), Mocanu A. Nicolae (4380—82, 444, 47, 52, 81, 84, 86), Segal Arnold (4420, 61, 75, 81, 84, 97). Cl. XI. Amurăriţei Ieremia (4380—84, 88, 94, 96, 98, 412).

Ş. m. 2. Mihail Eminescu. Cl. VIII. Aronovici Mişu (E: 1571, 74, 78, 79, 87, 89, 91—93, 610), Cohn Melania (E: 1571, 73, 77, 78, 81, 87, 89, 91, 93, 96, 605), Cohn Mona (E: 1571, 75, 77, 78, 81, 89, 91, 93, 96, 99, 603, 05, 09), Enăchescu Eugenia (E: 1589—91, 96, 600, 04, 05, 08, 10, 13, 16). Cl. XI. Bauer Gheorghe (4380—83, 86, 90, 96, 412, 47, 63, 64, 75, 80—85, 96), Constantin Radu (4383, 70, 96—98, 400, 08, 11, 12, 16, 18—20, 23, 29, 31, 34, 38, 42—44, 47, 48, 52, 53, 72, 73, 75, 81, 83, 84).

BRĂILA (Galaţi). Ş. m. N. Bălcescu. Absolvent Rarinca Alexandru (4376, 77, 79, 80, 82—84, 90, 96, 419, 20, 44, 51, 84, 96). Cl. VIII. Stănescu I. Tudor (E: 1574, 77, 79, 81, 99, 600, 04—06, 08—11, 13, 14, 16). Cl. X. Moţit Horia (4380, 83, 84, 88, 91, 94, 411—13, 16—18, 20—23, 29, 31—34, 37, 39, 41—44, 53, 54, 56, 67, 70, 73, 75, 79—84, 94, 96, P).

Şcoala de 7 ani. Cl. IV. Matei Corneliu (E: 1574, 79, 84, 94, 97, 600, 04, 08, 10—12, 14). Cl. V. Barbu Lăcrămioara (E: 1583, 84, 93, 600, 04, 08, 10—12, 14). Cl. VII. Bibicu Mariana (E: 1574, 76, 78—80, 87, 600, 10, 14, 15), Frangu Octavian (E: 1565—67, 69—71, 83, 84, 86—97, 99—601, 04—11, 13, 14, 16).

BRĂNEŞTI (Bucureşti). Cl. VII. Dinescu Gabriela (E: 1560, 61, 70, 71, 73, 75, 76, 79, 84, 90, 93, 96, 600, 07, 15).

BRAŞOV. **Student** Gladcenko Gheorghe (4376, 77, 79—84, 91, 97, 411, 12, 16—20, 52, 55, 66, 71—73, 75, 81—84).

Ş. m. 1. Cl. XI. Garabedian Rodica (4377, 82—84, 90—93, 97—99, 401—03, 15, 16, 20—22, 31—37, 442—44, 47, 53, 55, 60—63, 67—69, 72, 75, 80—84, 87—90, 94—96), Şerban Doina (4342, 51, 54, 62, 65, 67, 76, 77, 80—84, 88, 90, 91, 96, 98, 408, 16, 17, 19, 20, 23, 29, 31, 34, 43, 44, 47, 52, 53, 63, 75, 80—84, 88, 89).

Ş. m. 4 Ştefan Gheorghiu. Cl. VI. Bran Lucia (E: 1560, 61, 69, 72, 82, 86, 87, 90, 95, 97). Cl. VIII. Aldea Sandu (E: 1571—74, 76, 79, 84, 94, 97, 600, 04, 09, 10, 13), Cioca Mircea (E: 1600, 05, 08—10, 13, 14, 16), Hîncu Marius (E: 1572, 75, 77—81, 83, 84, 603), Munteanu Dana (E: 1577—79, 81, 87, 89, 91, 95, 98, 600, 05),

Vulpe Viorel (E: 1561—74, 76, 79, 84, 94, 97, 600, 04, 10).

Ş. m. 5 Unirea. Cl. VIII. Munteanu Gh. Mihai (E: 1571, 73, 75, 77, 78, 81, 85, 91, 93, 80—82, 98, 99, 405, 07). Cl. IX. Munteanu Gh. Mircea (4342, 43, 76, 80—84, 99, 405, 07, 09, 31, 34, 52).

Şcoala de 7 ani. Cl. VI. Vătui Florin (4456, E: 1582—88, 90, 92, 94, 97). Cl. VII. Stoican Adrian (E: 1571—74, 77—79, 81, 83, 86).

BUCUREŞTI **Studenţi: Piscupescu Gabriel** (IPGG) (4355, 70, 80, 83, 88, 90, 93, 94, 404, 11—13, 15, 19, 20, 25, 26, 38 43, 44, 47, 51—53, 60, 62, 63, 68, 71, 72, 75, 79—84, 90, 99, 505, 07, 09, 19, 31, 33, 35—38, 43), Ţuţuianu Ovidiu (IPB - energetică) (4376—84, 90, 91, 96, 404, 16, 18—20, 24, 44, 53, 55, 71, 81, 83, 84, P).

Tehnician. Drăgan Marin (IOR) (4376, 77, 80—83, 415, 18—20, 24, 44, 52, 61, 83, 84, 96, 97).

Absolvenţi: Chiriţă Marcel (4419, 20, 22, 23, 31, 32, 34, 37, 38, 40—44, 47, 51—53, 56, 57, 60, 61, 63, 67, 69—72, 74, 75, 80, 81, 83, 84, 86, 89, 90, 91, 94—97), Lăzărescu Cristian (E: 1571—75, 78, 79, 85, 91, 92, 608).

Ş. m. 1 Nicolae Bălcescu. Cl. VIII. Ţilenschi Mircea (E: 1581, 83, 87, 90—92, 96, 97, 607, 10). Cl. X. Grünblatt Mihai (4380, 81, 416, 19, 20, 23, 29, 44, 52, 53), Pascu Adrian (4419, 20, 23, 72, 75, 80—84, 97), Sterescu Anton (4380—83, 400, 08, 12, 16), Timoşenko Alexandru (4419, 20, 23, 35, 53, 61, 72, 75, 83, 84, 89, 96). Cl. XI. Soceanu Gheorghe (4377, 80—82, 419, 21, 22, 31, 51, 55).

Ş. m. 2 Tudor Vladimirescu. Cl. IX. Grigoriu Mihai (4380, 81, 84, 85, 91, 412, 15, 19, 20, 52, 53).

Ş. m. 3 Ion Neculce. Cl. VI. Nicolaescu M. Corneliu (E: 1583, 84, 87, 90, 94, 97, 600, 01, 07—10, 14). Cl. VII. Popescu C. Radu (E: 1579, 85, 88, 90, 92, 95, 600, 01, 04, 07, 10), Sucitu Alexandru (E: 1587, 88, 95, 97, 600, 01, 07—11, 13, 14). Cl. VIII. Haimovici Suzana (E: 1571, 73, 74, 77—79, 81, 87, 89, 96, 605, 10, 16). Cl. X. **Sucitu Gheorghe** (4354, 73, 76, 81, 82, 84, 89, 92, 98—400, 16, 19—22, 25, 27, 31, 32, 34—37, 39—45, 47, 48, 52, 53, 56, 67, 80, 83, 86, 87).

Ş. m. 4 Aurel Vlaicu. Cl. VIII. Baciu Valentin (E: 1600, 01, 04, 05, 07—11, 15), Boroneanţ Constantin (4381, 90, 416, 52, 75, 80, 81, E: 1575, 77, 81, 605, 10), Dumitrescu Carmen (5516, 52, 80, E: 1600, 01, 04, 05, 07, 08, 10, 11), Dumitrescu Cornel (E: 1555, 70, 83, 84, 86, 89, 91, 93), Georgescu Octavian (4381, 90, 416, 44, 47, 53, 75, 80, 81), Ionescu Olga (E: 1571, 74, 76, 78, 79, 81, 84, 91), Martin Maria (E: 1583, 84, 87, 89—93, 98), Oprescu I. Constantin (E: 1600, 05, 10, 13, 73, 82), Oroş Iustin (E: 1555, 59—61, 69—71, 81, 83, 84, 86, 87, 89, 91, 93, 98), Petrişor Teodor (E: 1577, 87, 89—91, 96, 98, 604, 10, 15, 16), Săcăliş Dănuţ (E: 1590, 99, 600, 04, 07—11, 13, 16), Trosca Adriana (4390, 416, 80, E: 1571, 76, 77, 81, 83, 87, 92, 610). Cl. IX. Martiş Gheorghe (4385, 91, 97, 98, 407, 34, 42—44, 56).

Ş. m. 6 Ilie Pintilie. Cl. VIII. Georgescu Sebastian (E: 1574, 77, 79, 84, 89, 91, 96, 600, 04, 10, 11, 13). Cl. XI. Buţă Apostol (4377, 81—83, 90, 96, 416, 40, 44, 72, 80).

Ş. m. 7 I. L. Caragiale. Cl. X. Popescu Daniela (4381, 82, 84, 96, 420, 23, 44, 52, 81, 83, 84, 90), Radian Thea (4380—82, 84, 91, 409, 20, 22, 31, 34, 43, 44, 47, 81, 83, 84, 96), Stan Ştefan (4381, 82, 85, 90, 91, 93, 400, 10, 11, 20, 27, 35, 40, 44, 50, 52, 53, 55, 65, 75, 81—84, 90, 96).

Ş. m. 8 Emil Racoviţă. Cl. VI. Ciobanu Doina (E: 1571—74, 79, 80, 83, 84, 87, 92, 94, 97), Cristoloveanu Liana (E: 1572—74, 79, 81, 84, 86, 87, 92, 96, 97, 610), Mecu Iolanda (E: 1571—74, 79, 81, 83, 84, 87, 92, 97, 600), Teodosiu Iosif (E: 1571—74, 79, 87, 600, 04, 08, 10), Toma Mihai (E: 1571—74, 79, 87, 600, 04, 08, 10). Cl. VII. Săvulescu Roxana (E: 1572, 74, 77, 79, 81, 84, 85, 89, 91, 96, 97). Cl. VIII. Busuioc Cătălina (E: 1571—74, 77—81, 98, 600, 10, 16), **Busuioc Mihaela** (E: 1571—74, 77—84, 86, 87, 89, 91—94, 96—600, 04, 05, 09, 11, 16), Busuioc Ştefania (E: 1572—74, 79, 80, 83, 84, 86, 92, 600, 10), Constantin Martiana (4390, 91, 416, E: 1572, 73, 79, 87, 89, 91, 94, 99, 610), Petroniu Doina (4416, E: 1571—74, 77—79, 81, 84, 86, 89, 90).

Ş. m. 10. Cl. VII. Kevic Ileana (E: 1572—74, 76, 79, 84, 86, 87, 600, 04, 08, 10, 14). Cl. VIII. Cristu Oana (4420, E: 1589, 91, 93, 96, 99, 603, 05, 09, 18), Ivan Florina (4475, E: 1574, 78, 79, 81, 91, 96, 99, 600, 04, 05, 08, 10, 11, 16—19, 23, 25, 27, 31), Drăgănescu Dan (4475, E: 1589, 91, 93, 96, 99, 603, 05, 09, 29). Cl. IX. Aronovici Jessy (4381, 82, 444, 52, 81, 83, 506, 09, 19), Bărbulescu Rodica (4380, 81, 87, 90, 97, 420, 52, 53, 81, 96), **Benderschi Boris** (4381—83, 85, 89—91, 93, 98—400, 05—07, 19—21, 31, 34, 36, 42—44, 48, 52—54, 56, 57, 65, 68, 75, 81, 83, 86, 90), Gherşanoc Paula (4381, 82, 91, 419, 44, 52, 53, 81, 83, 96, 506, 09, 19, 33), Kremer Paul (4381, 83, 85, 91, 400, 44, 52, 53, 68, 75, 81, 83), Marincovici Ruxandra (4380—82, 90, 97, 452, 53, 81, 90, 96), **Marinescu Emil** (4381, 82, 85, 89—91, 93, 98—400, 05—07, 19—21, 27, 31, 32, 34, 35, 41—44, 48, 52—54, 56,

65, 67, 68, 70, 75, 81, 83, 86, 90, 94, 509, 19), Mureşanu Mircea (4381, 82, 444, 52, 53, 81, 83, 96, 506, 19, 33), Negru Sanda (4380—82, 90, 97, 420, 52, 53, 81, 96), Panea Mihaela (4380—82, 84, 85, 91, 400, 19, 20, 44, 52, 75, 81, 505, 06, 09, 19, 33, 37), Pîrvulescu Luminiţa (4382, 84, 412, 53, 65, 75, 81, 83, 509, 19), Şandru Anca (4381, 82, 91, 412, 44, 52, 53, 75, 81, 83, 506, 09), Tulliu Mihaela (4380—82, 90, 97, 420, 52, 53, 81, 96). Cl. X. **Dumitrescu Emilia** (4381, 84, 88, 90, 91, 94, 96, 97, 400, 08, 12, 13, 16, 19, 20, 23, 29, 44, 47, 52, 53, 75, 81, 83, 84, 90, 99, 509, 10, 19, 22, 31, 33, 35—37, 39, 40, 43), **Georgescu Stelian** (4380—84, 88, 90, 91, 94, 96, 97, 400, 08, 12, 13, 16, 19, 20, 23, 29, 33, 37, 52, 53, 72, 75, 81, 83, 84, 90, 99, 506, 09, 10, 19, 33, 35, 39, 43, 52, P.). Lazăr Dan (4419, 20, 23, 29, 44, 47, 52, 64, 67—70, 72—76, 78, 80, 81, 83, 87—89, 94—97, 99, 504, 06, 09, 16, 17, 19, 20, 22, 23, 25, 26, 32, 33, 35, 42, 43), Pavel Eva (4420, 22, 23, 31, 34, 43, 44, 47, 52, 53, 75, 81, 83, 84, 90, 503, 04, 09, 10, 19, 27, 33, 37, 37, 43), Cl. XI. **Finţescu Elena** (4437, 61, 63, 67, 69, 72, 78, 80, 81, 82, 84, 87, 88, 90, 91, 93, 96, 97), **Teodorescu Catrinel** (4440, 60, 65, 67—69, 72, 73, 75, 78, 80—84, 88, 90, 93, 95, 96, 99, 500, 03—05, 07, 09, 10, 17, 19, 25, 27, 31, 33, 35—40, 43), Hoară Angel (4419—23, 27, 29, 31, 34, 37, 41, 42, 43, 44).

Ş. m. 11 Dimitrie Cantemir. Cl. VI. **Cristescu Eugenia** (E: 1590, 92, 94, 97, 600, 08, 10, 14, 17), Stănculescu Radu (E: 1556, 59—61, 63, 69, 70, 72—74, 79, 80), Ţopa Iulian (E: 1583, 84, 86, 88, 90, 95, 601, 07, 10, 13, 15, 20, 21, 28, 30). Cl. VII. Dăbuleanu Anca (E: 1571, 73, 74, 85, 87—89, 600, 09, 10), Munteanu Mihai (E: 1587, 89, 97, 600, 10, 16, 21, 22, 25, 26, 31). Cl. VIII. **Persache Octavian** (4390, 453, 70, 75, E: 1613, 71, 75, 82, 84, 86, 87, 89—91, 93—601, 03—11, 13—16), Rădulescu Şerban (E: 1600, 07, 08, 10, 11, 13, 21, 22, 25, 26, 31), Tonceanu Dan (E: 1571, 73, 74, 78, 79, 87, 88, 90, 91, 99, 600, 04, 09, 10, 16, 82, 84, 86, 93—98). Cl. IX. Agracostea Mihai (4381, 82, 85, 90, 91, 405, 20, 44, 52, 53, P), Dăbuleanu Alexandru (4381, 82, 90, 98—400, 07, 20, 21, 31, 34, 41, 44, 55, 67, 81, 83, 86, 96), Pantazi Emanuel (4381, 82, 85, 90, 91, 93, 98, 400, 05, 20, 33, 35, 44, 53, 75, 81, 83, 90, 96), Ursulescu Florin (4390, 405, 16, 75, 80, 81, 83, 90, 96). Cl. X. **Cristescu Dragoş** (4383, 86, 88, 90, 91, 94, 98, 416, 19, 20, 26), Popescu T. Corneliu (4419, 20, 23, 26, 29, 33, 44, 52, 53, 61, 73, 79, 81, 83, 96), Rădulescu I. Dan (4341, 42, 47, 51, 52, 62, 65, 67, 69, 71, 75). Cl. XI. **Isbăşoiu Eugen** (4380—82, 98, 99, 407, 19, 21, 22, 31, 34, 37, 43, 56, 67, 70, 81, 88, 95).

Ş. m. 12 Spiru Haret. Cl. VI. **Alecu Teodor** (E: 1573, 74, 79, 81, 83, 84, 91, 96, 97). Cl. VIII. **Cristescu Valentin** (E: 1571, 74, 75, 77, 78, 81, 87, 89, 91, 96), Dumitrescu Zamfir (4381, E: 1571, 75, 81, 87, 89, 91, 93, 605, 09), Hajos Ladislau (4390, 475, E: 1575—77, 81, 89, 91, 96, 605, 09). Cl. X. **Badea Mihai** (4342, 60, 62, 96, 411, 16, 20, 44, 52, 73, 80, 83, 96, 97), Varujan Zahregian (4381, 91, 97, 411, 18—20, 83, 96), Vodă Viorel (4391, 462, 68, 72, 73, 81—84, 96, 99, 506, 09, 31—33, 35, 38—40, 43, 62, P, N).

Ş. m. 13 Mihai Viteazu. Cl. VIII. **Necula P. Mihai** (4390, 98, 99, 431, 34, 53, 67, 75, 84, E: 1571—611, 13—16). Cl. IX. Berceanu Ştefan (4385, 90, 91, 93, 400, 05, 11, 12, 52, 81).

Ş. m. 16 George Coşbuc. Cl. VIII. **Anghel Mioara** (E: 1582—84, 96—98). Cl. IX. Morgenstern Schoel (4391, 407, 20, 21, 31, 34, 42, 44, 54, 56, 81), Moscovici Corneliu (4380—83, 91, 98, 99, 407, 20, 31, 34, 42, 44, 52, 53), Seifler Goldiţa (4349, 80, 98, 420, 41, 52, 53, 85, 96). Cl. XI. Deleanu Denise (4376, 77, 80, 82—85, 91, 96—99, 407, 09, 21, 22, 405, 15, 16, 17, 19, 20, 23).

Ş. m. 17 Matei Basarab. Cl. IX. Ştefănescu A. C. (4381, 86, 411, 15, 17, 19, 49, 81, 83, 84). Cl. XI. Popescu Ovidiu (4390, 91, 94, 96, 97, 410, 38, 40, 47, 53, 60, 62, 63, 72, 75).

Ş. m. 18 Mihail Eminescu. Cl. VIII. Enăceanu P. Dan (E: 1571—75, 77—601, 03—16). Cl. X. **Buiumovici Alexandru** (4376, 77, 79—85, 90, 91, 93, 94, 96, 97, 400, 05, 08, 10—13, 15, 18—20, 23—29, 38, 44, 47, 52, 53, 60).

Ş. m. 19 Ion Creangă. Cl. IX. Feran Monica (4381, 91, 400, 15, 53, 81). Cl. XI. Anghel Adrian (4377, 78, 80—84, 90, 91, 96, 412, 16), **Olteanu S. Victor** (4419—26, 29, 31, 34, 35, 38, 40, 42—44, 46, 47, 52, 53, 61—64, 66—72, 74, 75, 78—84, 86—90, 96, 97).

Ş. m. 20 Gheorghe Şincai. Cl. VIII. Calţaru N. (4382, 90, E: 1574, 79, 89, 91, 92, 600, 10). Cl. XI. Calţaru N. Ovidiu (4341, 42, 54, 60, 62, 75, 77, 80, 82, 88, 90, 405, 11, 16, 35, 40, 47, 52, 75, 80, 84, 96, P).

Ş. m. 22 Gheorghe Lazăr. Cl. IX. Iliescu Mihaela (4380—82, 84, 91, 453, 81, 83, 96, 509, 19, 36). Cl. XI. Florescu Dan (4380—83, 90, 94, 96, 405, 12, 16, 17), Mihăilescu I. Nicolae (4419, 20, 23, 38, 44, 52, 62, 72, 75, 80, 81, 83, 84, 96), Zamfirescu Tudor (4385, 90, 91, 93, 94, 96, 400, 04, 05, 08, P, N).

Ş. m. 26 Alexandru Ion Cuza. Cl. X. Bolocan C. Gabriel (4380—82, 84, 85, 90, 91, 93, 94, 96, 97, 400, 05, 08, 12, 13, 16, 18, 20, 23, 27, 33, 37—39, 52, 53, 55, 61, 65, 72—75, 79—84, 90, 97).

Ş. m. 27. Cl. VIII. Diaconescu Gh. Sorin (E: 1571, 75, 77, 78, 81, 89, 91, 93, 96, 99, 603, 05), Predoiu Gheorghe (4380—82, 420, 27, 44, 52, 81, 96).

Ş. m. 28 Dr. Petru Groza. Cl. VI. Ceauşescu Elena (E: 1574, 79, 84, 94, 97, 600, 04, 08, 10, 11). Cl. XI. Bucurescu Dorel (4419—23, 31, 34, 37, 42—44).

Ş. m. 32 Filimon Sîrbu. Cl. VII. Florea George (E: 1571—75, 77—98). Cl. X. Dumbravă Mircea (4351, 69, 71, 81, 82, 90, 91, 415, 52).

Ş. m. 34 C. A. Rosetti. Cl. VIII. Cernicica Petre (4390, E: 1573, 74, 77—79, 81, 87, 91).

Şc. de 7 ani nr. 24. Cl. VI. Stănescu T. Ion (E: 1573, 84, 87, 600, 01, 04, 06, 07, 10, 15).

Şc. de 7 ani nr. 26. Cl. VII. Nistor Olivia (E: 1571—74, 77—81, 89, 96).

Şc. de 7 ani nr. 39 Colentina. Cl. VII. Dulhan Nela (4420, 23, E: 1573, 80, 83, 87, 89, 90, 95, 96).

Şc. de 7 ani nr. 49. Cl. VII. Arvunescu Julietta (E: 1573, 74, 77—79, 81, 82, 84, 87, 89, 91, 94).

Şc. de 7 ani nr. 56. Cl. VI. Marcusohn Beri (E: 1573, 74, 79, 81, 86, 93, 95, 97, 600, 04, 07—10, 13, 15).

Şc. de 7 ani nr. 144. Cl. VII. Popescu Mihaela (E: 1571, 73, 74, 78, 79, 83, 87, 600, 05, 10).

Şc. de 7 ani Ghencea. Cl. VII. Grigore Mugurel (E: 1555, 60, 61, 70, 74, 78, 79, 84, 87, 88, 94), Mănică Ilie (E: 1555, 59—61, 70, 73, 74, 78, 79, 84, 87, 88, 94).

Şc. de 7 ani nr. 152. Cl. VII. Clipea Mioara (E: 1573, 74, 78, 79, 81, 84, 600, 05, 09, 10).

Şc. de 7 ani nr. 173. Cl. VII. Ghiţescu Lucian (E: 1571, 87, 91, 93, 96, 600, 01, 04, 07, 10, 11, 15), Stoica Alexandru (4256, 365, E: 1528—32, 37—50, 52—55, 57, 59, 60, 62, 70—75, 77—79, 81, 83, 85, 87—91, 93, 95—98, 602, 04, 07).

BUZĂU. Ş. m. 1 B. P. Hajdeu. Cl. VII. Pălţănea Cornel (E: 1573, 75—78, 89, 91, 92, 95, 616). Cl. IX. Ilie M. (4391, 93, 406, 35, 40, 53, 75, 79, 96), Ionescu V. Gregorian (4398, 99, 443, 52, 53, 75, 81, 96, 509), Marcoci Doina (4333, 44, 81, 85, 91). Cl. X. Udrescu O. Florin (4381—83, 90, 91, 416, 47, 80, 81, 83). Cl. XI. Somnea Dan (4380—83, 90, 96, 419, 63, 72, 80, 84), Stoicescu T. Ion (4343, 48, 51, 54, 55, 60, 65, 67, 69, 77, 80—83, 88, 90, 91, 96, 98—400, 12, 19—22, 25, 27, 29, 31, 34, 42, 43, 52, 53, 61, 63, 68, 80, 81, 83, 84).

Şc. m. 2 Mihail Eminescu. Cl. VII. Cajanu A. Costin (E: 1571, 73, 74, 77, 78, 79, 600, 01, 04, 05, 10, 16). Cl. IX. Bocioacă Radu (4377, 80—84, 420). Cl. X. Mihăilescu Doru (P), Popa Mioara (4380—82, 84, 96, 420, 23). Cl. XI. Borcea Lucia (4380—82, 444, 52, 63, 72, 75, 81, 83, 84, 86), Ciocîrlan Smaranda (4377, 80—82, 419, 44, 63, 72, 75, 81, 83, 84, 96), Ivănescu Eugenia (4377, 80—82, 419, 26, 44, 63, 72, 75, 81, 83, 84, 96), Niculescu L. Carmen (4377, 80—82, 419, 44, 63, 72, 75, 81, 83, 84, 96), Uzum Ana (4377, 80—82, 96, 419, 20, 23, 62, 72, 75), Văceanu Florica (4380, 82, 84, 96, 417, 20, 23, 72, 95), Zamfir Magdalena (4380—82, 96, 417, 20, 23, 31, 34, 72, 95).

Şc. pedagogică mixtă. Anul I. Cristudor N. Elena (E: 1584, 89, 90, 94, 600, 04, 05, 08, 09—11, 13, 16), Manole I. Maria (4475, 81, E: 1599, 600, 03—05, 09, 10, 14, 16, 78).

Şc. de 7 ani. Cl. V. Iordache Gh. (E: 1583, 84, 87, 93, 600, 04, 08, 10, 11, 13). Cl. VI. Ionescu V. Constanţa (E: 1555, 59, 60, 70, 73, 74, 78, 79, 81, 91, 96, 600, 04).

BUZIAŞ (Banat). Cl. V. Rotko Ioan (E: 1574, 79, 94, 95, 97, 600, 01, 04, 08, 10, 13). Cl. VI. Budulan Virgil (E: 1573, 79, 80, 84, 88, 600, 04, 10, 13, 14), Drăgănescu Mărioara (E: 1583, 95, 97, 604, 08, 09, 11—14), Galescu Ion (E: 1573, 74, 79, 80, 83, 94, 95, 600, 04, 08—14), Opriş Viorel (E: 1573, 74, 79, 94, 95, 97, 600, 01, 04, 08, 10, 13), Prodan Aurelian (E: 1573, 74, 94, 95, 97, 600, 01, 04, 13), Uneric Geta (E: 1574, 79, 80, 604, 08, 09, 11—14). Cl. VIII. Jivan Dorel (4390, 98, 99, 407, 75, E: 1606—16), Popescu Viorel (4398, E: 1571, 73, 74, 77—79, 81, 600, 10), Ungureanu Ion (4398, 407, E: 1574, 77, 79—81, 84, 85, 87, 89, 97, 605, 10, 11). Cl. IX. Megerle Ecaterina (4380—82, 84, 475, 96). Cl. X. Doboşan Ioan (4380—84, 475, 96). Cl. XI. Pisat Ana (4380—84, 96, 98, 99, 431, 34).

CALAFAT (Oltenia). Ş. m. Cl. VIII. Diaconescu Irina (E: 1571, 73, 74, 77, 79, 87, 90, 92, 95, 98, 600, 04, 07, 08, 10, 11, 16), Diaconescu Gheorghe (E: 1571, 74, 77, 79, 84, 90, 95, 97, 98, 600, 04, 06—11, 16).

CĂLĂRAŞI (Bucureşti). Cl. VIII. Căţeluş Victoria (4433, 75, E: 1594, 600, 04, 05, 09, 10, 16), Dinescu Lucia (E: 1587, 94, 97, 98, 600, 04, 08, 10, 11, 13, 16), Manciu Natalia (E: 1573—75, 79, 83, 94—96, 99, 600, 05, 08, 10), Petre Violeta (4475, E: 1593, 94, 99, 600, 04, 05, 10, 11, 16), Stănescu Liliana (E: 1572, 78, 81, 95, 600, 05, 08). Cl. X. Costea C. George (4381,

BIBLIOTECA JUDEŢEANĂ MUSCEL

84, 90, 91, 96, 416, 44, 72, 75, 80), Gacichevici V. Constantin (4380—83, 405, 20, 52, 75, 80, 81), Noica I. Gh. (4380—84, 91, 94, 96, 416, 44, 75, 80), Privodă Ion (4380—84, 90, 91, 96, 416, 44, 72, 75, 80).

CARACAL (Oltenia). Cl. X. Rădulescu Tudor (4380, 82, 83, 98, 99, 412, 22, 31, 32, 34, 82). Cl. XI. Rusănescu Constantin (4371, 77, 80—82, 84, 819, 20, 27, 63).

CARANSEBEȘ (Banat). Cl. X. Crețu Adriana (4365, 69, 81, 82).

CAREI (Maramureș). Cl. VIII. Neuman Alexandru (E: 1574, 76, 78, 80, 90, 94, 604, 07, 10, 15).

CIMPIA TURZII (Cluj). Cl. X. Nemeș Mihai (4344, 56, 81, 82, 84, 90, 91, 470).

CIMPINA (Ploiești). Ș. m. 1 „Nicolae Grigorescu". Cl. VIII. Brezeanu Semerad (E: 1587, 600—02, 04, 07, 08, 10, 11, 15), Dima T. Constantin (E: 1583, 84, 94, 600, 01, 04, 07, 09—14), Miu I. Ion (E: 1586, 89, 96, 600, 04, 05, 07, 08, 10, 13, 16), Moldoveanu Grigore (E: 1589, 91, 600, 04, 07, 08, 10, 13, 15, 16), Nedelcu Gh. Ion (E: 1507, 71, 73, 74, 78, 83, 86, 87, 91, 94—96, 600, 04, 05, 08, 10, 13, 16), Rusu Marian (E: 1571, 83, 86, 90, 95, 97, 98, 600, 10, 15), Svirjinski Eugen (E: 1589, 91, 600, 04, 08, 10, 13, 15, 16), Toader Stelian (E: 1589, 91, 96, 600, 01, 04, 08, 09, 10, 13, 15, 16). Cl. IX. Anonim (4380—82, 90, 91, 419, 20, 35, 53, 75, 81), Cojocaru Eva (4380—82, 90, 91, 419, 20, 27, 53, 81, 83), Mirel Gh. Stela (4380—82, 90, 91, 419, 20, 35, 53, 75, 81). Cl. X. Șerbănescu Lucian (4369, 80—82, 90, 91, 96, 419, 20, 23, 44, 81, 83, 84).

Ș. m. 2 „Ilie Pintilie". Cl. IX. Gîrboveanu Gh. Adriana (4380, 82, 85, 90, 435, 40, 81, 96). Cl. X. Dinu V. Gh. (4380—84, 415, 17—20, 23, 29, 44, 52, 53, 61, 74, 81, 91, 97).

Școala de 7 ani Cornu. Cl. VII. Dinu V. Sofia (E: 1571, 74, 79, 87, 89, 93, 96, 99, 600, 10).

Școala de 7 ani Cricov. Cl. VI. Matei C. Ion (4415, E: 1571, 72, 82, 83, 86, 89, 90, 92—94, 600, 08, 10).

CIMPULUNG MOLDOVENESC (Suceava). Ș. m. Dragoș Vodă. Cl. VIII. Popa Gh. (E: 1574, 79, 89, 91, 96, 600, 04, 05, 10, 16). Cl. X. Bruja Aurora (4380—84, 91, 94, 96, 408, 11), Dimov Victor (4380—84, 94, 96, 411), Dinică Maria (4380—84, 91, 96, 408), Mihaiuc Oltea (4381—84, 91, 96), Platon Mihaela (4380—84, 91, 96, 98, 99, 407—09), Rosner Igo (4380—84, 91, 408), Știul Alex. (4377, 81—84, 90, 91, 96, 404, 11, 12, 15, 16, 18).

Școala de 7 ani. Beșliu Paula (E: 1573, 75, 78, 84, 87, 93, 97, 607, 09, 10, 14).

CONCURS PENTRU ELABORAREA UNOR PROBLEME LEGATE DE PRACTICĂ

Gazeta matematică și fizică seria B organizează un concurs pentru grupuri de probleme cu un conținut care să reflecte legătura matematicii și fizicii cu practica. În acest scop, participanții la concurs vor trimite pînă la 1.X.1961 un număr de cel puțin 15 probleme împreună cu soluțiile lor într-un plic cu un motto, iar în interiorul plicului se va pune un altul mai mic, sigilat pe care se scrie același motto și care va conține numele și adresa autorului sau a autorilor.

Nu vor fi luate în considerare decît acele probleme care nu au apărut în alte cărți și reviste.

În funcție de calitatea și numărul problemelor se vor acorda premii în bani și se va asigura publicarea lor în periodicile Societății de științe matematice și fizice din R.P.R.

Pe plicurile trimise pe adresa din str. Academiei nr. 14 — București, se va face mențiunea „Pentru concursul de probleme practice".

LA ÎNTRECEREA ORGANIZATĂ DE G.M.F.-B pe anul 1961 între școlile medii

Se mai primesc înscrieri pînă la 30 iunie 1961, însoțite de fișa respectivă, conform regulamentului publicat în G.M.F.-B nr. 2, pag. 97 din februarie 1961.

BIBLIOTECA SOCIETĂȚII DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE DIN R.P.R.

1.	E. RUSU	Bazele teoriei numerelor.
2.	A. I. MARKUȘEVICI	Șiruri recurente.
3.	N. N. VOROBIEV	Numerele lui Fibonacci.
4.	P. S. ALEXANDROV	Introducere în teoria grupurilor.
5.	I. S. SOMINSKI	Metoda inducției matematice.
6.	GH. MIHOC	Elemente de calculul probabilităților.
7.	H. IONESCU	Calcule numerice.
8.	A. I. MARKUȘEVICI	Arii și logaritmi.
9.	A. I. GHELFOND	Rezolvarea ecuațiilor în numere întregi.
10.	O. SACTER	Despre conice și alte curbe.
11.	ION IONESCU	Maxime și minime geometrice.
12.	F. I. ZIGHEL	Cometele.
13.	S. SKLOVSKI	Radioastronomia.
14.	V. ATANASIU	Structura materiei.
15.	V. V. SARONOV	Soarele și observarea lui.
16.	O. KREINDLER	Elemente de calcul vectorial.
17.	B. B. KUDRIAVȚEV	Experiențe simple cu ultrasunete.
18.	M. V. PENTKOVSKI	Nomograme.
19.	A. KAHANE	Elemente din teoria congruențelor de drepte.
20.	GH. ȚIȚEICA	Culegere de probleme de geometrie, (revăzută și completată de G. D. SIMIONESCU).
21.	A. HALANAY	Introducere în teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale.
22.	N. STĂNESCU	Electronul.
23.	V. SERGIESCU	Introducere în fizica solidului.
24.	G. N. BERMAN	Cicloida.
25.	C. BORȘ	Noțiuni de geometrie proiectivă.
26.	AL. SANIELEVICI	Introducere în radioactivitate.
27.	M. HEROVANU	Introducere în fizica atmosferei.
28.	C. G. BEDREAG	Bibliografia fizicii romîne.
29.	I. S. DUBNOV	Erori în demonstrațiile geometrice.
31.	C. POPOVICI	Stelele, date fizice, structura internă, originea și evoluția lor.
32.	C. DRIMBA	Elemente de mecanică cerească.
33.	C. IONESCU-BUJOR	Elemente de transformări geometrice (I).
34.	NICOLAE MILEA	Elemente de geomagnetism.
35.	GH. A. CHIȚEI	Metode pentru rezolvarea problemelor de aritmetică.
36.	G. PETRESCU	Cutremure de pămînt.
37.	C. IONESCU-BUJOR	Elemente de transformări geometrice (II).
38.	O. SACTER	Olimpiade matematice.
39.	A. I. MARKUȘEVICI	Numere complexe și reprezentări conforme.
40.	I. S. GRADSTEIN	Teorema directă și reciprocă.
41.	A. I. HINCIN	Fracții continue.
42.	V. A. USPENSKI	Unele aplicații ale mecanicii în matematică.
43.	V. G. BOLTEANSKI	Ce este derivarea?
44.	G. N. BERMAN	Despre numere și studiul numerelor.

Litografia și Tipografia Învățămîntului. — c. 801.

Lei 1,50

E 1426

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE
DIN R. P. R.

GAZETA MATEMATICĂ ȘI FIZICĂ

(SERIA B)

Anul XII, iunie 1961

6

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

(SERIA B)

Anul XII, nr. 6 iunie 1961

SUMARUL

	Pag.
1. Facultatea de matematică şi fizică a Universităţii C. I. Parhon de Prof. dr. N. Teodorescu	321
2. Facultatea de matematică şi fizică a Universităţii Al. I. Cuza din Iaşi de Prof. dr. Gh. Gheorghiev	327
3. Calculul cu diferenţe de O. Sacter	330
4. Forţa Coriolis de Ion Cristescu	337
5. Generalizarea unei reguli de divizibilitate de D. M. Bătineţu	341
6. Cîteva relaţii în legătură cu ceviene izogonale de Laurenţiu Lupaş	345
7. Circuitul oscilant de Dumitrescu Vladimir şi Fezi Adrian	348
8. Rezultatele Olimpiadei de matematică şi fizică 1961 — etapa finală	352
9. Probleme rezolvate (4127; 4165; 4247; 4249; 4256; 4268; 4270; 4273; 4277; 4280; 4285; 4286; 4287; 4296)	354
10. Chestiuni de examen (4716—4735)	365
11. Probleme propuse (4736—4771)	369
12. Exerciţii şi probleme propuse pentru şcoala de 7 ani (E: 1688 — E: 1702)	375
13. Rubrica rezolvitorilor de probleme	377

ANUL XII **6** IUNIE

COMITETUL DE REDACŢIE

Ailincăi M., profesoară; *Atanasiu V.*, lector, redactor pentru fizică; *Boiangiu D.*, lector; *Ionescu-Bujor C.*, prof. univ.; *Ionescu-Ţiu C.*, profesor, redactor pentru matematică; *Manolescu St.*, profesoară; *Muşat I.*, profesor; *Petrovanu A.*, profesor; *Sacter O.*, conf. univ., redactor şef; *Simionescu D. Gh.*, conf. univ.; *Csiki Zoltan*, asistent.

REDACŢIA: Str. Academiei, 14 — Tel. 14.46.53 — Bucureşti I

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar putea interesa redacţia noastră se vor trimite pe adresa de mai sus.

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ
(SERIA B)
PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET
Anul XII, nr. 6 iunie 1961

FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ A UNIVERSITĂŢII „C. I. PARHON"

Prof. Dr. N. TEODORESCU
Membru corespondent al Academiei R.P.R.
Decanul Facultăţii de Matematică şi Fizică
a Universităţii „C. I. Parhon"

Secolul XX, secolul comunismului, al cuceririi atomului şi spaţiului cosmic cunoaşte o furtunoasă dezvoltare a matematicii şi fizicii. Cele mai multe dintre realizările cu care omenirea se mîndreşte în prezent, se datoresc progresului obţinut în aceste două domenii ale ştiinţei.

Marile succese ale fizicii şi matematicii sovietice au un rol hotărîtor în victoriile repurtate în domeniul cosmonauticii şi utilizării paşnice a energiei atomice, ca şi în accelerarea procesului de automatizare a producţiei prin utilizarea largă a maşinilor electronice de calcul.

Mari perspective pentru progresul matematicii şi fizicii şi pentru introducerea rapidă a rezultatelor obţinute de aceste ştiinţe în economia naţională s-au deschis şi în ţara noastră. Matematicii şi fizicii romîneşti le revin sarcini de mare însemnătate. Documentele Congresului al III-lea al Partidului Muncitoresc Romîn trasează fizicienilor sarcina de a dezvolta lucrări în domeniul utilizării izotopilor radioactivi în industrie, al aplicaţiilor semiconductorilor etc., iar matematicienilor sarcina dezvoltării metodelor de calcul numeric, grafic, statistic, a introducerii maşinilor electronice de calcul în diferitele compartimente ale economiei naţionale etc. Pentru a atinge aceste obiective trebuie lărgită cercetarea în domeniul matematicii şi fizicii, trebuie pregătite cît mai multe cadre de specialitate.

Rolul principal în formarea tinerelor cadre de matematicieni şi fizicieni revine facultăţilor de matematică şi fizică şi în primul rînd, Facultăţii de matematică şi fizică a Universităţii „C. I. Parhon".

Această Facultate a fost înfiinţată în anul 1948, ca urmare a Reformei învăţămîntului înfăptuită de Partidul Muncitoresc Romîn.

Pînă atunci, matematica şi fizica se predau în cadrul facultăţii de ştiinţe care fusese înfiinţată odată cu Universitatea din Bucureşti, prin decretul dat de *Alexandru Ion Cuza* la 19 iulie 1864. Numărul catedrelor acestei facultăţi era de 12, iar printre profesorii care, adînc pătrunşi de necesitatea îmbunătăţirii condiţiilor de viaţă ale maselor largi s-au străduit să dea cursurilor şi întregii lor activităţi ştiinţifice un conţinut de unitate între teorie şi practică sînt de amintit : *Spiru Haret, D. Negreanu, Em. Bacaloglu, D. Emanuel, G. Ţiţeica, Tr. Lalescu, Gh. Hurmuzescu, I. Miculescu, D. Pompeiu, S. Stoilov*. Ei au adus importante contribuţii la progresul

matematicii și fizicii, lucrările lor cunoscînd o justificată prețuire și peste hotare.

Prin Reforma învățămîntului s-au pus bazele dezvoltării învățămîntului matematicii și fizicii în Republica Populară Romînă pentru formarea cadrelor atît de necesare învățămîntului și cercetării științifice.

În perioada scursă de la înființare, Facultatea de matematică și fizică a cunoscut o rapidă dezvoltare. Numărul secțiilor și laboratoarelor a crescut neîncetat, ca și cel al studenților care este de 1600 în anul școlar 1960—61. În același timp, numărul cadrelor didactice, grupate în 18 catedre, s-a mărit necontenit ajungînd în prezent, la aproximativ 180.

Studenții Facultății provin din clasa muncitoare, țărănimea muncitoare și intelectualitatea legată de popor. Facultatea de matematică și fizică le asigură pregătirea necesară pentru următoarele domenii:

1. predarea matematicii și fizicii în școala medie,
2. activitatea didactică și științifică în învățămîntul superior,
3. munca de cercetare în institutele științifice și tehnice,
4. munca de cercetare în producție, în laboratoarele și secțiile productive ale întreprinderilor industriale.

Cadrele didactice ale Facultății, între care se numără eminenți oameni de știință din țara noastră cunoscuți prin aportul lor la progresul științei, ca acad. *G. Demetrescu, E. Bădărău, H. Hulubei, Gh. Vrănceanu, M. Nicolescu, Gr. Moisil, Ș. Țițeica* etc. contribuie prin calitatea cursurilor și a activității în seminarii la asigurarea unei pregătiri de înaltă calitate a studenților.

Programele secțiilor Facultății cuprind pe lîngă cursurile fundamentale, un mare număr de cursuri speciale care tratează cele mai actuale probleme ale matematicii, mecanicii, fizicii și astronomiei.

Facultatea de matematică și fizică nu pregătește însă numai buni specialiști în matematică și fizică. Ea are și rolul de a educa buni cetățeni, oameni cu o pregătire multilaterală înarmați cu ideologia clasei muncitoare — marxism-leninismul — militanți activi nu numai pe tărîmul științei, dar și al vieții sociale. În acest scop, se dă o mare importanță studiului științelor sociale, socialismului științific și materialismului dialectic și istoric.

STRUCTURA FACULTĂȚII

Facultatea de matematică și fizică a Universității „C. I. Parhon" din București are următoarele secții: matematică, mecanică, astronomie, fizică generală, fizică nucleară, matematică — secundar fizică, mașini de calcul — secții care vor fi prezentate în linii generale, în cele ce urmează.

Durata studiilor este de 5 ani. Fiecare an de studii este împărțit în două semestre (octombrie — ianuarie, februarie — iunie). La sfîrșitul fiecărui semestru este o sesiune de examene și colocvii.

Formele principale de desfășurare a învățămîntului sînt: cursuri, seminarii, lucrări de laborator. Studenții sînt împărțiți în grupe de cîte 20—25 care se mențin pe toată durata facultății.

După terminarea studiilor absolvenții susțin examenul de stat, care constă dintr-o lucrare de diplomă, probe orale de specialitate și socialism

științific. Pentru alcătuirea lucrării de diplomă este afectat ultimul semestru din anul V.

Structura secțiilor Facultății de matematică și fizică din București este următoarea :

1. Secția matematică

Studenții Facultății optează pentru această secție odată cu intrarea lor în Facultate, avînd cursuri și seminarii separat de celelalte secții, încă din anul I de studii.

În primii doi ani se studiază calculul diferențial și integral, algebră, geometrie analitică, sintetică și proiectivă, ecuații diferențiale etc. De asemenea, pentru pregătirea multilaterală și completă a studenților se studiază socialismul științific, precum și o limbă străină, la alegere.

În ceilalți trei ani de studii se prezintă cursurile de teoria funcțiilor de variabilă reală și complexă, geometrie diferențială, algebră superioară, ecuațiile fizicii matematice, mecanică rațională etc. Pe lîngă acestea studenții urmează și un curs de fizică generală.

Începînd cu al doilea semestru al anului IV și continuînd pe primul semestru al anului V de studii, studenții își aleg un număr de 3 cursuri speciale din aproximativ 20 de cursuri la care se prezintă cele mai recente probleme și capitole din domeniul matematicii.

De asemenea, se predau unele cursuri în care se arată aplicațiile multiple ale matematicii în tehnică și industrie. Astfel, studenții fac cunoștință cu problemele în care matematica trebuie să-și dea aportul la folosirea bogățiilor forțelor naturii în interesul omului.

Directivele Congresului al III-lea al P.M.R. au arătat rolul deosebit pe care-l va juca matematica în procesul de desăvîrșire a construcției socialiste în țara noastră ; în probleme de automatizare și mecanizare, în probleme de telefonie, mașini și rețele electrice, în probleme de metalurgie, de control a producției etc.

Studenții își conturează precis legătura strînsă între teorie și practică, care de altfel constituie o caracteristică principală a învățămîntului nostru actual.

Absolvenții secției de matematică au în fața lor domenii de activitate deosebite. Astfel, ei pot deveni cadre didactice pentru învățămîntul superior și mediu sau cercetători în Institutul de matematică al Academiei R.P.R., precum și cercetători sau specialiști în institutele departamentale.

2. Secția mecanică

Facultatea posedă o secție de specializare în mecanică (singura din țară) unde, după 3 ani de învățămînt general matematic comun cu secția matematică, în anii IV și V se predau cursuri din domeniile cele mai importante ale mecanicii.

Cursurile acestei secții sînt orientate pe de o parte, spre cercetarea proprietăților mediilor fluide (lichide și gaze), pe de altă parte a mediilor solide sub acțiunea forțelor exterioare. De asemenea se predau cursuri legate de programul cursului general de mecanică rațională (puncte materiale, sisteme de puncte, corpuri rigide). În cadrul acestei secții cursurile de specialitate generale sînt obligatorii pentru toți studenții. Un curs de bază este mecanica fluidelor, cuprinzînd studiul matematic al mișcărilor corpurilor lichide și gazoase, studiu care constituie baza teoretică a proiectării unora din cele mai importante mijloace de transport, a unor aspecte esențiale ale construcțiilor hidrotehnice.

În strînsă legătură cu mecanica fluidelor se predau cursurile de hidraulică, orientate spre anumite aplicații inginerești ale teoriei generale — și de hidrogazodinamică subterană, cu importante aplicații în problema infiltrațiilor de apă sub construcțiile hidrotehnice, în forajul petrolifer etc.

Studiului corpului solid deformabil îi sînt consacrate cursurile de teoria elasticității, teoria plasticității și rezistența materialelor — care cercetează sub diferite aspecte felul în care corpurile solide se deformează sub acțiunea forțelor aplicate asupra lor, rezistă solicitării exterioare sau se distrug sub efectul acestor solicitări.

Pe lîngă aceste cursuri generale, la secția de mecanică se predau și cursuri speciale, dintre care fiecare student trebuie să-și aleagă 2 pentru a da examen. Se predau astfel, cursuri legate de mecanica generală și cursuri consacrate diferitelor aspecte moderne ale mecanicii fluidelor și a corpului solid deformabil. Toate aceste probleme sînt studiate din punct de vedere matematic. În felul acesta disciplinele studiate în cadrul secției de mecanică prezintă atît interes practic, cît și teoretic.

În fața absolvenților secției de mecanică se deschid variate și interesante perspective de activitate după terminarea studenției.

Astfel, în cadrul învățămîntului superior, al institutelor de cercetări în domeniul mecanicii, atît ale Academiei R.P.R. cît și ale departamentelor, ale marilor unități industriale, ale laboratoarelor de încercări de materiale etc. își vor găsi utilizarea un mare număr de matematicieni, cu pregătire specială în direcția mecanicii.

3. Secția astronomie

Secția de astronomie are scopul de a oferi tinerilor studenți posibilitatea unei specializări mai profunde, în domeniul astronomiei și seismologiei. După 3 ani de învățămînt general matematic și fizic în secția matematică, în anii IV și V studenții pot urma la alegere, cursurile uneia din cele 2 subgrupe de specializare: astronomie sau seismologie.

La grupa de specializare în astronomie programul de învățămînt cuprinde cursurile de Astronomie fundamentală. Instrumente de observație și prelucrarea matematică a observațiilor, Dinamica stelară, Astronomie fizică și stelară, Mecanică cerească, Calculul orbitelor, Geodezie și Gravimetrie. La grupa de specializare în seismologie, în afară de cursurile de Astronomie fundamentală, Instrumente, Geodezie și Gravimetrie, care sînt frecventate în comun de toți studenții secției, sînt programate cursuri de seismologie, seismometrie, magnetism terestru etc.

Studenții au la dispoziție pentru studiu și practică, unele din instrumentele Observatorului și Biblioteca Observatorului, bine dotată și în continuă îmbogățire cu publicații și reviste de specialitate din toată lumea.

Conținutul cursurilor și lucrărilor Secției de Astronomie este orientat în direcția studiului și cercetării celor mai noi probleme și descoperiri științifice și tehnice moderne în domeniul Astronomiei, Mecanicii cerești, Astrofizicii, Astronomiei stelare, Cosmogoniei, Seismologiei.

Studenții absolvenți ai acestei secții au posibilitatea să efectueze, pentru examenul de stat, lucrări de diplomă cu teme variate, interesante și de mare actualitate.

Secția de Astronomie oferă posibilitatea creșterii cadrelor tinere necesare ocupării posturilor de cercetători și calculatori în observatoarele noastre astronomice, seismologi, cadre pentru învățămîntul superior și mediu etc.

4. Secția fizică

În primii 3 ani de studii studenții acestei secții își însușesc cunoștințele fundamentale de matematică și fizică ce le oferă atît posibilitatea unei orientări generale în fizică, cît și baza pentru specializarea din ultimi doi ani.

Cursurile generale cuprind capitole de fizică experimentală ca: mecanica, căldura, electricitatea, optica, fizica atomică și nucleară și cele de fizică teoretică cum sînt fizica statistică și termodinamica, electrodinamica și mecanica cuantică. La acestea se adaugă cursurile și bazele electrotehnicii și radiotehnicii, de spectroscopie și descărcări în gaze.

Lucrările de laborator, care însoțesc cursurile experimentale, contribuie la înțelegerea mai bună a fenomenelor fizice și la formarea deprinderii cu munca experimentală, atît de necesare în pregătirea unui fizician. De asemenea, prin practica de atelier studenții capătă deprinderi de lucru specifice executării diferitelor piese de laborator.

În anii IV și V studentul își mai poate alege și cîte două cursuri speciale, conform înclinațiilor sale, care se referă la domenii mai restrînse ale fizicii, dar de actualitate și de mare importanță științifică și practică, cum sînt de exemplu: fizica radiațiilor, fizica solidului, semiconductori, raze X, optica electronică, magnetism, măsurători electrice, tuburi electronice.

În tematica lucrărilor de diplomă intră probleme din noile domenii de cercetare apărute în fizică, dînd posibilitatea studenților ca în cursul lucrului să-și lărgească mult cunoștințele de specialitate și să-și manifeste priceperea și inițiativa prin efectuarea unor lucrări experimentale sau teoretice cu caracter de originalitate.

După terminarea facultății, pentru absolvenții fizicieni se deschide un larg cîmp de activitate fie în învățămînt, fie în munca de cercetare. Cercetarea științifică în domeniul fizicii se poate desfășura în institutele de fizică ale Academiei R.P.R., care au luat naștere și s-au dezvoltat rapid în anii regimului democrat-popular sau, într-o serie de institute departamentale și în laboratoare de uzină, în care cercetarea tehnică se împletește strîns cu cea fizică.

5. Secția fizică nucleară

Grija partidului pentru ridicarea științei și tehnicii romînești la nivelul mondial a dus la crearea unei baze de cercetări nucleare în țara noastră și a unei rețele de institute pentru aplicarea izotopilor radioactivi. Creșterea de cadre pentru acest domeniu a determinat înființarea unei secții de fizică nucleară la Facultatea noastră. Programa ei analitică întocmită pe doi ani, orientează prin conținutul ei, pe student, în domeniul teoretic al fizicii nucleului și al aplicării izotopilor radioactivi. Specializarea în acest domeniu asigură absolventului posibilitatea de a deveni cercetător științific sau specialist izotopist în industrie.

Procesul de specializare începe în anul IV, studenții avînd la bază cunoașterea capitolelor fundamentale de fizică. Programa cuprinde cursuri generale obligatorii: fizica nucleului, mecanica cuantică, tehnici experimentale în fizica nucleară, radioactivitatea — care sînt completate în anul V prin cursul de teoria nucleului atomic.

O mare importanță se dă tehnicii de măsuri radiometrice și protecției împotriva radiațiilor pentru care a fost destinat cursul general de metrologia radiațiilor.

A doua parte a programei o constituie cursurile și laboratoarele speciale ce cuprind 6 discipline din care studentul va trebui să-și aleagă 4.

Pentru lucrările practice sînt destinate unele din cele mai moderne laboratoare de izotopi din țară; de asemenea, studenții au posibilitatea de a efectua lucrări speciale la reactorul nuclear și ciclotronul IFA. Încheierea procesului de specializare se face cu prezentarea lucrării de diplomă, de cele mai multe ori legată de munca experimentală. Un ajutor important la realizarea lucrărilor de diplomă este dat de Institutul de Fizică Atomică al Academiei R.P.R. care pune la dispoziție aparatura și documentația sa.

În privința perspectivelor, absolvenților acestei secții, cea mai mare parte dintre ei sînt repartizați la I.F.A. sau în departamentele de cercetare cu izotopi. Este cazul să amintim industria petroliferă, clinicile medicale și centrele de cercetări agronomice, ca unități care absorb cu precădere, fizicieni nucleariști.

6. Secția matematică — secundar fizică

În primii 3 ani de studii această secție are aproape profilul secției de matematică, predîndu-se cursuri de: calcul diferențial și integral, algebră, geometrie analitică, sintetică, proiectivă și diferențială, teoria funcțiilor de variabilă reală și complexă, ecuații diferențiale, mecanică rațională, astronomie etc. În plus, la această secție se predau numeroase cursuri de fizică, căldură, optică și acustică, fizică atomică, fizică teoretică. De asemenea, pentru pregătirea completă a studenților se studiază socialismul științific, materialismul dialectic și istoric, precum și o limbă străină, la alegere.

Toate acestea fac ca studenții secției să aibă o pregătire temeinică de matematică și fizică, avînd posibilitatea deosebită de a îmbina cunoștințele celor două discipline.

În ultimii 2 ani de studii studenții optează pentru anumite cursuri speciale atît de matematică, cît și de fizică. Absolvenții acestei secții au, îndeosebi, menirea să devină profesori de matematică-fizică în învățămîntul mediu, cu posibilitatea de a se specializa în matematică sau fizică.

7. Secția mașini de calcul

După 3 ani de învățămînt comun cu secția de matematică, studenții pot urma specializarea în cadrul secției de mașini de calcul în anii IV și V. Programa analitică a acestei secții este axată pe specializarea în două direcții: mașini de calcul, probabilități și statistică matematică. La sfîrșitul anului IV sînt prevăzute 3 săptămîni de practică la mașina de calcul de la I.F.A. și 3 săptămîni de practică la Direcția centrală de statistică. Un absolvent al acestei secții este pregătit pentru a putea lucra fie la elaborarea programelor pentru mașinile de calcul, fie la aplicarea teoriei probabilităților și a statisticii matematice într-un domeniu oarecare al activității practice.

O caracteristică a materiilor predate în această secție este noutatea lor, ele constituind capitole încă neîncheiate ale științei moderne, de mare interes pe plan mondial, atît din punct de vedere teoretic, cît și aplicativ.

În ce privește perspectiva după terminarea facultății, absolvenții secției mașini de calcul pot să devină cercetători în institutele de cercetări ale Academiei R.P.R. în secțiile respective, cadre didactice în învățămîntul superior de toate tipurile, matematicieni pe lîngă mașinile de calcul, matematicieni la Direcția centrală de statistică sau în rețeaua ei, cercetători pe lîngă diverse ministere și întreprinderi, pentru aplicarea în special, a statisticii matematice. Perspectivele de lucru ale absolvenților acestei secții se îmbogățesc pe măsura îndeplinirii sarcinilor trasate de Congresul al III-lea al P.M.R.

Condiții de viață și de studiu

Din grija partidului și guvernului au fost create studenților condiții deosebit de bune pentru studiu și trai. Astfel, în apropierea Facultății se află cămine bine organizate pentru studenți. Majoritatea studenților sînt bursieri ; bursele se acordă studenților merituoși, fii ai oamenilor muncii. Studenții care se disting la învățătură primesc în afară de burse în cămin și cantină, o bursă lunară în bani ; iar studenților excepționali li se acordă burse republicane sau burse „Gh. Gheorghiu-Dej".

Asistența medicală studențească este gratuită, în policlinici bine utilate, existînd și un spital pentru studenți.

În timpul vacanțelor studenții care s-au evidențiat prin muncă și la examene, sînt trimiși în tabere de odihnă. De asemenea, cei suferinzi sînt trimiși în stațiuni balneo-climaterice.

Laboratoarele facultății sînt bine înzestrate, existînd cîte un laborator separat pentru fiecare ramură de fizică. Lucrările practice de laborator duc la adîncirea problemelor de studiu și la formarea fizicienilor experimentali.

Pentru documentare, studenții vizitează des Institutele de fizică teoretică și de fizică atomică, precum și Observatorul astronomic al Academiei R.P.R.

Un atelier bine organizat permite studenților să facă cunoștință cu manopera executării diferitelor piese de laborator.

Facultatea are două biblioteci : una pentru matematică, mecanică, astronomie și alta pentru fizică, biblioteci bine înzestrate, și care au și săli de lectură. De asemenea, în cadrul fiecărui cămin există săli de lectură și biblioteci înzestrate cu cărți de specialitate necesare studiului individual.

În timpul liber studenții au posibilitatea de a desfășura o bogată activitate culturală și sportivă, făcînd parte din diferite echipe artistice și sportive.

Studenții participă de asemenea, la o serie de concursuri cu caracter general, cum ar fi concursurile : „În pas cu viața" și „Iubiți cartea", precum și la concursul de matematică, mecanică și fizică, dotat cu premii.

Examenul de admitere

Admiterea în Facultatea de matematică și fizică se face pe baza unui concurs care constă din probe scrise și orale la disciplinele :

a) aritmetică, algebră, trigonometrie și calcul diferențial,
b) geometrie plană, în spațiu și geometrie analitică,
c) fizică.

Cunoștințele ce se cer la concursul de admitere sînt cuprinse în manualele de matematică și fizică ale școlilor medii, iar programele obiectelor de concurs sînt publicate de Ministerul Învățămîntului și Culturii.

Facultatea organizează, în vederea examenului de admitere, cursuri de pregătire în lunile iulie și august.

Un număr mare de locuri din anul I este atribuit bursierilor sfaturilor populare, pentru care Comitetele executive ale sfaturilor populare regionale asigură și cursurile de pregătire.

FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ A UNIVERSITĂŢII „AL. I. CUZA" DIN IAŞI

Prof. Dr. GH. GHEORGHIEV
decanul facultății

Matematica și fizica se predau la Universitatea din Iași încă de la înființarea acestui vechi așezămînt de cultură. În decursul celor 101 ani de existență, învățămîntul matematicii și fizicii la Universitate a străbătut o cale anevoioasă, dar învingînd numeroase greutăți, a obținut importante succese.

În prima jumătate de secol de la înființarea Universității, profesori destoinici ca Ioan Popp, Neculai Culianu, Constantin Climescu, Const. C. Mănescu, Ioan Rallet, luptînd cu greutățile începutului, s-au afirmat prin lecții valoroase, sub raport științific și didactic. Lor le datorăm tipărirea primelor cursuri universitare de matematici din țară și tot acești pionieri ai matematicii la noi, au scos, cu imense sacrificii materiale, prima revistă romînească de matematică „Recreații științifice", precursoarea „Gazetei matematice", cum a denumit-o mai tîrziu G. Țițeica.

Începînd din 1910, prin venirea la Iași a profesorului Alexandru Myller, activitatea didactică este dublată de una de cercetare științnțifică. De la această dată, în revistele matematice romînești și străine, s-au tipărit numeroase lucrări valoroase ale matematicienilor ieșeni. Acad. Alexandru Myller, prof. Vera Myller-Lebedev, acad. Simion Sanielevici, acad. Const. Popovici, acad. Octav Mayer, acad. Gr. Moisil ș.a. au deschis drumuri noi în știință, pe care au pășit apoi mulți matematicieni din țară și de peste hotare. Astfel s-a făurit întîi școala de geometrie, care a cercetat, pe lîngă alte probleme, diverse geometrii diferențiale avînd ca grup fundamental unele din subgrupurile grupului proiectiv, contribuind prin aceasta la efectuarea programului de la Erlangen al lui F. Klein. De la reforma învățămîntului, care a prilejuit atît înființarea de numeroase cursuri noi, cît și fundamentarea și modernizarea celor existente, sînt tot mai numeroase și variate preocupările originale ale matematicienilor ieșeni. Se lucrează mult în special în domeniul ecuațiilor diferențiale ordinare și cu derivate parțiale, al elasticității și hidrodinamicii, al algebrei și teoriei numerelor, al astronomiei și astrofizicii. Numai în cursul anului 1960 matematicienii Universității au publicat peste 80 de studii și memorii.

În afara studiilor teoretice, matematicienii ieșeni își leagă preocupările științifice, răspunzînd nevoilor construirii socialismului în patria noastră, tot mai strîns de practică. Amintim aici doar colaborarea lor la soluționarea unor probleme legate de construcția copertinei de la stadionul „23 August" din Iași și de construcția unei conducte forțate.

Profesorii facultății de matematică și fizică participă la diferite congrese, colocvii și simpozioane internaționale de matematici, iar matematicieni străini, sovietici, germani, englezi ș.a. vizitează această facultate, ținînd conferințe pentru studenți. Amintim doar de colocviul de geometrie și topologie ce s-a ținut la Iași în 1958, cu care ocazie au participat peste 100 de geometri făcîndu-se 82 comunicări și conferințe.

Fructuoasă s-a dovedit și preocuparea pentru elaborarea de cursuri. Astfel, cursul de algebră al prof. *Vera Myller-Lebedev* și cursul de geome-

trie analitică întocmit de acad. *O. Mayer* și de profesorul *I. Creangă, Gh. Gheorghiev, A. Haimovici, M. Haimovici* și *I. Popa* au fost laureate cu premiul de stat. Recent, talentatul nostru candidat în științe, Const. Corduneanu, a publicat monografia Funcții aproape periodice, mult apreciată de specialiști.

Pentru crearea condițiilor favorabile unei munci de cercetare științifică era necesară o bibliotecă. Un merit deosebit în organizarea unei biblioteci de specialitate îi revine acad. *Al. Myller* care a adunat, cu multă perseverență, cărți și reviste, neavînd adesea nici un sprijin în acest scop din partea statului burghezo-moșieresc. Prin munca acad. Al. Myller și a elevilor săi și datorită sprijinului larg acordat de regimul democrat popular, putem spune fără a exagera că, Universitatea din Iași dispune azi de una din cele mai bune biblioteci din lume, în specialitatea matematicii.

Fizica la Universitatea din Iași a fost ilustrată de profesori ca : *Ștefan Micle, Dragomir Hurmuzescu,* acad. *Șerban Țițeica,* acad. *Ștefan Procopiu, Th. Ionescu* ș.a. *Dragomir Hurmuzescu* a fost, între altele, organizatorul unui bun laborator de fizică și al unui atelier de mecanică fină în care s-au construit aparate pentru laboratoarele Universității și ale unor licee din acel timp. Tot el inițiază și o serie de cercetări importante de fizică. Studiile făcute de fizicienii de la Universitatea din Iași, profesorii Ștefan Procopiu, Constantin Mihul, Teofil Vescan ș.a. în problemele de magnetism, electricitate, spectroscopie, structura materiei, au, pe lîngă valoarea lor teoretică, apreciată de specialiști, o considerabilă importanță practică pentru economia țării noastre.

Trebuie menționată, de asemenea, colaborarea rodnică dintre colectivul catedrei de fizică generală, fabrica de rulmenți Bîrlad și fabrica chimică nr. 2 Iași, în probleme de spectroscopie, precum și colaborarea colectivului catedrei de electricitate cu fabrica chimică nr. 2 Iași în probleme legate de analize făcute cu microscopul electronic.

Un avînt deosebit a cunoscut învățămîntul matematicii și al fizicii la Universitatea din Iași îndeosebi în anii puterii populare. În urma reformei învățămîntului din 1948, a luat ființă Facultatea de matematică și fizică, care are actualmente trei secții : *Matematică, Fizică* și *Matematică* secundar *Fizică,* fiecare cu cîte cinci ani de studii. Absolvenții acestei facultăți pot fi numiți profesori în învățămîntul mediu, preparatori și asistenți în învățămîntul superior, cercetători în institutele Academiei R.P.R. sau specialiști în producție. Industria noastră în plin avînt are nevoie de tot mai mulți fizicieni și, o dată cu automatizarea treptată a procesului de producție prevăzută în planul șesenal, de un număr sporit de matematicieni.

În Facultatea de matematică și fizică se urmărește o pregătire multilaterală, armonioasă, a studenților pentru a-i forma atît ca viitori specialiști, cît și ca cetățeni. Studenții capătă o bună pregătire ideologică la cursurile și seminariile de socialism științific, economie politică și materialism dialectic și istoric. În cadrul pregătirii de cultură generală, ei urmează, la alegere, o limbă modernă : rusa, engleza, franceza, germana sau italiana.

Pregătirea de specialitate se realizează la cursuri, seminarii și lucrări de laborator. Dintre acestea enumerăm, mai jos cîteva.

Secția Matematică și *Secția Matematică* secundar *Fizică :* geometrie sintetică, aritmetică și elemente de teoria numerelor, geometrie analitică,

calcul diferențial și integral, algebră, geometrie proiectivă, analiză matematică, astronomie, ecuații diferențiale, geometrie diferențială, teoria funcțiilor de variabilă reală, teoria funcțiilor de variabilă complexă, mecanică, fizica generală, fizica teoretică, istoria matematicii, istoria fizicii.

Secția Fizică: mecanica, acustica, căldură, electricitate, optica, structura materiei, fizica semiconductorilor, termodinamica, fizica statistică, electrodinamica, mecanica cuantică, teoria particulelor elementare, radiotehnica, chimie generală, chimie fizică, istoria fizicii.

Pe lîngă aceste cursuri de bază, mai există, în anii IV și V alte cursuri, dintre care studentul urmează cel puțin trei la alegere. Iată cîteva din aceste cursuri la matematici: Capitole speciale din: teoria analitică a numerelor, ecuații funcționale, teoria grupurilor Lie, geometrie proiectivă, geometrie diferențială, elasticitate, programare, calcul numeric, și cîteva la fizică: teoria particulelor elementare, spectroscopia moleculară, electronica și optica electronică, fizica corpurilor cu structură cristalină, radiotehnica etc.

La cursuri, studentul primește cunoștințele teoretice, iar la orele de seminar și laborator aprofundează aceste cunoștințe și își formează deprinderi practice prin rezolvarea problemelor și efectuarea lucrărilor de laborator. Calculul numeric, la matematici, se predă cu ajutorul mașinilor electrice de calcul, iar la cursurile și seminariile de geometrie se folosește bogata colecție de modele de care dispune Seminarul matematic *„Al. Myller"* al facultății. Se folosesc, de asemenea, filme și diafilme matematice și aparatură bogată și modernă cu care sînt înzestrate laboratoarele de mecanică, optică, semiconductori, spectroscopie, electricitate, radiotehnică și fizică atomică.

Ca aplicație la orele de astronomie, studenții vizitează observatorul astronomic al Universității, înzestrat cu instrumente moderne de observație și cu aparate de prelucrare a fotografiilor astronomice ce se lucrează în cadrul observatorului. Biblioteca observatorului face schimb cu publicații de specialitate din peste 25 de țări din lumea întreagă.

Studenții își mai formează deprinderi practice în cadrul atelierului cu care este dotată facultatea, atelier înzestrat cu utilaj modern din domeniul mecanicii, electrotehnicii și al sticlăriei. La practica în producție, făcută la unele din cele mai mari întreprinderi industriale din țară, studenții facultății reușesc să cunoască de aproape procesul de producție.

În vederea viitoarei activități didactice pe care o vor desfășura, studenții urmează cursuri de psihologie pedagogică, pedagogie, metodica predării matematicii și fizicii și pot urma cursurile facultative de logică și istoria pedagogiei. În cadrul practicii pedagogice pe care o fac în școlile medii din Iași, în ultimii doi ani de facultate, studenții țin lecții de specialitate, ore educative, conduc ședințe ale cercurilor de elevi etc.

Pentru studiul individual, studenții Facultății de matematică și fizică, dispun de două săli de lectură spațioase și o bibliotecă bogată, în care găsesc cursuri litografiate sau tipărite pentru toate disciplinele de bază predate în facultate. Studenții mai pot împrumuta cărți de la biblioteca de fizică ca și de la biblioteca Seminarului matematic *„A. Myller"*. Ultima cuprinde 30.000 volume și colecții de reviste, dintre care 300 se obțin prin schimbul dintre revista „Analele Științifice ale Universității din Iași" și diferitele reviste matematice din toate țările lumii.

Pentru studenții buni s-a creat încă un mijloc de ridicare a nivelului lor de cunoștințe, de formare a spiritului de cercetare științifică, de însușire a metodelor de cercetare: cercurile științifice studențești. În Facultatea de matematică și fizică funcționează 11 cercuri: algebră, analiză, geometrie, ecuații diferențiale, mecanică, astronomie, metodica predării matematicii, fizica generală, electricitate, fizica teoretică și radiotehnică. Cei 200 de studenți înscriși în aceste cercuri studiază diferite teme și stabilesc rezultate noi, adesea destul de valoroase. În ultimii ani, mulți studenți ai facultăților au primit premii la conferințele pe țară ale cercurilor științifice studențești, iar unele din lucrările lor au fost publicate în revistele: Analele științifice ale Universității „A. I. Cuza", Studii și cercetări științifice și Gazeta matematică și fizică, seria A. Cei ce lucrează în cercuri, prezintă comunicări și în general, cei talentați la matematică și la fizică sînt reținuți în Universitate, în institutele tehnice din localitate sau în institutele de cercetare ale filialei Iași a Academiei R.P.R. pentru a deveni buni profesori și oameni de știință în același timp.

Unele date cu privire la examenul de admitere, viața studenților în cămine și cantine, precum și date mai ample asupra secțiilor de matematică, fizică și matematică secundar fizică, fiind aceleași în toate universitățile din țară, se găsesc în articolul precedent al acestui număr.

CALCULUL CU DIFERENȚE

de conf. univ. *O. Sacter*

1. Se pune uneori problema să calculăm valoarea unui polinom cu ajutorul unui număr limitat de valori cunoscute ale polinomului, corespunzătoare unor argumente date în progresie aritmetică. În acest scop se folosesc unele rezultate teoretice ale calculului diferențelor, pe care le expunem în cele ce urmează.

Fiind dat un șir de numere

$$U_0,\ U_1,\ U_2,\ U_3,\ \ldots,\ U_m,\ U_{m+1}$$

se pot forma cu ele diferențele de ordinul întîi:

$$U_1 - U_0,\ U_2 - U_1,\ U_3 - U_2,\ \ldots,\ U_m - U_{m-1},\ U_{m+1} - U_m,$$

pe care le notăm

$$\Delta U_0 = U_1 - U_0;\ \Delta U_1 = U_2 - U_1;\ \ldots\ \Delta U_{m-1} = U_m - U_{m-1};$$
$$\Delta U_m = U_{m+1} - U_m.$$

Repetăm operația cu termenii noului șir:

$$\Delta U_0,\ \Delta U_1,\ \Delta U_2,\ \ldots,\ \Delta U_m,$$

după care obținem diferențe noi, *de ordinul al doilea,* pe care le notăm:

$$\Delta^2 U_0 = \Delta U_1 - \Delta U_0;\ \Delta^2 U_1 = \Delta U_2 - \Delta U_0,\ \ldots,\ \Delta^2 U_{m-1} = \Delta U_m - \Delta U_{m-1}.$$

Cu termenii noului șir Δ^2U_0, Δ^2U_1, ..., Δ^2U_{m-1} formăm diferențele *de ordinul al treilea*

$$\Delta^2U_1 - \Delta^2U_0,\ \Delta^2U_2 - \Delta^2U_1,\ \ldots,\ \Delta^2U_{m-1} - \Delta^2U_{m-2}$$

pe care le scriem respectiv

$$\Delta^3U_0,\ \Delta^3U_1,\ \ldots,\ \Delta^3U_{m-2}.$$

Continuînd, obținem apoi diferența *de ordinul al patrulea, al cincilea, . . . , al p-lea.*

Conform cu cele spuse mai sus, diferențele de ordinul p se exprimă astfel:

$$\Delta^pU_0 = \Delta^{p-1}U_1 - \Delta^{p-1}U_0;\ \Delta^pU_1 = \Delta^{p-1}U_2 - \Delta^{p-1}U_1;$$
$$\Delta^pU_2 = \Delta^{p-1}U_3 - \Delta^{p-1}U_2 \text{ etc.}$$

2. Să așezăm pe coloane, termenii șirului de la care am plecat, precum și diferențele de diferite ordine; se obține astfel, tabelul de numere:

U_0	ΔU_0	Δ^2U_0	Δ^3U_0	.	.	Δ^nU_0
U_1	ΔU_1	Δ^2U_1	Δ^3U_1	.	.	Δ^nU_1
U_2	ΔU_2	Δ^2U_2	Δ^3U_2	.	.	Δ^nU_2
U_3	ΔU_3	Δ^2U_3	Δ^3U_3	.	.	Δ^nU_3
U_4	ΔU_4	Δ^2U_4	Δ^3U_4	.	.	Δ^nU_4
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
U_m	.	.	.	.	.	.

(1)

Ținînd seama de modul de formare a diferențelor putem spune că *un termen oarecare al tabelului este egal cu diferența ce se obține scăzînd termenul din stînga din numărul care urmează după scăzător situat pe aceeași verticală cu scăzătorul.*

Dacă avem în vedere că $\Delta^{p-1}U_k = \Delta^{p-1}U_{k-1} + \Delta^pU_k$, atunci rezultă că *un termen oarecare din tabel este egal cu suma dintre termenul de pe aceeași verticală care-l precede, cu termenul de la dreapta acestuia din urmă.*

Să formăm un astfel de tabel pornind de la șirul:

$$U_0 = 1;\ U_1 = 4;\ U_2 = 5;\ U_3 = 8;\ U_4 = 11;\ U_5 = 12;\ U_6 = 10.$$

Efectuînd diferențele între doi termeni consecutivi de pe aceeași coloană avem:

1	3	−2	4	−6	6	−5
4	1	2	−2	0	1	
5	3	0	−2	1		
8	3	−2	−1			
11	1	−3				
12	−2					
10						

Dacă am fi avut date:
$U_0 = 1$; $\Delta U_0 = 3$; $\Delta^2 U_0 = -2$; $\Delta^3 U_0 = 4$; $\Delta^4 U_0 = -6$; $\Delta^5 U_0 = 6$ și $\Delta^6 U_0 = 5$, atunci ceilalți termeni s-ar obține prin adunarea a doi termeni consecutivi de pe aceiași linie.

3. Ne propunem în cele ce urmează: a) *Să exprimăm un termen de pe prima linie orizontală a tabelului de la § 2 cu ajutorul termenilor coloanei întîia*, adică să exprimăm $\Delta^p U_0$ cu ajutorul termenilor $U_0, U_1, U_2, \ldots, U_p$ și b) invers; *să exprimăm un termen oarecare de pe coloana întîia*, U_p, cu ajutorul termenilor U_0, ΔU_0, $\Delta^2 U_0, \ldots, \Delta^p U_0$ de pe prima linie orizontală.

a) Avem: $\Delta U_0 = U_1 - U_0$; $\Delta^2 U_0 = \Delta U_1 - \Delta U_0 = (U_2 - U_1) - (U_1 - U_0) = U_2 - 2U_1 + U_0$,

$$\Delta^3 U_0 = \Delta^2 U_1 - \Delta^2 U_0 = (\Delta U_2 - \Delta U_1) - (\Delta U_1 - \Delta U_0) = \Delta U_2 - 2\Delta U_1 + \Delta U_0$$

sau:

$$\Delta^3 U_0 = (U_3 - U_2) - 2(U_2 - U_1) + (U_1 - U_0) = U_3 - 3U_2 + 3U_1 - U_0.$$

Se recunoaște că în dezvoltarea lui ΔU_0, $\Delta^2 U_0$, $\Delta^3 U_0$ în funcție de termenii șirului U_0, U_1, U_2, U_3 aceștia intră respectiv cu coeficienți ai binoamelor $(a-b)^1 = a-b$; $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$; de aceea presupunem că avem în general:

$$\Delta^p U_0 = U_p - C_p^1 U_{p-1} + C_p^2 U_{p-2} - C_p^3 U_{p-3} \ldots + (-1)^k C_p^k U_{p-k} + \ldots + (-1)^p C_p^p U_0 \qquad (2)$$

și vom demonstra prin inducție, că această relație este justă.

Presupunînd formula (2) justă pentru p, să arătăm că e adevărată și pentru $p+1$.

Dacă în locul termenilor $U_0, U_1, \ldots, U_p$ din relația (2) punem respectiv, termenii $U_1, U_2, U_3, \ldots, U_{p+1}$ obținem:

$$\Delta^p U_1 = U_{p+1} - C_p^1 U_p + C_p^2 U_{p-1} - C_p^3 U_{p-2}, \ldots + (-1)^k C_p^k U_{p-k+1} + \ldots + (-1)^p C_p^p U_1, \qquad (3)$$

care este de asemenea justă fiindcă am presupus relația (2) adevărată.

Scăzînd egalitatea (2) din (3) deducem:

$$\Delta^p U_1 - \Delta^p U_0 = U_{p+1} - (1 + C_p^1) U_p + (C_p^1 + C_p^2) U_{p-1} - (C_p^2 + C_p^3) U_{p-2} \ldots + (-1)^k [C_{1p}^{k-1} + C_p^k] U_{p-k+1} \ldots + (-1)^p C_p^p U_0.$$

Prin definiție avem $\Delta^p U_1 - \Delta^p U_0 = \Delta^{p+1} U_0$, iar între coeficienții binomului există relația $C_p^{k-1} + C_p^k = C_{p+1}^k$ de aceea egalitatea precedentă devine:

$$\Delta^{p+1} U_0 = U_{p+1} - C_{p+1}^1 U_p + C_{p+1}^2 U_{p-1} - C_{p+1}^3 U_{p-2} \ldots + (-1)^k C_{p+2}^k U_{p-k+1} \ldots + (-1)^{p+1} C_{p+1}^{p+1} U_0,$$

ceea ce demonstrează că dacă (2) este adevărată pentru p, ea este adevărată și pentru $p+1$. Ținînd seama că relația (2) este justă pentru $p = 1; 2; 3$ rezultă că formula (2) este adevărată pentru ori ce valoare a lui p.

Astfel că avem pentru orice p întreg:

$$\Delta^p U_0 = U_p - C_p^1 U_{p-1} + C_p^2 U_{p-2} \ldots + (-1)^p C_p^p U_0 \tag{4}$$

sau sub formă simbolică

$$\Delta^p U_0 = (U - 1)^p \tag{5}$$

unde convenim ca după dezvoltarea lui $(U\text{-}1)^p$ prin formula binomului lui Newton să înlocuim puterea U^k prin U_k, iar ultimul termen 1, prin U_0.

b) Să exprimăm acum, un termen oarecare U_p cu ajutorul termenilor U_0, ΔU_0, $\Delta^2 U_0, \ldots, \Delta^p U_0$.

Avem: $U_1 = U_0 + \Delta U_0$; $U_2 = U_1 + \Delta U_1 = (U_0 + \Delta U_0) + (\Delta U_0 + \Delta U_0) =$
$= U_0 + 2\Delta U_0 + \Delta^2 U_0$;

$$U_3 = U_2 + \Delta U_2 = (U_0 + 2\Delta U_0 + \Delta^2 U_0) + (\Delta U_0 + 2\Delta^2 U_0 + \Delta_3 U_0),$$

sau:

$$U_3 = U_0 + 3\Delta U_0 + 3\Delta^2 U_0 + \Delta^3 U_0.$$

Din egalitățile obținute constatăm că în dezvoltarea termenilor U_1, U_2, U_3 în funcție de termenii U_0, ΔU_0, $\Delta^2 U_0$, $\Delta^3 U_0$ aceștia intră respectiv cu coeficienți ai binoamelor $(a+b)^1 = a + b$; $(a+b)^2 = a + 2ab + b$; $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$; de aceea presupunem că avem în general

$$U_p = U_0 + C_p^1 \Delta U_0 + C_p^2 \Delta^2 U_0 + C_p^3 \Delta^3 U_0 + \ldots + C_p^k \Delta^k U_0 + \ldots + C_p^p \Delta^p U_0 \tag{6}$$

și vom demonstra prin inducție completă că această egalitate este adevărată pentru orice valoare a lui p.

Această relație (6) fiind admisă pentru U_0 și diferențele ΔU_0, $\Delta^2 U_0$, $\ldots$, $\Delta^p U_0$ este de asemenea valabilă pentru ΔU_0 și diferențele $\Delta^2 U_0$, $\Delta^3 U_0$, $\ldots$, $\Delta^{p+1} U_0$, de unde rezultă:

$$\Delta U_p = \Delta U_0 + C_p^1 \Delta^2 U_0 + C_p^2 \Delta^3 U_0 + \ldots + C_p^{k-1} \Delta^k U_0 + \ldots + C_p^p \Delta^{p+1} U_0. \tag{7}$$

Adunînd egalitățile (6) și (7) obținem:

$$U_p + \Delta U_p = U_0 + (1 + C_p^1)\Delta U_0 + (C_p^1 + C_p^2)\Delta^2 U_0 + (C_p^2 + C_p^3)\Delta^3 U_0 + \ldots$$
$$+ (C_p^{k-1} + C_p^k)\Delta^k U_0 + \ldots + C_p^p \Delta^{p+1} U_0.$$

Dacă ținem seamă că avem: $C_p^{k-1} + C_p^k = C_{p+1}^k$ și că pe baza definiției $U_{p+1} = U_p + \Delta U_p$, atunci egalitatea precedentă devine:

$$U_{p+1} = U_0 + C_{p+1}^1 \Delta U_0 + C_{p+1}^2 \Delta^2 U_0 + C_{p+1}^3 \Delta^3 U_0 + \ldots +$$
$$+ C_{p+1}^k \Delta^k U_0 + \ldots + C_{p+1}^{p+1} \Delta^{p+1} U_0,$$

ceea ce demonstrează că dacă (6) este adevărată pentru p, ea este adevărată și pentru $p+1$. Deoarece egalitatea (6) este justă pentru $p=1;2;3$ rezultă că formula (6) este adevărată pentru orice valoare a lui p. Astfel că avem întotdeauna

$$\boxed{U_p = U_0 + C_p^1 \Delta U_0 + \ldots\ldots + C_p^k \Delta^k U_0 + \ldots\ldots + C_p^p \Delta^p U_0} \qquad (8)$$

sau sub forma simbolică

$$\boxed{U_p = (1 + \Delta)^p U_0} \qquad (9)$$

unde convenim ca după dezvoltarea lui $(1 + \Delta)^r$ prin formula binomului lui Newton și înmulțirea polinomului obținut cu U să înlocuim termenii $\Delta^k \cdot U_0$ prin $\Delta^k U_0$.

4. Se formează cu ajutorul polinomului $f(z) = A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + \ldots + A_{m-1} z + A_m$ șirul de valori

$$U_0 = f(z);\ U_1 = f(z+h);\ U_2 = f(z+2h) \ldots\ldots U_n = f(z+kh) \ldots$$

Calculăm diferențele de diferite ordine. *Să demonstrăm că diferențele de ordinul m sînt constante.* Exprimăm în acest scop, diferențele de ordinul întîi. Avem:

$$\Delta U_k = U_{k+1} - U_k = f[z + (k+1)h] - f(z + kh).$$

Dezvoltînd după puterile lui z obținem:

$$f(z+kh) = A_0 z^m + [A_1 + mA_0 hk] z^{m-1} + A_2' z^{m-2} + \ldots\ldots + A_{m-1}' z + A_m',$$

unde am pus în evidență coeficienții primilor doi termeni, iar coeficienții $A_2', A_3', \ldots, A_m$ sînt independenți de z, a căror expresie exactă nu interesează în problema de față:

În mod analog avem:

$$f[z+(k+1)h] = A_0 z^m + [A_1 + mA_0 h(k+1)]\, z^{m-1} + A_2'' z^{m-2} + \ldots + A_{m-1}'' z - A_m''.$$

Rezultă deci:

$$\Delta U_k = mA_0 h z^{m-1} + (A_2'' - A_2') z^{m-2} + \ldots + (A_m'' - A_m')$$

Se constată astfel, că *diferențele de ordinul întîi sînt polinoame de gradul m-1* care au ca prim termen $mA_0\, hz^{m-1}$.

Rezultă prin urmare, că diferențele de ordinul al doilea la rîndul lor, sînt polinoame de gradul m-2 avînd ca prim termen $m(m-1)\, A_0 h^2 z^{m-2}$ ș.a.m.d. Continuînd cu acest raționament găsim că diferențele de ordinul m sînt de gradul $m-m=0$, adică constante egale cu

$$m(m-1)\,(m-2) \ldots\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot A_0 h^m = m!\, A_0 h^m$$

De aici urmează că diferențele de ordin superior $\Delta_{m+1} U_k$, $\Delta_{m+1} U_k$ etc. sînt toate nule.

5. Rezultatul precedent ne permite să calculăm valorile unui polinom pentru argumente care cresc în progresie aritmetică cu ajutorul unui număr limitat de valori ale polinomului.

Dacă polinomul dat este de gradul m, atunci diferențele de pe prima linie a tabelului (1) în general nenule sînt ΔU_0; $\Delta^2 U_0$;...; $\Delta^m U_0$, iar diferențele de ordin superior lui m sînt toate nule. Rezultă pe baza formulei (4) că avem:

$$\Delta^{m+1} U_0 = 0 = U_{m+1} - C^1_{m+1} U_m + C^2_{m+1} U_{m-1} - C^3_{m+1} U_{m-2} + \ldots.$$

sau:

$$U_{m+1} = C^1_{m+1} U_m - C^2_{m+1} U_{m-1} + C^3_{m+1} U_{m-2} + \ldots.$$

Această ultimă relație ne arată că dacă sînt date U_0, U_1, U_2, . . . , U_m, atunci U_{m+1} se deduce cu ajutorul acestora. La fel se deduce U_{m+2} ș.a.m.d.

Pentru a calcula deci, valorile unui polinom de gradul m pentru argumente care cresc în progresie geometrică vom forma tabelul diferențelor în care așezăm în prima coloană numai valorile polinomului corespunzătoare la $m+1$ argumente care cresc în progresie aritmetică. Cu ajutorul valorilor înscrise și a diferențelor pînă la cea de ordinul m care este o constantă, vom forma oricît alți termeni pe baza metodelor de calcul arătate la § 2. Valorile ce se vor obține în coloana șirului U_0, U_1, . . . , U_m vor fi acelea care corespund la argumentele $z + (m + 1)\,h$; $z + (m + 2)\,h$ etc.

Exemplu. Să alcătuim o tabelă de valori ale polinomului $f(z) = 2z^3 - 5z^2 - 4z - 2$ pentru argumentele 0,1 ; 0,2 ; 0,3 ; . . . 0,9.

Conform celor spuse mai sus formăm tabelul de diferențe pornind numai de la șirul de valori: $f(0) = -2$; $f(0) = -2{,}448$; $f(0{,}2) = -2{,}584$; $f(0{,}3) = -3{,}596$. Se obține tabelul

z	$f(z)$	$\Delta^1 f$	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
0	— 2	— 0,448	— 0,088	0,012	0
0,1	— 2,448	— 0,536	— 0,076	0,012	0
0,2	— 2,984	— 0,612	— 0,064	0,012	
0,3	— 3,596	— 0,676	— 0,052	0,012	
0,4	— 4,272	— 0,728	— 0,040	0,012	
0,5	— 5,000	— 0,768	— 0,028	0,012	
0,6	— 5,768	— 0,796	— 0,016	0,012	
0,7	— 6,564	— 0,812	— 0,004	0,012	
0,8	— 7,376	— 0,816	+ 0,008	0,012	
0,9	— 8,192	— 0,808			
1	— 9,000				

Am obținut: $f(0{,}4) = -4{,}272$; $f(0{,}5) = -5$; $f(0{,}6) = -5{,}768$: . . . . . $f(0{,}9) = -8{,}192$.

Aceste valori s-au putut calcula prin simple adunări numai cu ajutorul valorilor situate deasupra liniei frînte marcate în tabel. Astfel, $f(0,7) = -6,564 = (-5,768) + (-0,796)$ și celelalte analoage.

Aplicații. Metodele calculului prin diferențe ne permit să rezolvăm și alte probleme decît cele arătate în paragraful precedent. Dăm în continuare, două aplicații ale acestei metode.

Aplicația 1. Să alcătuim o tabelă de cuburi ale numerelor șirului natural.

Problema pusă ne conduce la calculul valorilor polinomului $f(z) = z^3$ pentru argumentele care cresc în progresie aritmetică cu rația 1, primul termen fiind 0. Formăm șirul:

$$f(0) = 0\,; \quad f(1) = 1\,; \quad f(2) = 8\,; \quad f(3) = 27,$$

și cu ajutorul diferențelor alcătuim tabelul:

z	$f(z)$	Δ^1	Δ^2	Δ^3
0	0	1	6	6
1	1	7	12	6
2	8	19	18	6
3	27	37	24	6
4	64	61	30	6
5	125	91	36	6
6	216	127	42	6
7	343	169	48	
8	512	217		
9	729			

Cuburile de pe coloana $f(z)$ se obțin numai prin simple adunări. Ne bazăm pe faptul că termenii coloanei Δ^3 sînt constanți egali cu

$$m!\, A_0\, h^m = 3! \cdot 1 \cdot 1^3 = 6$$

și că un termen oarecare al tabelului este egal cu suma dintre termenul situat imediat deasupra de pe aceeași coloană și acel care se află la dreapta acestuia din urmă în linie orizontală. Astfel avem:

$$127 = 91 + 36 \text{ etc,...}$$

Aplicația 2. Să stabilim formula pentru suma puterilor a patra a numerelor șirului natural. Avem de calculat:

$$S_4 = 0^4 + 1^4 + 2^4 + \ldots + n^4.$$

Pornim de la șirul $U_0 = 0$, $U_1 = 0^4 + 1^4$; $U_2 = 0^4 + 1^4 + 2^4$; ...; $U_n = S_4$ și formăm cu aceștia tabelul diferențelor:

U	Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5	Δ^6
U_0	1^4	2^4-1^4	50	60	24	0
U_1	2^4	3^4-2^4	110	84	24	0
U_2	3^4	4^4-3^4	194			
.	.					
.	.					
.	.					
U_{n-1}	n^4					
U_n						

Aplicăm relația (8) de la paragraful 3 și obținem:

$$U_n=U_0+C_n^1\Delta U_0+C_n^2\Delta^2U_0+C_n^3\Delta^3U_0+C_n^4\Delta^4U_0+C_n^5\Delta^5U_0;$$

pentru că diferențele de la ordinul 6 în sus sînt toate nule. Rezultă:

$$S_4 = C_n^1 + 15\ C_n^2 + 50\ C_n^3 + 60\ C_n^4\ 24\ C_n^5$$

sau:

$$S_4 = n + \frac{15n(n-1)}{2} + \frac{25n(n-1)(n-2)}{3} + \frac{5n(n-1)(n-2)(n-3)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5}.$$

După reduceri și descompunere în factori obținem:

$$S_4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

Într-un mod cu totul analog se poate afla: $\sum_1^n f(n)$, unde $f(n)$ este un polinom în n, de un grad oarecare.

FORȚA CORIOLIS

Ion Cristescu, profesor București

În mișcările de rotație, pe lîngă forțele centripetă și centrifugă, ia naștere, în anumite condiții, și o altă forță numită forță Coriolis. În cele ce urmează, vom examina cîteva cazuri în care acționează această forță Coriolis.

În acest scop, să studiem mai întîi mișcarea unui corp de-a lungul razei unui disc ce se află într-o mișcare de rotație, cu viteza unghiulară ω (fig. 1).

Să presupunem că din punctul M pornește un mobil de-a lungul razei OP, cu o viteză uniformă v față de disc, și că acest mobil ajunge după un timp t în punctul N; distanța parcursă de mobil va fi:

$$d = MN = vt. \qquad (1)$$

Dacă vitezele liniare ale diferitelor puncte de pe disc ar fi egale, atunci mobilul (fiind antrenat și de mișcarea discului) ar ajunge în punctul N'' ($NN'' = MM'$). Datorită însă faptului că viteza liniară crește de la centru către periferie, viteza liniară în punctul N este mai mare decît în

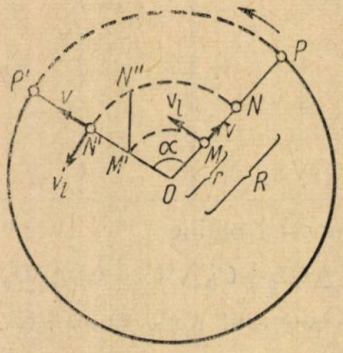


Fig. 1.

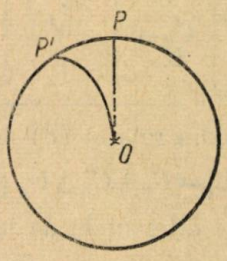


Fig. 2.

punctul M, astfel încît mobilul, în loc să ajungă în N'', va ajunge în N'. Pentru un observator nelegat de sistemul de rotație, traiectoria mobilului va avea forma unei curbe OP' (fig. 2), iar mișcarea lui va fi accelerată. Pentru a calcula această accelerație, ne vom îndrepta atenția asupra drumului $M''N'$, pe care îl parcurge în plus față de porțiunea NN'', tocmai datorită mișcării accelerate menționate. Vom avea:

$$S = N''N' = NN' - NN'' = NN' - MM' = \alpha R - \alpha r = \alpha(R - r) = \alpha M'N'.$$

Ținînd cont că $M'N' = MN$, rezultă:

$$S = \alpha\, M'N' = \alpha v t. \tag{2}$$

Înlocuind α cu ωt, relația (2) devine:

$$S = \omega t \cdot v t = \omega v t^2. \tag{3}$$

Din această relație se vede că spațiul adițional S, pe care îl parcurge mobilul, este proporțional cu pătratul timpului, or, acest lucru este caracteristic tocmai mișcării uniform accelerate, în care spațiul se exprimă prin cunoscuta relație:

$$S = \frac{at^2}{2}.$$

De aici și din (3) obținem $\omega v = \frac{a}{2}$, de unde rezultă accelerația

$$a_c = 2\,\omega\, v$$

numită *accelerație Coriolis.*

Apariția unei accelerații în mișcarea unui corp implică totdeauna existența unei forțe care să întrețină această mișcare uniform accelerată.

În cazul nostru, accelerația fiind îndreptată spre stînga (fig. 1), forța aplicată mobilului va fi de asemenea îndreptată spre stînga.

Cunoscind din legile mecanicii clasice că unei acțiuni (forțe) îi corespunde totdeauna o altă acțiune reciprocă egală și de sens contrar, rezultă în cazul nostru, o forță îndreptată spre dreapta, ce se exprimă prin relația :

$$f_c = 2\, m\, \omega\, v, \tag{5}$$

unde m este masa mobilului. Această forță este numită *forță Coriolis*.

Să presupunem acum, că direcția de mișcare a mobilului față de disc face un unghi β cu raza OP a discului ce se rotește (fig. 3). Viteza v a mobilului în mișcare pe direcția MR poate fi considerată ca rezultanta a două componente : v' de-a lungul razei OP și v'' normală la rază. Însumarea efectelor celor două componente va da deci, efectul vitezei v. Componenta $v' = v \cos \beta$, acționînd de-a lungul razei OP, va genera, împreună cu rotația ω a discului, o forță Coriolis, exprimată conform formulei (5) :

$$f_{c'} = 2\, m\, \omega\, v \cos \beta. \tag{6}$$

Cealaltă componentă, $v'' = v \sin \beta$, va genera și ea o forță Coriolis $f_{c''}$.

Într-adevăr, dacă considerăm pe $v'' = v \sin \beta$ ca fiind viteza mobilului în cazul cînd el s-ar mișca pe disc de-a lungul circumferinței (reprezentată în fig. 3 prin linie întreruptă) cu centrul în O, atunci avem $v_r = v'' + v_l$ (unde v_l este viteza liniară de rotație a discului în punctele circumferinței considerate). Această mișcare, care are ca viteză viteza rezultantă v_r, va da naștere unei forțe centripete :

$$f_c = \frac{m v_r^2}{R} = \frac{m (v'' + v_l)^2}{R}$$

unde $R = OM$. Ridicînd la patrat suma vitezelor și grupînd termenii vom avea :

$$f_c = \frac{m v''^2}{R} + \frac{m v_l^2}{R} + \frac{2\, m\, v''\, v_l}{R}.$$

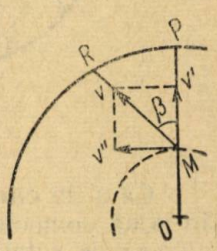


Fig. 3.

Pentru un observator legat de sistemul de rotație, primul termen reprezintă forța centrifugă de inerție aplicată mobilului ce se mișcă pe circumferința considerată, al doilea termen va reprezenta forța centripetă aplicată asupra legăturilor ce menține mobilul pe disc, iar ultimul termen :

$$\frac{2\, m\, v''\, v_l}{R} = 2\, m\, v''\, \omega \qquad \left(\omega = \frac{v_l}{R}\right)$$

este tocmai $f_{c''}$, adică forța Coriolis generată de compenenta v'' *).

Înlocuind $v'' = v \sin \beta$ avem :

$$f_{c''} = 2\, m\, \omega\, v \sin \beta. \tag{7}$$

*) De unde rezultă deci, că forța Coriolis apare și în mișcarea corpurilor pe o circumferință cu centrul în axa de rotație.

Însumînd cele două forțe Coriolis componente, vom avea forța Coriolis rezultantă :

$$f_c = \sqrt{f_{c'}^2 + f_{c''}^2} = \sqrt{4m^2\omega^2v^2\cos^2\beta + 4m^2\omega^2v^2\sin^2\beta},$$

unde, dacă dăm factor comun pe $4m^2\omega^2v^2$ și ținînd seamă că $\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$, rezultă :

$$f_c = 2m\omega v,$$

adică tocmai relația (5).

De cele mai multe ori (cazul mișcării corpurilor pe suprafața Pămîntului) mobilul se mișcă pe o direcție ce face un unghi φ cu axa de rotație (fig. 4).

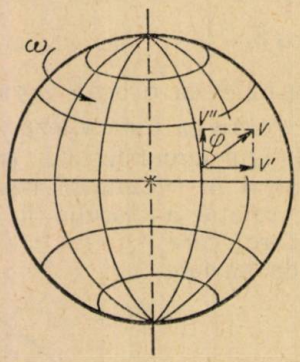


Fig. 4.

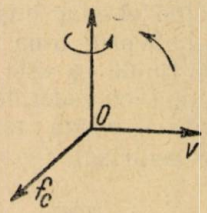


Fig. 5.

Ca și în cazul precedent, viteza v a mobilului va putea fi descompusă în două componente : v' perpendiculară pe axa de rotație și v'' paralelă cu axa de rotație. Componenta v'', în aceste cazuri, nu dă naștere unei componente Coriolis, deoarece, presupunînd că un mobil s-ar mișca paralel cu axa de rotație, viteza lui liniară de antrenare rămîne constantă. Rămîne deci, componenta $f_{c'} = 2m\omega v \sin\varphi$, generată de $v' = v \sin\varphi$, unica forță Coriolis, în aceste cazuri.

În toate exemplele examinate pînă acum, forța Coriolis este perpendiculară pe planul format de direcția vitezei v și de axa de rotație. Sensul ei poate fi determinat cu ajutorul regulei șurubului (fig. 5) : rotind șurubul de la v spre axa de rotație, el se depărtează de planul format de direcția vitezei și de axa de rotație, arătînd astfel sensul forței Coriolis.

După cum s-a arătat mai sus, la mișcările corpurilor pe suprafața Pămîntului, datorită rotației Pămîntului în jurul axei sale, apare forța Coriolis. Astfel se explică tendința corpurilor ce se mișcă pe meridian, de a devia spre est cînd mișcarea este dirijată spre nord și a devia spre vest, cînd mișcarea este dirijată spre sud. Direcția devierii arată direcția forței Coriolis, lucru ușor de constatat cu regula șurubului și ținînd seama că Pămîntul se rotește de la stînga spre dreapta în jurul axei sale.

Uzarea șinei din dreapta de cale ferată, cînd trenul se mișcă pe direcția sud-nord și a șinei din stînga, cînd direcția de mișcare este nord-sud, erodarea mai accentuată a malurilor cursurilor de apă după aceeași regulă ca la șinele de cale ferată, devierea vînturilor ecuatoriale și a alizeelor, precum și a curenților din mările ecuatoriale sînt efecte ale forței Coriolis, ce apare la mișcarea corpurilor pe suprafața Pămîntului, datorită rotației Pămîntului în jurul axei sale.

În concluzie, forța Coriolis apare ori de cîte ori un corp se deplasează pe o suprafață în rotație. Această forță este proporțională cu masa și viteza mobilului și cu viteza unghiulară a suprafeței în rotație.

NOTE MATEMATICE

GENERALIZAREA UNEI REGULI DE DIVIZIBILITATE

D. M. BĂTINEȚU, student București

În G.M.F. seria B nr. 1, din 1960 este publicat articolul „În legătură cu divizibilitatea numerelor prin 19" al tovarășului Emanoil Gaiu.

Vom relua acum problema prin generalizarea punctelor III și III-B.

I — Fie numărul :

$$N = a_1 g^{n-1} + a_2 g^{n-2} + \ldots + a_{n-1} g + a_n \qquad (1)$$

unde g este baza de numerație, $a_1 \neq 0$ și $0 \leqslant a_i < g$.

Să stabilim regula divizibilității numărului N, cu un număr b care are proprietatea că :

$$b \pm l = g \cdot k$$

înmulțim relația (1) cu k^{n-1} și rezultă

$$k^{n-1} \cdot N = a_1 (gk)^{n-1} + a_2 k \cdot (kg)^{n-2} + a_3 \cdot k^2 (kg)^{n-3} + \\ + \ldots + k^{n-2} a_{n-i} (gk) + k^{n-1} a_n \qquad (2)$$

a. Presupunem :

$$gk = b + l, \quad \text{de unde} \quad (gk)^m - \mathfrak{M}\, b + l^m$$

și înlocuind în relația (2) rezultă :

$$k^{n-1} \cdot N = \mathfrak{M} b + a_1 l^{n-1} + k \cdot a_2 l^{n-2} + k^2 \cdot a_3 l^{n-3} + \ldots + k^{n-2} a_{n-1} l + k^{n-1} a_n$$

Deci un număr b care satisface $gk = b + l$, divide un număr N scris în baza g, dacă :

$$S = a_1 \cdot l^{n-1} + k \cdot a_2 l^{n-2} + k^2 a_3 l^{n-3} + \ldots + k^{n-2} a_{n-1} \cdot l + k^{n-1} a_n \qquad (3)$$

este multiplu de b (Regula se aplică în continuare).

b. Presupunem:

$gk=b-l$ de unde $\begin{cases} (gk)^{2m} = \mathfrak{M}\, b + l^{2m} \\ (gk)^{2m+1} = \mathfrak{M}\, b - l^{2m+1} \end{cases}$

Introducînd în relația (2) rezultă:

$$k^{n-1}N = M \cdot b + a_n k^{n-1} - k^{n-2}a_{n-1}l + k^{n-3}a_{n-2}l^2 - \ldots \pm a_1 l^{n-1}$$

Deci un număr b, care satisface $gk=b-l$. divide un număr N scris în baza g dacă:

$$S = a_n k^{n-1} - k^{n-2}a_{n-1} \cdot l + k^{n-3}a_{n-2}l^2 - \ldots \pm a_1 \cdot l^{n-1} \qquad (4)$$

este multiplu de b cu zero.

Dacă în cele tratate mai sus facem $l=1$ obținem punctul III din articolul amintit.

II. Fie numărul:

$$N = a_1 \cdot g^{n-1} + a_2 g^{n-2} + a_3 g^{n-3} + \ldots + a_{n-1} g + a_n$$

Considerăm cazul:

$$b \pm l = g^s \cdot k$$

presupunînd $s < n$ se poate scrie

$$N = Q_1 g^{(t-1)s} + Q_2 g^{(t-2)s} + \ldots + Q_{t-1} g^s + Q_t \qquad (5)$$

$O_1, O_2, \ldots, O_t$ — sînt numere de cîte „s" cifre obținute prin împărțirea numărului N în grupe de cîte „s" cifre de la dreapta spre stînga. (Q_1, ultima grupă putînd să aibă mai puțin de „s" cifre).

a. Presupunem:

$$g^s k = b + l, \text{ de unde } (g^s k)^m = \mathfrak{M} b + l^m \qquad (5')$$

Înmulțim numărul N scris sub forma (5) cu k^{t-1} și rezultă

$$k^{t-1}N = Q_1 (g^s k)^{t-1} + Q_2 k (g^s k)^{t-2} + \ldots + Q_{t-1} k^{t-2} (g^s k) + k^{t-1} Q_t \qquad (6)$$

ținînd cont de relația (5′) din relația (6) obținem:

$$k^{t-1}N = M \cdot b + Q_1 l^{t-1} + Q_2 k l^{t-2} + \ldots + Q_{t-1} k^{t-2} l + Q_t k^{t-1}$$

de unde numărul N scris în baza g se divide cu numărul b astfel că

$$g^s k = b + l$$

atunci cînd suma:

$$S = Q_1 l^{t-1} + Q_2 k l^{t-2} + \ldots + Q_{t-1} k^{t-2} l + Q_t k^{t-1}$$

se divide cu b.

b. Presupunem:

$g^s k = b - l$ de unde $\begin{cases} (g^s k)^{2p} = \mathfrak{M} \cdot b + l^{2p} \\ (g^s k)^{2p+1} = \mathfrak{M} \cdot b - l^{2p+1} \end{cases}$

și înlocuind în relația (6) obținem:

$$k^{t-1} N = M \cdot b + Q_t k^{t-1} - Q_{t-1} k^{t-2} l + Q_{t-3} k^{t-3} l^2 - \ldots \pm Q_1 l^{t-1}$$

Deci numărul N scris în baza de numerație g se divide cu numărul b astfel că:

$$g^s k = b - l$$

atunci cînd suma alternantă:

$$S = Q_t k^{t-1} - Q_{t-1} k^{t-2} l + Q_{t-2} k^{t-3} l^2 - \ldots \pm Q_1 l^{t-1}$$

este zero sau multiplu de b.

III. Vom trata acum ca aplicații divizibilitatea prin:

7, 17, 27, 37, 47, ... și
13, 23, 33, 43, 53, ...

în afară de regulile de divizibilitate cu:

11, 21, 31, 41, 51, ... și
19, 29, 39, 49, 59, ...

tratate în articolul amintit.

a) *Divizibilitatea cu 7.*

Dacă în relațiile stabilite la punctul I a) facem: $g=10$, $b=7$, $l=3$, $k=1$, obținem că pentru ca un număr

$$N = \overline{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n}$$

scris în baza 10 să fie divizibil cu 7 trebuie ca suma:

$$S_7 = a_1 \cdot 3^{n-1} + a_2 \cdot 3^{n-2} + a_3 \cdot 3^{n-3} + \ldots + a_{n-1} \cdot 3 + a_n$$

să fie multiplu de 7.

— Un număr N se divide cu 17, dacă suma:

$$S_{17} = 3^{n-1} a_1 + 3^{n-2} \cdot 2a_2 + 3^{n-3} \cdot 2^2 \cdot a_3 + \ldots + 3 \cdot 2^{n-2} a_{n-1} + 2^{n-1} a_n$$

este zero sau multiplu de 17.

Tot așa pentru 27, 37, 47 .... se vor obține sumele:

$$S_{27} = 3^{n-1} \cdot a_1 + 3^{n-2} \cdot 3a_2 + 3^{n-3} \cdot 3 \cdot a_3 + \ldots + 3 \cdot 3^{n-2} a_{n-1} + 3^{n-1} a_n =$$

$$= 3^{n-1} (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n)$$

$$S_{37} = 3^{n-1} a_1 + 3^{n-2} \cdot 4 \cdot a_2 + 3^{n-3} \cdot 4^2 \cdot a_3 + \ldots + 3 \cdot 4^{n-2} a_{n-1} + 4^{n-1} a_n$$

$$S_{47} = 3^{n-1} a_1 + 3^{n-2} \cdot 5 \cdot a_2 + 3^{n-3} \cdot 5^2 a_3 + \ldots + 3 \cdot 5^{n-2} a_{n-1} + 5^{n-1} a_n$$

care trebuie să fie zero sau multiple respectiv de 27, 37, 47.

b. *Divizibilitatea cu 13.*

Dacă în relațiile stabilite la punctul I b) facem: $g=10$, $b=13$, $l=3$, $k=1$, obținem că pentru ca un număr

$$N = \overline{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n}$$

scris în baza 10 să fie divizibil cu 13 trebuie ca suma alternantă:

$$S_{13} = 3^{n-1} a_n - 3^{n-2} a_{n-1} + 3^{n-3} a_{n-2} - \ldots \pm a_1$$

să fie zero sau multiplu de 13.

La fel obținem pentru: 23, 33, 43, ... sumele

$$S_{23} = 3^{n-1}a_n - 3^{n-2}\cdot 2\cdot a_{n-1} + 3^{n-3}\cdot 2^2\cdot a_{n-2} - \ldots \pm 2^{n-1}a_1$$

$$S_{33} = 3^{n-1}a_n - 3^{n-2}\cdot 3\cdot a_{n-1} + 3^{n-3}\cdot 3^2\cdot a_{n-2} - \ldots \pm 3^{n-1}a_1 =$$

$$= 3^{n-1}(a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - \ldots \pm a_1)$$

$$S_{43} = 3^{n-1}a_n - 3^{n-2}\cdot 4\cdot a_{n-1} + 3^{n-3}\cdot 4^2\cdot a_{n-2} - \ldots \pm 4^{n-1}a_1$$

care trebuie să fie respectiv multiplu de: 23, 33, 43, ... sau zero pentru ca numărul N să fie multiplu de 23, 33, 43...

Pe această cale se poate stabili reguli de divizibilitate cu orice număr a unui număr N.

IV. *Criteriul general de divizibilitate a numerelor*

Fie numărul:

$$N = a_n g^n + a_{n-1} g^{n-1} + \ldots + a_3 g^3 + a_2 g^2 + a_1 g + a_0 g^0 \qquad (7)$$

scris în baza de numerație g ($a_n \neq 0$, $0 \leqslant a_i < g$).

Să stabilim condiția ca numărul dat N să fie divizibil printr-un număr M. ($M < N$)

Fie $r_0, r_1, r_2, \ldots, r_n$ — resturile împărțirii cu M a numerelor: $g^0, g^1, g^2, \ldots, g^n$

Să demonstrăm că pentru ca N să fie divizibil cu M este necesar și suficient ca suma:

$$S = (a_0 + a_1 r_1 + a_2 r_2 + a_3 r_3 + \ldots + a_n r_n) \qquad (8)$$

să fie divizibil cu M.

Mai notăm cu:

$q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n$ — cîturile împărțirii cu M a numerelor: $g^0, g^1, g^2, \ldots, g^n$

Întocmim următorul tablou:

Notația				Dependența între deîmpărțit, împărțitor, cît și rest
De împărțit	Împărțitor	Cît	Rest	
$g^0 = 1$	M	$q_0 = 0$	$r_0 = 1$	$1 = Mq_0 + r_0$
g^1	M	q_1	r_1	$g^1 = Mq_1 + r_1$
g^2	M	q_2	r_2	$g^2 = Mq_2 + r_2$
g^3	M	q_3	r_3	$g^3 = Mq_3 + r_3$
....	....	....	....	.....
....	....	....	....	.....
g^n	M	q_n	r_n	$g_n = Mq_n + r_n$

Din acest tablou observăm că pentru cifra care exprimă unitățile simple corespunde puterea $g^0 = 1$.

Însă prin împărțirea unității la un număr oarecare $M > 1$, se va obține întotdeauna la cît zero, iar ca rest 1.

De aici reiese că:

$$a_0 g^0 = a_0 1 = a_0$$

Înlocuind în expresia (7) puterile numărului g prin valorile lor respective din tabloul de mai sus, vom avea:

$$N = a_n(Mq_n + r_n) + a_{n-1}(M \cdot q_{n-1} + r_{n-1}) + \ldots + a_3(M \cdot q_3 + r_3) +$$
$$+ a_2(M \cdot q_2 + r_2) + a_1(M \cdot q_1 + r_1) + a_0 =$$
$$= a_n \cdot M \cdot q_n + a_{n-1} \cdot Mq_{n-1} + \ldots + a_3 \cdot M \cdot q_3 + a_2 \cdot M \cdot q_2 + a_1 M \cdot q_1 +$$
$$+ a_n r_n + a_{n-1} + \ldots + a_3 r_3 + a_2 r_2 + a_1 r_1 + a_0 =$$
$$= M \cdot (a_n q_n + a_{n-1} q_{n-1} + \ldots + a_3 q_3 + a_2 q_2 + a_1 q_1) + (a_n r_n + a_{n-1} r_{n-1} +$$
$$+ \ldots + a_3 r_3 + a_2 r_2 + a_1 r_1 + a_0) = \text{multiplu de } M + a_n r_n + a_{n-1} r_{n-1} + \ldots +$$
$$+ a_3 r_3 + a_2 r_2 + a_1 r_1 + a_0$$

prin urmare pentru ca numărul N să fie divizibil cu M trebuie ca suma care reprezintă relația (8) să fie divizibilă cu M.

CITEVA RELAȚII ÎN LEGĂTURĂ CU CEVIENE IZOGONALE

Considerăm un triunghi ascuțitunghi ABC și ducem cevienele AD și AE (punctele D și E se găsesc pe latura BC — punctul D mai aproape de B) astfel ca să fie simetrice față de bisectoarea unghiului A. Cevienele AD și AE se numesc ceviene izogonale ($\sphericalangle CAE = \sphericalangle BAD = \alpha$).

Ducem prin B o paralelă la AC care taie pe AD în punctul M, iar prin punctul C ducem o paralelă la AB care taie pe AE în punctul N. Rezultă că triunghiurile ABM și ACN sînt asemenea, de unde

$$\frac{AM}{AN} = \frac{AB}{AC} \quad (1) \quad \text{și} \quad \frac{AB}{AC} = \frac{BM}{CN} \quad (2)$$

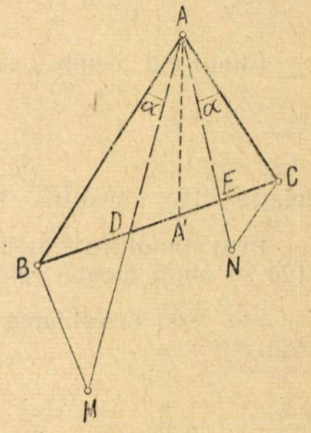


Fig. 1.

Din asemănarea triunghiurilor BDM și ACD avem:

$$\frac{AD}{DM} = \frac{CD}{BD} \quad (3) \quad \text{și} \quad \frac{BM}{AC} = \frac{BD}{CD} \quad (4)$$

sau folosind proprietatea rapoartelor relației (3) se mai scrie:

$$\frac{AD}{DM} = \frac{CD}{BC} \quad \text{sau} \quad AM = \frac{BC \cdot AD}{CD} \quad (5)$$

Din asemănarea triunghiurilor ABE și CEN, avem:

$$\frac{AE}{EN} = \frac{BE}{EC} \quad (6) \quad \text{și} \quad \frac{CN}{AB} = \frac{CE}{BE} \quad (7)$$

sau folosind proprietatea rapoartelor (6) devine:

$$\frac{AE}{AN} = \frac{BE}{BC} \text{ de unde } AN = BC \cdot \frac{AE}{BE} \tag{8}$$

Din relațiile (1), (5) și (8) rezultă că:

$$\frac{AD \cdot BE}{AE \cdot CD} = \frac{AB}{AC}, \text{ deci: } \frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{CD}{BE} \tag{9}$$

Din relațiile (4) și (7) rezultă că:

$$BM = AC \cdot \frac{BD}{CD} \quad \text{și} \quad CN = AB \cdot \frac{CE}{BE}$$

și înlocuind în relația (2) obținem:

$$\frac{BD \cdot BE}{CD \cdot CE} = \frac{AB^2}{AC^2} \tag{10}$$

Relația (10) constituie teorema lui *Steiner*.

Din relația (10) rezultă

$$\frac{CD}{BE} = \frac{AC^2}{AB^2} \cdot \frac{BD}{CE} \tag{10'}$$

Din relațiile (9) și (10') rezultă că:

$$\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC^2}{AB^2} \cdot \frac{BD}{CE}$$

sau:

$$\frac{AD}{AE} = \frac{BD}{CE} \cdot \frac{AC}{AB} \tag{11}$$

Înmulțind membru cu membru relațiile (9) și (11) rezultă:

$$\frac{AD^2}{AE^2} = \frac{BD \cdot CD}{BE \cdot CE}$$

Relația (12) constituie teorema lui *Steiner* pentru izogonale exterioare.

Prin înmulțire sau împărțire membru cu membru a relațiilor (10) și (12) se obțin tocmai relațiile (9) și (11).

Fie AA' bisectoarea unghiului BAC. Conform teoremei bisectoarei, avem:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BA'}{CA'} \tag{13}$$

De asemenea AA' este bisectoarea în triunghiul ADE, de unde:

$$\frac{AD}{AE} = \frac{DA'}{A'E} \tag{14}$$

Înlocuind relațiile (13) și (14) în relația (9) obținem:

$$\frac{DA'}{A'E} = \frac{BA'}{CA'} \cdot \frac{CD}{BE} \tag{15}$$

sau înlocuind (13) și (14) în relația (11) obținem:

$$\frac{DA'}{A'E} = \frac{BD}{CE} \cdot \frac{CA'}{BA'} \tag{16}$$

ori înlocuind în relația (12) avem:

$$\frac{DA'^2}{A^2E^2} = \frac{BD \cdot CD}{BE \cdot CE} \tag{17}$$

dar

$$\begin{aligned} BA' &= BD + DA' = BE - A'E; \\ CA' &= CE + EA' = CD - DA' \end{aligned} \tag{18}$$

Ținînd seama de relațiile (18), relația (15) devine:

$$DA'\,(CD - DA') \cdot BE = A'E\,(BE - A'E)\,CD,$$

de unde:

$$BE \cdot CD\,(DA' - A'E) = DA'^2 \cdot BE - A'E^2 \cdot CD \tag{19}$$

Ținînd seama de relațiile (18) relația (15) devine

$$DA' \cdot CE\,(BD + DA') = A'E \cdot BD\,(CE + EA'),$$

de unde:

$$BD \cdot CE \cdot (DA\ A'E) = A'E^2 \cdot BD - DA'^2 \cdot CE \tag{20}$$

Din relațiile (19) și (20) rezultă:

$$\frac{BE \cdot CD}{BD \cdot CE} = \frac{DA'^2 \cdot BE - A'E^2 \cdot CD}{A'E^2 \cdot BD - DA'^2 \cdot CE} \tag{21}$$

Observații.

1. Relația (11) se mai poate deduce și astfel:
Știm că

$$S_{ABD} = \frac{1}{2}\, h_a \cdot BD \quad \text{și} \quad S_{ACE} = \frac{1}{2}\, h_a \cdot CE$$

de unde

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACE}} = \frac{BD}{CE} \tag{22}$$

dar

$$S_{ABD} = \frac{1}{2}\, AB \cdot AD \sin\alpha \text{ și } S_{ACE} = \frac{1}{2}\, AC \cdot AE \sin\alpha$$

de unde urmează că:

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACE}} = \frac{AB \cdot AD}{AC \cdot AE} \tag{23}$$

din relațiile (22) și (23) rezultă că:

$$\frac{BD}{CE} = \frac{AB \cdot AD}{AC \cdot AE}$$ adică tocmai relația (11).

2. In triunghiul ABD conform teoremei sinusului avem:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{\sin B}{\sin \alpha} \tag{24}$$

iar în triunghiul ACE avem:

$$\frac{AE}{CE} = \frac{\sin C}{\sin \alpha} \tag{25}$$

Impărțind membru cu membru relațiile (24) și (25) obținem că:

$$\frac{AD}{AE} = \frac{CE}{BD} = \frac{\sin B}{\sin C} \tag{26}$$

însă $\sin B = \frac{2S}{ac}$ și $\sin C = \frac{2S}{ab}$, de unde

$$\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{b}{c} = \frac{AC}{AB} \tag{27}$$

Din relațiile (26) și (27) rezultă că:

$\frac{AD}{AE} \cdot \frac{CE}{BD} = \frac{AC}{AB}$, sau: $\frac{AD}{AE} = \frac{BD}{CE} \cdot \frac{AC}{AB}$, adică relația (11).

Lupaș Laurențiu absolvent București

PENTRU CERCURILE DE FIZICA

CIRCUITUL OSCILANT (SERIE)

Funcționarea oricărui post de radio modern este bazată pe proprietățile circuitelor oscilante. Ne propunem să prezentăm aici, deducerea matematică a unora din proprietățile circuitului oscilant (serie).

Orice circuit oscilant este alcătuit dintr-o capacitate (C), o rezistență (R) și o inductanță (L).

Din teoria curentului alternativ se știe că inductanța defazează tensiunea (U_L) cu $\frac{\pi}{2}$ înaintea curentului, în timp ce capacitatea defazează tensiunea (U_C) cu $\frac{\pi}{2}$ în urma intensității. Vectorial aceasta se reprezintă ca în figura 1.

De la teoria numerelor complexe se știe că rotirea unui vector cu $\frac{\pi}{2}$ echivalează cu înmulțirea cu $i = \sqrt{-1}$ (j, în electrotehnică). Dar, $U_L = X_L \cdot I$ și $U_C = X_C \cdot I$, sau ținînd seama de defazajul corespunzător dintre vectorii considerați avem:

$$\bar{U}_L = j\bar{I} \cdot X_L = j\omega L\bar{I}$$

$$\bar{U}_C = -j\bar{I} \cdot X_C = -\frac{\bar{I}}{j\omega c}.$$

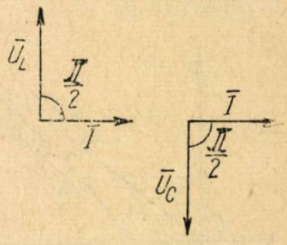


Fig. 1.

Știind că rezistența activă nu introduce defazaj putem scrie legea lui Ohm în acest circuit oscilant:

$$\bar{E} = \bar{I} \cdot R + \bar{I} j\omega L + \bar{I} \cdot \frac{-1}{j\omega c} = I\left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega c}\right)\right],$$

$\bar{E}$ fiind tensiunea la bornele circuitului. Notînd paranteza cu Z, avem: $\bar{E} = \bar{I}.Z$, Z fiind impedanța totală a circuitului. Deci:

$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega c}\right) \quad \text{sau:} \quad |Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega c}\right)^2} \qquad (1)$$

De asemenea, din (1) mai avem unghiul de defazaj dintre tensiunea la borne și I, adică:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega c}}{R}$$

(Z fiind un număr complex).

Scriind valoarea în modul a lui E avem:

$$E = I|Z| = I\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega c}\right)^2},$$

de unde scoatem:

$$I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega c}\right)^2}}.$$

Deoarece E și R sînt constante valoarea lui I depinde doar de ω. Pentru ca circuitul să funcționeze în condiții optime I trebuie să fie maxim. Aceasta se realizează cînd numitorul fracției este minim, adică atunci cînd $\omega L - \frac{1}{\omega c} = 0$.

Din ultima relație scoatem:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{sau:} \quad \nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}},$$

adică cunoscuta formulă a lui Thomson care dă frecvența de rezonanță (ν_0), pentru care circuitul oscilant respectiv funcționează în condiții optime.

Determinarea lui ω_0 corespunzător frecvenței de rezonanță se poate face și pe cale grafică. Fie $X(\omega) = \omega L - \frac{1}{\omega C}$.

Considerăm funcțiile $y_1 = \omega L$, care reprezintă o dreaptă ce trece prin origină și $y_2 = -\frac{1}{\omega C}$, care reprezintă grafic o hiperbolă echilaterală raportată la asimptote (considerînd pe ω pozitiv obținem numai ramura din cadranul IV) (fig. 2).

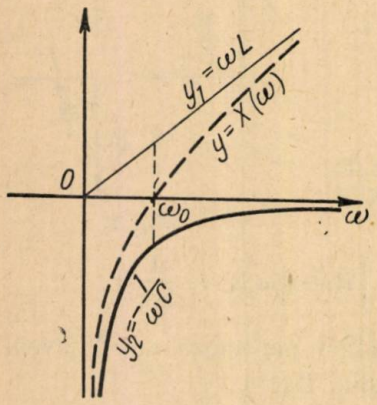


Fig. 2.

Din compunerea celor două grafice (adunarea ordonatelor corespunzătoare fiecărei abscise), rezultă curba reprezentativă a ecuației:

$$y = X(\omega).$$

Există o abscisă ω_0 pentru care cele două ordonate corespunzătoare sînt egale (și de semn contrar), deci suma lor este nulă.

Deci, pentru ω_0 avem condiția de rezonanță $X \equiv 0$, adică ω_0 este pulsația corespunzătoare frecvenței de rezonanță.

Să calculăm valorile intensității și tensiunii pe elementele circuitului, la rezonanță. Pentru ω_0 avem:

$$U_{L0} = j\omega_0 L I_0 = U_{C0} = \frac{I_0}{j\omega_0 C}. \tag{2}$$

Dar, întrucît la rezonanță partea imaginară a impedanței este nulă rămînînd $Z = R$, avem:

$$I_0 = \frac{E}{R}.$$

Înlocuind pe I_0 în (2) avem:

$$U_{L0} = U_{C0} = \omega_0 L \cdot \frac{E}{R} = \frac{1}{\omega_0 C} \cdot \frac{E}{R},$$

de unde:

$$\frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{U_{L0}}{E} = \frac{U_{C0}}{E}. \tag{3}$$

Expresia:

$$\frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR} = Q,$$

reprezintă factorul de calitate al circuitului.

După cum se vede din (3), acesta arată de cîte ori crește la rezonanță tensiunea de pe elementele circuitului față de tensiunea electromotoare E, care acționează în acest circuit oscilant.

Determinarea lui Q este importantă fiindcă el caracterizează un circuit din punctul de vedere al selectivității sale.

Grafic, acest factor se determină cu ajutorul curbei de rezonanță a circuitului care reprezită variația intensității în funcție de reactanța totală (X).

Pentru construirea curbei plecăm de la ecuația ei:

$$I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{E}{\sqrt{R^2 + X^2}} \quad \text{sau:} \quad I(X) = \frac{E}{R\sqrt{1 + \frac{X^2}{R^2}}},$$

care este o funcție pară, deci, o studiem pe intervalul $(0, \infty)$.

Curba taie pe Oy în $I(O) = \frac{E}{R} = I_0$. Admite asimptotă pe Ox, deoarece $\lim_{x \to \infty} I(X) = 0$,

$$I'(X) = -\frac{EX}{R^3\left(1 + \frac{X^2}{R^2}\right)^{3/2}}.$$

Dar $X > 0$, numitorul fiind pozitiv $I' < 0$. Deci, funcția este descrescătoare pe intervalul $(0, \infty)$.

Pentru $X = 0$ admite un maxim:

$$I = I_0 = \frac{E}{R}.$$

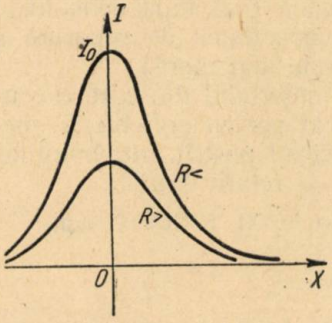


Fig. 3.

Se verifică astfel grafic că I_{max} corespunde condiției de rezonanță ($X \equiv 0$). Graficul arată ca în figura 3.

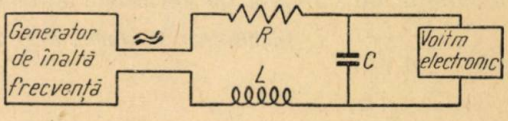


Fig. 4.

Se observă că pentru valori mai mici ale lui R fracția $I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + X^2}}$ crește, deci alura curbei e mai ascuțită; pentru valori mai mari ale lui R, I_0 se micșorează, curba se aplatisează.

Pentru determinarea experimentală a lui Q se folosește însă, curba variației intensității (sau a tensiunii datorită măsurătorilor tehnice mai precise și mai comode), în funcție de frecvență. Datorită relațiilor de proporționalitate dintre X, ω, υ, curba astfel obținută va fi asemănătoare aceleia de mai sus.

Să considerăm curba de rezonanță ridicată pe baza tabelului de date stabilite prin experiență cu ajutorul unui circuit oscilant (serie) fig. 4) a cărui frecvență o putem varia prin intermediul unei heterodine.

Iată tabelul:

ν [kHz] 230, 240, 250, 260, 270, 280, 285 (ν_0) 290, 300, 310, 320, 330, 340,
U[V] 0,12, 0,16, 0,24, 0,37, 0,57, 0,95, 1, 0,95, 0,57, 0,37, 0,24, 0,16, 0,12.

Pentru determinarea factorului de calitate al circuitului ne folosim de formula :

$$\frac{\nu_0}{z\Delta\nu} = Q \qquad (4)$$

unde $Z\triangle\nu$ reprezintă „banda transmisă" a circuitului oscilant, adică spectrul de frecvență cuprins în cadrul limitat de valorile tensiunii egale cu 0,707 U_{C_0}. În cazul nostru tăiem curba cu o paralelă dusă la 0,707.1 (căci $U_{C_0} = 1$ V). Găsim :

$$Z\Delta\nu = 296 - 274 = 22 \text{ kHz}$$

$$\nu_0 = 285 \text{ kHz}$$

Deci :

$$Q = \frac{285}{22} \approx 13.$$

Același rezultat l-am găsit folosind formula (3) $Q = \frac{U_{C_0}}{E}$. Dar $U_{C_0} = 1$ V, iar $E = 77$ mV, găsit prin măsurare directă. Într-adevăr, $Q = \frac{1}{0{,}077} \approx 13$.

Din prima expresie (4) a lui Q observăm că, cu cît Q este mai mare cu atît banda transmisă a circuitului este mai mică (ν_0 fiind constant); deci, circuitul rezonant e mai selectiv (adică, capacitatea de separare a două posturi apropiate în spectrul de frecvență este mai mare).

Se constată experimental, că Q depinde de materialul din care e confecționată carcasa bobinei. Se obține un Q ridicat pentru polietilenă, plexiglas, ceramică și un Q slab pentru textilit. În cazul nostru, întrebuințînd o bobină cu carcasa de ceramică am obținut un Q relativ bun.

Dumitrescu Vladimir, Fezi Adrian, elevi cl. XI, SMILC Ploiești

---

REZULTATELE OLIMPIADEI DE MATEMATICĂ 1961 — Etapa finală

Premiul I

Persache Octavian, cl. VIII școala medie nr. 11, București
Lustig Gheorghe, cl. IX școala medie nr. 5, Timișoara
Diaconescu Radu, cl. X școala medie Pucioasa.

Premiul II

Petrescu Șerban, cl. VIII școala medie nr. 13, București,
Lustman Radu, cl. VIII școala medie nr. 23, București,
Eckstein Gheorghe, cl. IX școala medie nr. 3, Timișoara,
Oprișan Gheorghe, cl. X școala medie nr. 1, Curtea de Argeș,
Bădescu Lucian, cl. X școala medie nr. 1, Cîmpulung Muscel,
Căzănescu Virgil, cl. XI școala medie nr. 1, București,
Popeea Corneliu, cl. XI școala medie nr. 26, București,
Oprea Victor, anul I școala profesională Ștefănești-Argeș.

Premiul III

Nicolae Silvia, cl. VIII școala medie nr. 1, Ploiești,
Flondor Paul, cl. VIII școala medie nr. 12, București,
Hîrtopeanu Ioana, cl. VIII școala medie nr. 4, Iași,
Zsido Laszlo, cl. IX școala medie nr. 4, Brașov,
Grigorescu Șerban, cl. IX școala medie nr. 1, București,
Giurgea Viorel, cl. X școala medie nr. 5, Iași,
Constantin Gheorghe, cl. X școala medie nr. 1, Cîmpulung Moldovenesc,
Craus Mihail, cl. XI Complexul școlar, Bîrlad,
Duma Andrei, cl. XI școala medie nr. 13, București,
Tănase Constantin, anul II școala profesională, Sibiu,
Dan Virgilius, anul I școala maiștri, Sibiu,
Ștefan Ion, anul I școala profesională, Ploiești,
Puțaru Marin, anul I școala profesională Giurgiu.

Mențiuni

Marcus Sergiu, cl. VIII ș.m. 3, Galați, *Iorgulescu Afrodita*, ș.m. 22, București, *Petriu Emil*, cl. VIII ș.m. 1, Hațeg, *Wald Robert*, cl. VIII ș.m. 5, Oradea, *Nicolae Grigore*, cl. IX ș.m. 1, Ploiești, *Buimovici Alexandru*, cl. X ș.m. 18, București, *Georgescu Horia*, cl. X ș.m. 11, București, *Puha Radu*, cl. X ș.m. 1, Rădăuți, *Hiriș Viorel*, cl. XI ș.m. 1, Timișoara, *Strătilă Șerban*, cl. XI ș.m. 1, Pitești, *Zamfirescu Tudor*, cl. XI ș.m. 22, București, *Dabu Răzvan*, cl. XI ș.m. 1 Bacău, *Bărbulescu Aurelia*, cl. XI ș.m. 4 Oradea, *Voicu Valentina*, cl. XI ș.m. 1 Roman, *Ioniță Nicolae*, anul I școala profesională Tîrgoviște, *Rosenberg Petru*, anul I școala profesională Timișoara, *Bălașa Constantin*, anul I școala de maiștri Craiova, *Tăbușcă Ion*, anul III școala pedagogică Bîrlad, *Schiman Daniel*, anul III școala pedagogică Bacău, *Măduță Ioaniție*, anul III școala pedagogică Oradea, *Toma Mihai*, anul III școala pedagogică Suceava.

REZULTATELE OLIMPIADEI DE FIZICĂ 1961 — Etapa finală

Premiul I

Necula Mihai, cl. VIII școala medie nr. 13, București,
Gherguș Felicia, cl. IX școala medie nr. 1, Brăila,
Stăncescu Sanda, cl. IX școala medie nr. 1, Buzău,
Iosif Nicolae, cl. X școala medie nr. 1, Turda,
Constantinescu Mircea, cl. XI școala medie nr. 13, București.

Premiul II

Zacharias Elisabeta, cl. VIII școala medie nr. 5, Brașov,
Caprini Irinel, cl. IX școala medie nr. 36, București,
Marinescu Nicolae, cl. X școala medie nr. 15, București,
Macovski Mihail, cl. XI școala medie nr. 13, București,
Moraru Florian, cl. XI școala medie nr. 17, București,
Philips Norbert, cl. XI școala medie nr. 1, Timișoara,
Kijic Mircea, cl. XI școala medie nr. 13, București,
Buzilică Ion, anul I școala profesională, Iași,
Barbu Gheorghe, anul II școala profesională, Timișoara.

Premiul III

Silvestru Constantin, cl. IX școala medie nr. 13, București,
Silvestru Aurelia, cl. IX școala medie nr. 1, Arad,
Dumitriu Adrian, cl. IX școala medie nr. 6, Brașov,
Brînzănescu Vasile, cl. IX școala medie nr. 1, Constanța,
Mușetescu Cornelia, cl. X școala medie nr. 15, București,
Moțit Horia, cl. X școala medie nr. 3, Brăila,
Udrescu Florin, cl. X școala medie nr. 1, Buzău,
Cazacu Nicolae, cl. X școala medie serală, Buzău,
Szilagy Istvan, cl. XI școala medie nr. 1, Tîrgu Mureș,
Zoran Valeriu, cl. XI școala medie nr. 4, Oradea,
Papp Erhardt, cl. XI școala medie nr. 1, Arad,
Jianu Toma, anul III școala pedagogică Constanța,
Radu Nicolae, anul III școala pedagogică, Buzău,
Munteanu Vasile, anul I școala profesională Sighișoara.

Mențiuni

Alexiu Dumitru, cl. VIII ș.m. 1 Fălticeni, *Vallasek Istvan*, cl. VIII ș.m. 6 Cluj, *Hristescu Ruxandra*, cl. IX ș.m. 11 București, *Bergher Dan*, cl. IX ș.m. 11 București, *Abramovici Alexandru*, cl. IX ș.m. 1 Timișoara, *Mendelsohn Marina*, cl. IX ș.m. 16 București, *Tomuța Liviu*, cl. X ș.m. 4 Cluj, *Ionescu Cornelia*, cl. X ș.m. 4 București, *Grădinaru Gheorghe*, cl. X ș.m. 3, Constanța, *Stăncescu Ortansa*, cl. XI ș.m. 2, Craiova, *Uncuța Cornelia*, cl. XI ș.m. 15 București, *Rădulescu Nicolae*, cl. XI ș.m. 1 București, *Pusztai Kalman*, cl. XI ș.m. 5 Cluj, *Fărcaș Irina*, cl. XI ș.m. 4 Oradea, *Constandache Ionel*, anul I școala de maiștri Rm. Sărat.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 4127

Să se construiască un cerc care trece prin două puncte date și care intersectează un cerc după o coardă de lungime dată.

(clasa IX, olimpiada 1959, Moscova)

Soluție. Considerăm punctele fixe A și B și cercul O de rază R. Cunoscînd lungimea coardei date (CD) putem calcula raza r a unui cerc concentric cu O, astfel ca tangenta la acest cerc să intersecteze cercul după o coardă de lungime dată (CD).

Un cerc variabil ce trece prin A și B determină axul radical MN care taie pe AB în punctul ω, care are aceiași putere față de cercul O și oricare cerc ce trece prin A și B, deoarece $\omega M' \cdot \omega N = \omega A \cdot \omega B$.

Construcție. Construim cercul (Γ) care trece prin A și B. Acest cerc intersectează cercul O în punctele M și N. Axul radical MN taie pe AB în ω. Ducem din ω tangenta la cercul concentric interior. Această tangentă va intersecta cercul O după coarda CD de lungime dată. Patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil deoarece $\omega C \cdot \omega D = \omega A \cdot \omega B$.

Deci, putem construi cercul ce trece prin punctele fixe A și B și determină o coardă de lungime dată pe cercul O.

Avem două soluții cînd punctele A și B se găsesc ambele în exteriorul cercului, ambele în interior sau cel mult unul din puncte se află pe cerc. (În acest din urmă caz construcția e mult mai simplă).

Cînd punctele se găsesc unul în interior și altul în exteriorul cercului O, putem avea două soluții sau niciuna (în funcție de lungimea coardei). Cînd ambele puncte sînt pe cerc nu există nici o soluție afară de cazul cînd distanța dintre ele este egală cu lungimea coardei cînd există o infinitate de soluții. (S-a presupus că lungimea coardei este mai mică decît diametrul cercului).

În cazul cînd mediatoarea lui AB trece prin O, ω se află la infinit MN fiind paralel cu AB. Soluțiile se obțin ducînd coardele CD, $C'D'$ paralele cu AB, tangente cercului concentric cu (O).

Problema 4165

Într-un tetraedru echifacial $ABCD$ notăm cu α, β, γ unghiurile OAB, OAC, OAD, unde O este centrul sferei circumscrise tetraedrului. Să se stabilească relația:

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1$$

Tomescu I., Ploiești

Soluție dată de *D. Ene*, elev Ploiești și *Nicolae Popa*, Focșani. Fie $ABCD$ tetraedul echifacial, unde: $BC=AD=a$; $CA=BD=b$; $AB=CD=c$ și bimediana MN a laturilor AC, BD. Centrul O al sferei circumscrise tetraedrului echifacial este și centrul de greutate G. MN trece prin G astfel că $GM=GN$ și MN este perpendicular pe AC, MN este perpendicular și pe BD (vezi „Tetraedrul" de *G. D. Simionescu*, GMF—B 5, 1959, p. 270).

Pentru tetraedrul echifacial avem:

$$MN^2 = \frac{1}{4}\cdot 2(a^2+c^2-b^2) = \frac{a^2+c^2-b^2}{2}$$

și deci:

$$MG^2 = \frac{a^2+c^2-b^2}{8} \text{ și } R^2 = AG^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{8} \text{ așa că } \sin^2\beta = \frac{MG^2}{R^2} =$$

$$= \frac{a^2+c^2-b^2}{a^2+b^2+c^2} \text{ și deci } \sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma =$$

$$= \frac{b^2+c^2-a^2+c^2+a^2-b^2+a^2+b^2-c^2}{a^2+b^2+c^2} = \frac{a^2+b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2} = 1$$

Observație 1°. Într-un tetraedru echifacial centrul de greutate coincide cu centrul sferei circumscrise. Fie A' punctul diametral opus lui A.

Se știe că oricare ar fi punctul M din spațiu, există relația:

$$\Sigma MA^2 = 4MG^2 + \Sigma GA^2 \text{ (vezi Geometria cl. X).}$$

Dacă M coincide cu A', relația se mai scrie:

$A'A^2 + A'B^2 + A'C^2 + A'D^2 = 8R^2$. Aici $AA' = 2R$, $A'B = 2R \sin \alpha$,

$A'C = 2R \sin \beta$, $A'D = 2R \sin \gamma$.

Făcînd aceste înlocuiri, relația devine:

$4R^2(\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma) = R^2$, adică ceea ce căutăm.

2° Pornind de la această rezolvare problema se poate generaliza.

Pentru M oarecare pe sfera circumscrisă tetraedrului, relația devine $\Sigma MA^2 = 8R^2$ Notînd cu α, β, γ, δ respectiv unghiurile MAO, MBO, MCO, MDO, există relația: $MA = 2R\cos\alpha$ care se poate deduce ușor din triunghiul dreptunghic format construind punctul diametral opus lui A și încă trei relații analoage.

Deci relația $\Sigma MA^2 = 8R^2$ se mai scrie:

$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + \cos^2 \delta = 2$, sau încă:

$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma + \sin^2 \delta = 2$.

Cînd M se apropie indefinit de A, dreapta MA devine tangentă sferei, $\sin^2 \alpha = 1$ și regăsim proprietatea care a făcut obiectul problemei 4165.

Problema 4247

Să se arate că:

$$\sqrt[5]{409\sqrt{7} + 1082} - \sqrt[5]{409\sqrt{7} - 1082} = 4$$

(Revista de matematică, 1960, Budapesta, M. Istvan)

Soluție:

Să arătăm că:

$$\left(\sqrt[5]{409\sqrt{7} + 1082} - \sqrt[5]{409\sqrt{7} - 1082}\right)^5 = 4^5$$

și problema va fi rezolvată.

Notăm:

$$\sqrt[5]{409\sqrt{7} + 1082} = A\,;\ \sqrt{409\sqrt{7} - 1082} = B$$

Cu aceste notații trebuie să avem $(A - B)^5 = 4^5$

Dar, după cum se verifică ușor:

$$(A - B)^5 = (A^5 - B^5) - 5AB\,[(A - B)^3 + 3AB(A - B)] + 10A^2B^2(A - B)$$

Urmează să arătăm că

$$(A^5 - B^5) - 5AB\,[(A - B)^3 + 3AB(A - B)] + 10A^2B^2(A - B) = 4^5.$$

Avînd în vedere notația făcută:

$$A^5 - B^5 = 409\sqrt{7} + 1082 - 409\sqrt{7} + 1082 = 2164.$$

$$A - B = 4$$

$$AB = \sqrt[5]{7 \cdot 403^2 - 1082^2}$$

$$AB = \sqrt[5]{1 \cdot 170 \cdot 967 - 1 \cdot 170 \cdot 724} = \sqrt[5]{243} = 3$$

Egalitatea revine la:

$$2164 - 5 \cdot 3 (4^3 + 3 \cdot 3 \cdot 4) + 10 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 = 4^5$$

care e adevărată:

$$2164 - 1500 + 360 = 1024.$$

Egalitatea din enunț e demonstrată.

Observație: Avem $A - B = 4$; $AB = 3$.
Deci avem un sistem. El dă soluțiile acceptabile:

$$A = \sqrt{7} + 2 \; ; \; B = \sqrt{7} - 2$$

Iată deci alte două egalități:

$$\sqrt[5]{409\sqrt{7} + 1082} = \sqrt{7} + 2 \; ; \; \sqrt[5]{409\sqrt{7} - 1082} = \sqrt{7} - 2$$

Problema 4249

Pe baza BC a triunghiului ABC se ia un punct variabil M prin care se duc paralelele MP și MQ la AC și AB, P și Q fiind respectiv pe AB și AC. Fie N al doilea punct de intersecție al cercurilor circumscrise triunghiului BMP și CMQ.

a) Să se arate că tangentele în P și Q respectiv, la cercurile BMP și CMQ sînt paralele.

b) Să se găsească locurile geometrice ale centrelor celor două cercuri cînd M descrie latura BC.

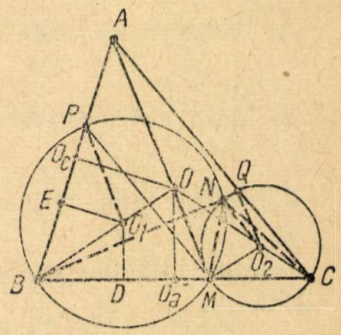
c) Să se găsească locul geometric al lui N cînd M descrie latura BC.

d) Să se arate că punctul de intersecție al celor două locuri geometrice de la punctul (b) este centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

(Olimpiada 1960, cl. IX), D. Flondor

Soluție dată de elevul D. Ene, Ploiești. a) Fie O_1 și O_2 centrele cercurilor BMP și CMQ. Avem $\sphericalangle BO_1P = 2 \sphericalangle BMP = 2 \sphericalangle MCQ = \sphericalangle MO_2Q$ fiindcă MP și AC sînt paralele.

Deoarece $\sphericalangle BO_1P = \sphericalangle MO_2Q$ și triunghiurile BO_1P și MO_2Q sînt isoscele, avem PO_1 paralelă cu QO_2 fiindcă și BO_1 este paralelă cu MO_2 și deci, și tangentele în P la cercul (O_1) și Q la cercul (O_2) vor fi paralele.



b) Cînd $M \equiv B$, $O_1 \equiv B$, iar cînd $M \equiv C, O_1 \equiv O$ unde O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Notațiile fiind cele de pe figură avem:

$$BO_a = \frac{BC}{2}, \; BD = \frac{BM}{2};$$

$$BO_c = \frac{AB}{2}, \; BE = \frac{BP}{2} \text{ și cum}$$

$\frac{BM}{BC} = \frac{BP}{AB}$ (AC și PM fiind paralele), avem: $\frac{BD}{BO_a} = \frac{BE}{BO_c} = \frac{BO_1}{BO}$, așa că mediatoarele lui BM și CM se taie pe BO.

Locul lui O_1 este BO, iar al lui O_2 este CO.

Altă soluție. În cercul BMP avem $\sphericalangle O_1BM = \frac{1}{2}(180° - \sphericalangle BO_1M) = \frac{1}{2}(180^0 - 2P)$, însă $\sphericalangle P = \sphericalangle A$, deci $\sphericalangle O_1BM = \frac{1}{2}(180° - 2A) = \text{const.}$ De altă parte $\sphericalangle OBC = 1/2\,(180° - 2A)$, deci O_1 se află pe dreapta OB. Locul geometric al lui O_1 este segmentul BO. La fel se arată că locul geometric al lui O_2 este CO.

c) Avem $\measuredangle BNM = \measuredangle BPM = \measuredangle A$; $\measuredangle CNM = \measuredangle CQM = \measuredangle A$ așa că $\measuredangle BNC = 2\measuredangle A = \text{constant}$.

Locul lui A este arcul de cerc capabil de $2\measuredangle A$ ce trece prin B și C, adică arcul BOC.

d) S-a văzut că O_1 și O_2 sînt respectiv pe BO și CO care au ca punct comun pe O, centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

Problema 4256

Costul forării primului metru în adîncime, al unui puț este de a lei, iar forarea fiecărui metru de adîncime costă cu 10% mai mult decît metrul precedent.

a) Să se afle de cîte ori costă mai scump forarea unui puț de 5 m adîncime decît a unuia de 2 m.

b) Cu cît la sută costă mai mult forarea celui de-al cincilea metru față de costul primului metru de adîncime?

C. I. T. (Olimpiada, 1950)

Soluție. Al doilea metru costă $a + \frac{a}{10} = \frac{11a}{10} = 1{,}1\,a$

Al III-lea metru costă $\frac{11a}{10} + \frac{11a}{100} = \frac{121a}{100} = (1{,}1)^2 a$

Al IV-lea metru costă $\frac{121a}{100} + \frac{121a}{1000} = \frac{1331a}{1000} = (1{,}1)^3 a$

Al V-lea metru costă $\frac{1331a}{1000} + \frac{1331a}{10\,000} = \frac{14\,641a}{10\,000} = (1{,}1)^4 a$

Forarea puțului de 2 m costă $a + \frac{11a}{10} = \frac{21a}{10}$ lei.

Forarea ultimilor trei metri din puțul de 5 m costă

$$\frac{121a}{100} + \frac{1331a}{1000} + \frac{14\,641a}{10\,000} = \frac{121a}{100}\left(1 + \frac{11}{10} + \frac{121}{100}\right) =$$

$$= \frac{121 \cdot 331a}{10\,000} = \frac{40\,051a}{10\,000}$$

Puțul de 5 m costă $\frac{40051\,a}{10000}+\frac{21\,a}{10}$. El costă deci de

$$\frac{\frac{40051\,a}{10000}+\frac{21\,a}{10}}{\frac{21\,a}{10}}=\left(1+\frac{40051}{21000}\right)$$

ori mai mult decît cel de 2 m, adică de aproximativ 2,9 ori.

b) Avem: $\frac{14641\,a}{10000}:\ a=\frac{x}{100}$; $x=146{,}41$

$$146{,}41-100=46{,}41\,\%.$$

Problema 4268

Berbecul unei sonete de bătut piloni avînd greutatea de 1 000 kgf, cade liber de la o înălțime de 6 m. Să se determine energia potențială și cea de mișcare pe care o are berbecul la 1/4 din distanța parcursă în căderea liberă, precum și viteza finală de cădere.

R. Sfichi, profesor, Fălticeni

Soluția autorului. Aplicînd legea conservării energiei rezultă:

$$E_k+E_p=\text{ct}=E_{max}=Sh_{max}=1000\cdot 6=6000\ \text{kgfm}=$$
$$=6000\cdot 9{,}8=58000\ J.$$

Energia potențială a berbecului la 1/4 din spațiul parcurs în căderea liberă este:

$$E_p=6\cdot h_1 6=6\frac{3}{4}\,\text{h}=1000\cdot\frac{3\cdot 6}{4}\ 4500\ \text{kgfm}=45000\cdot 9{,}8=44100\ J$$

În același punct, energia cinetică este:

$$E_k=E_{max}-E_p=58000-44100=13900\ J$$

Viteza de cădere liberă a berbecului este:

$$v=\sqrt{2gh}=\sqrt{2\cdot 9{,}8\cdot 6}=10{,}83\ \text{m/s}.$$

Problema 4270

Forța magnetomotoare a unui circuit magnetic este de 250 Gb, inductanța magnetică de 10 Gs, iar secțiunea miezului de 2 cm². Să se afle reluctanța circuitului.

D. Bătinețu

Soluția autorului. Notăm cu φ fluxul magnetic al circuitului, cu B inductanța magnetică, cu S secțiunea miezului, cu M forța magnetomotoare și cu R_m reluctanța. Avem:

$$\varphi = B \cdot S \text{ și } R_m = \frac{M}{\varphi}.$$

Dacă $\varphi = B \cdot S$, atunci $1\,Mx = 1\,Gs \cdot 1\,cm^2$. Dar $1\,Gs = 10^{-4}\,Wb/m^2$, $10\,Gs = 10^{-8}\,Wb/m^2$; $1\,cm^2 = 10^{-4}\,m^2$ și $2\,cm^2 = 2 \cdot 10^{-4}\,m^2$. Deci:

$$\varphi = B \cdot S = 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 2 \cdot 10^{-7}\,Wb$$

dar; $1\,Mx = 10^{-8}\,Wb$, de unde $1\,Wb = 10^8\,Mx$, prin urmare:

$$\varphi = 2 \cdot 10^{-7}\,Wb = 20\,Mx$$

$$R_m = \frac{M}{\varphi} = \frac{250\,Gb}{20\,Mx} = 12.5\,Gb/Mx.$$

Problema 4273

Ce cantitate de combustibil trebuie să aibă ultima treaptă a unei rachete pentru a parcurge o traiectorie de 250 km cu o viteză constantă de 11,5 km/s? Puterea rachetei este de 200 000 CP, iar puterea calorică a combustibilului $= 0{,}5 \cdot 10^4 \frac{kcal}{kg}$.

Merches Ioan, profesor, Botoșani

Soluția autorului. $S = 250$ km, $v = 11{,}5$ km/s $t = S/v = 21{,}26$ s, $P = 200\,000 = 2.10^5$ *CP*, 1 *CP* $= 736$ *W*, deci $P = 2.10^5$ *CP* $= 2.10^5 \cdot 736 = 1472.10^5$ *W*.

Utilizăm relația: Q mc $\cdot \Delta t =$ m $\cdot q$, unde $q =$ puterea calorică $= 0{,}5 \cdot 10^4 \frac{kcal}{kg} = 0{,}5 \cdot 10^4 \frac{cal}{g}$.

Mai ținem seamă de relația $W = J.Q$ și obținem succesiv:

$$m \cdot q = \frac{Pt}{J};\ \text{m} \cdot 0{,}5 \cdot 10^4 = \frac{1472 \cdot 10^5 \cdot 21{,}26}{4{,}18} = 14\,954 \text{ g și}$$

$$\text{m} = 149{,}54 \text{ kg} \cong 150 \text{ kg}.$$

Problema 4277

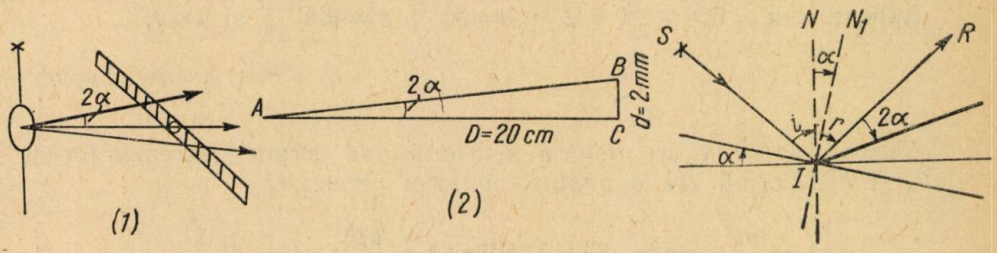
Un galvanometru sensibil, cu oglindă, măsoară curenți de intensități pînă la 10^{-6}*A, cînd oglinda se rotește cu 1 grad. Ce curent a trecut prin galvanometru dacă raza reflectată s-a deplasat pe rigla gradată cu 2 mm, știind că distanța de la oglindă la centrul riglei este de 20 cm.*

Petru Florian, profesor, Dej

Soluția autorului. Se poate demonstra că, dacă oglinda se rotește cu unghiul α raza reflectată se rotește cu unghiul 2α.

(Geometria cl. VIII, problema 20)

Din figură se vede că $\frac{d}{D} = \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{0{,}2}{20} = \frac{1}{100} = 0{,}01$, de unde $2\alpha = 0^0\ 43'32''$, deci, $\alpha = 0°21'46''$ sau $\alpha = 1306''$.



Intensitatea de 10^{-6} A corespunde la o rotire de 1 grad $= 3600$ secunde (sexagesimale). Atunci la 1306 secunde corespunde o intensitate de $\approx 35 \cdot 10^{-4}$ A.

Problema 4280

Să se rezolve ecuația:

$$x^4 - (1 + \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{ab})\,x^3 + [(a+1)\sqrt{b} + (b+2)\sqrt{a} + 2\sqrt{ab}]\,x^2 -$$
$$- [a\sqrt{b} + b\sqrt{a} + (1 + \sqrt{ab})\sqrt{ab}]\,x + ab = 0$$

Valeriu Șt. Udrescu

Soluție. Ecuația se mai poate scrie astfel:

$$x^3(x - \sqrt{a} - \sqrt{b} - \sqrt{ab}) - x^2(x - \sqrt{a} - \sqrt{b} - \sqrt{ab}) +$$
$$+ x\sqrt{ab}\,(\sqrt{a} + \sqrt{b} + 1)\,(x-1) - ab\,(x-1) = 0$$
$$(x-1)[x^2(x - \sqrt{a} - \sqrt{b} - \sqrt{ab}) + x\sqrt{ab}\,(\sqrt{a} + \sqrt{b} + 1) - ab] = 0 \text{ sau}$$
$$(x-1)[x^3 - (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{ab})\,x^2 + \sqrt{ab}\,(\sqrt{a} + \sqrt{b} + 1)\,x - ab] = 0 \text{ sau}$$
$$(x-1)[x^2(x - \sqrt{ab}) - x(\sqrt{a} + \sqrt{b})(x - \sqrt{ab} + \sqrt{ab}(x - \sqrt{ab})] = 0 \text{ sau}$$
$$(x-1)(x - \sqrt{ab})[x^2 - (\sqrt{a} + \sqrt{b})\,x + \sqrt{ab}] = 0$$

Soluțiile ecuației sînt prin urmare:

$$x_1 = 1;\ x_2 = \sqrt{ab};\ x_3 = \sqrt{a};\ x_4 = \sqrt{b}$$

Problema 4285

Două greutăți egale m, sînt legate la capetele unei sfori trecută peste un scripete fix situat la extremitatea de sus a unui plan înclinat de un unghi α față de orizontală. Să se calculeze:

a) *În cît timp urcă corpul de pe plan, dacă inițial se găsește în repaus la baza planului de lungime l, iar coeficientul de frecare este μ;*

b) *Care este tensiunea în fir și cum variază ea cu înclinarea planului;*

c) *Care este forța ce se exercită asupra axului scripetelui.*

Aplicații: $m = 500\ g$; $l = 2\ m$; $\alpha = 30°$; $g = 980\ \frac{cm}{s^2}$ și $\mu = 0{,}1$.

D. Tănase, profesor, București

Soluția autorului. a) Asupra sistemului de corpuri lucrează forțele G, F_1 și F_f. Corpul are o mișcare uniform accelerată.

$$S = \frac{at^2}{2}, \text{ unde } S = l, \text{ adică } l = \frac{at^2}{2}; \quad t = \sqrt{\frac{2l}{a}}.$$

Forța care imprimă accelerația este $F = G - F_1 - F_f$ sau:

$$2ma = mg - mg\sin\alpha - \mu\, mg\cos\alpha, \text{ de unde } a = \frac{1 - \sin\alpha - \mu\cos\alpha}{2}\, g.$$

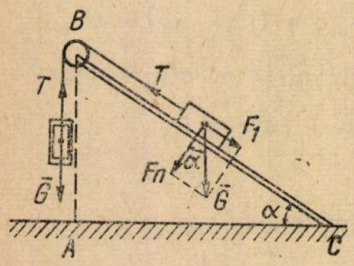
$$t = \sqrt{\frac{2l}{ga}} = 2\sqrt{\frac{l}{g(1 - \sin\alpha - \mu\cos\alpha)}} \cong 1{,}4\ s.$$

b) Aplicînd ecuația generală a dinamicii pentru corpul ce se mișcă pe verticală avem: $G - T = ma$.

$$T = mg - ma = m(g - a) = mg\left(1 - \frac{1 - \sin\alpha - \mu\cos\alpha}{2}\right) =$$

$$= mg\,\frac{1 + \sin\alpha + \mu\cos\alpha}{2}.$$

Dacă aplicăm ecuația pentru corpul ce se mișcă pe plan avem:



$$T = ma + F_1 + F_f$$

$$T = mg\,\frac{1 - \sin\alpha - \mu\cos\alpha}{2} +$$

$$+ mg\sin\alpha + \mu\, mg\cos\alpha =$$

$$= mg\,\frac{1 + \sin\alpha + \mu\cos\alpha}{2} \cong 0{,}4\ kgf$$

c) Compunem cele două tensiuni după regula paralelogramului și obținem reacțiunea sprijinului:

$$R = \sqrt{2T^2 + 2T^2\cos(90 - \alpha)} = T\sqrt{2[1 + \cos(90 - \alpha)]} =$$

$$= T\sqrt{2(1 + \sin\alpha)} \cong 0{,}692\ kgf.$$

Problema 4286

Un tractor avea de arat un teren de 192 pogoane ce trebuia să fie semănat cu porumb. Cunoaștem puterea tractorului fiind de 32 kW, viteza cu care ară=4,5km/h și că se cheltuiesc 48 kW/h la hectar. Se stabilește ca terenul să fie arat în mai puțin de 20 de zile. Știind că s-a lucrat 8 ore pe zi, să se calculeze:

a) *În cît timp se ară terenul ce trebuia semănat?* b) *Să se determine forța de tracțiune a tractorului.*

* * *

Soluție dată de elevul *Stoinea Ion*, Bîrlad. a) Cunoaștem formula $P = \frac{W}{t}$ (unde P este puterea tractorului, W este lucrul mecanic și t, timpul). De aici $t = \frac{W}{P} = \frac{48}{32} = 1{,}5$ h sau 1^h30^{min} la ha.

Pe zi se va ara $\frac{8}{1{,}5} = \frac{16}{3}$ ha $\cong 5{,}44$ ha. Dar 192 pogoane=96 ha $\left(1 \text{ pogon} = \frac{1}{2}\text{ha}\right)$. Deci tractoristul va ara terenul în $96:\frac{16}{3} = \frac{96 \cdot 3}{16} =$ = 18 zile.

b) Din prima formulă putem înlocui pe W cu $F \cdot d$ (produsul dintre forță și deplasare), așa că avem: $P = \frac{F \cdot d}{t} = F\frac{d}{t}$; dar $\frac{d}{t} = v$ este viteza, rezultă că $P = F.v$ (produsul dintre forța de tracțiune și viteză).

Din formula $F = \frac{P}{v}$, știind că $P = 32$ *kW*, iar 1 *kW* = 1,36. 75 kgm/s rezultă că: $P = 32 \cdot 1{,}36 \cdot 75 = 3264$ kgfm/*s* iar $v = 4{,}5$ *km/h* = 1,25 m/s. Deci: $F = \frac{3264}{1{,}25} = 2611{,}2$ kgf.

Problema 4287

Un corp punctiform izolat, încărcat cu sarcina Q=+10,003 C crează în jurul lui un cîmp electric. În acest cîmp se dau două puncte: A aflat la depărtarea r_1=0,3 m și B aflat la distanța r_2=90 cm de sarcină. Să se determine:

a) *Intensitatea cîmpului în punctul A;* b) *potențialul electric în punctul A;* c) *diferența de potențial în volți, între punctele A și B;* d) *lucrul mecanic în jouli, ce se consumă la deplasarea unei sarcini q = + 200 ues CGS de la punctul A la punctul B.*

I. Jaliu, profesor, București

Soluția autorului. Exprimăm sarcina electrică în ues CGS și avem:

$$Q = 10{,}003 \cdot 3 \cdot 10^9 = 9 \cdot 10^6 \text{ ues CGS.}$$

a) Intensitatea cîmpului electric este:

$$E = \frac{Q}{r_1^2} = \frac{9 \cdot 10^6}{9 \cdot 10^2} = 10000 \text{ ues CGS.}$$

b) Potențialul va fi:

$$V = \frac{Q}{r_1} = \frac{9 \cdot 10^6}{30} = 3 \cdot 10^5 = 300\,000 \text{ ues CGS.}$$

c) Diferența de potențial între A și B este:

$$V_A - V_B = Q\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = 9 \cdot 10^6 \left(\frac{1}{30} - \frac{1}{90}\right) = 9 \cdot 10^6 \frac{2}{90} =$$
$$= 2 \cdot 10^5 \text{ ues CGS} = 2 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 10^2 \cdot V = 6 \cdot 10^7 \, V.$$

d) Lucrul mecanic consumat între A și B va fi:

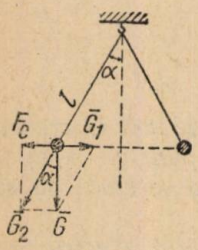
$$L = q\,(V_A - V_B) = 200 \cdot 2 \cdot 10^5 = 4 \cdot 10^7 \text{ erg} = 4 \, J.$$

Problema 4296

Două sfere metalice identice, fiecare de rază r cm și masă m grame sînt legate de cîte un fir de lungime l metri și cu același punct de suspensie, astfel că sferele se ating. Facem contactul uneia din sfere cu polul pozitiv al mașinii electrostatice. Cele două sfere se îndepărtează astfel că fiecare fir face cu verticala un unghi α. Să se calculeze: a) *Cantitatea de electricitate exprimată în amperi-oră ce a trecut pe fiecare sferă;* b) *Intensitatea cîmpului electric exprimat în* $\frac{V}{m}$ *pentru punctul de suspensie;* c) *Capacitatea fiecărei sfere în farazi și potențialul polului în volți.*

D. Tănase, profesor, București

Soluția autorului. a) Sferele se îndepărtează pînă în momentul cînd se produce un echilibru între forțele ce lucrează asupra lor. Din figură



rezultă: $F_c = G \cdot \operatorname{tg}\alpha$ sau $\frac{q^2}{\alpha^2} = G \operatorname{tg}\alpha$; $\frac{d}{2} = l \sin\alpha$;

$d = 2l \sin\alpha$, deci: $q = 2l \sin\alpha \sqrt{G \cdot \operatorname{tg}\alpha}$.

Ținînd seama de unitățile de măsură avem:

$$q = 2 \cdot 100\, l \cdot \sin\alpha \sqrt{m \cdot 100 \cdot \operatorname{tg}\alpha} \text{ ues CGS} =$$

$$= \frac{200 \cdot 31{,}3\, l \sin\alpha \sqrt{m \operatorname{tg}\alpha}}{3 \cdot 10^9} \text{ coulombi} =$$

$$= \frac{200 \cdot 31{,}3\, l \sin\alpha \sqrt{m \operatorname{tg}\alpha}}{3 \cdot 10^9 \cdot 3600} Ah = 57{,}97 \cdot 10^{-11} \cdot l \sin\alpha \sqrt{m \operatorname{tg}\alpha} \cdot \text{A.h.}$$

b) În punctul de legătură intensitatea cîmpului produs de sarcinile ambelor sfere se calculează după regula paralelogramului:

$$H_r = \sqrt{H_1^2 + H_2^2 + 2 H_1 H_2 \cos 2\alpha}, \text{ deoarece } H_1 = H_2 = H = \frac{q}{l^2}$$

avem:

$$H_r = \sqrt{H^2 + H^2 + 2H^2 \cos 2\alpha} = H \sqrt{2(1 + \cos 2\alpha)} =$$
$$= \frac{q}{l^2} \sqrt{2(1 + \cos 2\alpha)}.$$

Ținînd seama de unitățile de măsură avem:

$$H_r = 200 \cdot 31{,}3\, l \cdot 300 \sqrt{2} \sin\alpha \sqrt{m \operatorname{tg}\alpha} \cdot \sqrt{1 + \cos 2\alpha}\, \frac{V}{m} =$$

$$= 76{,}998 \cdot 10^4 \frac{\sin\alpha \sqrt{m \operatorname{tg}\alpha\,(1 + \cos 2\alpha)}}{l} \cdot \frac{V}{m}.$$

c) Capacitatea sferei este

$$C = \frac{r}{9 \cdot 10^{11}} \cdot F$$

Potențialul polului este egal cu potențialul sferei

$$V = \frac{Q}{C} \quad \frac{\text{Coulombi}}{\text{Farazi}}$$

$$V = \frac{200 \cdot 31{,}3 \cdot 9 \cdot 10^{11}}{3 \cdot 10^9 ! \, r}\, l \sin\alpha \sqrt{m \operatorname{tg}\alpha} =$$

$$= 6 \cdot 31{,}3 \cdot 10^4 \frac{l \sin\alpha \sqrt{m \operatorname{tg}\alpha}}{r} = 187{,}8 \cdot 10^4 \frac{l \sin\alpha \sqrt{m \operatorname{tg}\alpha}}{r} V$$

$$V = 187{,}8 \cdot 10^4 \frac{l \sin\alpha \sqrt{m \operatorname{tg}\alpha}}{r} V$$

CHESTIUNI DE EXAMEN

Probleme date la Olimpiada de matematică, etapa regională, din 23 martie 1961, la lucrarea scrisă. Timp de lucru 3 ore. Toate chestiunile obligatorii.

Clasa a VIII-a școli medii și anul I școli pedagogice

4716. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{aligned} &a^2x + b^2y - (a + b)z = a^3 - b^3 \\ &a^3x + b^3y - (a^2 + b^2)z = a^4 - b^4 \\ &a^4x + b^4y - (a^3 - b^3)z = a^5 - b^5 + 2ab^4 \\ &(a \neq b) \end{aligned}$$

Gh. Bazacov (Turnu Severin)

4717. Pe drumul dintre localitățile A și B, care măsoară 14 km, se află o uzină către care pleacă simultan din A un autocamion și un turist cu bicicletă, iar din B un grup de muncitori pe jos. Autocamionul întîlnește grupul din B după 15 minute de la plecarea din A. Întorcîndu-se cu acest transport spre uzină, mașina întîlnește turistul după 25 minute.

Să se afle: a) Viteza grupului din B pînă la întîlnirea cu mașina, b) Viteza turistului dacă viteza mașinii este de 50 km pe oră și nu se ține seama de opriri.

Lucia Țene

4718. Se dă un paralelogram $ABCD$ cu centrul O și cu unghiul A ascuțit. Prin O se duce o secantă care taie pe Ab și CD respectiv în M și P și taie prelungirile laturilor CB și AD, în N și R ($NB < NC$).

a) Să se arate că patrulaterul $ARCN$ este paralelogram. Cum trebuie dusă secanta prin O așa încît acest paralelogram să fie dreptunghi? b) Cum trebuie dusă această secantă pentru a avea $RP = PM = MN$? c) Să se arate că în acest ultim caz, AP trece prin mijlocul lui CR; CM trece prin mijlocul lui AN; BR trece prin mijlocul CD și DN prin mijlocul lui AB.

Cornel Georgescu (Craiova)

Clasa a IX-a școli medii și anul II școli pedagogice

4719. Dacă numerele a, b, c sînt în progresie geometrică, să se arate că:

a) $a^n(\sqrt{c^n} - \sqrt{b^n})(\sqrt{a^n} + \sqrt{b^n} + \sqrt{c^n}) = \sqrt{b^n}(b^n\sqrt{b^n} - a^n\sqrt{a^n})$ și

$$\frac{\sqrt[n]{a^m} + \sqrt[n]{b^m} + \sqrt[n]{c^m}}{\sqrt[n]{a^{-m}} + \sqrt[n]{b^{-m}} + \sqrt[n]{c^{-m}}} = \sqrt[3n]{(abc)^{2m}}$$

b) Să se arate că dacă a, b, c sînt în progresie geometrică parabolele $y = ax^2 + bx + c$ și $y = ax^2 - bc + c$, nu taie axa x-lor. Să se afle coordonatele vîrfurilor acestor parabole și intersecția lor cu axa y-lor. c) Să se demonstreze că dacă a, b, c sînt în progresie geometrică, avem:

$$\frac{1}{3} \leqslant \frac{ax^2 + bx + c}{ax^2 - bx + c} \leqslant 3.$$

Să se arate că fracția $\frac{ax^2 - bx + c}{ax^2 + bx + c}$ nu poate lua valori în afara intervalului $\left(\frac{1}{3}, 3\right)$.

C. Ionescu-Țiu

4720. Într-un circuit între punctele A și B s-au introdus rezistențele $r_1 = 3$ ohmi și $r_2 = 4$ ohmi, în paralel. Pentru ca rezistența totală între punctele A și B să fie $R = 1$ ohm se mai introduce în paralel o a treia rezistență r_3. Știind că $\frac{1}{R} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$, să se afle r_3 prin construcție grafică cu rigla și compasul.

C. Ionescu-Țiu

4721. Se dau două cercuri de raze $R_1 = 2$ cm și $R_2 = 4$ cm, distanța între centre fiind $O_1O_2 = 9$ cm și un punct A din plan așezat la distanțele $O_1A = \sqrt{20}$ cm și $O_2A = \sqrt{29}$ cm.

a) Segmentele O_1A și O_2A întîlnesc cercurile O_1 și O_2 respectiv în B și C iar secanta BC mai taie cercurile în D și E. Să se afle lungimile segmentelor BC și DE. b) Să se construiască cu rigla și compasul o secantă care să treacă prin A și să determine pe aceste cercuri coarde egale.

C. Ionescu-Țiu

Clasa a X-a școli medii

4722. a) Să se calculeze $S = \sum_{1}^{n} n^3 + an^2 + (a - 1)n$

b) Să se arate că expresia $E = \dfrac{12S}{n(n+1)(n+2)}$ este un număr întreg dacă a este întreg.

c) Ce condiții trebuie să îndeplinească numărul a pentru ca să avem $E = a^2$.

O. Sacter

4723. a) Într-un vas complet închis, transparent, în formă de piramidă regulată cu baza un poligon de n laturi se află lichid la o înălțime de h cm de vîrf. Vasul are axa pe direcția verticalei locului și vîrful în jos. Se răstoarnă vasul cu baza, orizontală. La ce înălțime se ridică lichidul știind că înălțimea vasului este H cm, iar latura poligonului bazei a cm.

Să se arate că z depinde numai de h și H.

b) Dacă piramida nu este regulată și are aceeași înălțime cu piramida regulată, se mai păstrează proprietatea și în ce condiții? c) Aplicație numerică: piramida regulată are baza pătrată cu $a = 6$ cm, $h = 4$ cm și $H = 8$ cm. (Se va afla rezultatul fără a se calcula zecimale).

O. Sacter

4724. Să se arate că dacă $\sin 2(a + c) = n \sin 2b$, atunci

$$\operatorname{tg}(a + b + c) = \frac{n+1}{n-1} \operatorname{tg}(a - b + c).$$

Kiss Elemer și *Simon Petru* (Tg. Mureș)

Problemele date la Olimpiada de fizică, etapa regională din 23 martie 1961, la lucrarea scrisă

4725. Un vagon cu masa de 20 t se mișcă cu o viteză de 72 km/h, la o curbă cu raza de 800 m. Să se determine: a) Mărimea forței centrifuge de inerție care acționează asupra vagonului. b) Supraînălțarea șinei exterioare față de cea interioară, știind că ecartamentul liniei este de 1, 5 m. c) Coeficientul de frecare dintre platforma vagonului și un corp aflat pe ea pentru ca acest corp să rămînă fix; se presupune în acest caz orizontalitatea șinelor. Se va considera $g = 10$ m/s^2.

Clasa a VIII-a (V. Atanasiu)

4726. La un centru de observație al unei expediții arctice, a rămas un singur barometru cu mercur, în care a pătruns însă o mică cantitate de aer, astfel că la temperatura de 7°C el arată o presiune de 72 centimetri coloană de mercur, în loc de 76 cm. În acest caz lungimea camerei barometrice (spațiul din tubul barometric rămas deasupra mercurului) este de 14 cm. a) Care este presiunea atmosferică într-o zi în care barometrul indică la 7°C o presiune de 70 cm Hg? b) Dar într-o zi cînd la 0°C baro-

metrul arată o presiune de 72 cm Hg ? c) Dar în ziua în care la —33°C barometrul arată o presiune de 70 cm Hg. In raport cu coeficientul de dilatare al gazelor, coeficientul de dilatare al sticlei este neglijabil.

Clasa a IX-a (N. Hangea)

4727. Un voltametru cu anod de Ag, care conține soluția de $AgNO_3$, este legat în serie cu o rezistență de 25 ohmi și cu o bobină lungă de 20 cm, cu 100 spire, avînd miez de fier. Rezistența se află într-un vas care conține 0,5 l apă la temperatura de 18°C. Prin circuit trece un curent electric care transportă la catod $5 \cdot 10^{21}$ ioni de Ag, încălzește apa din vasul ce conține rezistența și produce în miezul de fier o inducție magnetică de 31 400 gauss. Se cere : a) Cantitatea de Ag depusă la catod. b) Intensitatea curentului și timpul cît circulă. c) Pînă la ce temperatură se încălzește apa din vas. Echivalentul electrochimic al Ag este 1,118 mg/C ; sarcina electronului este $1,6 \cdot 10^{-19}$C ; se neglijează capacitatea calorică a vasului.

Clasa a X-a (M. Aiiincai)

4728. Un sistem optic este format prin acolarea a două lentile subțiri. Prima lentilă are indicile de refracție $^3/_2$, iar cea de-a doua $^4/_3$. Cele două fețe sferice au razele de 5 cm, respectiv 10 cm, în vaolare absolută. a) Să se calculeze convergența sistemului optic. b) Sistemul optic, considerat ca o lentilă subțire, este așezat coaxial cu o oglindă concavă, care are raza de 12 f, iar vîrful ei se află la distanța $15 \cdot f$ de centrul optic al lentilei. La ce distanță de lentilă trebuie așezat un obiect pentru ca imaginea dată de sistemul lentilă-oglindă-lentilă să fie reală și la distanța 2,5 f de centrul optic al lentilei, în stinga ei. c) Să se calculeze raportul dintre mărimea imaginii finale și obiect.

Clasa a XI-a (N. Stănescu)

4729. Un tren pleacă dintr-o stație avînd o mișcare uniform accelerată. După ce a parcurs 600 m, atinge viteza de 45 km/h și își continuă apoi drmul cu o mișcare uniformă timp de 10 minute. Cu 50 secunde înainte de a se opri, în stația următoare, începe frînarea. Să se determine : a) Timpul și accelerația în mișcarea uniform accelerată. b) Accelerația încetinitoare în timpul frînării. c) Distanța dintre cele două stații.

Anul I, școli pedagogice (V. Atanasiu)

4730. Se dă un plan înclinat format de un triunghi dreptunghic avînd cateta orizontală egală cu 40 m, iar cateta verticală egală cu 9 m. Pe acest plan înclinat se află un corp de 100 kg. Se aplică corpului o forță paralelă cu planul înclinat egală cu 40 kgf și îndreptată în sus (coeficientul de frecare este 0,2). Se întreabă : a) Corpul se urcă sau coboară? b) Ce valoare ar trebui să aibă forța aplicată pentru ca să se obțină o mișcare uniformă, în sus, a corpului ? c) Care este în acest ultim caz, lucrul mecanic produs în lungul planului înclinat ?

Anul II, școli pedagogice (I. Jaliu)

4731. Pentru producerea vaporilor necesari unei uzine se folosește un cazan cu motorină. Cazanul dă 200 kg vapori pe oră. Să se determine : a) Cantitatea de căldură necesară pentru producerea celor 200 kg vapori. b) Cantitatea de motorină necesară pe oră. Apa intră în cazan la temperatura de 15°C și numai 15% din căldura produsă este absorbită de cazan.

Puterea calorică a motorinei este de 11000 kcal/kg iar căldura de vaporizare a apei este de 539 kcal/kg.

Anul III, școli pedagogice

4732. a) Cît va costa energia electrică cheltuită pentru descompunerea unui kilogram de apă, dacă un kilowattoră costă 0,60 lei, iar curentul se ia de la rețeaua cu tensiunea de 120 V. b) Rezistența aparatului fiind egală cu 2 ohmi care este intensitatea curentului? c) Cît timp este necesar pentru producerea descompunerii?

Anul IV, școli pedagogice

4733. Un corp greu de 100 kgf alunecă pe o suprafață orizontală cu o mișcare uniformă. Știind că frecarea dintre corp și suprafața orizontală are coeficientul 0,2, se cere:

a) forța cu care trebuie să acționăm pentru a produce mișcarea uniformă a corpului. b) lucrul mecanic efectuat pe o distanță de 2,5 km. c) dacă distanța de 2,5 km se execută în 1 și $1/4$ minute, care este puterea mecanică dezvoltată?

Anul I, școli profesionale, (I. Jaliu)

4734. O baterie formată din 5 elemente legate în serie, fiecare element avînd o tensiune electromotoare de 1,4 volți și o rezistență interioară de 0,2 ohmi, alimentează un circuit, format din doi conductori legați în paralel. Unul din conductori are o rezistență de $\frac{1}{4}$ ohmi, iar celălalt de $\frac{1}{5}$ ohmi. Să se determine: a) Intensitatea curentului prin firul unic. b) Cantitatea de căldură degajată, într-o oră de conductorul cu rezistența de $\frac{1}{5}$ ohmi.

Anul II, școli profesionale

4735. a) Ce cantitate de fontă vom putea topi într-un cuptor avînd randamentul de 15%, dacă întrebuințăm o tonă de cărbuni cu o putere calorică, de 7000 kcal/kg? Temperatura inițială a fontei este de 15°C, iar temperatura de topire este 1165° C; căldura specifică, a fontei este 0,11 kcal/kg. b) Care este puterea unei mașini termice ce ar consuma aceeași cantitate și calitate de cărbuni în 10 ore, randamentul ei fiind de 5%?

Anul I, școli tehnice maiștri

PROBLEME PROPUSE *)

4736. Considerăm o iperbolă de vîrfuri A, A' și focare F, F'. Perpendiculara în A pe axa AA' taie o asimptotă în G. Să se arate că triunghiul FGF' este dreptunghic.

b) Fie M un punct mobil pe iperbolă. Notăm cu d distanța de la centrul iperbolei la tangenta în M. Să se arate că

$$d^2 \cdot MF \cdot MF' = a^2b^2$$

a, b fiind semiaxele.

N. Mihăileanu

*) VIII (4741, 4747, 4748, 4763, 4764); IX (4743, 4744, 4749, 4751, 4769, 4766); X (4738, 4740, 4752, 4753, 4754, 4754, 4755, 4756, 4757, 4758, 4759, 4760, 4762, 4765, 4769, 4770); XI (4736, 4737, 4739, 4742, 4745, 4746, 4750, 4767, 4771).

4737. Să se reprezinte grafic funcțiile

$$y_1 = \operatorname{tg} x \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x} + \operatorname{cotg} x \sqrt{1+\operatorname{cotg}^2 x}$$

$$y_2 = \sin x \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x} + \cos x \sqrt{1+\operatorname{cotg}^2 x}$$

$$y_3 = \operatorname{tg} x \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x} - \operatorname{cotg} x \sqrt{1+\operatorname{cotg}^2 x}$$

$$y_4 = \sin x \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x} - \cos x \sqrt{1+\operatorname{cotg}^2 x}$$

C. Ionescu-Țiu

4738. Să se arate că dacă $a+b+c=0$ atunci:

$$a^n+b^n+c^n+(ab+ac+bc)(a^{n-2}+b^{n-2}+c^{n-2}) = abc(a^{n-3}+b^{n-3}+c^{n-3}).$$

(În legătură cu problema 4045).

Anghelache Tudorică, elev Pitești

4739. Să se arate că ecuația cercului cu diametrul AB $[A(x_1, y_1); B(x_2, y_2)]$ se poate scrie sub forma:

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0.$$

Ce proprietate a coardelor cercului este exprimată direct de această relație?

* * *

4740. Acumulatorul automobilului G.A.Z. are t.e.m. $E = 14{,}5$ V și rezistența interioară de 0,21 Ω. Acest acumulator alimentează trei circuite de lămpi montate în paralel față de circuitul principal. Primul și al treilea circuit au montate în derivație cîte două lămpi. Al doilea circuit are tot două lămpi. Lămpile sînt identice și au o rezistență de 6 Ω. Știind că cele trei circuite de lămpi se află la 3 metri depărtare de acumulator și că sîrma circuitului are secțiune de 3 mm², să se calculeze intensitatea și tensiunea curentului care circulă prin acest circuit. Se dă rezistivitatea cuprului $\varrho = 0{,}017$.

* * *

4741. Să se demonstreze că 17 este cel mai mic număr de n cifre al cărui pătrat 289 se obține adunîndu-i numărul $11\ldots1_n$, tot de n cifre și scriind apoi, o cifră la dreapta numărului astfel format adică:

$$17^2 = (17+11)\times 10+9.$$

Gh. Buicliu

4742. Fie M un punct pe o parabolă, iar N intersecția normalei în M la parabolă cu axa parabolei. Notăm cu N' proiecția lui N pe OM, O fiind vîrful parabolei. Să se găsească locul geometric al punctului P de intersecție a dreptelor MM', NN'.

Mircea Rădulescu, elev Constanța

4743. a) Să se arate că dacă există relațiile:

$$\frac{1-a^2}{bc}+\frac{1-b^2}{ac}+\frac{1-c^2}{ab}+3=0 \text{ și } a+b+c=1$$

atunci există și relația: $ab+bc+ca=0$.

b) Să se arate că pentru orice valoare pozitivă sau negativă (în numere întregi și diferită de 0 și 1) a expresiei $a+b+c$, expresia $ab+bc+ca$ va avea totdeauna o valoare pozitivă.

c) Ce valoare trebuie să aibă expresia $a+b+c$ pentru ca expresia $ab+bc+ca$ să fie egală cu 5.

Ghica Anton, elev Pitești

4744. Se dă cercul O, punctul A pe cerc, diametrul MN și dreapta $\triangle$ perpendiculară pe MN în B. Dreapta AN taie pe $\triangle$ în C. Se cere locul geometric al centrului cercului ABC.

a) cînd A este mobil pe cerc, iar $\triangle$ este fixă,

b) cînd A este fix, iar $\triangle$ se deplasează paralel cu ea însăși.

Tudor Zamfirescu, elev București

4745. Care este domeniul punctelor $M(x, y)$ din planul xOy în care avem:

$$x\sqrt{1-x^2}+y\sqrt{1-y^2}>1,$$

$$x\sqrt{1-x^2}+y\sqrt{1-y^2}<1,$$

$$x\sqrt{1-x^2}+y\sqrt{1-y^2}>-1,$$

$$x\sqrt{1-x^2}+y\sqrt{1-y^2}<-1,$$

$$x\sqrt{a^2-y^2}-y\sqrt{a^2-x^2}>a^2.$$

C. Ionescu-Țiu

4746. La 15 mai 1958 în Uniunea Sovietică a fost lansat al treilea „Sputnik" la altitudinea de 1900 km. Să se calculeze: a) perioada unui pendul ridicat la această altitudine și care bate secunda pe Pămînt; b) cu ce perioadă și cu ce amplitudine ar oscila un resort ridicat la aceeași altitudine, dacă de el este suspendată o masă de 100 g, iar pe Pămînt resortul se lungește cu 10 cm cînd este încărcat cu aceeași masă.

(La cl. XI, olimpiada februarie 1961) Nicolae Stănescu

4747. Trei muncitori transportă o grindă. Unul o susține la un capăt, iar ceilalți doi au pus o pîrghie la o anumită distanță de la celălalt capăt și au apucat de capetele ei. Să se determine: a) distanța la care au așezat pîrghia sub grindă, dacă toți fac eforturi egale, știind că grinda este lungă de 4 m și grea de 90 kgf; b) se sprijină grinda cu capetele pe doi pereți; la distanța de 1 m de capătul din dreapta se atîrnă o greutate de 200 kgf. Care este apăsarea pe fiecare perete?

(La an I, școli pedagogice, olimpiada februarie 1961) Virgil Atanasiu

4748. Pe un plan înclinat cu lungimea de 8 m și înălțimea de 1,6 m se ridică o greutate de 630 *N*. Coeficientul de frecare este 0,1. Să se determine: a) lucrul mecanic util; b) randamentul.

(La an II școli pedagogice, olimpiada februarie 1961)

4749. Un vas de cupru cîntărește 500 g ($c = 0{,}09$ cal/g. grd). În vas se află 1 kg de apă la temperatura de 20°*C*. Să se determine: a) cantitatea *m* grame de apă la fierbere necesară să se toarne în vas pentru ca amestecul să aibă o temperatură de 50°*C*; b) cantitatea de gheață pe care ar topi-o cele *m* grame de apă la fierbere, apa avînd la sfîrșit 0°*C*. (căldura de topire a gheții este 80 cal/g).

(La an III școli pedagogice, olimpiada februarie 1961)

4750. Să se reprezinte graficul funcțiilor:

$$3x^2 - xy + 3y^2 = 16,\quad 7x^2 - 4xy + 7y^2 = 38$$

și să se rezolve sistemul.

* * *

4751. Să se rezolve ecuația

$$\frac{ax+b}{a+bx} + \frac{cx+d}{c+dx} = \frac{ax-b}{a-bx} + \frac{cx-d}{c-dx}$$

(Matematikai Lapok, Budapesta 1960)

4752. În tetraedrul *ABCD* se consideră un punct *M* interior. Dreptele *AM*, *MB*, *MC* și *MD* intersectează fețele opuse respectiv în punctele M_A, M_B, M_C, și M_D. Să se demonstreze că

$$\frac{MA}{MA_A} \cdot \frac{MB}{MM_B} \cdot \frac{MC}{MM_C} \cdot \frac{MD}{MM_D} > 3^4$$

Aurel P. Stoicescu, student București

4753. Să se arate că

$$E = \frac{(\sec^2 a - 1)^2 + (\operatorname{cosec}^2 a - 1)^2}{(\sec^2 a - 1)^2 - (\operatorname{cosec}^2 a - 1)^2} - \frac{2}{\operatorname{tg}^4 a - \operatorname{ctg}^4 a} = \frac{\operatorname{tg}^2 a - \operatorname{ctg}^2 a}{\operatorname{tg}^2 a + \operatorname{ctg}^2 a}$$

Sorin Piscati, student Craiova

4754. Să se demonstreze că oricare ar fi numerele reale $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ astfel încît satisfac relația:

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2 = s$$

atunci avem și

$$-\sqrt{n \cdot s} \leqslant a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \leqslant \sqrt{n \cdot s}$$

(în legătură cu problemele 2384 și 3400)

D. Bălineț

4755. Într-un triunghi dreptunghic ABC se duce mediana din B. Să se arate că unghiul α făcut de această mediană cu ipotenuza BC este dat de

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} B}{2 + \operatorname{tg}^2 B}$$

Să se demonstreze apoi reciprocele acestei proprietăți.

C. Menciu, profesor Craiova

4756. a) De ce se recomandă să se facă dimineața cură de raze ultraviolete?

b) Unde ne bronzăm mai intens, la mare sau la munte?

c) De ce de o parte și de alta a șoselei înainte de podul de la intrare în Cîmpina, sînt așezate rînduri de anvelope de cauciuc?

Tache Ștefan, profesor raionul Cîmpina

4757. Într-un triunghi ABC, în care notațiile sînt cele obișnuite, avem totdeauna relațiile:

$$\frac{\sin \frac{3A}{2}}{\sin^3 \frac{A}{2}} + \frac{\cos \frac{3B}{2}}{\cos^3 \frac{B}{2}} = \frac{3 \cos \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}} \cdot \frac{c}{r_a}$$

$$\frac{\sin \frac{3B}{2}}{\sin^3 \frac{B}{2}} - \frac{\sin \frac{3A}{2}}{\sin^3 \frac{A}{2}} = \frac{3 \sin \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}} \cdot \frac{c}{r}$$

Ilie N. Constantinescu

4758. Un circuit electric este format dintr-o baterie B de curent continuu, o rezistență exterioară necunoscută R_x și un ampermetru A, toate legate în serie. T.e.m. a bateriei este $E = 45$ V și rezistența sa interioară $r_i = 5\ \Omega$. În aceste condiții ampermetrul A a cărui rezistență este mică, deci neglijabilă, măsoară un curent de $3A$. La bornele sursei B se mai conectează în paralel o rezistență R_1 și un întrerupător K legate în serie. În noile condiții cînd apăsăm pe întrerupătorul K ampermetrul A măsoară un curent de $1{,}5$ A. Să se calculeze rezistențele R și R_1.

Teodora Grosu

4759. O sferă de rază R este tangentă muchiilor unui cub de același centru cu sfera. Partea comună sferei și cubului formează un zar. Să se exprime volumul și aria acestui zar. Descrieți cum se poate afla cu compasul sferic cele șase puncte de pe sferă de unde se pot trasa intersecțiile sferei cu fețele cubului. Justificați construcția.

* * *

4760. O sferă de rază R este tangentă muchiilor unui tetraedru regulat de același centru cu sfera. Să se exprime volumul și aria corpului comun sferei și tetraedrului în funcție de R, apoi în funcție de a, muchia tetraedrului. Descrieți cum se poate afla cu compasul sferic cele patru puncte de pe sferă de unde se pot trasa intersecțiile sferei cu fețele tetraedrului. Justificați construcția.

C. Ionescu-Țiu

4761. Se dau a, b, c, d cele patru laturi ale unui patrulater plan și aria sa S. Să se exprime unghiurile, diagonalele și unghiurile formate de cele două diagonale.

Aplicație: $a = 2$, $b = 6$, $c = 12$, $d = 16$, $S = 40$

* * *

4762. Să se demonstreze că dacă n este un număr natural, expresia $153^n + 45^n - 28^n$ se divide exact prin 170.

* * *

4763. Să se cerceteze dacă există numere prime de patru cifre consecutive și în caz că există, care sînt aceste numere.

* * *

4764. Să se demonstreze că dacă n este un număr natural, expresia $228^n + 191^n + 154^n$ nu se divide prin 37, pentru nici o valoare a lui n.

(La cercul de matematică din Hmelnițki, U.R.S.S.)

4765. Să se arate că pentru orice n impar și pozitiv, expresia

$$E = 5^{2n} \cdot 3^{4n} + 1897^n$$

se divide exact cu 1961.

Georgescu Stelian, elev București

4766. Să se afle soluțiile reale ale sistemului

$$x^2 + y^2 = 4\,;\ z(z + 2x) = 13\,;\ x^2 + t^2 = 16\,;$$
$$u\,(u + 2x) = 16\,;\ (2x + z + u)^2 + (y - t)^2 = 81.$$

C. Ionescu-Țiu

4767. O sursă de curent avînd rezistența interioară de 1,75 Ω și tensiunea electromotoare de 24 V alimentează un circuit format din becuri de 3,5 V și 0,2 A legate în paralel. Reducerea tensiunii se face cu ajutorul unei rezistențe de 8,5 Ω legată în serie. Se întreabă:

a) Cîte becuri se pot lega în circuit pentru ca ele să funcționeze în regim normal?

b) Mărind cu x numărul becurilor se schimbă tensiunea. Să se calculeze tensiunea în funcție de x și să se discute această funcție pentru $x = 0$, $x > 0$ și $x < 0$.

M. Müller, profesor Tg. Mureș

4768. Două pendule oscilează în același timp și în același loc de pe suprafața Pămîntului. Primul pendul face $\sqrt{17}$ oscilații în timp ce al doilea execută doar $\sqrt{13}$ oscilații Să se determine lungimile celor 2 pendule, dacă se știe că unul este cu 16 cm mai lung decît celălalt.

D. Tomoiagă, student București

4769. În timpul funcționării unui frigider temperatura scade în interiorul său pînă la $t_2 = -5°C$. Frigiderul este alimentat de la o rețea electrică cu tensiunea de 220 V. Masa m de amoniac necesară obținerii acestei temperaturi este egală cu 4 kg. Temperatura camerii este $t_1 = 25°C$. Se cere :

a) Să se afle căldura latentă de vaporizare a amoniacului ;

b) Intensitatea și rezistența curentului electric știind că timpul necesar atingerii acestei temperaturi este egal cu 30 min și că valoarea în apă a părților răcite este de 10 kg.

Brătianu Silviu, elev Sighișoara

4770. Dacă doi conductori de cupru cu secțiunile egale se leagă în paralel la un circuit de 3 A și rezistența de 4 Ω, intensitatea devine de 2 A, iar dacă se leagă în serie cu circuitul dat intensitatea devine de 1 A. Să se afle raportul lungimilor conductorilor.

Gh. Paxino, elev Sinaia

4771. Un om fugind pe terasamentul unei căi ferate cu o viteză de 2 m/s aude un sunet de 400 *Hz* emis de fluierul unui tren care se apropie de el cu o viteză de 72 km/h.

a) Care este frecvența sunetului emis de tren ?

b) Va auzi omul același sunet dacă se depărtează de tren cu aceeași viteză de 2 m/s ? Care este frecvența sunetului perceput în acest caz ?

c) Care este viteza vîntului care suflă spre observator, dacă frecvența sunetului perceput de observatorul care se apropie de tren este de 398 Hz.

Irina Fărcaș, elevă Oradea

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PROPUSE PENTRU ȘCOALA DE 7 ANI *)

E : 1688. Să se arate că la orice număr de trei cifre, la care cifra zecilor este media aritmetică a cifrelor unităților și sutelor, adunîndu-se o singură dată numărul ce-l formează cifra unităților sale, se obține un număr divizibil cu 7.

Stelian Lambă, profesor Tuzla

---

*) V (E : 1688, 1689, 1695) ; VI E : 1691, 1693, 1700, 1702) ; VII (E : 1690, 1692, 1694, 1696, 1697, 1698, 1699, 1701).

E : 1689. Un casier fiind întrebat cît a încasat într-o zi a răspuns : dacă aşi mai fi încasat încă un sfert din cît am încasat şi încă 500 lei, atunci aşi fi încasat 5 500 lei. Cît a încasat casierul în ziua respectivă ?

C. Dobrescu, Călăraşi

E : 1690. Să se arate că dacă $\frac{1}{x}+\frac{y+z+yz}{yz-m}=0$, atunci :

$$\frac{1}{y}+\frac{z+x+zx}{zx-m}=0 \quad \text{şi} \quad \frac{1}{z}+\frac{x+y+xy}{xy-m}=0$$

C. Ionescu-Ţiu

E. 1691. Un călător a povestit că făcînd spre Sud a km, apoi spre Est b km, pe urmă spre Nord a km, cu surpriză a constatat că a revenit în locul de unde a plecat. Este posibilă această călătorie minunată ? Dacă e posibilă, să se dea exemple.

M. F. L.

E : 1692. Să se descompună în factori :

$$x^7+x^6y+x^5y^2+x^4y^3+x^3y^4+x^2y^5+xy^6+y^7$$

M. F. L.

E : 1693. Ştim următoarele distanţe măsurate în linie dreaptă : Dumbrăveni — Slănic 150 km, Slănic — Bîrlad 82 km, Bîrlad — Arad 481 km, Arad — Teiuş 181 km, Teiuş — Dumbrăveni 68 km. Se poate stabili pe baza acestor date distanţa în linie dreaptă, dintre Teiuş şi Bîrlad ?

* * *

E : 1694. Ştiind că se pot construi cu rigla şi compasul, poligoane regulate cu trei, patru şi cinci laturi, să se construiască un unghi de 123° şi un unghi de 18°.

* * *

E : 1695. O gospodărie agricolă colectivă a semănat cu orz 3/5 din toată suprafaţa ei. Întovărăşirea agricolă din aceeaşi comună, avînd de 3 ori mai mult pămînt, a semănat cu orz 3/4 din pămîntul ei. Ştiind că întovărăşirea a semănat cu orz 330 ha mai mult, decît G.A.C., să se afle : a) cît teren agricol are fiecare din aceste unităţi socialiste şi b) raportul dintre terenurile însămînţate cu orz.

B. Baeră, profesor Adjud

E : 1696. Să se demonstreze că la orice pătrat perfect produsul ultimelor două cifre este par.

(Clasa VII, etapa pregătitoare, Olimpiada 1961, U.R.S.S.)

E : 1697. Numerele a şi b sînt prime între ele. Cu ce este egal cel mai mare divizor comun al numerelor $a+b$ şi $a-b$?

(Clasa VII, etapa pregătitoare, Olimpiada 1961, U.R.S.S.)

E : 1698. Să se demonstreze că pentru orice număr natural n există un număr natural N astfel încît toate numerele $N + 1, N + 2, \ldots N + n$, nu sînt prime.

(Clasa VII, etapa pregătitoare, Olimpiada 1961, U.R.S.S.)

E : 1699. Să se găsească 12 numere naturale a căror sumă să fie egală cu produsul lor. Să se găsească toate soluțiile.

(Clasa VII, etapa pregătitoare, Olimpiada 1961, U.R.S.S.)

E : 1700. Un drumeț a parcurs distanța dintre localitățile A și B în trei etape, astfel : 1/5 din distanță și încă 500 m cu viteză de 6 km pe oră, după care s-a odihnit 1/2 oră ; 2/5 din rest și încă 3,500 km cu viteză de 5 km/oră, după care s-a odihnit 36 minute și apoi restul de 13 km, cu viteză de $5\frac{1}{5}$ km pe oră. Să se calculeze distanța AB și la ce oră a ajuns în B, dacă a plecat din A la ora 7.

Victor Florescu, Rm. Vîlcea

E : 1701. Printr-un bec al unei lanterne de buzunar s-au scurs 5 coulombi de electricitate și bateria a consumat o energie electrică de 20 jouli. Să se determine :

1) Ce tensiune dă o baterie a unei lanterne de buzunar ; 2) cantitatea de căldură degajată ; 3) știind că bateria funcționează timp de 12 ore să se calculeze energia ei.

Pavel N. Radu, elev Craiova

E : 1702. Se introduce în 600 g apă la temperatura de 14°C o bucată de metal cu o masă de 300 g, încălzită la 100°C. Temperatura finală a apei din calorimetru este 22°C. Să se afle căldura specifică a metalului respectiv.

Pavel N. Radu, elev Craiova

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

(Urmare din GMF-B nr. 5-1961)

CIMPULUNG MUSCEL (Argeș). Ş. m. Dinicu Golescu. Cl. VIII. **Ciocan Dan** (E: 1571, 73, 74, 78, 79, 81—84, 87, 89—92, 94—601, 03—05, 08—11, 13, 14, 16). Cl. X. **Bădescu N. Lucian** (4393, 94, 96, 415—20, 23, 24, 27, 29, 35, 40, 44, 47, 48, 52, 53, 55, 68, 72, 75, 80—84, 90, 99, 603—06, 08—10, 17, 19, 20, 22, 27, 29, 32, 33, 37—40, 42, 43, P), Dan Paul (4353, 54, 69, 80—82, 90, 94, 415, 16, 19, 24, 44, 47, 52, 53, 80—84), Sajin Virgiliu (4380, 90, 416, 20, 27, 35, 40, 47, 52, 53, 75, 81). Cl. XI. Guja Aurel (4377, 80—84, 96, 417, 27, 66, 72, 81).

CLUJ. **Student** Bîrzan Romanel (Inst. Politehnic) (4461, 72, 80—83, 96—98, P).

Ş. m. 2 George Coşbuc. Cl. VIII. Cîndea Dan (4475, E: 1587, 95, 600, 05, 07—10, 13, 15, 16), Cosma Ecaterina (E: 1592, 95, 600, 03—05, 07—11, 15, 16), Liteanu Margareta (E: 1572, 77—79, 90, 96, 97, 600, 04, 05, 07, 10, 11, 16), Lupșa Ileana (4475, E: 1593, 98, 600, 03, 05, 08—11, 13, 16), Mocanu Rodica (4475, E: 1592, 95, 600, 05, 07—10, 13, 15), Petruța Viorica (4475, E: 1549, 95, 600, 03, 09—11, 13, 15), Tessler Edita (4475, E: 1600, 03, 05, 08—11, 13, 15, 16).

Ş. m. 3 Mihail Eminescu. Bondrea Tiberiu (4390, E: 1572—74, 76, 78, 79, 81, 600, 10).

Ş. m. 4 Emil Racoviță. Cl. VI. Marfievici Andrei (E: 1574, 80, 83, 84, 88—90, 94, 96, 97, 600, 01, 04, 06—11). Cl. VII. Gross Adalbert (E: 1571, 78, 80, 84, 87, 90, 92, 600, 07, 10), Ilian Virgil (E: 1571, 75—78,

81, 91, 93, 96, 99, 603, 05, 06). Cl. VIII. Costin Doina (E: 1571, 73, 74, 77, 79, 84, 87, 89, 605, 10), Maier Virgil (4390, E: 1571—74, 76—79, 81, 600), **Moraru Mariana** (4344, 47, 81, 91, 418, 20, 23, 44, 48, 53, E: 1555, 58, 60, 64, 69—75, 78—84, 86, 87, 89—96, 98), Popovici Tudor (E: 1573, 74, 81, 82, 95, 604, 05, 07, 09, 10, 15, 16), Stef Virgil (4381, 90, E: 1571—75, 77—81). Cl. IX. Pop C. Marcel (4441, 43, 44, 53, 67, 70, 75, 81, 86, 96). Cl. X. Paven Horia (4380, 82—84, 90, 419, 20, 52, 82, 84). Cl. XI. Dragomir Viorel (4377, 80—83, 88, 91, 96, 419, 20, 44, 52, 81, 83, 84), Florescu Petre (4377, 81—83, 91, 416, 20, 33, 47, 53, 80).

Ş. m. 5 Gheorghe Bariţiu. Cl. VIII. Călugăreanu Grigore (4433, E: 1573, 74, 95, 600, 01, 05, 08, 10, 15, 16), Man I. Eugeniu (E: 1571, 75—77, 84, 89—94, 97, 98, 600, 05, 09, 10, 15), Marian Iuliu (E: 1555, 57—65, 67—81).

Ş. m. 6. Ady. Şincai. Cl. XI. Stoica Aurel (4380—82, 88, 90, 91, 96—99, 410, 12, 17—22, 31, 32, 34, 37, 38, 41—44, 47, 52, 54, 58—61, 63, 67, 68, 70, 72, 75, 82—84, 86, 90, 96, 97, P).

Ş. m. 8 Nicolae Bălcescu. Cl. VI. Bunea Doina (E: 1584, 94, 97, 600, 04, 08, 10, 11, 14, 26), Lupan Anca (E: 1583, 84, 90, 94, 95, 97, 600, 04, 07, 08, 10, 11, 13, 14), Mărcuş Cornelia (E: 1583, 84, 94, 97, 600, 04, 08, 10, 12, 14), Scurei Stelian (E: 1584, 87, 94, 97, 98, 600, 04, 07—10), Vasiliu Rodica (E: 1583, 84, 94, 97, 600, 04, 08, 10, 12, 14). Cl. VII. Botoroagă Emil (E: 1573, 77—79, 84, 88, 90, 600, 01, 10), Perl Toma (E: 1583, 84, 87, 90, 94, 97, 600, 08, 10, 11). Cl. VIII. Negru Olimpia (E: 1573, 74, 77—79, 87, 92, 608, 10—16), Pop Radu (E: 1571, 73, 74, 76, 79, 84, 87, 97, 600), Rodan Gh. (E: 1571, 73, 74, 78, 79, 81, 84, 87, 91), Rusu Mihai (E: 1573, 74, 77—79, 81, 84, 87, 91, 96).

CONSTANŢA (Dobrogea). **Ş. m. 1** Mircea cel Bătrîn. Cl. VII. Caraivan V. Glicherie (E: 1599—601, 05, 08—10, 13, 15, 16). Cl. IX. Brînzănescu Vasile (4391, 93, 453, 75, 80, 81, 84, 90).

CORABIA (Oltenia). Cl. VI. Enceanu Elena (E: 1586, 87, 94, 97, 600, 09, 11), Enescu Alexandra (E: 1540, 43, 48, 74, 79, 95, 600, 04, 07, 10), Roşca Viorica (E: 1574, 79, 600, 04, 08—12, 14), Segărceanu Florica (E: 1595, 97, 600, 04, 08—10, 13), Voinea Marcel (E: 1587, 90, 94, 97, 604, 07, 08, 10, 13). Cl. VIII. Alexandru Nicolae (4391, E: 1588, 89, 96, 97, 600, 01, 08, 10, 14, 15), Bolborea Petru (E: 1588, 89, 92, 96, 600, 01, 08, 10, 11, 13, 15), Delu Maria (E: 1585, 88, 92, 95, 97, 99, 600, 04, 08, 10), Diaconu Tudorel (4398, 99, E: 1573, 74, 604, 10, 11, 15), Dimineaţă N. Elena (4390, 91, 98, 475, E: 1582, 84, 96, 97, 600, 10, 16), Dimulescu Aniela (4390, 90, 98, 99, 412, 16, E: 1595, 97, 600, 04, 07, 10, 13—15), Filip D. Nicolae (E: 1586, 97, 604, 07, 08, 10, 13—15), Florica Ion (E: 1588, 89, 92, 96, 600, 01, 04, 07, 08, 10—12, 14, 15), Naftali Gheorghe (4391, 98, E: 1595, 97, 600, 04, 07, 10, 13—15), Nină Sonia (E: 1595, 97, 600, 04, 07, 10, 13—15), Vîrdol L. Leonida (E: 1588, 89, 96, 600, 01, 08, 10, 11, 13, 15). Cl. IX. Reganu Crăciun (4380, 81, 85, 90, 91, 411, 12, 15, 17, 20, 44, 48, 75, 80, 81, 83, 84, 96). Cl. XI. Ştefănescu Cornel (4376, 77, 79, 81—85, 90, 91, 95—98, 404, 08, 09, 16, 18—20, 25, 27, 29, 31, 34, 52, 53, 61), Tătaru Alexandru (4418—20, 40, 44, 53, 72, 75, 80—84).

CRAIOVA (Oltenia). **Ş. m. 1** Nicolae Bălcescu. Cl. VIII. Vasilache Doina (4381, 412, 16, 20, 44, 53, E: 1573, 77—79, 81, 83, 84, 86, 87, 89, 93, 96).

Ş. m. 2 Fraţii Buzeşti. Cl. VI. Creţu Adrian (E: 1583, 600, 01, 04, 06—08, 10, 15, 19). Cl. VII. Iordăchescu Anca (E: 1583—85, 87, 89—92, 94, 96). Cl. X. Iordănescu Viorel (4380—83, 86, 88, 422, 31, 34, 61). Cl. XI. Stănescu Ortansa (4419—23, 25, 27, 29, 31—34, 37, 41, 43, 44, 53—55, 63).

Ş. m. 3. Cl. VIII. Ricer Eduard (E: 1571, 73, 74, 77, 79, 81, 90, 91, 93, 96, 97, 600, 05, 09, 10, 13), Cazacu Speranţa (E: 1574, 75, 77, 78, 81, 84, 89, 91, 93, 94, 605). Cl. X. Cincheza Iuliana (4390, 98, 411, 19, 20, 22, 31, 34, 43, 44, 87), Stănculescu R. Irina (4384, 90, 94, 408, 12, 13, 15, 16, 20, 72, 73, 80, 81, 84, 96, 98), Ţurcanu Gabriela (4380, 98, 411, 18, 19, 21, 31, 34, 41, 43, 44, 52). Cl. XI. Pavel N. Radu (4376, 77, 79, 81, 88, 90, 94, 96, 412, 15, 16, 18—20, 23, 24, 29, 44, 47, 52, 55).

Ş. m. 4. Cl. VII. Nicolicioiu Veronica (E: 1545, 55, 60, 70, 79, 83, 84, 87, 90, 95, 600). Cl. VIII. Boicescu Vlad (E: 1571, 73, 74, 77—79, 81, 84, 87, 89—98, 600), Ciurel M. Gheorghiţă (E: 1584, 87, 91, 94—98, 600, 03, 04, 07, 10), Florescu Dan (E: 1589, 91, 93—96, 99, 603—05, 09, 16), Lazăr Traian (E: 1584, 91, 94—98, 600, 03, 04, 07, 10, 11), Popescu M. Marinela (E: 1584, 87, 89, 91, 94, 96, 98, 600, 07, 10, 11, 16). Cl. IX. Corîciu Antonie (4303, 05, 09, 33, 38, 65, 69, 71, 80—82, 90, 91).

Şc. de 7 ani nr. 1. Cl. VI. Petrescu A. Ionel (E: 1571—74, 79, 84, 87, 92, 94, 95).

Şc. de 7 ani nr. 9. Cl. VII. Cincheza Ecaterina (E: 1571, 73, 75, 77—79, 84, 92, 94—97), Cusiac Cornelia (E: 1571, 73—75, 79, 84, 87, 600, 08, 10, 13), Pelivan Ileana

(E: 1571, 73—75, 79, 84, 87, 600, 08, 10, 13).

CURTEA DE ARGEŞ (Argeş). Cl. VIII. Bărnescu Vasile (E: 1558, 73, 74, 77, 79, 81, 89, 91, 95, 96, 600, 04, 06—11, 15), Miu Constantin (E: 1587, 90, 91, 93—95, 97, 600, 01, 10), Negriţu Mariana (E: 1600, 04—06, 08—11, 14, 16). Cl. IX. Ionescu Ilie (4391, 405, 12, 44, 52, 53, 75, 81, 83, 90, 96).

Şc. de 7 ani Cioflingeni. Cl. VII. Florescu Nicolae (E: 1571, 73, 74, 79, 83, 87, 91, 96, 97, 600, 04, 08, 10, 15).

DARABANI (Suceava). Cl. XI. Moga Ion (4380, 82—84, 90, 94, 415, 16, 18—20, 23, 72, 80—84).

DEJ (Cluj). Cl. VI. Suciu Octavian (E: 1583, 84, 88, 90, 92, 94, 95, 97, 600, 01, 04, 07), Cl. IX. Lucaciu Mircea (4376, 80—82, 90, 98, 431, 56, 75, 96), Schmoll Eugen (4376, 80—82, 90, 405, 19, 83, P). Cl. XI. Feştilă Clement (4380—83, 86, 90, 91, 94, 416, 19, 20, 23), Szabo Carol (4380—82, 90, 419, 20, 44, 63, 84).

DEVA (Hunedoara). Ş. m. Decebal. Cl. VI. Faur Rodica (E: 1572, 73, 81, 82, 85—88, 90, 95). Cl. XI. Caraman Dan (4343, 47, 54, 65, 71, 76, 77, 80—84, 97, 405, 19, 20, 23, 29, 35, 44, 58), Crişan Mircea (4337, 81, 405, 10, 18, 44, 83, 84, 90, 96).

DEVESEL (Oltenia). Şc. de 7 ani. Cl. VI. Cuţitoiu Margareta (E: 1573, 74, 79, 83, 84, 87, 92, 94, 97), Ică P. Anca (E: 1572—74, 79, 83, 84, 87, 91, 94, 97). Cl. VII. Bumbea Constantin (E: 1559—61, 67, 69, 70, 72, 74, 79).

DOROHOI (Suceava). Ciornea Elena (E: 1610, 11, 84, 87, 89, 91, 92, 96—98).

DRĂGĂNEŞTI-OLT (Argeş). Cl. VII. Bedelcu Nicolae (E: 1571, 74, 77—79, 92, 95, 600, 04, 08, 10, 15, 16). Cl. XI. Nicula N. Năstase (4380—84, 96, 420, 52, 72, 81, 84).

DRĂGĂŞANI (Argeş). Cl. X. Stănescu Cicerone (4360, 62, 75, 83, 84, 86, 94, 96, 98, 99, 411, 15, 18—22, 31, 32, 34, 35, 37, 38, 40—44, 52—54, 61, 67, 68, 70, 72, 73, 75, 80, 81, 83, 84, 86—88, 90, 94, 96, N, P). Cl. XI. Barbu S. Cornel (4377, 80—85, 88, 90, 91, 96, 97, 405, 13—15, 18—20, 23, 26, 40, 44, 45, 47, 52, 53, 63, 65, 72, 75, 80, 83—85, 89, 90, 96, 97). Cl. XI. Iliescu D. Victor (4380—82, 90, 91, 419, 20, 53, 75, 83).

DRĂGHICI (Muscel-Argeş). Cl. VII. Tănase N. Ion (E: 1571, 73—75, 78, 79, 81, 84, 87, 91, 96, 604, 10, 11, 16).

FĂGET (Banat). Ş. m. Traian Vuia. Cl. XI. Gheju Petru (4377, 80, 81, 82, 88, 90, 91, 94, 400, 05, 08, 16).

FĂLTICENI (Suceava). Cl. X. Cohn Ionel (4422, 31, 34, 35, 43, 47, 54, 75, 83, 84).

FETEŞTI-GARĂ (Bucureşti). Cl. VIII. Anghel Marioara (E: 1604, 05, 08—11, 13, 15, 22, 26, 27), Cioacă Ion (E: 1574, 84, 91, 95, 96, 600, 04, 05, 08, 10, 11, 13), Fălcescu Stanca (E: 1572, 81, 84, 89, 91, 95, 96, 600, 04, 05, 07—11, 15, 19, 20, 22, 25—27), Gheorghescu M. C. (E: 1581, 91, 95, 96, 600, 04, 05, 08—11), Iamandi Gheorghe (E: 1540, 57, 74, 81, 84, 91, 95, 96, 604, 08, 10, 11, 31), Iancu Stoiana (E: 1591, 95, 96, 604, 05, 07, 10, 11, 22, 26, 27), Ionescu Lelia (E: 1572, 84, 91, 95, 600, 04, 05, 07—11, 13, 15, 20, 22, 25—27), Nedelcu Gh. (E: 1574, 81, 84, 87, 91, 600, 05, 09, 10, 13), Pană Petru (E: 1573, 74, 79, 81, 83, 84, 87, 89, 91, 92, 94, 96, 600, 03, 05, 08—11, 16), Paraschiv Valentina (E: 1604, 20, 22, 25, 27, 31, 36), Petcu Eugeniu (E: 1587, 89, 607, 15, 22, 25, 26), Prună Ştefan (E: 1571, 74, 79, 84, 91, 95, 600, 04, 08, 09, 11, 13), Soare Rodica (E: 1561, 62, 69, 84, 608, 09), Spătaru Elena (E: 1600, 04, 09, 11, 13, 27), Stănescu Doru (E: 1572, 74, 79, 81, 84, 91, 95, 96, 600, 04, 05, 08, 10, 13). Cl. X. Alexe Dumitru (4380, 90, 98, 99, 409, 11, 12, 15, 16, 23, 25, 31, 33, 34, 44), Bectemir Ozdeu (4409, 11, 12, 15, 31, 33, 34, 47, 81, 84, 509), Bîrzan Zenovia (4380—82, 90, 96, 405, 25, 31, 33, 34, 41), Bogdan Mariana (4380, 81, 409, 11, 23, 31, 33, 34, 44, 47, 80, 81, 504, 09, 36, 39, 42), Bucur Calipso (4390, 93, 96, 411, 12, 15, 18, 23, 31, 34, 41, 81), Bucur S. Ion (4380, 411, 12, 17, 18, 33, 34, 49, 84, 504), Caşug Vasile (4383, 96, 420, 23, 24, 33, 44, 47), Fumea Florica (4484, 504, 09, 40—44, 83), Iancu Elisabeta (4333, 70, 431, 33, 34, 44, 47, 81, 83, 509, 39, 40), Ionescu Constantin (4422, 23, 31, 33, 34, 39, 43, 44, 47, 58, 61, 81, 97, 504, 09, 27, 54, 78), Iorga Niţă (4409, 11, 21, 23, 25, 33, 34, 44, 47, 81, 536, 43), Mărculeşteanu Maria (4398, 99, 409, 11, 12, 15, 16, 31, 47, 81, 83), Mocanu Constantin (4398, 99, 411, 21, 34, 41, 44, 81, 83, 84, 504), Niţu Marian (4415, 31, 33, 34, 81, 83, 543), Peşte Mihai (4362, 70, 75, 98, 409, 11, 12, 15, 23, 25, 31, 33, 34, 44, 47), Petcu Virginia (4380, 82, 409, 11, 17, 21, 23, 25, 31, 33, 34, 44, 47, 81, 84, 504), Pismiş Lucia (4380, 81, 409, 11, 21, 23, 25, 31, 34, 41, 44, 81, 83, 504), Popescu Marcel (4411, 12, 17, 18, 23, 47, 81, 83, 84, 509, 40, 42, 43), Popescu Nicolae (4380, 09, 11, 12, 18, 23, 33, 34, 44, 47, 84, 504, 27, 43), Răcaru Margareta (4381—83, 88, 99, 421, 23, 25, 33, 34, 36, 43, 44, 81, 83, 504, 09, 40), Tudorache Maria (4398, 99, 409, 11, 12, 15, 16, 23, 31, 33, 41, 44, 83, 504), Voiculeţ Marin (4380, 99, 411, 17, 23, 31, 38, 44, 54, 81, 83, 84, 504, 09, 27).

FOCŞANI (Galaţi). Ş. m. Unirea. Cl. VIII. Niţă Adrian (4382, 91, E: 1571, 73—75, 77—79, 81). Cl. IX. Rosenzweig Eduard (4387, 91, 98, 99, 405, 48, 52, 53, 55, 75, 83, 86), Victor Beatrice (4452, 96, E: 1571, 81, 89, 91, 93, 96, 609, 16). Cl. XI. **Grădeanu C. G.** (4379, 87, 95, 97, 401, 02, 05, 07—10, 15, 17, 18, 20—22, 25, 27, 31, 34, 40—42, 47, 52, 53, 56, 60, 63, 68—73, 80, 81, 83, 86), **Năstase Aurel** (4343, 57, 71, 75, 79—84, 88, 91, 94, 96, 97, 400, 04, 05, 11, 12, 15, 16, 18—20, 23, 25, 27, 38, 44, 47, 52, 60, 61, 80, 83), **Popa Nicolae** (4419—32, 35—48, 51—58, 60—63, 66—69, 78—84, 86—90, 92—98).

Şc. de 7 ani Urecheşti. Cl. VI. Iordăchiţă Traian (E: 1579, 97, 600, 04, 13, 15).

GĂEŞTI (Argeş). Cl. XI. Dinu Gheorghe (4377, 80—83, 88, 91, 96, 97, 411, 19, 20), Dumitriuc Mihai (4377, 80—84, 88, 91, 94, 96, 97, 419, 20).

GALAŢI. Ş. m. 1 Vasile Alecsandri. Cl. V. (E: 1574, 79, 83, 84, 94, 97, 600, 01, 10, 13). Cl. VIII. Friederich Sergiu (E: 1571—76, 78, 79, 81, 82, 86).

Ş. m. 2. Cl. X. Codreanu Cornelia (4380—82, 412, 16, 33, 53, 73, 81, 83).

Ş. m. 3. Cl. VII. Selingher Silviu (E: 1571, 73, 74, 76, 77, 79, 81, 87, 96, 600). Cl. VIII. Bittman Liviu (E: 1571, 73, 74, 79, 81, 83, 87, 91, 94, 96), Costescu Constantin (E: 1599—601, 03—05, 09—11), Croitoru Elena (E: 1571—74, 78, 79, 87, 93, 94, 97), Duca Traian (E: 1571—74, 79, 81, 83, 89, 91, 96), Frangulea Cristinel (E: 1600, 04, 05, 07—11, 15, 16), Grişaru Horia (4381, E: 1571—75, 77—79, 81, 87, 91, 97, 600, 09, 10), Grunblatt Sorin (E: 1571, 73, 78, 79, 87, 89, 91, 92, 94, 96), **Mărcuş Sergiu** (4381, 91, 475, 84, E: 1584, 85, 87, 89, 92—94, 96—603, 05, 07—11, 13—16), Penciu Gh. Fănel (E: 1571, 73, 600, 04, 05, 07—11, 15, 16), Raichman Sebastian (E: 1584, 89, 90, 95, 97, 99, 600, 04, 05, 09, 10). Cl. IX. Rosental Bonica (4453, 75, 81, 83, 90). Cl. X. Selingher Diana (4380—84, 90, 91, 411, 12, 16, 20, 52), Tuchel Sanda (4380—83, 90, 91, 411, 16, 20, 44, 90). Cl. XI. Oancea Nicolae (4419, 23, 31, 34, 43, 69, 75, 78, 84, 88, 95, 96).

Ş. m. 4. Onu Corneliu (4380, 82, 88, 99, 401, 02, 07, 32, 34, 37, 42, 95). Cl. VIII. Aizenfeld Ginetta (E: 1599—601, 04, 05, 07—11, 13—16), **Drăguşanu Constantin** (E: 1571—79, 81—90, 93—97, 99—604, 07—10, 12—16), Duţu Stana (E: 1585—88, 90, 91, 93, 96—98), Mărăscu Dumitru (E: 1599—601, 03, 04, 07—11, 14, 15), Murărăşcu Dumitru (E: 1582, 86—90, 93—98), Popa Elena (E: 1599, 600, 03, 06, 08—10, 13, 14, 16).

Şc. de 7 ani nr. 17. Cl. V. Corciovei Cecilia (E: 1574, 79, 83, 84, 94, 95, 97, 600, 04, 10).

Şc. de 7 ani nr. 21. Cl. VII. Vaisman Mirel (E: 1604, 06—12, 15, 16).

GIURGIU (Bucureşti). Cl. VIII. Marinescu Gabriela (E: 1571—74, 77—79, 81, 83, 84, 86, 87, 89), Palade C. Romulus (E: 1584, 87, 90—93, 95, 600, 01, 04, 08—11, 14, 16), Stăncescu St. Veronica (4475, E: 1599, 600, 03—05, 07—13, 15). Cl. X. Soare V. Dumitru (4381, 91, 94, 405, 08, 20, 27, 29, 44, 48, 53).

GURA HUMORULUI (Suceava). Cl. V. Mitric Maria (E: 1574, 79, 83, 84, 94, 97, 98, 600, 04, 10—12, 14). Cl. X. Adomniţei Constantin (4380—82, 419, 20, 23, 31, 33—35, 52), Coroliuc Vasile (4381, 82, 419, 20, 23, 31, 33, 34, 52), Croitoru Dragoş (4380—82, 419, 20, 23, 31, 33, 34, 52, 81), Duicu Mărgărit (4380—84, 419, 23, 31, 33—35, 52, 70, 72, 75, 81), Pleşan Decebal (4380—82, 419, 20, 23, 31, 33—35, 52).

HALEŞ Tisău (Ploieşti). Şc. de 7 ani. Cl. V. Iordache Maria (E: 1574, 79, 83, 84, 94, 97, 98, 600, 04, 10), Negulescu Dionisie (E: 1574, 79, 83, 95, 97, 600, 04, 08, 10, 11), Tănase I. Maria (E: 1570, 74, 79, 83, 84, 94, 97, 98, 600, 04, 10, 11). Cl. VI. Stanciu I. Cornelia (E: 1561, 62, 83, 94, 600, 01, 04, 06—08, 10, 11, 13—15). Cl. VII. Cîmpeanu N. Angela (E: 1583, 89, 92, 600, 03, 06, 09, 10, 11, 13—16), Negulescu Elena (E: 1583, 92, 600, 04, 06—08, 10, 11, 13, 15, 16), Nistor Viorica (E: 1574, 77, 79, 80, 84, 92, 94, 97, 600, 04, 08, 10, 13), Petre Gh. Elena (E: 1583, 85, 90, 92, 97, 600, 04, 07, 08, 10, 11, 13), Vişan R. Victoriţa (E: 1583, 89, 92, 93, 600, 02, 04, 07, 08, 10, 11, 13, 15). Cl. VIII. Zbîrnea Elena (E: 1583, 93, 600, 04, 07, 08, 10, 11, 13, 16).

HAŢEG (Hunedoara). Cl. V. Maftei Nicolae (E: 1574, 79, 83, 84, 600, 04, 08, 10, 15), Marton Virgil (E: 1574, 79, 83, 90, 97, 600, 01, 04, 08, 10, 14). Cl. VII. Nopcea Liviu (E: 1574, 77, 79, 80, 89, 90, 97, 600, 04, 10).

HOREZU (Argeş). Cl. X. Cocioabă Wiko (4381, 91, 97, 419, 20, 31, 34, 43, 48, 53), Iliescu V. Ion (4342, 47, 69, 71, 80—82, 84, 85, 90, 91, 98, 99, 409). Cl. XI. Mihai Dumitru (4380—82, 94, 98, 99, 412, 34, 81, 83, 84, 95, 96), Tănăsescu T. Miron (P).

HUŞI (Iaşi). Ş. m. Cuza Vodă. Cl. XI. Bejan Gh. (4380—82, 96, 98, 409, 11, 12, 19, 20, 22, 27, 29, 31, 44, 52, 75).

IAŞI. Student Gurămultă V. Ion (Fac. matem.) (4302—09, 12, 14, 16, 20, 21, 30, 37, 41, 43, 46, N, P).

Ş. m. 1 Mihail Sadoveanu. Cl. XI. Banacovski Ioan (4377, 80, 82, 86, 91, 94,

97, 404, 09, 18), Caceaunov Claudia (4384, 91, 94, 97—99, 404, 07, 09, 15, 18).

Ş. m. 2 Mihai Eminescu. Cl. VII. Schwartz Greta (E: 1571, 73, 77, 79, 80, 83, 87, 89, 97, 600), Segal Ghizi (E: 1571, 73, 75, 77—80, 83, 84, 87, 89, 91). Cl. VIII. Ignat Mariana (E: 1571, 78, 90, 94, 95, 98, 605, 08—11), Marcu Dorothi (E: 1571—74, 77—79, 81, 87, 89, 96), Pîrţac Eugenia (4377, 80—82, 84, 96, 415, 19, 20, 44, 52, 53, 55, 60, 63, 72, 81, 83, 96).

Ş. m. 3 Costache Negruzzi. Cl. IX. Dinulescu Mircea (4347, 49, 52, 59, 65, 69, 79—82, 85, 91, 93), Ganciu Teohari (4381, 82, 85, 420, 44, 52, 53, 81, 83, 90). Cl. X. Călugăru Emilian (4381, 82, 85, 90, 91, 412, 15, 16, 44, 47), Creţu Constantin (4381, 82, 85, 90, 91, 412, 15, 16, 44, 47, 52, 82), Popescu Ştefan (4380—83, 90, 91, 405, 12, 13, 16, 17, 52, 74, 80, 81). Cl. XI. Matei Dragoş (4377, 84, 411, 15, 18, 23, 27, 33, 53, 60, 71, 72, 75, 79—84, 87), Pavel H. Nicolae (4376, 88, 404—06, 08, 11, 12, 18—20, 25, 27—30, 33, 44, 47, 48, 52, 53, 60, 62, 63, 65, 71—73, 75, 79—84, 90), Pintilie Ion (4380, 81, 84, 85, 91, 93, 94, 96, 97, 400, 18, 20, 23, 25, 26, 35, 38, 40, 44, 53, 55, 60, 63, 65, 68).

Ş. m. 4 Garabet Ibrăileanu. Cl. VIII. Hîrtopeanu Ioana (E: 1571—75, 77—84, 86). Cl. XI. Perju Natalia (4380—83, 90, 410, 19, 29, 47, 61, 83, 84).

Ş. m. 5 Ilie Pintilie. Cl. XI. Dragoslav Iulian (4343, 54, 55, 65, 69, 71, 75, 84, 88, 91, 96, 97, 405, 06, 17—20).

Ş. m. 6 Vasile Alecsandri. Cl. VII. Creţescu Călina (E: 1578, 81, 87, 89, 91, 96), Nichifor Geta (E: 1577, 78, 81, 87, 89, 91, 96), Stavilă Rodica (E: 1571—75, 77, 78, 81, 89, 91, 93, 96, 99). Cl. VIII. Thirer Nonel (E: 1571, 73, 74, 77—79, 81, 84, 87, 89, 91, 94, 96, 97, 600, 05, 07—11, 13, 14, 16), Valinski Magdalena (4380—84, 88, 91, 94, 410, 16, 19, 68).

Ş. m. 7 Al. I. Cuza. Cl. V. Burduja Gheorghe (E: 1574, 79, 83, 84, 94, 97, 600, 04, 10, 14), Flondor Smărăndiţa (E: 1574, 79, 83, 84, 87, 94, 600, 04, 10, 14), Guţă Alexandru (E: 1574, 79, 83, 84, 94, 97, 600, 04, 10, 14). Cl. VII. Nahumovici Leon (E: 1571, 77, 79, 81, 84, 89, 91, 96, 600, 01). Cl. VIII. Apetrei Aurica (4475, E: 1573, 75, 78, 79, 81, 84, 87, 89, 91, 94, 96, 600, 05, 10), Goldstein Bianca (E: 1571, 73, 74, 77, 79, 81, 87, 96, 601, 10), Goldstein Solo (E: 1571, 77, 81, 84, 87, 89, 91, 93, 96, 600, 10), Joandrea Adriana (4475, E: 1573, 74, 78, 79, 81, 84, 87, 89, 91, 96, 600, 05, 10), Melinte Elena (E: 1573, 74, 78, 79, 81, 84, 87, 89, 96, 605, 10), Mocransky Geta (E: 1573, 74, 78, 79, 81, 84, 87, 89, 91, 96), Schwemer Malniţa (E: 1571, 73, 77, 81, 84, 87, 91, 96, 605, 10), Sulimovici Zaro (E: 1571, 73, 75, 77—79, 81, 84, 89, 91, 96, 610).

JIMBOLIA (Banat). Cl. XI. Hockl Frantz (4419, 20, 35, 40, 52, 62, 81, 83, 84, 96).

LIPOVA (Banat). Şc. de 7 ani Petriş. Cl. V. Bianga Mărioara (E: 1574, 79, 83, 84, 94, 97, 604, 08, 10, 11, 60, 74), Iancu Mariana (E: 1574, 79, 83, 84, 93, 600, 04, 10, 13, 14), Mihalca Ioan (4380, 82, 88, 96, 411, 14, 33, 44, 72, 81, 84).

LITENI (Fălticeni-Suceava). Şc. de 7 ani nr. 2. Cl. V. Racoviţă Mariana (E: 1583, 84, 94, 97, 600, 04, 10).

LONEA (Petroşani-Hunedoara). Şcoala medie. Absolvent Grozavu Mihail (4376—78, 80—88, 90, 91, 404, 16, 18). Cl. VII. Samuel Emeric (E: 1571, 77—81, 84, 89, 91). Cl. X. Fărtat C. Radu (4383—85, 91, 94, 97, 400, 05, 08).

LUDUŞ (Mureş). Şc. de 7 ani Săulia. Cl. VII. Stoica Viorica (E: 1574, 78—81, 87, 96, 99—601, 03, 10).

LUGOJ (Banat). Lt. Pupăzan Nicolae (4419, 20, 27, 44, 53, 72, 74, 75, 81, 83, 84, 90, 96, 97).

Ş. m. 1. Cl. VII. Brinda M. Rodica (E: 1571—75, 78, 81, 87, 92). Cl. VIII. Cărăbaş Damaschin (E: 1574, 77, 79, 84, 87, 89, 91, 94, 97, 604, 05), Cimponeriu Traian (E: 1578, 81, 84—87, 89—92, 94—601, 03—05, 07—12, 14, 16), Daba Dan (4390, 405, 16, 33, 47, 53, E: 1571—75, 77—82, 84, 90, 92—95, 97—600, 03, 05), Popoviciu I. Mariana (4390, E: 1555, 71—75, 84, 85, 91, 92, 96), Vasiliu Dan (4390, 405, 16, 33, 53, 77, 86, E: 1572, 77, 80—84, 86, 87, 89—600, 03—11, 13, 15, 16), Zegrea Marius (4390, 433, E: 1577, 81, 83, 84, 86, 87, 89—91, 93, 94, 96—98, 600, 01, 04, 08, 10, 11). Cl. X. Kulcsar Elena (4365, 69, 80—82, 84, 91, 97, 400, 12, 44, 52, 75). Cl. XI. Iorga Valeriu (4348—54, 56, 59—62, 64, 65, 67, 69, 70, 72, 73, 75—77, 80—84, 88, 90, 91, 93, 94, 96—99, 404, 05, 08, 09, 11, 12, 16), Nemt Doina (4376, 77, 80—84, 86, 90, 91, 94, 96—99, 412, 19, 22, 23, 27, 34, 39, 42—44, 47, 52, 60, 63, 72, 80, 83, 84, 95, 96).

MĂRĂŞEŞTI (Galaţi). Cl. XI. Anghel Vasile (4380—84, 96, 98, 99, 412, 15, 31, 34, 56, 81, 83, 84, 86, 88, 91, 95, P).

MEDIAŞ (Braşov). Cl. X. Ifrimelia Ştefan (4380—83, 412, 20, 23, 75, 81, 84).

MIZIL (Ploieşti). Cl. VIII. Oltenescu F. Nicolae (E: 1582—616).

MÎNDRA (Făgăraş-Braşov). Cl. VII. Cocan Doina (E: 1570, 73, 74, 79, 84, 87, 600, 04, 08, 10).

MOINEŞTI (Bacău). Aniţoaie Emil (4376, 81, 82, 91, 444, 73, 75, 81, 83, 96).

MORENI (Ploieşti). Cl. VII. Călăraşu Ovidiu (E: 1555, 59, 60, 62, 64, 69—71, 73—76, 78, 79, 81, 83—88, 90, 94—97,

600, 04, 08, 10, 12, 15, 16), **Dogăresc** Lavinia (4415, E: 1555, 59, 60, 62, 64, 65, 70, 71, 73—79, 81, 84—86, 88—91, 93—97, 600, 04, 05, 07, 08, 10, 11, 12, 14, 16, 27), Tocan Mihai Gabriel (E: 1575, 84, 85, 87, 88, 90, 95—97, 604, 10, 13). Cl. X. Cernahovski Mihail (4382, 83, 98, 99, 408, 20, 22, 31, 32, 34, 41—44), Stanciu D. Petre (4381, 82, 89—91, 97—400, 07, 09, 12, 17, 20—23, 31, 34, 41, 43, 44, 67, 81, 83), Ştefănescu Decebal (4381—83, 90, 98, 99, 407, 09, 12, 20—23, 31, 34, 43, 44).

NĂSĂUD (Cluj). Ş. m. George Coşbuc. Cl. VIII. Siegelstein Isidor (E: 1571, 73, 74, 77—79, 81, 89, 96—99, 604, 05, 08—11). Cl. X. Zăgreanu Marius (4381, 82, 90, 400, 11, 20, 22, 31—34, 43, 80, 81).

ODOBEŞTI (Galaţi). Cl. X. Păncescu Paul (4394, 425, 26, 43—45, 60, 61, 69, 72—74, 80, 81, 84 86, 87).

ONEŞTI (Bacău). Cl. VIII. Sion Mioara (E: 1571, 73, 75, 77—79, 81, 87, 89, 91, 93, 96, 600, 05, 10, 13).

ORADEA. Ş. m. 1. Cl. VII. Borcia Sorin (E: 1571, 53—54, 77—79, 81, 84—88). Cl. VIII. Neuman Vera (E: 1578, 79, 81, 85, 88, 91, 99, 600, 05, 10), Orghidan Oana (E: 1573, 74, 78, 79, 84, 87, 99, 600, 05, 10), Rus Maria (E: 1559, 60, 70, 79, 89, 91, 94, 95, 98, 603, 09, 10), Toderici Maria (E: 1573, 74, 79, 83, 84, 87, 89, 600, 04, 05, 08, 10, 11, 13, 14), Wald Robert (4309, 19, 89, 90, 98, 99, 454, E: 1571—603). Cl. X. Bedros Dan (4380—82, 90, 91, 93, 418, 20, 44, 53, 81, 96), Faier Ioan (4334, 43, 81, 82, 91, 408, 20, 52, 81, 98, 99), Henţ Gh. Mircea (4380—82, 90, 91, 93, 418, 20, 44, 53, 81, 83), Sarba Daniel (4433, 75, 81, 83, 84, 99, 504, 06, 09, 10, 36), Streng Liviu (4380—82, 90, 91, 93, 413, 20, 44, 53, 81, 83).

Ş. m. 4. Cl. VIII. Berger Gavril (E: 1575, 78, 81, 87, 89—93, 96), Ciup Doina (4453, 75, E: 1566, 69, 74—77, 79—82, 84, 86, 87, 89—91, 93, 96, 98, 600, 03, 05, 10, 13, 15), Marcu Smaranda (E: 1571, 75, 79—81, 84, 87, 89, 91, 96), Pleşa Romulus (E: 1580, 84, 88, 92, 98, 99, 600, 05, 10, 16), Pop Emilia (E: 1573, 80, 82, 84, 87, 89, 91, 93, 98). Cl. XI. **Bărbulescu** Aurelia (4341—44, 48, 65, 73, 80, 81, 84, 90, 91, 93, 94, 97, 412, 16, 18—20, 23, 25, 27, 29, 33, 35, 38, 40, 48, 53, 60, 68, 75, 70—74), Fărcaş Irina (4377, 89, 91, 93, 94, 416, 19, 20, 23, 29, 33, 35, 38, 40, 41, 60, 63, 80), Nistorescu Rodica (4380, 91, 93, 94, 425, 47, 52, 81, 84, 93).

Şc. de 7 ani nr. 11. Cl. V. Hulban Viorel (E: 1574, 79, 83, 84, 94, 600, 01, 09, 10, 13, 14), Muller Alexandru (E: 1574, 79, 81, 84, 94, 600, 01, 09, 10, 13, 14), Sotoc Nic. (E: 1574, 79, 83, 84, 94, 600, 01, 09, 10, 12, 14). Cl. VI. Borţiu Maria (E: 1573, 74, 79, 84, 87, 92, 94, 600, 01, 09, 10, 13), Vereş Margareta (E: 1573, 74, 79, 92, 94, 600, 01, 08—10, 13).

ORAVIŢA (Banat). Cl. VI. Florescu Florian (E: 1574, 79, 84, 92, 94, 97, 600, 04, 08, 10, 13, 14).

ORŞOVA (Banat). Cl. VI. Craiciu Dan (E: 1574, 79, 83, 84, 97, 600, 04, 08, 10, 11, 13), Creţoiu Mircea (E: 1574, 79, 83, 84, 97, 600, 04, 08, 10, 13), Frumosu Nicolae (E: 1574, 79, 83, 97, 600, 04, 08, 10), Grozăvescu Ariana (E: 1574, 79, 83, 600, 04, 08, 10, 13), Ionelia Sanda (idem), Lupescu Nicolae (E: 1573, 79, 83, 84, 94, 600, 04, 08, 10, 13), Murariu Ion (E: 1574, 79, 83, 94, 600, 04, 10, 13), Radu Alexandru (E: 1574, 79, 83, 84, 94, 600, 04, 08, 10, 13).

PANCIU (Galaţi). Cl. IX. Ignat Gh. (4380—82, 406, 20, 33, 53, 65, 81, 83, 90), Zamfir Gh. Ioan (4351, 42, 51, 69, 73, 80—82, 90, 412, 15, 17, 18, 44, 48, 52, 75, 80, 81, 84, 96).

PETROŞANI (Hunedoara). Cl. VIII. **Crihană Lascăr** (E: 1571—75, 77—79, 81, 82, 84, 87, 89—600, 04, 06—08, 10, 11, 13, 16), Lepădatu C. Ion (E: 1567, 69—71, 73, 75, 77, 79, 81, 84, 87, 89, 91, 92, 94, 96), Orlov Zinaida (E: 1584, 87, 89—91, 93, 96, 99, 600, 03, 05, 09), **Popa Radu** (4381, 89, 98, 99, 434, 41, 43, 53, 54, 56, 70, 78, E: 1555, 61, 62, 69, 71—79, 81—84, 87, 89—601, 03—14, 16).

PIATRA NEAMŢ (Bacău). Ş. m. 1 Petru Rareş. Cl. VIII. Boboc Dănuţ (4398, 99, E: 1571—75, 77—79, 81, 82, 84, 85, 87—611, 13, 15, 16), Gaspariuc Călin (4475, 80, E: 1577—79, 81, 84, 87, 89, 92, 96, 600, 04, 05, 07—11, 15).

PITEŞTI (Argeş). Ş. m. 1 Nicolae Bălcescu. Cl. V. Boştenaru Narcisa (E: 1600, 04, 08, 10—12). Cl. IX. **Tărăbuţă Mihai** (4376, 80—82, 84, 90, 91, 93, 96, 97, 411, 16, 19, 20, 27, 33, 44, 48, 52, 53, 65, 72, 75, 80—84, 90, 96). Cl. X. Chiva N. Petre (4376, 84, 91, 96, 411, 15, 16, 18—20, 31, 33, 41, 42, 44, 52, 53, 72, 74, 75, 81—84, 96), Pătraşcu I. Gh. (4338, 83, 418, 20, 21, 41, 47, 54, 61, 67, 72, 95—97, 509, 10), Stancu Ion (4376, 80—84, 90, 91, 94, 96, 97, 411, 13, 15, 16, 18—20, 27, 33, 35, 44, 47, 51—53, 60, 61, 72, 73, 75, 80, 83, 84, 96, 97).

Ş. m. 3 Alexandru Odobescu. Cl. IX. Zamfir D. Cornel (4382, 84, 400, 12, 15, 20, 81, 84, 90, 96).

PLOIEŞTI. Ş. m. 1. Cl. V. Alexandrescu Elena (E: 1574, 79, 83, 84, 94, 97, 600, 04, 10, 14), Dima Şerban (E: 1574, 79, 83, 84, 94, 97, 600, 04, 10, 14), Lovensohn Marian (E: 1574, 79, 83, 84, 94, 600, 04, 08, 10, 11, 14), Nicolescu N. Aurelia (E: 1574, 79, 83, 84, 94, 97, 604, 08, 10, 11,

14), Olteanu Raluca (E: 1574, 79, 83, 84, 94, 97, 600, 04, 08, 10, 11, 14), Predescu Mihaela (E: 1579, 84, 94, 97, 604, 08, 10, 11, 14), State Adrian (E: 1574, 79, 84, 85, 94, 97, 600, 04, 08, 10, 11, 14), Zamfir Cristina (E: 1579, 83, 84, 97, 600, 04, 09, 10, 11, 14), Zamfirescu Alina (E: 1574, 79, 83, 84, 94, 97, 604, 08, 10, 11, 14). Cl. VI. Dăscălescu H. Adrian (E: 1573, 74, 79, 83, 84, 86, 87, 92, 94, 97, 600). Cl. VIII. Apostol M. Constantin (E: 1571, 73—75, 78, 84, 86, 87, 93, 95, 600), Andronescu Gabriel (E: 1571, 75, 78, 81, 83, 91, 93—96, 98, 600, 05, 10, 15), Bădulescu Ciprian (E: 1589, 91, 96, 600, 04, 05, 07, 10, 17, 20, 23, 27), Bratu Mircea (E: 1587, 90, 91, 94, 97, 600, 07, 08, 10, 11), Bucur I. Niculae (E: 1584, 87, 89, 90, 96—98, 600, 01, 05, 07, 08, 10, 11, 15), Cincan Paul (E: 1584, 87, 89, 91, 96, 600, 05, 08—10), Cotigă Radu (E: 1584, 91, 96, 600, 04, 05, 07, 10, 17, 21, 23, 27), Georgescu M. (E: 1571, 73, 75, 77), Iancu Cezar (E: 1583, 84, 86, 87, 94, 95, 600, 08—10), Ianculescu Lucian (E: 1587, 89, 91, 96, 600, 04, 05, 07, 10, 27), Ionescu V. Lucia (E: 1587, 90, 91, 94, 97, 600, 08, 11), Lampert Magdalena (E: 1587, 96, 600, 03—05, 07—11, 13, 16), Lazu I. Alexandru (E: 1580, 83, 87, 91, 92, 94—97, 600, 01, 04, 05, 08—10, 17, 18, 21, 26, 31, 37), Leonte I. Filip (4390, 475, E: 1571, 75, 77—79, 81—84, 86, 87, 89—600, 03—11, 15, 16), Mărculescu Viorel (E: 1584, 87, 91, 95, 97, 600, 08, 09, 11), Mendel Sorin (E: 1584, 87, 97, 600, 01, 03—05, 09, 10), Mihăilescu Ştefan (E: 1583, 84, 86, 87, 90, 91, 94, 95, 97, 608), Nicolae Paula (4390, E: 1571, 73, 74, 81, 84, 87, 89, 91, 94, 96, 600, 05, 10, 13), Pană Petruţa (E: 1583, 84, 89, 91, 94—97, 600, 04, 05, 07, 09, 10, 15, 16), Preda I. Constantin (E: 1583—84, 86, 87, 89—600, 04, 06—08, 10, 11, 13—15), Plopescu Maria (E: 1584, 87, 94, 95, 97, 600, 04, 09, 10, 15), Popescu Corneliu (E: 1583, 84, 86, 87, 90, 94, 95, 97, 600, 08), Ticlimpea Aurelia (E: 1587, 89, 96, 600, 03—05, 10, 13, 16), Tudor Liviu (4475, E: 1584, 85, 87, 90, 94, 98, 600, 01, 07), Viniard Nicolae (E: 1505, 83, 84, 94—97, 600, 01, 04, 05, 08—10). Cl. IX. Caleviu C. Narcis (4365, 69, 81, 82, 85, 91, 98, 99, 412, 19, 44, 52, 75, 81, 83), Costache Tudor (4381, 82, 84, 85, 90, 91, 423, 34, 44, 47, 48, 52—54, 70, 75, 81), Dumitrescu Corneliu (4365, 69, 81, 82, 90, 98, 99, 412, 19, 75, 83), Hovaneţ Tiberiu (4365, 69, 81, 82, 90, 91, 98, 99, 412, 44, 52, 53), Nicolae Grigore (4365, 69, 81, 82, 85, 90, 91, 98, 99, 406, 12, 19, 20, 44, 48, 52, 53, 65, 75, 81, 83, 90), Pîrvulescu Constantin (4381, 82, 89—91, 97, 99, 405, 07, 11, 18), Staicu N. Andrei (4381, 82, 84, 85, 90, 91, 421, 23, 34, 44, 47, 48, 52—53, 70, 81, 96). Cl. X. Constantin Aurel (4388, 98, 99, 422, 31, 34, 42, 45, 54, 87), Constantinescu Marius (4380—84, 90, 91, 96, 98, 400, 05, 11, 12, 47, 52, 53, 61, 81, 84, 96, 97, P), Emanoil Const. (4385, 96, 413. 52, 80, 81, 83, 84), Leonte Emilia (4380, 82—84, 90, 96, 415, 19, 20, 44, 52, 72, 75, 81, 82, 96), Matei N. Radu (4380—82, 91, 96, 97, 415, 18—20, 27, 33, 52), Muşat I. Alin (4390, 96, 411, 12, 16, 33, 47, 53, 61, 73, 74, 75, 81, 84, 97), Peiulescu Marius (4380, 83—84, 86, 98, 99, 405, 07, 18, 22, 31, 43, 47, 52, 53, 61, 81, 84, 96), Popescu Gh. Valentin (4381—84, 91, 94, 96, 413, 16, 20, 23, 33, 44, 47, 48, 52, 53, 60, 61, 75, 80—84, 97), Rusen Corneliu (4380—84, 90, 420, 31, 42, 44, 47, 75, 81, 83), Savu Mircea (4381, 82, 91, 415, 20, 27, 52, 75), Stănescu Constanţa (4380, 91, 98, 99, 405, 34, 35, 41, 43, 52, 53, 56, 70, 75, 81, 83, 84, 86, 87, 94), Cl. XI. Arnăutu P. Nicolae (4377, 80—82, 411, 19, 72, 80, 81, 96), Aron Cristian (4377, 80—82, 411, 19, 72, 80, 81, 96), Bărbulătescu Iulian (4377, 80—84, 90, 94, 96, 416, 23, 33, 47, 52, 53, 60, 80, 84), Chireanu Radu (4377, 94, 420, 44, 52, 53, 60, 61, 76, 97), Costache Gheorghe (4377, 79, 81—85, 90, 91, 97, 417, 20, 23, 29, 44, 47, 48, 52, 53, 55), Demetrian Romulus (4372, 75, 77, 80—84, 89—91, 94, 96—400, 11, 12, 15, 18—20, 41, 60, 61, 63, 67, 72—75, 79—81, 83, 84, 95, 96), Druckman Iosif (4380—84, 89—91, 94, 96, 98, 99, 407, 18, 22, 31, 43, 52, 53), **Drugea I. Gh.** (4376, 77, 85, 97, 405, 07, 12, 15, 23, 27, 29, 33, 41, 42, 44, 47, 48, 52, 54, 56, 62, 64, 67, 74, 78, 82, 84, 86, 90, 97, 99, 500, 03—07, 09, 10, 17—19, 22, 31, 33, 35, 36, 39, 40, 42, 43, P), Duţă Petre (4377, 79—85, 90, 91, 97, 419, 20, 23, 27, 29, 44, 48, 52, 53, 63, 65, 72, 81, 83, 90), Mărăscu Aurel (4463, 72, 75, 80—84, 90, 96, 97), Marinescu Alexandru (4388, 91, 93, 97, 400, 11, 38, 44, 50, 63, 72—74, 81, 82, 84, 90, 96, 98), Matei Gh. (4377, 80—82, 91, 419, 20, 72, 80, 81). **Opriş Ioan** (4376, 77, 85, 97, 407, 12, 13, 19, 21, 23, 27, 29, 31, 33, 34, 41, 42, 44, 47, 48, 52, 54, 56, 62, 63, 70, 74, 75, 80, 81, 83, 84, 86, 90, 96, 99, 500, 03—07, 09, 17), Spătaru Radu (4379, 81—84, 90, 91, 97, 419, 20, 23, 29, 47, 53, 55, 60, 63, 69, 72, 81, 83, 85, 90, 96).

Ş. m. 2 A. Toma. Cl. V. Mignea Arminius (E: 1574, 79, 83, 94, 97, 600, 04, 08, 10, 11). Cl. VI. Georgescu Mariana (E: 1573, 74, 79, 87, 97, 600, 03, 10, 13, 14), Tănăsescu Marina (E: 1573, 74, 79, 83, 97, 600, 04, 08, 10, 13). Cl. VII. Orăşanu Marilena (E: 1573, 74, 79, 83, 84, 94, 97, 600, 03, 04, 08, 10), Cl. X. Ceianu Ga-

briela (4377, 80—84, 88, 94, 96, 415), Topciu Rodica (4369, 80, 82, 83, 91, 419, 44, 52, 73, 75, 81).

Ş. m. 3 Mihai Viteazu. Cl. VII. Cepoiu Mariana (E: 1585, 92, 99—601, 03—16), Brener Paul (E: 1571, 72—79, 81, 83—88, 601, 02), Cîmpineanu Nicolae (4369, 81, 82, 91, 412, 16, 44, 52, 54, 80, 81, 83, 90), Florescu A. Mihai (4429, 48, 72, 75, 80, 81, 83, 84, 90, 97).

Ş. m. 4 C. I. Parhon. Cl. VII. Mocanu Georgeta (E: 1584, 91, 92, 94, 95, 97). Cl. IX. Pătraşcu Tudor (4381, 90, 91, 433, 72, 75, 81, 83, 84).

Ş. m. 5 Al. I. Cuza. Cl. X. Florea A. Florea (4390, 412, 16, 19, 20, 44, 53, 80, 83, 84, 90), Mîrzea Gh. (4382, 90, 412, 19, 20, 44, 53, 80, 83, 84, 90).

Ş. m. muzică. Cl. V. Roman Dan (E: 1455, 73, 79, 83, 94, 97, 600, 09, 10).

Şc. de 7 ani Tisău. Cl. V. Cîmpeanu N. Valeria (E: 1600, 04, 08, 10, 11, 14, 17, 26, 27, 31), Ciuleanu Const. (E: 1574, 79, 83, 84, 94, 97, 600, 04, 10, 11, 14), Vişan I. Maria (E: 1600, 04, 08, 10, 11, 14, 17, 26, 27, 31). Cl. VII. Chirşanov Eduard (E: 1589, 91, 93, 96, 99, 603, 05, 09).

PREDEAL (Braşov). Complexul şcolar. Cl. VII. Ioniţă I. Maria (E: 1586, 96, 98, 600, 01, 04, 05, 07—09). Cl. XI. Popa Dorina (4380—83, 90, 91, 93, 94, 96, 400, 12, 19, 20, 25, 27, 29, 47, 48, 52, 53, 72, 73, 75, 83).

PUCIOASA (Ploieşti). Cl. VIII. Matei C. Gh. (4381, 82, 415, E: 1572, 82—84, 87, 89, 90, 92—94, 99, 600, 08, 16), Neacşu Emilia (E: 1574, 77—79, 81, 86, 87, 89, 91, 95, 96, 604, 10, 11, 15, 16). Cl. X. Diaconescu C. Radu (4341, 75, 85, 88, 894 97, 405, 07, 12, 13, 15, 16, 20—23, 29, 31—35, 38—44, 47, 52—54, 60, 61, 64, 67, 73, 75), Marin I. Victor (4341, 42, 54, 59, 65, 69, 71, 80—83, 90, 91, 93, 94, 96, 97, 400, 12, 16, 20, 52, 53), Năstăsescu Constantin (4387, 88, 400, 07—09, 14, 19, 20, 23, 29, 31, 33—35, 38, 40, 44, 46—48, 50—53, 55, 56, 59—61, 63, 64, 68, 71—73, 75, 79—84, 89, 92, 95—97, P), Niţă Constantin (4377, 83, 404, 05, 08, 10, 13, 16, 19, 20, 23, 25, 27, 29, 33, 35, 38, 40, 44—48, 52, 53, 60, 61, 63, 64, 68, 72, 73, 75, 79—84, 89, 90, 92, 96, 97, P), Popescu S. Gh. (4377, 82, 91, 98, 99, 412, 15, 16, 27, 31, 34, 41, 43, 46, 52, 53, 57, 60, 61, 63, 65, 67, 69, 70, 72, 73, 75, 78—87, 89, 94—97).

RĂDĂUŢI (Suceava). Cl. X. Sîrghie Mircea (4302—09, 12, 15, 16, 19, 33, 37, 38, 42, 45, 47, 49, 51, 54, 55, 59, 62, 65, 69, 70, 75, 76, 80—85, 88, 91, 96, 98, 99, 409, 12, 15, 19, 20, 22, 31, 34, 42—44, 47, 48, 52, 53, 61, 70, 72, 73, 75, 80—84, 90, 94, 96, 97, P).

REŞIŢA (Banat). Cl. V. Sbiera Gabriela (E: 1541, 46, 74, 79, 83, 84, 94, 97, 600, 01, 09, 10). Cl. VI. Cioncel Petru (E: 1574, 79, 83, 84, 94, 97, 98, 600, 08, 10, 11, 14), Cl. VII. Stiopu Magda (E: 1561, 70, 73, 74, 79, 84, 87, 94, 97, 600).

RÎMNICU SĂRAT (Ploieşti). Ş. m. Alexandru Vlahuţă. Cl. IX. Nelepcu Grigore (4380—82, 91, 420, 33, 48, 53), Salaoru I. Ion (4420, 33, 44, 48, 52, 81, 83, 96). Cl. XI. Salaoru I. Maria (4380—83, 94, 408, 19, 20, 33, 44, 48, 52, 61, 72, 81, 83, 96, 97).

RÎMNICU VÎLCEA (Argeş). Ş. m. Nicolae Bălcescu. Cl. VII. Droaşcă Bogdan (E: 1575—77, 81, 89, 91, 93, 602, 09, 16). Cl. IX. Mironescu A. Mircea (4380—84, 94, 96, 408, 11, 15, 16, 18), Solea Marcel (4380—82, 91, 418, 20, 52), Vasile Gh. Ion (4385, E: 1571, 73, 75). Cl. X. Preoteasa Petre (4380, 82—84, 90, 91, 416, 18, 53, 61, 80, 81, 83, 84). Cl. XI. Popescu I. Virgiliu (4419, 20, 22, 31, 34, 44, 52, 55, 61, 72, 80—84, 96, 97).

ROMAN (Bacău). Cl. IX. Niculescu G. G. (4382, 85, 97, 412, 20, 44, 52, 68, 72, 81, 90).

ROŞIORII DE VEDE (Bucureşti). Ş. m. Tudor Vladimirescu. Cl. VIII. Nebunescu I. Alex. (4365, 69, 81, 82, 44, 48, 81, 84, 90), Neciu Maria (E: 1587, 89—91, 93—96, 99, 600, 03), Toader Michi (E: 1587, 89—91, 93—96, 99, 600, 03).

ROZNOV (Bacău). Cl. V. Simion Violeta (E: 1574, 79, 83, 84, 90, 94, 95, 97, 600, 04, 10, 11, 13).

RUPEA (Braşov). Ş. m. Ştefan O. Iosif. Cl. X. Lazea Ioan (4380—82, 91, 415, 20, 27, 44, 48, 52, 81, 84).

SACADAT (Crişana). Şc. de 7 ani. Cl. VII. Gherghel Traian (E: 1583—88, 90, 91, 93—97, 600—04, 06—11, 13—15), Negruţiu T. Vasile (E: 1581, 83—91, 93, 94, 96—98, 600—11, 13—15).

SALONTA (Crişana). Cl. VIII. Bercezki Maria (4405, 53, E: 1573, 74, 77—79, 81, 83, 84, 97), Flueraş Ioan (E: 1573, 74, 78, 79), Halmăgeanu Gh. (E: 1571, 74, 78, 79, 84, 87—90, 93—95, 97), Matok Ileana (E: 1572, 74, 77—79, 81, 84, 86, 87, 93, 97), Rusu Neli (E: 1573, 74, 77—79, 81, 83, 87, 93, 97), Tăşnade Iuliana (E: 1584, 86—92, 94, 95), Tirban Horia (E: 1571, 74, 78, 79, 84, 87, 93), Vente Teodor (E: 1574, 77, 79, 89, 91, 97, 600, 01, 04, 10). Cl. IX. Borcea Valeria (4381, 82, 90, 91, 405, 44, 75, 89, 90), Crăciun Viorica (4382, 90, 405, 11, 52, 53, 75, 81, 83, 96), David Floarea (4382, 90, 405, 11, 40, 52, 53, 75, 81, 96), Drăgan Viorica (4382, 90, 405, 52, 53, 75, 81, 83, 95), Guiaş Eugen (4381, 82, 90, 98, 99, 441, 67, 70, 75, 86), Mărgineanu Floarea (4381, 82, 85, 90,

MŰSZAKI KÖNYVTÁR 1883

91, 405, 11, 25, 75, 81), Naghi Eirra (4381, 82, 90, 405, 40, 52, 53, 75, 83, 90), Pantea Ana (4382, 90, 405, 52, 53, 65, 68, 75, 81—83, 90), Roman Teodor (4381, 82, 90, 405, 52, 53, 67, 70, 75, 81). Cl. XI. Molnar Elisabeta (4382, 83, 96, 405, 15, 23, 48, 52, 53, 55, 61).

SATU MARE (Maramureș). Cl. VIII. Brener Robert (E: 1571, 73—75, 77, 81, 89, 91, 95, 96), Dan Maria (E: 1573, 77, 84, 87, 90, 91, 96—98, 616), Fruchter Lazăr (E: 1574, 79, 83, 89, 91, 94, 95, 97, 98, 600, 04, 05), Goldner Iufith (E: 1573, 74, 76, 78, 79, 80, 84, 97), Herșcovici Samuel (E: 1600, 01, 04, 07—10, 13, 15, 16), Katz Eugen (E: 1583, 84, 87, 89, 600, 04, 05, 08, 10, 16), Pițu Ana (E: 1584, 88—90, 92, 94—98), Polac Sara (E: 1559, 73, 74, 77—79, 84, 87, 89, 91, 96, 600), Samuel Iudith (E: 1592, 99, 600, 03, 05, 08—11, 15), Weinberger Eva (E: 1574, 75, 79, 89—92, 95, 97, 605), Weisz Andrei (4470, 75, E: 1596, 67, 99—601, 04, 05, 07, 10), Weisz Ion (E: 1574, 79, 81, 83, 89—91, 94—96), Weisz Iuditha (E: 1571—75, 77—79, 84, 87, 89—91, 93, 96—98, 600, 10, 13).

SĂVENI (Suceava). Ș. m. Cl. VIII. Calacudă Henriette (E: 1571, 73, 74, 78, 86, 87, 89, 90, 600, 04, 05, 09, 10), Savițescu Gh. (E: 1576—78, 84, 87, 89, 91, 93, 98, 610). Cl. IX. Mihalache Vasile (4380—82, 89, 98, 99, 419, 81), Onofrei Mihai (4380—82, 96, 99). Cl. X. Enache Ioan (4405, 06, 08, 72, 75, 81, 84).

SF. GHEORGHE (Brașov). Șc. de 7 ani. Cl. V. Antonescu Alexandrina (E: 1574, 79, 83, 84, 94, 97, 600, 10, 13, 14), Bucur Cornelia (idem), Dumitrescu Gabriela (idem), Hariton Dan (idem), Munteanu Iulian (idem), Pintea Elena (idem), Zaharia Tatiana (idem).

SIBIU (Brașov). Ș. m. 1 Gheorghe Lazăr. Cl. VIII. Pavelescu Marian (4443, 70, 75, 86, 599, 602, 05, 09, 16, 75, 80, 83), Scurtu Ionel (4380—83, 90, 91, 405, 12, 16, 19, 33, 52, 53, 73).

Ș. m. 2. Cl. VIII. Tănase Rodica (E: 1583, 84, 92, 95, 97, 600, 06, 08, 10, 16), Trif Maria (4447, E: 1583—90, 92, 95—98).

Ș. m. 3 Gheorghe Coșbuc. Absolvent Toth Frieder (4376, 77, 80, 82—84, 96, 447, 71, 73, 83, 84). Cl. VIII. Bîrleanu Luminița (E: 1571—73, 75—77, 80, 81, 83—91, 95—98). Cl. XI. Bulea Nicolae (4380—83, 480), Tatu Jana (4384, 94, 97—99, 405, 16, 23, 31, 34, 72, 80, 81, 83, 84, 95).

Șc. tehn. Independența. An I. Dan Virgilius (4376, 77, 79, 80, 82—84, 96, 419, 20, 33). An II. Tănase Const. (4470, 72, 75, 81, E: 1597, 600—16).

Șc. de 7 ani. Cl. VII. Bucur Delia (E: 1599—604, 06—10, 16), Bunea Mircea (E: 1577, 79, 82—84, 97, 600, 01, 08, 13), Holanda Doina (E: 1599—604, 06—10).

(Va urma)

CONCURS PENTRU ELABORAREA UNOR PROBLEME LEGATE DE PRACTICĂ

Gazeta matematică și fizică seria B organizează un concurs pentru grupuri de probleme cu un conținut care să reflecte legătura matematicii și fizicii cu practica. În acest scop, participanții la concurs vor trimite pînă la 1.X.1961 un număr de cel puțin 15 probleme împreună cu soluțiile lor într-un plic cu un motto, iar în interiorul plicului se va pune un altul mai mic, sigilat pe care se scrie același motto și care va conține numele și adresa autorului sau a autorilor.

Nu vor fi luate în considerare decît acele probleme care nu au apărut în alte cărți și reviste.

În funcție de calitatea și numărul problemelor se vor acorda premii în bani și se va asigura publicarea lor în periodicile Societății de științe matematice și fizice din R.P.R.

Pe plicurile trimise pe adresa din str. Academiei nr. 14 — București, se va face mențiunea „Pentru concursul de probleme practice".

LA ÎNTRECEREA ORGANIZATĂ DE G.M.F.-B pe anul 1961 între școlile medii

Se mai primesc înscrieri pînă la 30 iunie 1961, însoțite de fișa respectivă, conform regulamentului publicat în G.M.F.-B nr. 2, pag. 97 din februarie 1961.

CĂTRE REZOLVITORII DE PROBLEME

Corespondenții care ne trimit probleme rezolvate trebuie să redacteze fiecare problemă separat, însoțind-o de toate calculele necesare și de figuri desenate cu îngrijire. Nu se vor trimite soluțiile mai multor probleme pe aceeași foaie. Problemele rezolvate de fizică se vor trimite separat, iar pe plic se va scrie: *Pentru redacția de fizică.*

Se primesc lunar cel puțin zece soluții numai la problemele și exercițiile din ultimele trei numere apărute. Pe plic se va scrie localitatea și școala pe care o urmează rezolvitorii, pentru a se evita confuzii la întocmirea rubricii rezolvitorilor de probleme și a listei celor evidențiați. Soluții la problemele propuse pentru școala de 7 ani se primesc numai de la elevii claselor V—VIII, sau ai școlilor profesionale.

Problemele care se propun de către colaboratorii revistei să fie clar alcătuite și însoțite de soluții, să fie personale, iar nu luate din cărți sau reviste. Elevii sînt sfătuiți să înceapă a propune probleme numai după ce au rezolvat un număr destul de mare de exerciții și probleme. Problemele propuse, dar necorespunzătoare, nu se pot publica. Dacă un corespondent constată că unele probleme propuse au fost publicate în cărți sau reviste, este rugat să ne arate precis volumul și pagina unde a mai apărut enunțul sau soluția problemei respective.

Corespondentul nostru care a citit și a înțeles deplin multe din soluțiile publicate, a rezolvat multe din problemele propuse, poate și este îndemnat să încerce să schițeze cîte o notă rezultată dintr-o observație făcută cu ocazia rezolvării unei chestiuni mai grele. Aceste note să fie *refăcute de mai multe ori înainte de a fi trimise*, pentru ca redactarea lor să fie *cît mai clară și concisă*. Figurile să fie făcute separat. În redactare se vor evita prescurtările. Nu se va scrie: ∥, ⊥, ∥=, Δ, ∢, Tr., etc. iar trecerea de la un calcul la altul să fie explicată pentru a se putea urmări ușor desfășurarea unei demonstrații. Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

La publicarea problemelor rezolvate se vor menționa rezolvitorii care au dat o bună redactare și o soluție interesantă, sau mai multe metode de rezolvare.

Tovarășii colaboratori elevi sînt rugați să ne trimită date asupra activității lor extrașcolare la matematică și la fizică, asupra activității cercurilor de matematică și de fizică la care iau parte, pentru ca apoi, prin revistă, să se poată realiza cu succes un schimb de experiență. Dările de seamă concrete se vor publica în G.M.F.-B.

Autorii sînt rugați ca la întocmirea articolelor și notelor să țină seama de următoarele: articolele sau notele să fie scrise clar cu cerneală sau dactilografiate la două rînduri și pe o singură parte a foii, figurile să fie desenate îngrijit și pe o foaie separată. Problemele propuse să fie însoțite de una sau mai multe soluții.

Autorul să semneze clar lucrarea personală pe care o trimite pentru publicat, de asemenea să scrie adresa și data trimiterii lucrării.

— Materialele care nu corespund profilului G.M.F.-B, nu vor fi publicate.

Colecții și numere din anii precedenți

Societatea de Științe Matematice și Fizice din R.P.R., posedă exemplare mai vechi din G.M.F.-B, și G.M.F.-A.

Cititorii noștri își pot procura colecții ca și numere disparate, depunînd banii la poștă prin mandat poștal pe numele Societății de Științe Matematice și Fizice, strada Academiei nr. 14, contul 070.004 la B.R.P.R., filiala Lenin.

Prețul unui exemplar este de lei 3 pentru G.M.F.-A și de lei 1,50 pentru G.M.F.-B. Cheltuielile de transport sînt de 0,20 lei de exemplar.

ABONAMENTE — Societatea de Științe Matematice și Fizice din R.P.R. primește abonamente începînd cu nr. 1/1961 la oricare din publicațiile sale: a) Pentru instituții, școli, biblioteci la prețul de lei 60 anual, pentru fiecare din periodicile sale: G.M.F.-A, G.M.F.-B, M.F.L., Bulletin Mathematique și 40 lei anual la „Mathematica".

b) Pentru profesori și elevi la prețul de 18 lei la G.M.F.-B sau M.F.L. de 36 lei la G.M.F.-A, de 60 lei la Bulletin Mathématique și de 40 lei la „Mathematica".

— Fiecare abonat este rugat să facă cunoscută G.M.F.-B și altor colegi, pentru a face abonamentele din vreme în vederea planificării tirajului lunar.

— Abonamentele se pot face individual sau colectiv prin oficiile poștale locale sau prin factorii poștali.

Litografia și tipografia învățămîntului. — c. 1113.

Lei 1,50

E 1426

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE
DIN R. P. R.

GAZETA MATEMATICĂ ȘI FIZICĂ

(SERIA B)

Anul XII iulie 1961

7

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

(SERIA B)

Anul XII, nr. 7, iulie 1961

SUMARUL

		Pag.
1.	Newton de conf. univ. N. Mihăilă	385
2.	Progresii geometrice, numere complexe şi sume trigonometrice, de C. Ionescu-Ţiu	392
3.	Rezonanţa, de Ilie Stănescu	397
4.	În legătură cu problema 4530 de H. Gorcea	401
5.	Note matematice de C. Gh. Bănică, Vodă Viorel, L. Lupaş	405
6.	Dispozitiv pentru demonstrarea legii lui Arhimede (traducere din limba rusă)	409
7.	Variaţia temperaturii atmosferice în timpul eclipsei solare din 15 februarie 1961	411
8.	Probleme rezolvate (4218; 4250; 4314; 4321; 4335; 4336; 4337; 4338; 4343; 4344; 4348; 4350; 4397; E: 1548; 1549; 1553; 1554; 1574; 1577; 1581)	413
9.	Chestiuni de examen (4772—4786)	427
10.	Probleme propuse (4787—4822)	431
11.	Exerciţii şi probleme propuse pentru şcoala de 7 ani (E: 1703—1715)	437
12.	Rubrica rezolvitorilor de probleme	439

ANUL XII **7** IULIE

COMITETUL DE REDACŢIE

Ailincăi M., profesoară; *Atanasiu V.*, lector, redactor pentru fizică; *Bolangiu D.*, lector; *Ionescu-Bujor C.*, prof. univ.; *Ionescu-Ţiu C.*, profesor, redactor pentru matematică; *Manolescu Şt.*, profesoară; *Muşat I.*, profesor; *Petrovanu A.*, profesor; *Sacter O.*, conf. univ., redactor şef; *Simionescu D. Gh.* conf. univ.; *Csiki Zoltan*, asistent.

REDACŢIA: Str. Academiei, 14 — Tel. 14.46.53 — Bucureşti 1

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar putea interesa redacţia noastră se vor trimite pe adresa de mai sus.

GAZETA MATEMATICĂ ȘI FIZICĂ

(SERIA B)

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul XII, nr. 7 iulie 1961

NEWTON

conf. univ. *N. Mihăilă*

1. **VIAȚA.** Isaac Newton s-a născut în satul Woolsthorpe din Lincolnshire, regiunea răsăriteană a Angliei, în ziua de 25 decembrie stil vechi în anul 1642 *).

Născut prematur (ca și Kepler), mic și slab, se credea că nu va trăi mult timp. Contrazicînd această părere, Newton a trăit peste 84 de ani. Tatăl său, pe nume tot Isaac Newton, fermier și care fusese „un om sălbatic, ciudat și slab", murise cu cîtva timp înainte de nașterea copilului său. Mama sa, Anna Ayscongh, tot dintr-o familie de fermieri, dimpotrivă, a fost „o femeee cu calități și de o bunătate remarcabilă".

Pînă la vîrsta de 3 ani Newton a fost îngrijit de mama sa, pentru ca după recăsătorirea ei copilul să fie luat sub îngrijirea unei bunici, care l-a crescut, purtînd și grija primelor lui studii, făcute în satul natal. La vîrsta de 12 ani este trimis în orașul apropiat Grantham, pentru a învăța limba latină. Newton însuși relatează că la început nu era printre primii din clasa sa; a trecut pe primul loc drept răspuns față de șeful clasei, care într-o zi l-a bătut, și pe care, acela fiind mai voinic, nu-l putea bate decît căutînd să-l întreacă la învățătură.

Probabil că debilitatea sa fizică și statura mică au determinat firea sa retrasă: își petrecea timpul liber singur, construind diferite mașini ca: mici mori la care un șoricel făcea pe morarul, un ceas de apă ale cărui

*) După data calendaristică folosită în prezent, aceasta corespunde zilei de 5 ianuarie 1643.

Indicatoare erau mișcate de o mică bucată de lemn care se lăsa odată cu apa care curgea, un cadran solar, o căruță al cărei căruțaș așezat pe scaun o mișca cu mînile sale etc. Îi plăcea să construiască smee pe care le împodobea cu felinare și cu hîrtie colorată, urcîndu-le uneori în văzduh noaptea, pentru ca apoi glumind, tot el să răspîndească în regiune zvonul despre apariția unei comete. De asemenea îi plăcea să deseneze și să picteze, obținînd chiar unele succese.

În 1656 mama lui Newton rămînînd iarăși văduvă, reveni la Woolsthorpe cu copiii din a doua căsătorie și chemă pe băiatul cel mare, pe Isaac Newton, care avea 14 ani, să o ajute la cultivarea pămîntului rămas de la primul ei soț. Adolescentul Isaac nu avea însă capul la treburile gospodăriei, la adunatul grînelor și vîndutul zarzavaturilor *). La sfaturile unui unchi, frate al mamei sale care spunea că acest tînăr nu este bun de nimic altceva decît poate de a deveni savant, precum și la recomandările unui eminent profesor Henri Stokes, conducătorul școlii din Grantham, care aprecia foarte mult aptitudinile și sîrguința tînărului Newton, acesta fu trimis în continuare la Grantham unde rămîne pînă în 1661. După terminarea studiilor într-un mod strălucit **), Newton fu admis la Trinity College din Cambridge.

Învățămîntul superior din Anglia de atunci — în bună parte și cel de astăzi — era organizat pe colegii, în care profesorii și studenții duceau o viață comună, locuind și studiind în interiorul instituției respective. Studenții trebuiau să plătească o taxă de întreținere și de studii. Newton nu dispunea de banii necesari, de aceea el a fost primit cu condiția să facă anumite servicii.

Abia la vîrsta de 19 ani, a început Newton să învețe matematicile. Nesatisfăcut cu ceea ce se preda (în primii doi ani se făceau matematici elementare) el nu se mărginește la cursuri ci începe să studieze singur, cercetînd cu predilecție, operele marilor matematicieni greci și contemporani ***).

A studiat: Optica lui Kepler (se pare că este prima carte de matematici pe care a citit-o la Cambridge), Geometria lui Descartes (la înțelegerea căreia a avut unele dificultăți), operele lui Viéte, ale lui Van Schooten, Aritmetica infinitorum a lui Wallis (profesor la Oxford). Atunci a făcut el cunoștință cu sistemul lui Copernic. Este epoca în care Newton a studiat cu predilecție matematicile, fără însă să se clarifice o direcție de cercetări bine stabilită. Acela care l-a îndrumat în cercetările matematice a fost profesorul său Isac Barrow (1630—1667), devenit mai tîrziu, prietenul său.

---

*) Se relatează ca în septembrie 1658, pe timpul unei furtuni groaznice, Newton, în loc să se preocupe de pagubele pe care această furtună le producea, era preocupat de felul cum să măsoare puterea vîntului (în acest sens el măsoară lungimea săriturii sale în direcția vîntului și în contra vîntului).

**) Se relatează că la terminarea școlii, H. Stokes a pronunțat cu lacrimi în ochi un discurs în care a elogiat talentele și caracterul lui Newton.

***) Se spune că mai tîrziu, cînd ajunsese om mare, s-ar fi exprimat astfel: „Dacă am putut vedea ceva mai departe decît alții, aceasta se datorește faptului că m-am ridicat pe umeri de gigant".

Newton trece gradele universitare ale timpului, cu mare ușurință: în 1664 devine „scholer" (student activ); în 1665 bacalaureat; în 1667 „minor fellow" (membru minor al Colegiului); în martie 1668 „major fellow" (membru major), iar în iulie același an „maestrul artelor" (magistru). În 1669, deci cînd Newton avea 27 de ani, Barow i-a cedat catedra sa universitară.

În perioada anilor 1661—1669, Newton se transformă dintr-un student sîrguitor și corect într-un savant cu o puternică originalitate și independență. Atunci a descoperit el formula binomului, metoda seriilor infinite, ocupîndu-se și cu chestiuni de optică.

Datorită unei groaznice epidemii de ciumă, care a bîntuit în Anglia între 1661—1667, Newton s-a refugiat de mai multe ori în satul său natal, unde, într un „concediu creator" de aproape doi ani s-au conturat mai precis în mintea lui cele trei mari descoperiri: calculul infinitezimal, gravitația universală *) și analiza luminii. Ele au constituit apoi programul activității pentru întreaga muncă științifică de bază dusă ulterior.

În 1672 a fost ales membru al Societății Regale din Londra, această instituție fiind analoagă academiilor de științe din alte țări. Aici își prezintă Newton telescopul reflector construit de el, își face comunicările științifice ca: Noua teorie a luminii și a culorilor, care a fost totodată începutul unei serii de controverse științifice cu diverși savanți ai epocii ca: Pardies, Linus, Lucas, Hooke, Huyghens și alții.

În 1686 a depus manuscrisul lucrării lui capitale: *Principia mathematica philosophiae naturalis*" (Principiile matematice ale filozofiei naturale", „în care se dă pentru prima dată o demonstrație matematică ipotezei lui Copernic, așa cum a fost expusă de Kepler și unde toate mișcările corpurilor cerești sînt explicate pe baza unicei presupuneri a gravitației către centrul Soarelui, invers proporțională cu pătratul distanței" (citat din procesul verbal al ședinței de prezentare a manuscrisului la Societatea Regală).

În al IX-lea deceniu al secolului în care a trăit Newton, în Anglia s-a copt o nouă revoluție, care deși a avut la bază contradicții economice a avut ca manifestare exterioară frămîntările religioase. La Cambridge aceasta s-a făcut simțită prin călcarea drepturilor universității de către regele Iacob al II-lea, susținător al papistașilor, care, considerînd această universitate drept o citadelă a anglicanilor a urmărit să introducă acolo catolici, cerînd să se acorde titlul de magistru unui călugăr benedictin. Newton, de altfel cel mai categoric contra acestei intenții, plecînd în fruntea unei delegații la Londra, reușește să obțină ca cererea regelui de „alegere" să fie retrasă.

*) Voltaire relatează că Newton aflîndu-se într-o seară în grădină sub un pom, cade pe dînsul un măr. Gîndind asupra acestui fapt, îi trece prin minte că toate corpurile cad, atît deasupra pămîntului cît și în puțuri, fie la nivelul mării, fie în vîrful munților. Se întreabă atunci: pînă la ce înălțime se va fi întinzînd această acțiune a Pămîntului? Ridicînd ochii în sus vede Luna strălucind pe cer și se întreabă: Dar atunci, de ce nu cade pe Pămînt? Meditează îndelung asupra acestor chestiuni și ajunge să descopere gravitația universală. El însuși cînd a fost întrebat cum a ajuns la descoperirea legii atracției universale a răspuns: „Gîndindu-mă neîncetat la dînsa".

În 1688, 1705, 1711 Newton a fost ales membru în parlament ca reprezentant al universității din Cambridge *). În calitatea sa de deputat a ajutat mult universitatea.

În 1703 Newton a fost ales Președinte al Societății Regale, apoi reales pînă la moarte, timp de 27 ani, fără să se ivească vre-un alt candidat sau să se aducă cea mai mică obiecție asupra alegerii lui.

Încă din 1695 Academia de Științe din Paris, pentru a-și putea exprima admirația față de omul de știință și pentru a-l putea alătura membrilor ei, înființează calitatea de membru asociat pe care i-o atribuie lui Newton.

Timpul dintre anii 1690—1693 reprezintă epoca în care Newton a suferit oarecari deranjări cerebrale și psihice; de fapt, atunci s-a încheiat seria producțiilor lui geniale. Această boală era datorită în primul rînd, oboselii intelectuale în urma muncii depusă pentru publicarea Principiilor; declanșarea ei a avut loc din cauza unui incendiu care i-a distrus laboratorul și o seamă de manuscrise, a căror pierdere l-a zdruncinat adînc.

În urma surmenajului intelectual și boalei prin care trecuse, deși numai în vîrstă de 50 de ani, nu și-a mai continuat activitatea profesorală.

În 1696 este numit păstrător al monetăriei: „Acesta este postul principal la monetărie..., care nu vă va lua mai mult timp decît puteți dv. să-i consacrați", îi scrie prietenul său Montague, fost student la Trinity College, devenit lord Halifax și deținătorul postului de ministru cancelar al tezaurului.

În 1697, cînd prin Cassini i se transmite propunerea regelui Franței de a-i plăti o pensie, el o refuză.

În 1699 Newton este numit director general al monetăriei cu un salariu mare, care îi permite să renunțe la venitul pe care i-l aduce catedra de la Cambridge. Numirea lui Newton la monetărie, deși făcută în primul rînd, pentru a-i da o nouă ocupație și un post bun, a avut în vedere și folosirea cunoștințelor lui în domeniul metalurgiei, și chimiei, ceea ce era important pentru realizarea unei mari reforme financiare privind rebaterea monedei. Newton a adus o contribuție serioasă în această direcție. A publicat și o scriere asupra valorii intrinseci a monedelor, citată în tratatele de economie politică.

În 1705, i se acordă titlul de noblețe, devenind „Sir Isaac**).

Newton continuă să citească și să se țină la curent cu progresele științei, dar nu mai produce ceva deosebit. În ultimii ani ai vieții, ca director al monetăriei este ajutat de Condwitte, soțul nepoatei sale Ecaterina, aceasta avînd de altfel grijă de casa și bătrînețea lui. Newton

*) Urmărea cu asiduitate dezbaterile parlamentare, dar dintr-o timiditate de a vorbi în public, în Camera Comunelor, nu s-a auzit decît o singură dată glasul lui și aceasta pentru a cere să se închidă o fereastră lîngă care vorbea un parlamentar, ca să nu fie expus răcelii.

**) Este demn de menționat că o asemenea atenție acordată de obicei militarilor, funcționarilor și fruntașilor vieții sociale, a fost manifestată prima oară față de un savant. Peste 100 de ani, altui savant, chimistului Davy, i-a fost acordată aceeași distincție.

nu a fost căsătorit. Pe timpul cît fusese elev la liceul din Grantham a cunoscut pe miss Storay, pe care o creștea farmacistul Clark la care locuia, față de care a avut o afecțiune deosebită. Nu s-a putut căsători deoarece devenit profesor la Cambridge, după tradiția medievală, membrii colegiului trebuiau să rămînă celibatari.

Contrar celor ce se putea socoti la naștere, Newton a fost toată viața, în general, un om sănătos. Ultimii cinci ani a suferit de o boală serioasă renală, care l-a chinuit, dar pe care a suportat-o cu multă răbdare. În urma unei crize, în noaptea de 20—21 martie 1727, în vîrstă de 84 de ani, 2 luni și 21 zile, marele Newton a murit, supunîndu-se și el legilor naturii. A fost înmormîntat cu onorurile care se dădeau regilor la mînăstirea Westminster, unde se îngropau numai persoanele ilustre ale Angliei și membri din familia domnitoare. Asemenea onoruri date rămășițelor pămîntești ale unui om de știință nu se mai făcuseră în lume decît în vechea Grecie. În 1731 i s-a ridicat un monument pe care s-a scris o inscripție din care citățm:

„Hic situs est [Isaacus Newton, eques auratus, [Qui animi vi propre divina, [Planetarum motus, figuras, [Comentarum semitas, oceanique aestus, [Sua mathesi faciem praeferente, [Primus demonstrativit".

Sau, mai departe:

„Sibi gratulentur mortales, tale tantumque extitisse [Humani generis decus" *).

La universitatea din Cambridge în 1755 i s-a ridicat o statuie pe soclul căreia s-a scris următoarea inscripție laconică din Lucrețiu:

„Qui genus humanum ingenio superavit" **).

2. **OPERA.** Newton, a fost în egală măsură un mare matematician și un mare fizician. Astronomia, chimia, istoria, filozofia, religia au constituit de asemenea obiectul preocupărilor sale.

Matematica în diferitele ei ramuri a fost îmbogățită de cercetările științifice ale lui Newton.

Formula coeficienților binominali, un nou mijloc de a găsi marginea superioară a rădăcinilor unei ecuații algebrice, o metodă de aproximare a rădăcinilor irațională, teoria funcțiilor simetrice (de rădăcinile unei ecuații algebrice), rezolvarea problemei generale a interpolării, clasificarea tuturor cubicelor arătînd că ele se deduc prin perspectivă din cinci cubice de bază etc., sînt unele din contribuțiile lui Newton la ducerea mai departe a algebrei și geometriei.

Opera de bază în matematici o constituie însă, crearea calculului infinitezimal. Acestei noi ramuri a matematicii (creată împreună cu Leibniz) el îi zicea calculul fluxiunilor, luîndu-și imagina noțiunilor matematice din mecanică: „fluxiune" (derivată); „fluenta" (primitivă) în legă-

*) „Aici se odihnește Sir Isaac Newton, nobil, care cu o rațiune aproape divină a demonstrat cel dinîi, cu făclia matematicii, mișcarea planetelor, căile cometelor și fluxurilor oceanelor"; sau mai departe: „Să se felicite muritorii că a existat o astfel și atît de mare podoabă a minții omenești".

**) „Prin mintea lui a depășit genul uman".

tură cu cuvîntul curgător ; „moment" (diferențială). Embrioane ale calculului infinitezimal se găsesc încă în antichitate, la Arhimede (—287—, —212), care a folosit o metodă infinitezimală la aflarea cvadraturii unui segment de parabolă. De fapt, descoperirea calculului infinitezimal a durat aproape întregul secol al XVII-lea, fiind pregătit de matematicienii și fizicienii : Galileu, Cavalieri, Descartes, Toricelli, Roberval, Wallis etc. Arhitecților geniali, Newton și Leibniz în egală măsură, deși de pe poziții diferite și independent unul de altul, le revine meritul de a fi creat monumentul măreț al cugetării omenești — calculul infinitezimal. Desăvîrșirea acestui puternic instrument de cercetare teoretic și de aplicație, a fost făcută de o pleiadă de matematicieni : Jacques, Jean și Nicolas Bernoulli, L'Hospital, Moivre, Taylor, Mac-Laurin etc.

În fizică contribuția lui Newton a fost de asemenea bogată. Chestiuni de optică, printre care analiza și sinteza luminii, care au pus bazele spectroscopiei (prin care s-a permis omului să cunoască ce substanțe se găsesc în corpurile cerești), chestiuni privind dispersia luminii, care l-au făcut pe Newton să renunțe la ideea perfecționării lunetelor, ceea ce l-a condus însă, la construirea telescopului prin reflexie, problema lamelor subțiri, a inelelor (care-i și poartă numele) au făcut de asemenea obiectul cercetărilor sale.

În privința naturii luminii, Newton, care era atomist — a emis teoria corpusculară în sensul că particule de materie extrem de mici se propagă din corpul luminos în linie dreaptă în toate direcțiile și cu o iuțeală extraordinară. Astăzi se cunoaște faptul că lumina este atît de natură corpusculară cît și de natură ondulatorie.

El este primul care a observat că sticla se electrizează prin frecare cu o bucată de postav ; a stabilit legea răcirii corpurilor ; a dat o teorie despre transmiterea sunetului prin aer (și despre care marele Laplace (1749 —1827) spunea că este un monument al geniului său), a făcut un termometru etc.

Triumful științific al lui Newton culminează cu crearea Mecanicii *raționale,* înfăptuită prin publicarea *Principiilor.*

Admirabilă sinteză a preocupărilor sale experimentale și teoretice, Newton prin crearea mecanicii realizează o operă analoagă Geometriei lui Euclid (—315, —255). Din chestiuni risipite și mărunte de mecanică, descoperite de-a lungul veacurilor, pe baza cîtorva principii și a legilor rezultate din descoperirea gravitației universale Newton clădește o știință nouă, încununată prin crearea mecanicii cerești. Astronomia teoretică este creată în bună parte de Newton, prin cîntărirea cu mintea a Soarelui, Lunei și planetelor, prin determinarea densității respective și a intensității gravitației la suprafața lor. Descoperirea în 1866 de către astronomul Le Verrier, în vîrful creionului, — cum spune Arago — a planetei Neptun încoronează temeinicia științifică a mecanicii newtoniene. Dacă astăzi trăim epoca în care tehnica și știința, în deosebi cea sovietică, au realizat călătorii în Cosmos, nu trebuie uitat că o contribuție la determinarea orbitelor pe care le descriu sateliții a fost dată de Newton. Alte științe ca : rezistența materialelor, hidrodinamica și aerodinamica etc., își datorează existența suportului oferit de mecanica newtoniană.

Filozofia îl reclamă pe Newton printre cercetătorii ei, prin ideile lui asupra spațiului, timpului, mișcării, gravitației și chiar principiile mecanicii.

În „Dialectica naturii", Fr Engels, arată ca trăsătură principală a filozofiei științifice a lui Newton „elaborarea unei concepții generale despre lume sui-generis, al cărei centru o formează noțiunea invariabilității absolute a naturii... Planetele și sateliții lor, odată puse în mișcare..., continuă să se învîrtească pe elipsele care le-au fost predestinate pe vecii vecilor".

Newton a avut o concepție materialistă asupra lumii, prezentată însă sub formă mecanicistă și combinată cu deismul. „Pentru dumnezeul său, scrie Fr. Engels, Newton a mai rezervat „primul impuls", dar i-a interzis orice amestec, după aceea, în sistemul său solar". Materialismului dialectic i-a revenit sarcina de a înlătura aspectele negative ale materialismului mecanicist al lui Newton.

3. **OMUL.** Newton a fost „foarte blînd, liniștit și modest, fără să pară vreodată mînios, avînd o comportare plăcută, agreabilă și simpatică". Muncea foarte mult, fără răgaz și fără distracții „Mînca foarte puțin, aproape nimic, uneori uita chiar de tot de mîncare... Rareori se culca înainte de orele două sau trei, uneori pe la cinci sau șase dimineața, dormind patru sau cinci ore. Foarte rar venea la masă în sufragerie, cu excepția festivităților, dar atunci, dacă nu i s-ar fi atras atenția ar fi venit complet neîngrijit, desculț și cu părul nepieptănat *).

În legătură cu firea lui au circulat o mulțime de anecdote.

— Într-o zi și-a invitat un prieten la masă. Acesta a sosit la ora mesei și stînd în sufragerie aștepta să vină Newton, din odaia lui de lucru. Trecînd timpul mesei și nevoind să-l deranjeze de la lucru, prietenul mîncă și plecă. Răzbit de foame și grăbit, Newton care uitase complet de invitația făcută, veni în sufragerie să ia masa. Aici observă că cineva mîncase. Punîndu-și degetul pe frunte exclamă: „uite, am mîncat și am uitat" și se întoarse la lucru fără să mănînce;

— Într-o zi vrînd să fiarbă un ou, ca să nu fie prea tare își scoase ceasul din buzunar pentru a măsura timpul de fierbere. După un timp, cînd dete să scoată oul de la fiert observă că pusese la fiert ceasul și măsura timpul uitîndu-se la oul pe care-l ținea în mînă.

Newton a fost un om extrem de conștiincios; la treburile la care se angaja, înțelegea să depună toate eforturile și priceperea sa.

Prestigiul științific de care s-a bucurat Newton în timpul vieții sale, cît și după moarte a fost considerabil.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646—1716), într-un anumit sens rivalul lui la crearea calculului infinitezimal, spunea că opera matematică a lui Newton este mai valoroasă decît tot ceea ce s-a creat înaintea lui **).

---

*) S-a citat din descrierea făcută de nepotul său Humphrey Newton care i-a fost un timp asistent și secretar.

**) Contrar dorinții atît a lui Newton cît și a lui Leibnitz, între ei a avut loc o discuție aprinsă în privința priorității creării calculului infinitezimal, care le-a produs multă amărăciune. Aceste discuții au fost duse de compatrioții respectivi foarte aprins încă un secol după moartea lor. Istoria i-a situat alături, fiecare avînd merite deosebite în crearea calculului infinitezimal.

Joseph Louis Lagrange (1736—1813) consideră că s-a născut prea tîrziu, iar Newton „este cel mai fericit, căci sistemul lumii poate fi stabilit numai o singură dată".

Deși era conștient de imensa valoare a operei sale, Newton se arăta foarte modest. Sînt astfel grăitoare următoarele cuvinte spuse puțin înaintea morții:

„Nu știu cum voi apare în ochii lumii; dar mie însumi mi se pare că sînt un copil care se joacă pe malul mării și distrîndu-mă din cînd în cînd am găsit o pietricică mai netedă sau o scoică mai frumoasă decît de obicei, în timp ce marele ocean al adevărului se întinde necunoscut în fața mea".

Newton prin creația lui științifică cu toate concesiile făcute societății contemporane lui, a oferit omenirii un prețios tezaur, care a contribuit la progresul științei și tehnicii.

PROGRESII GEOMETRICE, NUMERE COMPLEXE ȘI SUME TRIGONOMETRICE

C. IONESCU-ȚIU

1. Progresia geometrică $1+z+z^2+\ldots z^m = \dfrac{1-z^{m+1}}{1-z}$ mai poate fi scrisă sub forma:

$$z^n(1-z)\left[1+\sum_{k=1}^{n}(z^k+z^{-k})\right]=1-z^{2n+1} \qquad (1)$$

cînd $m=2n$, și sub forma:

$$z^n(1-z)\left[x^{n+1}+1+\sum_{k=1}^{n}(z^k+z^{-k})\right]=1-z^{2n+2}, \qquad (1')$$

cînd $m=2n+1$. Relația (1') se mai poate deduce din relația (1) prin adăogirea cantității $z^{2n+1}-z^{2n+2}$ în ambele părți.

Fie $z=\cos a+i\sin a$ și ținînd seama de formula lui Moivre: $(\cos a+i\sin a)^n=\cos na+i\sin na$, avem $z^k+z^{-k}=2\cos ka$ și $z^k-z^{-k}=2i\sin ka$.

Relația (1) devine:

$$(\cos na+i\sin na)(1-\cos a-i\sin a)\left[1+2\sum_{k=1}^{n}\cos ka\right]=$$

$$=1-\cos(2n+1)a-i\sin(2n+1)a.$$

Separăm părțile reale de cele imaginare și avem :

$(cosna - cosnacosa + isinnasina)\ (1 + 2\sum_{k=1}^{n} cosk a) = 1 - \cos(2n+1)a,$

de unde rezultă

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos ka = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \cos(2n+1)a}{\cos na - \cos(n+1)a} = \frac{\sin \frac{2n+1}{2} a}{2 \sin \frac{a}{2}} \qquad (2)$$

$$\text{sau} \quad \sum_{k=1}^{n} \cos ka = \frac{\cos \frac{n+1}{2} a \sin \frac{n}{2} a}{\sin \frac{a}{2}} \qquad (2')$$

Egalarea părților imaginare dă același rezultat.

2. Dacă plecăm de la relațiile :

$$(1 - z^2)\left(1 + \sum_{k=1}^{2n} z^{2k}\right) = 1 - z^{4n+2}, \text{ sau}$$

$$(1 - z^2) z^{2n} \left[1 + \sum_{k=1}^{n} (z^{2k} + z^{-2k})\right] = 1 - z^{4n+2}, \text{ obținem}$$

$$\cos 2na + i \sin 2na - \cos(2n+2)a - i \sin(2n+2)a =$$

$$= \frac{1 - \cos(4n+2)a - i \sin(4n+2)a}{2\left(\sum_{k=1}^{n} \cos 2ka + \frac{1}{2}\right)}.$$

Separăm părțile imaginare și avem

$$1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos 2ka = \frac{\sin(4n+2)a}{2 \cos(2n+1)a \sin a}, \text{ sau}$$

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos 2ka = \frac{\sin(2n+1)a}{2 \sin a}. \qquad (3)$$

3. Să considerăm relația

$$1 + \sum_{k=1}^{2n-1} z^{2k} = \frac{1 - z^{4k}}{1 - z^2}, \text{ sau } z^{2n-1}(1 - z^2) \sum_{k=1}^{n} (z^{2k-1} + z^{-2k+1}) =$$

$$= 1 - z^{4k}$$

de unde, în același mod, obținem:

$$2\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)\,a=\frac{\sin 4na}{2\cos 2na\sin a},\ \text{sau}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)\,a=\frac{\sin 2na}{\sin a}. \tag{4}$$

4. Pentru însumarea sinusurilor să plecăm de la progresia geometrică

$$1-z^2+z^4-z^6+\ldots-z^{4n-2}=\frac{1-z^{4n}}{1+z^2},\ \text{de unde}$$

$$z^{2n-1}(1+z^2)\sum_{k=1}^{n}\left[-(-1)^{n-k}(z^{2k-1}-z^{-2k+1})\right]=1-z^{4n}.$$

Efectuînd aceleași înlocuiri și notînd cu A paranteza mare avem:

$$2Ai=2i\sum_{k=1}^{n}\left[-(-1)^{n-k}\sin(2k-1)\,a\right]=$$

$$=\frac{1-\cos 4na-i\sin 4na}{\cos(2n+1)a+\cos(2n-1)a+i\sin(2n+1)a+i\sin(2n-1)a}.$$

Separînd părțile imaginare de cele reale avem

$$A=\frac{-\sin 4na}{4\cos 2na\cos a}=-\frac{\sin 2na}{2\cos a}$$

Ca aplicație pentru n par, obținem:

$$\sum_{k=1}^{2n}\left[(-1)^k\sin(2k-1)\,a\right]=\frac{\sin 4na}{2\cos a}. \tag{5}$$

Ținînd seama de relațiile (4) și (5), obținem

$$\frac{\sum_{k=1}^{2n}\left[(-1)^k\sin(2k-1)\,a\right]}{\sum_{k=1}^{2n}\cos(2k-1)\,a}=\frac{1}{2}\operatorname{tg}a. \tag{6}$$

5. Dacă schimbăm pe z în $-z$, relația (1) devine

$$(1-)^n z^n(1+z)\left[(-1)^n+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}(z^k+z^{-k})\right]=1+z^{2n+1}.$$

Paranteza mare devine:

$$A = (-1)^n + 2\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \cos ka, \text{ deci:}$$

$$(-1)^n [\cos na + i \sin na + \cos (n+1)\, a + i \sin (n+1)\, a]\, A =$$
$$= 1 + \cos (2n+1)\, a + i \sin (2n+1)\, a.$$

Egalăm părțile imaginare și avem:

$$(-1)^n \cdot 2 \sin \frac{2n+1}{2} a \cos \frac{a}{2} : A = \sin (2n+1)\, a, \text{ deci}$$

$$\frac{(-1)^n}{2} + \sum_{k=1}^{n} [(-1)^{n-k} \cos ka] = \frac{(-1)^n \cos \frac{2n+1}{2}}{2 \cos \frac{a}{2}}. \qquad (7)$$

Pentru n par relația (7), se mai scrie

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{2n} [(-1)^k \cos ka] = \frac{\cos \frac{4n+1}{2}}{2 \cos \frac{a}{2}},$$

iar pentru n de forma $2n-1$, rezultă

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{2n-1} [(-1)^k \cos ka] = \frac{\cos \frac{4n-1}{2}}{2 \cos \frac{a}{2}}.$$

În mod analog se poate stabili relația

$$\frac{\sum_{k=1}^{2n} [(-1)^k \cos ka]}{\sum_{k=1}^{2n+1} [(-1)^k \cos ka]} = \frac{\sin na}{\sin (n+1)\, a}.$$

6. În general, dacă înlocuim pe z prin z^t, atunci n devine nt, iar a devine ta. Analog putem înlocui pe z^t prin z^{-t}.

Alte relații se pot obține dacă în rezultatele găsite înlocuim pe a pe rînd prin $\frac{\pi}{4} \pm a, \frac{\pi}{2} \pm a, \pi \pm a$, etc.,...

Alte relații se obțin prin derivare în raport cu a a relațiilor cunoscute.

Astfel, relația (2) prin derivare devine:

$$\sum_{k=1}^{n} k \sin ka = \frac{\sin na - 2n \cos \frac{2n+1}{2} a \sin \frac{a}{2}}{4 \sin^2 \frac{a}{2}} \tag{8}$$

Prin derivarea relației (8) în raport cu a obținem suma

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \cos ka .$$

Derivînd din nou succesiv, obținem sumele de forma:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 \sin ka, \quad \sum_{k=1}^{n} k^4 \cos ka, \text{ etc.}$$

Dintr-o identitate, prin derivare, se poate obține altă identitate. De exemplu, din relația:

$$\sum_{k=1}^{n} [\sin^2 (2k-1) a] = \frac{n}{2} - \frac{\sin 2na}{4 \sin a} . \tag{9}$$

obținem:

$$\sum_{k=1}^{n} [(2k-1) \sin (4k-2) a] = \frac{\sin (2n-1) a - (2n-1) \cos 2na \sin a}{4 \sin^2 a} .$$

7. Dacă folosim relația:

$$\cos \frac{a}{2} \cos \frac{a}{4} \cos \frac{a}{8} \cdots \cos \frac{a}{2^n} = \frac{\sin a}{2^n \sin \frac{a}{2^n}}, \tag{10}$$

care se poate verifica prin metoda inducției complete, și logaritmăm ambele părți și apoi derivînd, obținem

$$S = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{a}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{a}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{a}{2^n} = \frac{1}{2^n} \operatorname{cotg} \frac{a}{2^n} - \operatorname{cotg} a . \tag{11}$$

Dacă notăm $\frac{a}{2^n} = x$ avem $\frac{1}{2^n} \operatorname{cotg} \frac{a}{2^n} = \frac{x}{a} \cdot \frac{\cos x}{\sin x}$

și dacă n tinde către infinit, atunci x tinde către zero și obținem:

$$\frac{1}{a} - \operatorname{cotg} a = \lim \left(\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{a}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{a}{4} + \frac{1}{8} \operatorname{tg} \frac{a}{8} + \cdots \right). \tag{12}$$

iar dacă facem $a = \frac{\pi}{2}$, obținem:

$$\frac{1}{\pi} = \lim\left(\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \frac{1}{8}\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} + \frac{1}{16}\operatorname{tg}\frac{\pi}{16} + \cdots\right). \qquad (13)$$

Șirul din partea a doua este convergent și termenii fiind repede descrescători, cu cîțiva termeni de la început putem calcula cu destulă aproximație valoarea numărului π.

Aceleași notații $x = \frac{a}{2^n}$ introduse în relația (10), ne dau

$$\lim \cos\frac{a}{2}\cos\frac{a}{4}\cos\frac{a}{8}\cdots\cos\frac{a}{2^n}\cdots = \frac{\sin a}{a}, \qquad (14)$$

iar pentru $a = \frac{\pi}{2}$ obținem:

$$\frac{2}{\pi} = \lim \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\ldots \qquad (15)$$

Numărul π se mai poate aproxima folosind și alte identități, ca de exemplu $\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239}$, care se poate ușor verifica.

REZONANȚA

de prof. *Ilie Stănescu*, Pucioasa

1. *Definiție și condițiile producerii fenomenului.* Presupunem că într-un anumit punct există o sursă care emite în spațiu unde de o anumită natură. Aceste unde întîlnesc diferite corpuri sau sisteme de corpuri cărora în anumite condiții le cedează energie și încep să oscileze. Corpul care a recepționat energia undelor și a început să execute o mișcare oscilatorie se numește receptor. Sursa (corpul) care provoacă și întreține undele ce se transmit se numește emițător. Fenomenul prin care emițătorul transmite receptorului mișcarea oscilatorie se numește *rezonanță*.

Pentru a se produce rezonanța sînt necesare unele condiții:

a) *Perioada proprie de oscilație a emițătorului să fie egală cu aceea a receptorului.*

La această condiție ajungem prin următorul raționament: Oscilația se transmite sub formă de unde pornite de la emițător. Aceste unde au perioada de oscilație a emițătorului. Odată ajunse la receptor acesta începe să oscileze numai dacă el are aceiași perioadă cu a undelor. Receptorul nu poate avea o altă perioadă, deoarece la un moment dat va fi în opoziție de fază cu unda și oscilațiile lui s-ar amortiza. Avem deci,

$$T_e = T_u \quad \text{și} \quad T_u = T_r,$$

de unde:

$$T_e = T_r.$$

Am notat cu T_e perioada emițătorului, T_u perioada undei, T_r perioada receptorului.

b) *Emițătorul și receptorul să se găsească într-un mediu favorabil transmiterii undelor.*

Spre exemplu la rezonanța mecanică emițătorul trebuie să fie legat de receptor printr-un mediu elastic continuu. Dacă emițătorul se află în aer și receptorul în vid, rezonanța nu poate avea loc, deoarece la receptor nu ajung undele, vidul nefiind un mediu elastic din punct de vedere mecanic.

La rezonanța electromagnetică emițătorul și receptorul trebuie să se afle într-un mediu în care se pot propaga undele electromagnetice.

Dacă receptorul ar fi într-o mină, iar emițătorul în aer sau vid, rezonanța nu are loc deoarece undele electromagnetice nu se propagă prin pământ.

2. *Teoria fenomenului.* Forțele care întrețin mișcările oscilatorii au fost numite forțe elastice sau cuasielastice și sînt de forma :

$$F = F_0 \sin \alpha_t \qquad (1)$$

Să presupunem că forța (F) întreține mișcarea receptorului ca provenind din energia transmisă de emițător (dacă pe aceasta o descompunem în forță și deplasare). Această forță trebuie să anihileze forțele de rezistență ale oscilatorului (receptorului), care pot fi de trei feluri :

a) *Forță elastică.* Se datorește forțelor elastce care apar în oscilator în timpul oscilației, presupunînd că este un corp elastic. Ea este de forma :

$$F' = kx \text{ sau : } F' = k a \sin \omega t \qquad (2)$$

Forță de frecare. Se datorește rezistenței mecanice a mediului și este direct proporțională cu viteza. Ea este de forma :

$$F'' = Rv \quad \text{sau :} \quad F'' = R a \omega \cos \omega t \qquad (3)$$

c) *Forță inerțială.* Se datorește inerției oscilatorului și este direct proporțională cu masa. Ea este dată de formula :

$$F''' = ma \quad \text{sau :} \quad F''' = - ma \omega^2 \sin \omega t \qquad (4)$$

In cazul forțelor reprezentate prin relațiile (2) și (3), k și R sînt niște coeficienți de proporționalitate.

Forța F exprimată prin relația (1), și care întreține oscilația, trebuie să anihileze forțele reprezentate prin relațiile (2), (3) și (4), adică :

$$F = F' + F'' + F''' \text{ sau : } F = ka \sin \omega t + Ra \omega \cos \omega t - ma \omega^2 \sin \omega t$$

care se mai poate scrie :

$$F = ka \sin \omega t + R a \omega \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + ma \omega^2 \sin (\omega t + \pi).$$

In aecastă ultimă relație se observă că F'' este înaintea lui F' cu $\pi/2$, iar F''' înaintea lui F'' tot cu $\pi/2$. Forțele fiind mărimi vectoriale le putem reprezenta apelînd la valorile lor maxime (fig. 1) și alegîndu-se un sens de parcurs indicat cu săgeată pe figură.

Insumînd aceste forțe folosind metoda compunerii forțelor concurente obținem rezultanta lor F_0, pe care o determinăm din condițiile geometrice.

$$\text{In } \Delta OAB: \quad OA = ka - ma\omega^2, \quad AB = Ra\omega \quad \text{și} \quad OB = F_0$$

$$F = \sqrt{(ka - ma\omega^2) + (Ra\omega)^2}.$$

Scoțind în factor pe $a^2\omega^2$ obținem:

$$F_0 = a\omega \sqrt{\left(\frac{k}{\omega} - m\omega\right)^2 + R^2}. \tag{5}$$

Dacă notăm $\sqrt{\left(\frac{k}{\omega} - m\omega\right)^2 + R^2} = Z$, atunci:

$$F_0 = a\omega Z.$$

Din relația (5) putem deduce amplitudinea a:

$$a = \frac{F_0}{\omega \sqrt{\left(\frac{k}{\omega} - m\omega\right)^2 + R^2}}. \tag{6}$$

Studiind amplitudinea după relația (6) constatăm că ea are valoarea maximă cînd numitorul are valoarea minimă.

Ca numitorul să fie minim trebuie să avem:

$$\frac{k}{\omega} - m\omega = 0, \tag{7}$$

iar amplitudinea devine:

$$a = \frac{F_0}{\omega R}.$$

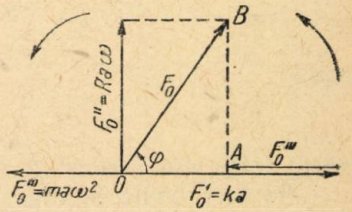


Fig. 1.

Din numitorul expresiei (6), reiese că R nu poate fi nul, deoarece ar însemna că ar lipsi rezistența mecanică.

La același rezultat se ajunge dacă se presupune că F_0 ar fi maxim cînd $F_0' + F_0''' = 0$, sau: $ka - ma\omega^2 = 0$.
adică:

$$\frac{k}{\omega} - m\omega = 0,$$

care este tocmai relația (7).

Înlocuind în relația (7) pe $\omega = \frac{2\pi}{T}$, obținem:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}},$$

unde T este perioada emițătorului, iar $2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ este perioada proprie a receptorului.

An ajuns pe cale teoretică la condiția pusă inițial : perioada proprie de oscilație a emițătorului să fie egală cu aceea a receptorului.

Din figura 1 putem scrie expresia exactă a forței F (1), deoarece am spus la început numai că este de forma : $F = F_0 \sin \alpha$.

Calculăm defazajul dintre F_0 și elongație, care are aceeași direcție și sens cu F_0' :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{R a \omega}{ka - a m \omega^2}$$

sau :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{R}{\frac{k}{\omega} - m \omega} \qquad (9)$$

Din relația (9) calculăm pe φ și introducîndu-l în expresia forței dată de relația (1), obținem valoarea ei exactă :

$$F = F_0 \sin (\omega t + \varphi). \qquad (10)$$

Se observă că în cazul rezonanței numitorul relației (9) se anulează și unghiul φ devine $\pi/2$, iar expresia (10) devine :

$$F = F_0 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

sau :

$$F = F_0 \cos \omega t,$$

adică forța are aceeași dircție cu viteza.

Se mai poate studia și cazurile cînd :

$$\frac{k}{m} - m \omega < 0 \quad \text{și} \quad \frac{k}{m} - m \omega > 0,$$

care nu prezintă greutăți.

3. *Fenomene în care intervine rezonanța.* Este cunoscut că uneori, cînd pe stradă trece o mașină grea în al cărei mecanism se produc mișcări oscilatorii, geamurile caselor încep să vibreze datorită rezonanței. De asemenea, este interzis coloanelor de ostași sau dmonstranți să treacă peste poduri în pas cadențat, deoarece rezonanța ar face ca podul să oscileze și să se distrugă.

In fabrici și uzine mașinile în al căror mecanism se execută mișcări oscilatorii nu se fixează direct pe planșeu, deoarece prin rezonanță clădirea ar vibra și s-ar distruge. Între soclul mașinii și planșeu se pune un mediu neelastic, care absoarbe oscilațiile. Acest mediu este pîsla.

La instrumentele muzicale de suflat trebuie să intre în rezonanță numai coloana de aer, deoarece dacă ar intra și tubul în rezonanță ar absoarbe prea multă energie din energia sonoră. De aceea tuburile acestor instrumnte se confecționează din material neelastic. Dimpotrivă, la instrumntele cu coarde se confecționează cutii de rezonanță care intrînd în

vibrație transmit energia sonoră unei mase mai mari de aer și sunetul devine mai plăcut. Se mai pot da încă numeroase exemple în care intervine rezonanța mecanică.

În electromagnetism întîlnim rezonanță la circuitele oscilante. Pe baza rezonanței electromagnetice (a circuitelor oscilante) s-a dezvoltat radiofonia, televiziunea, radiolocația și teleghidarea. Se observă aici, marea aplicabilitate și marea importanță a fenomenului în progresul societății.

Întîlnim rezonanța și în optică la aplicația legii lui Kirchhoff, cu privire la absorbție. Rezonanța se întîlnește și în procesele atomice și nucleare, dar expunerea ei depășește cu mult pretențiile prezentului articol.

PENTRU CERCURILE DE MATEMATICĂ

ÎN LEGĂTURĂ CU PROBLEMA 4530

Arătăm proprietățile unor șiruri de numere cu coeficienți binominali, ce pot fi folosite la rezolvarea problemelor de tipul problemei nr. 4530 propusă în G.M.F. — seria B nr. 1 din 1961.

a) Considerăm un șir de numere oarecare:

$$\ldots\ldots a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots\ldots\ a_{n-1},\ a_n\ \ldots\ldots$$

Facem diferențe succesive între termenii alăturați, scăzînd pe cel de rang inferior din cel următor și obținem alte șiruri de numere formate din aceste diferențe; fiecare diferență avînd un ordin și un rang.

Diferențe de ordinul I.

$$\ldots\ldots a_2 - a_1,\ a_3 - a_2\ \ldots\ldots\ a_n - a_{n-1}\ \ldots\ldots$$

Diferențe de ordinul II.

$$\ldots\ldots a_3 - 2a_2 + a_1\ \ a_4 - 2a_3 + a_2\ \ldots\ldots\ a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2}\ \ldots\ldots$$

Diferențe de ordinul III.

$$\ldots\ldots a_4 - 3a_3 + 3a_2 - a_1,\ a_5 - 3a_4 + 3a_3 - a_2,\ \ldots\ldots\ a_n - 3a_{n-1} + \\ + 3a_{n-2} - a_{n-3}$$

Observăm că, dacă vom face diferențe de ordinul n, vom obține șiruri de numere, care provin din $(n+1)$ termeni succesivi luați din șirul dat, cărora li se atașează coeficienții binomului diferență ridicat la puterea n.

Deci, diferența de ordinul n și de rangul I va avea forma:

$$C_n^0 a_{n+1} - C_n^1 a_n + C_n^2 a_{n-1} \ldots\ldots (-1)^n C_n^n a_1$$

Diferența de ordinul n și de rangul II va avea forma:

$$C_n^0 a_{n+2} - C_n^1 a_{n+1} + C_n^2 a_n \ldots\ldots (-1)^n C_n^n a_2$$

. . . . . .

Și așa mai departe, pentru diferențe de ordinul n și de rangul m, vom avea:

$$C_n^0 a_{n+m} - C_n^1 a_{n+m-1} + C_n^2 a_{n+m-2} + \ldots . (-1)^n C_n^n a_m \ldots .$$

Observăm că rangul oricărei diferențe coincide cu rangul ultimului ei termen.

b) Dacă notăm: d_m^n o diferență de ordin n și de rang m, în care putem pune: $d_1^0 = a_1$, $d_2^0 = a_3 \ldots .$ $d_n^0 = a_n \ldots .$ vom avea succesiv pentru diferența de rangul I mărind ordinul:

$$d_1^1 = d_2^0 - d_1^0, \text{ sau } d_1^1 = a_2 - a_1$$

$$d_1^2 = d_2^1 = d_1^1 = d_3^0 - 2d_2^0 + d_1^0, \text{ sau } d_1^2 = a_3 - 2a_2 + a_1 \ldots$$

$$d_1^3 = d_2^2 - d_1^2 = d_3^1 - 2d_2^1 + d_1^1 = d_4^0 - 3d_3^0 + 3d_2^0 - d_1^0 \ldots .$$

. . . . . .

$$d_1^n = C_1^0 d_2^{n-1} - C_1^1 d_1^{n-1} = C_2^0 d_3^{n-2} - C_2^1 d_2^{n-2} + C_2^2 d_1^{n-2} = \ldots$$

. . . . . .

$$= C_{n-k}^0 d_{n-u+1}^k - C_n^1 d_n^0 + C_n^2 d_{n-1} \ldots . (-1)^n C_n^n d_k^n$$

și la fel dacă mărim rangul:

$$d_2^n = C_1^0 d_3^{n-1} - C_1^1 d_2^{n-1} = C_2^0 d_n^{n-1} - C_2^1 d_3^{n-1} + C_2^2 d_2^{n-1} = \ldots$$

$$= C_n^0 d_{n+2}^0 - C_n^1 d_{n+1}^0 + C_n^2 d_n^0 - C^n d_{n-1}^0 \ldots . C_n^n d_n^0$$

. . . . . .

și în general, diferența de ordinul n și de rangul m:

$$d_m^n = C_1^0 d_{m-1}^{n-1} - C_1^1 d_m^{n-1} = C_2^0 d_{m+2}^{n-2} - C_2^1 d_{m+1}^{n-2} + C_2^2 d_m^{n-2} \ldots$$

. . . . . .

$$= C_{n-k}^0 d_{m+n-k}^k - C_{n-k}^1 d_{m+n-k-1}^k + \ldots . (-1)^{n-k} C_{n-k}^{n-k} d_m^k$$

. . . . . .

$$= C_n^0 d_{m+n}^0 - C_n^1 d_{m+n-1}^0 + C_n^2 d_{m+n-2} \ldots . (-1)^n C_n^n d_m^0 .$$

În concluzie: O diferență de un ordin oarecare n și de rang m, se poate exprima prin diferențe succesive de ordine mai mici k, și de ranguri descrescătoare, avînd atașați coeficienții binomului diferență la puterea $(n-k)$, ultimul termen avînd rangul m.

c) Considerăm șirul de numere făcînd parte dintr-o progresie aritmetică oarecare:

$$\ldots . . a - 2r,\ a - r,\ a,\ a + r,\ a + 2r \ldots . .$$

Ne propunem să calculăm diferențele succesive dintre termenii alăturați pentru diferite puteri la care vom ridica termenii șirului:

La puterea I-a $\ldots a-2r,\ a+r,\ a,\ a+r,\ a+2r\ldots$

Diferențe de ordinul I

$$a-r-(a-2r)=r;\ a-(a-r)=r;\ a+r-(a+2r)=r.$$

Am obținut un șir de numere construit egal cu rația progresiei. Diferențele de ordinul II ($r-r=0$), precum și celelalte de ordin superior ($o-o=0$), toate vor fi egale cu zero.

La puterea II-a $\ldots\ (a-2r)^2,\ (a-r)^2,\ a^2,\ (a+r)^2,\ (a+2r)^2\ \ldots$

Acum numerele nu mai sînt în progresie aritmetică.

Diferența de ordinul I:

$$(a-r)^2-(a-2r)^2=2ar-3r^2;\ a^2-(a-r)^2=2r-r^2;\ (a+r)^2-a^2=2ar+r^2.$$

Căpătăm un șir de numere în progresie aritmetică cu rația $2r^2$, adică: $\ldots\ 2ar-3r^2,\ 2ar-r^2,\ 2ar+r^2\ \ldots$

Diferențele de ordinul II ne dau rația $2r^2$, care se poate scrie și $2!\,r^2$.

Diferențele de ordinul III și de celelalte ordine superioare, în acest caz ne vor da peste tot zero.

Se vede că dacă numărul de ordine al diferențelor succesive este mai mare decît puterea la care am ridicat termenii progresiei aritmetice la puterea III-a:...

$$(a-2r)^3,\ (a-r)^3,\ a^3,\ (a+r)^3,\ (a+2r)^3\ \ldots\ldots$$

Diferențe de ordinul I:

$$\begin{aligned}
(a-r)^3-(a-2r)^3 &= 3a^2r-9ar^2+7r^3\\
a^3-(a-r)^3 &= 3a^2r-3ar^2+r^3\\
(a+r)^3-a^3 &= 3a^2r-3ar^2+r^3\\
(a+2r)^3-(a+r)^3 &= 3a^2r-9ar^2+7r^3\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Diferențe de ordinul II

$$\begin{aligned}
3a^2r-3ar^2+r^3-(3a^2r-9ar^2+7r^3) &= 6ar^2-6r^3\\
3a^2r+3ar^2+r^3-(3a^2r-3ar^2+r^3) &= 6ar^2\\
3a^2r+9ar^2+7r^3-(3a^2r+3ar^2+r^3) &= 6ar^2+6r^3\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Am obținut după a doua diferență un șir de numere în progresie aritmetică.

Diferențele de ordinul III ne dau rația constantă a noii progresii:

$$6ar^2-(6ar^2-6r^3)=6r^3$$

$(6ar^2+6r^3)-6ar^2=6r^3$ rația se poate scrie: $3!\,r^3$

Celelalte diferențe de ordine mai mari, vor fi toate egale cu zero. Mergînd pe această cale putem generaliza:

1. Ridicînd termenii șirului de numere dintr-o progresie aritmetică la o putere oarecare k, după k diferențe succesive între termenii alăturați,

vom obține rația $k!\ r^k$ a penultimului șir de diferențe care este tot o progresie aritmetică.

2. Dacă facem mai mult de k diferențe, valoarea lor este zero.

3. Expresia diferențelor de oricare ordin n, conform celor studiate anterior la punctul „a", va fi egală în toate cazurile cu $(n+1)$ numere succesive luate din progresia aritmetică, ridicate la o putere k și având coeficienții binomului diferență ridicat la puterea n.

Spre exemplu, considerăm șirul:

$$\ldots\ a^k,\ (a+r)^k,\ (a+2r)^k\ \ldots\ (a+nr)^k\ \ldots$$

găsim următoarele expresii pentru diferențe de ordinul M:

Pentru rangul I: $E=C_n^0(a+nr)^k - C_n^1[a+(n-1)r]^k + \ldots (-1)^n C_n^m a^k$

rangul II: $E=C_n^0[a+(n+1)r]^k - C_n^1(a+nr)^k \ldots,. (-1)^n C_n^n (a+r)^r$

. . . . . .

Conform celor studiate mai sus, în aceste expresii

dacă: $0 \leqslant k < n$ atunci $E=0$

și dacă: $k=n$ atunci $E=n!\ r^n$

d) Pentru rezolvarea problemei Nr. 4530 propusă în G.M.F. seria B nr. 1 din 1961 ne propunem să ridicăm termenii progresiei aritmetice la puterea $k=-1$ și în acest caz particular să calculăm diferențe succesive de un ordin oricît de mare n, pentru a găsi și în acest caz valoarea expresiei:

$$E=C_n^0(a+nr)^k - C_n^1[a+(n-1)r]^k + \ldots (-1)^n C_n^n d^k$$

Deci în acest caz vom avea șirul de numere:

$$\ldots\ \frac{1}{a},\ \frac{1}{a+r},\ \frac{1}{a+2r}\ \ldots\ \frac{1}{a+nr}\ \ldots$$

Diferențe de ordinul I:

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{a+r}=\frac{r}{a(a+r)}$$

$$\frac{1}{a+r}-\frac{1}{a+2r}=\frac{r}{(a+r)(a+2r)}$$

. . . . . .

Diferențe de ordinul II:

$$\frac{r}{a(a+r)}-\frac{r}{(a+r)(a+2r)}=\frac{2!\ r^2}{a(a+r)(a+2r)}$$

$$\frac{r}{(a+r)(a+2r)}-\frac{r}{(a+2r)(a+3r)}=\frac{2!\ r^2}{(a+r)(a+2r)(a+3r)}$$

. . . . . .

Și așa mai departe, dacă vom face diferențe de ordinul n, vom obține expresia :

$$E = \frac{n\,!\,r^n}{a\,(a+r)\,(a+2r)\ldots(a+nr)}$$

Această expresie, conform celor studiate la punctul „a" se poate exprima prin termenii succesivi atașați coeficienților binominali.

Deci :

$$E = C_n^0 \frac{1}{a} - C_n^1 \frac{1}{a+r} + C_n^2 \frac{1}{a+2r} \ldots (-1)^n C_n^n \frac{1}{a+nr} = \frac{n\,!\,r^n}{a(a+r)(a+2r)\ldots(a+nr)}$$

În această expresie dacă facem $r = 1$, iar termenului a îi dăm valorile : $a = 1$ și $a = 2$ obținem succesiv :

pentru $a = 1$

$$E = 1 - C_n^1 \frac{1}{2} + C_n^2 \frac{1}{3} - \ldots (-1)^n C_n^n \frac{1}{n+1} = \frac{n\,!}{1.2.3\ldots(n+1)} = \frac{1}{n+1}$$

pentru $a = 2$

$$E = C_n^0 \frac{1}{2} - C_n^1 \frac{1}{3} + \ldots (-1)^n C_n^n \frac{1}{n+2} = \frac{n\,!}{(n+2)\,!} = \frac{1}{(n+1)\,(n+2)}.$$

ceea ce era de demonstrat.

H. Gorcea, profesor P. Neamț

NOTE MATEMATICE

CITEVA INEGALITĂȚI DEDUSE DIN INEGALITATEA LUI BERNOULLI

Se cunoaște inegalitatea lui *Bernoulli :*
$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) > 1+a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$ unde $a_1; a_2; \ldots a_n$; sînt numere ce au același semn și sînt mai mari decît -1. Din această inegalitate se pot obține o serie de inegalități interesante. Astfel :

1. Dacă : $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = \alpha$ avem inegalitatea

$$(1+\alpha)^n > 1 + n\alpha \qquad (1)$$

cu condiția $\alpha > -1$.

2. Dacă $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots a_n = \alpha - 1$ obținem :

$$\alpha^n > 1 + n\,(\alpha - 1) \qquad (2)$$

cu condiția ca $\alpha - 1 > 1$, adică $\alpha > 0$.

3. Dacă : $a_1 = a_2 = \ldots a_n = \alpha - 2$ obținem :

$$(\alpha - 1)^n > 1 + n\,(\alpha - 2) \qquad (3)$$

cu condiția ca : $\alpha - 2 > -1$, adică $\alpha > 1$

4. Dacă facem: $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = \alpha + k - 1$ obținem:

$$(\alpha + k)^n > 1 + n(\alpha + k - 1) \tag{4}$$

cu condiția ca: $\alpha + k - 1 > -1$, deci: $\alpha + k > 0$,

deci: condiția este $\alpha > -k$

5. Dacă facem: $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = \alpha - k - 1$ obținem:

$$(\alpha - k)^n > 1 + n(\alpha - k - 1) \tag{5}$$

cu condiția: $\alpha - k - 1 > -1$; $\alpha > k$.

Făcînd în (4) $\alpha + k = 2$ avem: $2^n > 1 + n$ $(n > 1)$

6. Dacă în inegalitatea (1) facem: $\alpha = (a + b + c + \ldots + l) - 1$ obținem:

$$(a + b + c + \ldots + l)^n > 1 - n + n(a + b + c + \ldots + l).$$

cu condiția ca $(a + b + c + \ldots + l) > -1$, sau, ținînd seamă că:

$$(a + b + c + \ldots + l)^n = \sum \frac{n!}{p!\, q!\, r! \ldots u!} a^p b^q \ldots l^u,$$

unde $p, q, r, \ldots, u$ sînt valori pozitive sau nule, astfel ca $p + q + r + \ldots u = n$ deci:

$$\sum \frac{n!}{p!\, q!\, r! \ldots u!} a^p b^q \ldots l^u > 1 - n + n \sum a, \tag{6}$$

cu condiția ca $\sum a = a + b + c + \ldots + b > -1$, iar $p, q, r \ldots, u$ numere *pozitive* sau nule astfel ca $p + q + r + \ldots + u = n$.

7. Dacă avem: $a_1 = k_1 - 1$; $a_2 = k_2 - 1$

$$a_3 = k_3 - 1;\ a_u = k_u - 1, \ldots;\ a_n = k_n - 1$$

inegalitatea lui Bernoulli devine:

$$k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot k_4 \ldots k_n > (k_1 + k_2 + \ldots + k_n) - (n - 1) \tag{7}$$

cu condiția: $k_l > 0$

8. Dacă avem: $a_1 = k\alpha_1 - 1$, $a_2 = k\alpha_2 - 1$;

$$a_3 = k\alpha_3 - 1 \ldots;\ a_n = k\alpha_n - 1$$

obținem:

$$k^n \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_n > 1 - n + k(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)$$

cu condiția ca $k\alpha_l > 0$; dacă în (8) facem: $k = a$; $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_n = b$ avem: $a^n b^n > 1 + n(ab - 1)$, cu condiția ca $ab > 0$.

C. Gh. Bănică, elev Cîmpulung Muscel

RELATIV LA PUNCTUL NAGEL

În Geometria Triunghiului de Traian Lalescu, enunțul proprietății 4.42 este redat necorespunzător, deoarece s-au schimbat literele I și N între ele. Enunțul exact este:

Într-un triunghi dreapta care unește ortocentrul H cu punctul Nagel N este paralelă cu dreapta care unește centrul cercului circumscris O și înscris I și avem relația $HN = 2.OI$.

În adevăr, așa cum rezultă din precizările date în locul indicat, punctele H și N sînt complementare respectiv cu O și cu I, adică H și N sînt centrele cercurilor circumscris și înscris în triunghiul format ducînd prin vîrfurile triunghiului dat paralelele laturile opuse. Aceste triunghiuri sînt omotetice de raport 2 și cu centrul de omotetie în centrul lor de greutate, comun.

Aplicație: Fie H_1 și N_1 ortocentrul și punctul Nagel al triunghiului ortic. Aplicînd proprietatea precedentă relativ la acest triunghi, rezultă că dreptele H_1N_1 și HO' sînt paralele și $H_1N_1 = 2.HO'$, unde O' este centrul cercului celor nouă puncte ale triunghiului ABC (deci cerc circumscris triunghiului ortic), iar ortocentrul H este centrul cercului înscris triunghiului ortic.

Vodă Viorel, elev ș.m. 12 București

GENERALIZAREA PROBLEMEI 3493

În G.M.F.—B pag. 461 a mai apărut o generalizare a problemei 3493. În cele ce urmează, vom considera un caz mai general.

Fie triunghiul ABC tăiat de transversala MNP (N pe AB și P pe AC) și două izogonale AE și AF, care taie respectiv transversala MNP în punctele G și H. Știm că o transversală oarecare determină pe un fascicul de patru drepte date patru puncte al căror raport anarmonic este constant.

Dacă considerăm fasciculul (A, BEFC) tăiat de transversalele MNP și MBC putem scrie că:

$$\frac{HN}{HP} : \frac{GN}{GP} = \frac{FB}{FC} : \frac{BE}{CE} \tag{1}$$

sau se mai poate scrie că:

$$\frac{HN}{HP} \cdot \frac{GP}{GN} = \frac{CE}{BE} \cdot \frac{BF}{CF}. \tag{1'}$$

Ținînd seama că AE și AF sînt ozogonale conform teoremei lui *Steiner* [1] putem scrie:

$$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BE}{CE} \cdot \frac{BF}{CF}, \tag{2}$$

pentru triunghiul ABC și:

$$\frac{GP}{NG} \cdot \frac{HP}{NH} = \frac{AP^2}{AN^2}, \tag{3}$$

[1] Gh. Țițeica, Culegere de probleme de geometrie, 1956, p. 62.

pentru triunghiul ANP. Înmulțind membru cu membru relațiile (1'), (2) și (3) rezultă că:

$$\frac{GP^2}{NG^2}\cdot\frac{AB^2}{AC^2}=\frac{BF^2}{CF^2}\cdot\frac{AP^2}{AN^2},$$

de unde:

$$\frac{GP}{GN}\cdot\frac{CF}{BF}=\frac{AC}{AB}\cdot\frac{AP}{AN},$$

pentru punctele G și F.

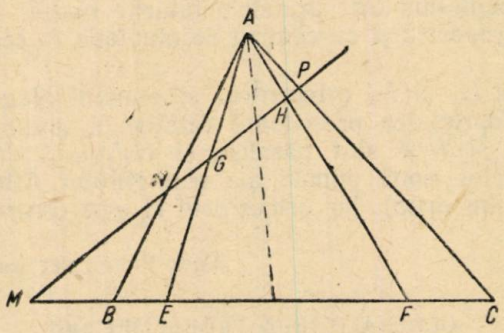


Fig. 1.

Similar se obține o relație și pentru punctele E și H. Relațiile (2) și (3) se mai pot scrie astfel:

$$\frac{AC^2}{AB^2}=\frac{CF}{BF}\cdot\frac{CF}{BF} \qquad (2')$$

și:

$$\frac{NG}{GP}\cdot\frac{NH}{HP}=\frac{AN^2}{AP^2}. \qquad (3')$$

Înmulțind membru cu membru relațiile (1'), (2') și (3') obținem:

$$\frac{HN^2}{HP^2}\cdot\frac{AC^2}{AB^2}=\frac{CE^2}{BE^2}\cdot\frac{AN^2}{AP^2}, \text{ de unde: } \frac{HN}{HP}\cdot\frac{AC}{AB}=\frac{CE}{BE}. \qquad (5)$$

Dacă transversala MNP este o antiparalelă cu latura BC, atunci obținem generalizarea problemei 3493 (G.M.F.—B, 1960, p. 461).

Într-adevăr, dacă NP este antiparalelă atunci triunghiurile ABC și ANP sînt asemenea și avem: $AB\cdot AN = AC\cdot AP$.

În acest caz, relațiile (4) și (5) devin:

$$GP\cdot CF = GN\cdot BF \quad (6) \text{ și respectiv: } HN\cdot BE = HP\cdot CE \qquad (7)$$

Observare. În cazul transversalei antiparalele cu latura BC, dacă una din izogonale este mediană în triunghiul ABC, atunci cealaltă izogonală (simediana) este mediană în triunghiul ANP și reciproc. Fie $BF = CD$, atunci din relația (6) rezultă că $GP = GN$, adică AG este mediana în triunghiul ANP.

L. Lupaș, student I. P. București

DISPOZITIV PENTRU DEMONSTRAREA LEGII LUI ARHIMEDE

Se ia un pahar pentru experienţe de chimie cu volumul de 100—150 ml, pe cît posibil îngust şi înalt. În interiorul paharului se scufundă un corp metalic avînd un cîrlig de sîrmă. În pahar se toarnă parafină topită care trebuie să înconjoare corpul din toate părţile lăsînd liber circa 10 mm din pahar (fig. 1, a). Cilindrul de parafină solidificată se scoate cu grijă din pahar. Pentru aceasta se scufundă paharul doar cîteva secunde în apă fierbinte. Suprafaţa de sus a cilindrului se netezeşte. Cilindrul de parafină trebuie să intre exact în pahar. Greutatea specifică a cilindrului trebuie să fie ceva mai mare decît unitatea.

La nivelul suprafeţei de sus a cilindrului, introdus în pahar, se trasează o linie punctată cu ajutorul unei vopsele uşor vizibilă de la distanţă.

Din sîrmă subţire se face un suport în care se introduce paharul după cum se vede în fig. 1, b.

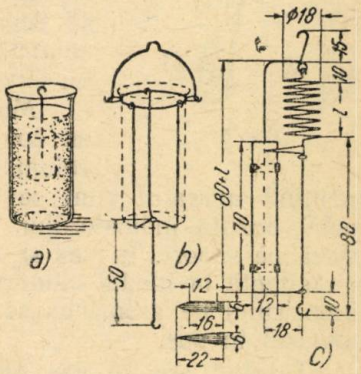


Fig. 1.

Dinamometrul necesar experienţei este format dintr-un arc şi un cîrlig (fig. 1, c). Arcul se confecţionează dintr-o sîrmă de oţel cu grosime de 0,8 mm prin înfăşurare pe un cilindru cu diametrul de 10—12 mm. Numărul de spire se alege astfel încît greutatea vasului împreună cu cilindrul să întindă arcul cu 50—60 mm. În partea de jos arcul se termină printr-o sîrmă dreaptă orientată în lungul axei arcului avînd lungimea de 80 mm şi terminîndu-se cu un cîrlig. La capătul de sus arcul se îndoaie şi se fixează de asemenea un cîrlig orientat în lungul axei arcului.

Scoaba se face din sîrmă de fier cu diametrul de 2,5—3 mm. În lungul ei se cositoreşte o bandă metalică. Pe bandă se plasează doi indici mobili din tablă (poziţia lor se vede pe figură). Pe sîrma dreaptă a arcului se plasează un indicator metalic sub care se cositoreşte un inel de sîrmă. Indicii se vopsesc cu culoare neagră.

Experienţă.

1. *Acţiunea de împingere a unui lichid asupra unui corp scufundat în el.* Se leagă cilindrul direct la dinamometru. Ţinînd dinamometrul vertical se marchează cu ajutorul unui indice mobil poziţia indicatorului (fig. 1 a).

Se scufundă cilindrul în apă. Se observă că asupra corpului scufundat apa exercită o acţiune de împingere orientată de jos în sus. Poziţia indicatorului la o scufundare completă a cilindrului se marchează cu al doilea indice. (fig. 1, b).

Se scoate treptat cilindrul din apă; indicațiile dinamometrului cresc, iar în momentul cînd cilindrul va fi scos din apă complet, indicatorul dinamometrului se va opri la primul indice.

Pentru a scoate în relief dependența dintre forța de împingere a lichidului în funcție de greutatea sa specifică cilindrul se scufundă în soluție saturată de sare de bucătărie, apoi în petrol și se compară indicațiile dinamometrului.

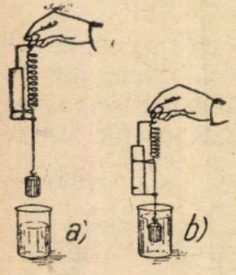


Fig. 2.

2. *Verificarea legii lui Arhimede.* Pe un stativ se instalează o clemă cu un inel plasat destul de sus (fig. 2) pentru ca sistemul (dinamometrul, paharul și cilindrul) să se găsească la circa 3 cm de fundul vasului de sticlă. Înălțimea vasului de sticlă trebuie să depășească cu 40—50 mm înălțimea cilindrului, adunată la lungimea deplasării maxime a indicatorului dinamometrului în timpul experienței.

Mai întîi, prin introducerea cilindrului în pahar ne convingem că volumul cilindrului este egal cu volumul paharului pînă la linia punctată. Apoi, montînd aparatul cum se vede în figură, se marchează prin indicile mobil poziția indicatorului. Vasul de sticlă se aduce sub cilindru și se așază pe suport. În vas se toarnă treptat apă. În momentul cînd apa va fi tangentă la fundul cilindrului și va începe să se urce, indicatorul dinamometrului de asemenea se va ridica arătînd că apa începe să împingă cilindrul în sus.

Turnînd apa în vas pînă la scufundarea completă a cilindrului, se marchează poziția superioară prin cel de al doilea indice. În continuare se constată că forța care împinge cilindrul aflat în apă, cînd acesta este complet scufundat, nu depinde de adîncimea la care se află. Pentru aceasta se ridică vasul; cilindrul se scufundă mai mult apropiindu-se de fund. Indicațiile dinamometrului rămîn însă neschimbate. Vasul se așază din nou pe suport.

În pahar se toarnă cîte puțină apă. În momentul cînd apa a ajuns la jumătatea paharului, indicatorul dinamometrului se va găsi la mijlocul distanței dintre cei doi indici (fig. 3). În momentul cînd apa a ajuns pînă la linie — indicatorul se va opri în dreptul indicelui de jos, adică arcul dinamometrului va fi întins de aceeași forță ca și la începutul experienței. Aceasta confirmă legea lui Arhimede pentru lichide.

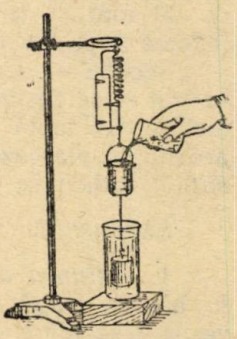


Fig. 3.

Cu ajutorul paharului se poate arăta că această lege este adevărată și în cazul unei scufundări parțiale a corpului în lichid. Pentru aceasta în vasul gol, unde se află cilindrul suspendat, se toarnă treptat apă. Cînd cilindrul s-a scufundat în apă, de exemplu pînă la o treime din volumul său, adăogarea de apă se oprește. Indicatorul dinamometrului se ridică deasupra indicelui care a fost plasat cînd cilindrul atîrna liber. Apoi în pahar se toarnă cu grijă apă, tot pînă la o treime din înălțimea sa, iar indicatorul dinamometrului ajunge în dreptul indicelui. Evident că acum greutatea apei din pahar echilibrează forța de împingere a apei. Se

observă că înălțimea porțiunii din cilindrul scufundat în apă este egală cu înălțimea coloanei de apă care se găsește în pahar. Prin urmare lichidul împinge un corp scufundat parțial cu o forță egală cu greutatea lichidului dislocuit.

Schimbînd corpurile scufundate se constată corectitudinea concluziilor trase.

Explicarea forței de împingere. Se alege o placă grea de sticlă groasă sau de marmoră cu o suprafață șlefuită avînd dimensiunile de cel puțin 100 mm × 60 mm. Dacă nu se găsește așa ceva, atunci se confecționează o placă de lemn cu dimensiunile de 120 mm × 60 mm × 20 mm și se mărește greutatea pînă la 300—400 grame printr-o placă de fier lipită pe fața inferioară a plăcii de lemn. La suprafața superioară a plăcii, cu ajutorul unei paste de lipit se fixează o bucată de sticlă avînd dimensiunile plăcii. Lemnul și fierul se acoperă cu vopsea de ulei.

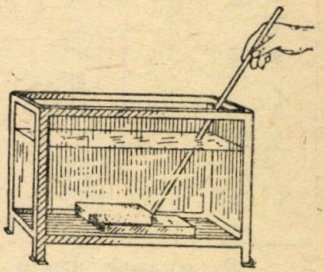


Fig. 4.

A doua placă se face din parafină. Pentru aceasta, din fier, placaj sau carton se face o cutie dreptunghiulară avînd dimensiunile 80 mm × × 50 mm × 20 mm. Pereții cutiei se ung cu ulei. Se topește parafina și se umpre cutia pînă sus. Placa obținută se scoate din cutie. Suprafața sa inferioară se face plană; ea trebuie să adere la fața primei plăci.

Experiență. Pe fundul unui acvarium (cuvă) se plasează placa grea pe a cărei față șlefuită se așază placa de parafină cu fața plană în jos. Fețele plăcilor trebuie să adere bine, astfel încît apa să nu pătrundă între ele. Reținînd cu ajutorul unui bețișor placa de parafină în acvarium, se toarnă apă pînă la două treimi din înălțimea sa. După aceasta, bețișorul se îndepărtează. Placa de sus nu se va ridica deși este făcută din parafină — o substanță a cărei greutate specifică este mai mică decît unu (fig. 4).

Se constată că apa presează asupra plăcii de parafină numai de sus și lateral, dar nu și de jos. Apoi placa de sus se deplasează cu grijă cu ajutorul bețișorului (fig. 4). În momentul cînd placa superioară va fi deplasată destul de mult față de placa inferioară și apa va putea presa și de jos în sus pe o suprafață destul de mare a plăcii de parafină, aceasta din urmă se va deslipi de placa grea și se va ridica la suprafața apei. Experiența arată că forța de împingere este condiționată de diferență de presiuni care acționează asupra corpului de jos și de sus.

(Traducere din limba rusă)

VARIAȚIA TEMPERATURII ATMOSFERICE ÎN TIMPUL ECLIPSEI SOLARE DIN 15 FEBRUARIE 1961

OBSERVAREA ECLIPSEI DE SOARE LA ȘCOALA MEDIE Nr. 2 BACĂU

Un grup de elevi ai școlii medii nr. 2 din Bacău, sub conducerea profesorilor **Zavate** și Segal au făcut observații asupra eclipsei solare din 15 februarie 1961.

Spre deosebire de zilele precedente, cerul a fost complet senin în ziua eclipsei. **Elevii** au putut constata următoarele:

1. Eclipsa a început și s-a terminat exact la timpul anunțat de Observatorul Astronomic București, pentru orașul Bacău.

2. Faza maximă de 98% și formele secerii la diferitele faze ale eclipsei, corespundeau de asemenea calculelor.

La faza maximă, timp de vreo trei minute s-a putut vedea cu ochiul liber la stînga Soarelui planeta Venus (Luceafărul).

3. Variația temperaturii, măsurată de la începutul pînă la sfîrșitul eclipsei în curtea școlii, arată că temperatura minimă s-a atins la 10 minute după faza maximă.

Ora	Temperatura	Ora	Temperatura	Ora	Temperatura
$8^h\ 47^m$	+ 1°C	$9^h\ 35^m$	— 0,35°C	$10^h\ 25^m$	— 1,98°C
$8^h\ 50^m$	+ 1°C	$9^h\ 40^m$	— 1°C	$10^h\ 30^m$	— 1,5°C
$8^h\ 55^m$	+ 1°C	$9^h\ 45^m$	— 1,3°C	$10^h\ 35^m$	— 1,4°C
9^h	+ 1°C	$9^h\ 50^m$	— 2°C	$10^h\ 40^m$	— 0,5°C
$9^h\ 05^m$	+ 1,5°C	$9^h\ 59^m$	— 3,2°C	$10^h\ 45^m$	0°C
$9^h\ 10^m$	+ 1,85°C	10^h	— 3,25°C	$10^h\ 50^m$	+ 2°C
$9^h\ 15^m$	+ 1,99°C	$10^h\ 05^m$	— 3,5°C	$10^h\ 55^m$	+ 3,5°C
$9^h\ 20^m$	+ 1,5°C	$10^h\ 10^m$	— 3,6°C	11^h	+ 4°C
$9^h\ 25^m$	+ 0,5°C	$10^h\ 15^m$	— 3°C	$11^h\ 05^m$	+ 5°C
$9^h\ 30^m$	0°C	$10^h\ 20^m$	— 2,4°C	$11^h\ 15^m$	+ 7°C

OBSERVAREA ECLIPSEI DE SOARE LA ȘCOALA MEDIE Nr. 1 ORADEA

Eclipsa de soare din 15 februarie 1961 a fost observată și de elevii clasei a XI-a a școlii medii nr. 1 din Oradea. Beneficiind de un timp excelent, au fost luate fotografii ale Soarelui la interval minim de 5 minute. Fazele eclipsei au fost urmărite permanent la camera obscură, precum și direct. S-a înregistrat presiunea și temperatura.

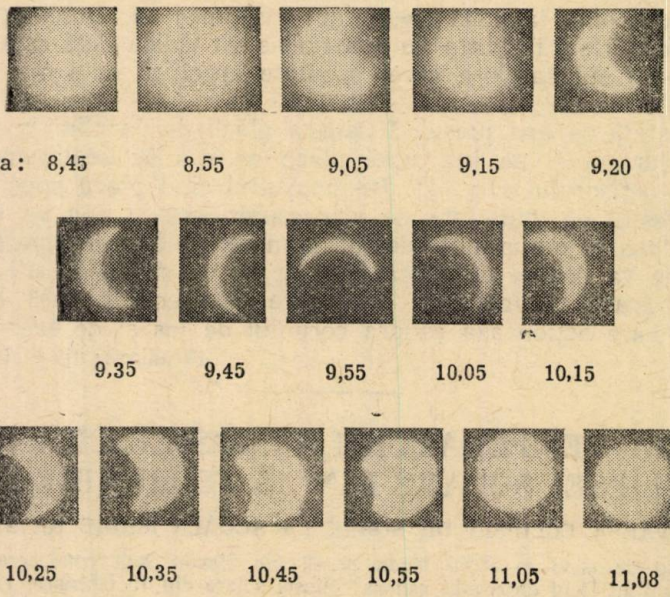


Fig. 1.

Faza maximă a eclipsei a coincis cu un minim de presiune şi temperatură, de la 6°C la —2°C. Aproximativ 10 minute înainte şi după faza maximă, spre Est s-a putut observa planeta Venus.

La ora 10 şi 4 minute a fost semnalat vîntul, care a coincis cu un salt brusc al presiunii.

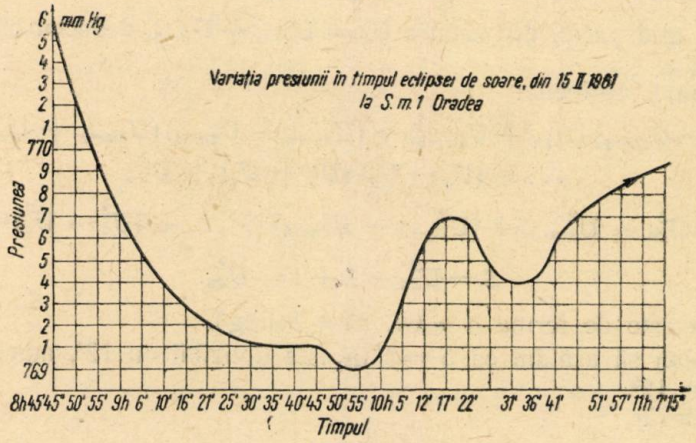


Fig. 2.

Rezultatele observaţiilor au constituit materialul pentru un fotomontaj expus în şcoală. O serie de fotografii ale eclipsei au fost luate de elevul Barcsa Gavril, cu un aparat Ihagee, f = 10,5 cm, T = 1/150 sec., diafragma 1/22, filtru galben mc 17. film 14 DIN°.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 4218

Dacă însemnăm cu $U_k (k = 1,2,\ldots)$ *numerele şirului lui Fibonacci, să se arate că dacă n este un număr divizibil cu 6, atunci suma:*

$$(2n-1)\,U_1^2 + (2n-2)\,U_2^2 + \ldots + 2\,U_{2n-2}^2 + U_{2n-1}^2$$

este divizibilă cu 12^4. *Se va avea în vedere că* $U_1 = U_2 = 1$).

C. N. Tudor

Soluţie. Suma dată se mai poate scrie:

$$S = (U_1^2 + U_2^2 + \ldots + U_{2n-1}^2) + (U_1^2 + U_2^2 + \ldots + U_{2n-2}^2) + \ldots$$
$$\ldots + (U_1^2 + U_2^2) + U_1^2,$$

dar se ştie că:

$$\sum_{k=1}^{n} U_k^2 = U_n\,U_{n+1}$$

deci:

$$S = U_{2n-1}U_{2n} + U_{2n-2}U_{2n-1} + \ldots + U_2U_3 + U_1^2$$

$$S = U_{2n-1}(U_{2n} + U_{2n-2}) + U_{2n-3}(U_{2n-2} + U_{2n-4}) + \ldots$$

$$\ldots + U_3(U_4 + U_2) + U_1^2.$$

Pe de altă parte, din relația $U_k = U_{k-1} + U_{k-2}$, deducem că: $U_{k-1} = U_k - U_{k-2}$

Înlocuind, obținem:

$$S = (U_{2n} - U_{2n-2})(U_{2n} + U_{2n-2}) + (U_{2n-2} - U_{2n-4})(U_{2n-2} + U_{2n-4}) + \ldots$$

$$\ldots + (U_4 - U_2)(U_4 + U_2) + U_1^2;$$

$$S = (U_{2n}^2 - U_{2n-2}^2) + (U_{2n-2}^2 - U_{2n-4}^2) + \ldots + (U_4^2 - U_2^2) + U_1^2$$

$$S = U_{2n}^2 - 1 + 1 = U_{2n}^2.$$

Numărul n este de forma $n = 6k$, (k = întreg).

Va trebui să arătăm că $S = U_{12k}^2$, este divizibil cu 12^4, adică U_{12k} este divizibil cu 12^2.

Într-adevăr,

$$U_{12k} = \frac{a_1^{12k} - a_2^{12k}}{\sqrt{5}} \qquad \left(\text{unde } a_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2};\ a_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

Se știe că $a^n - b^n$ este divizibil cu $a - b$. Deci, în cazul nostru U_{12k} este divizibil cu $a_1^{12} - a_2^{12}$.

Avem:

$$a_1^{12} - a_2^{12} = \frac{1}{2^{12}}\left((1+\sqrt{5})^{12} - (1-\sqrt{5})^{12}\right) = 144\sqrt{5}.$$

Deci, U_{12k} este divizibil cu 12^2. Urmează că $S = U_{12k}^2$ este divizibil cu 12^4.

Soluții bune am primit de la *Iorga Valeriu*, elev Lugoj.

Problema 4250

a) *Să se simplifice fracția:* $y = \dfrac{(x^2+3x+3)^2 - 1}{(x^2+5x+5)^2 - 1}$.

b) *Să se afle maximul și minimul fracției, precum și valorile lui* x *corespunzătoare acestor extreme.*

C. Ionescu-Țiu

Soluție dată de *Valeriu Iorga*, elev Lugoj. a) Fracția se mai poate scrie:

$$y = \frac{(x^2+3x+3+1)(x^2+3x+3-1)}{(x^2+5x+5+1)(x^2+5x+5-1)} = \frac{(x^2+3x+4)(x^2+3x+2)}{(x^2+5x+6)(x^2+5x+4)}$$

Descompunem trinoamele de gradul II în factori:

$$x^2+3x+2 = (x+1)(x+2);\ x^2+5x+6 = (x+2)(x+3) \text{ și}$$

$$x^2+5x+4 = (x+1)(x+4).$$

Fracția devine:

$$y=\frac{(x^2+3x+4)(x+1)(x+2)}{(x+2)(x+3)(x+1)(x+4)}=\frac{x^2+3x+4}{(x+3)(x+4)}=\frac{x^2+3x+4}{x^2+7x+12}.$$

b) Formăm ecuația ce dă pe x în funcție de y,

$$x^2(y-1)+x(7y-3)+12y-4=0. \qquad (1)$$

Pentru ca x să fie real trebuie ca discriminantul să fie pozitiv sau egal cu zero, deci:

$$(7y-3)^2-4(12y-4)(y-1)\geqslant 0;$$

$$49y^2-42y+9-48y^2+64y-16\geqslant 0;$$

$$y^2+22y-7\geqslant 0.$$

Inecuația în y este satisfăcută pentru $y\leqslant -11-8\sqrt{2}$; sau $y\geqslant -11+8\sqrt{2}$, deci maximul și minimul lui y au loc pentru: $y_M=-11-8\sqrt{2}$ și $y_m=-11+8\sqrt{2}$.
Valorile corespunzătoare lui x se află înlocuind pe y în ecuația (1) cu valorile corespunzătoare extremelor.

$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{7y-3}{2(y-1)},$$

de unde:

$$x_M=-\frac{-77-56\sqrt{2}-3}{2(-11-8\sqrt{2}-1)}=-\frac{8(10+7\sqrt{2})}{8(3+2\sqrt{2})}=-\frac{10+7\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}=-2-\sqrt{2}$$

$$x_m=-\frac{-77+56\sqrt{2}-3}{2(-11+8\sqrt{2}-1)}=-\frac{8(7\sqrt{2}-10)}{8(2\sqrt{2}-3)}=-\frac{10-7\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}=-2+\sqrt{2}$$

Problema 4314

Să se afle limita expresiei: $E=2^{n+2}\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}$, *cînd n tinde către infinit.*

* * *

Soluție. Expresia se mai poate scrie:

$$E=2^{n+2}\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}=2^{n+2}\,\frac{\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{\pi}{2^{n+2}}}\cdot\frac{\pi}{2^{n+2}}=\frac{\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{\pi}{2^{n+2}}}\cdot\pi$$

de unde:

$$\lim_{n\to\infty}E=\pi\lim\frac{\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{\pi}{2^{n+2}}}=\pi.$$

Problema 4321

Să se arate că:

$$\sum_{k=0}^{n} (p+k)\, C_n^k = 2^{n-1}(n+2p),$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k (p+k)\, C_n^k = 0$$

S. Strătilă, elev Pitești

Soluție. Prima sumă se poate scrie:

$$\sum_{k=0}^{n} (p+k)\, C_n^k = p \sum_{k=0}^{n} C_n^k + \sum_{k=0}^{n} kC_n^k = p \cdot 2^n + \sum_{k=0}^{n} kC_n^k$$

Însă, $\sum_{k=0}^{n} kC_n^k = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + kC_n^k + \ldots + nC_n^n$. Știm că:

$(x+1)^n = (C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^k x^k + \ldots + C_n^n x^n)$. Derivăm această identitate atît în stînga cît și în dreapta:

$n(x+1)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2\, x + \ldots + kC_n^k\, x^{k-1} + \ldots + nC_n^n\, x^{n-1}$, iar pentru $x = 1$, obținem: $n \cdot 2^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + kC_n^k + \ldots + nC_n^n =$

$= \sum_{k=0}^{n} kC_n^k$; deci, $\sum_{k=0}^{n} (p+k)\, C_n^k = p \cdot 2^n + n \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}(n+2p)$.

Putem arăta altfel că $\sum_{k=0}^{n} kC_n^k = 2^{n-1} \cdot n$. Știm că $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$

deci:

$$C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n;$$

$$C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n - C_n^1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$C_n^n = 2^n - C_n^1 - C_n^2 - \ldots - C_n^{n-1}$$

Însă, $C_n^k = C_n^{n-k}$. Adunăm aceste egalități și obținem:

$$\sum_{k=0}^{n} kC_n^k = n \cdot 2^n - \sum_{k=0}^{n} kC_n^k \text{ de unde: } \sum_{k=0}^{n} kC_n^k = n \cdot 2^{n-1}.$$

Cea de-a doua o obținem analog:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k (p+k) = p \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k \cdot C_n^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k kC_n^k,$$

deoarece:

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + (-1)^k C_n^k + \ldots + (-1)^n C_n^n = 0.$$

Rămîne de arătat că: $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k kC_n^k = 0$.

Procedăm la fel. Știm că :

$$(x-1)^n = C_n^0 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - C_n^3 x^3 + \ldots (-1)^k C_n^k x^k + \ldots (-1)^n C_n^n x^n.$$

Derivăm parte cu parte și avem :

$$n(x-1)^{n-1} = -C_n^1 + 2C_n^2 x - 3C_n^3 x^2 + \ldots (-1)^k C_n^k x^{k-1} k + \ldots$$

$$(-1)^n n C_n^n \cdot x^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k C_n^k k x^{k-1}.$$

Facem $x = 1$ și obținem : $0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k C_n^k$

Se mai poate da o demonstrație astfel :

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots (-1)_n^n C_n^n = 0;$$

$$C_n^2 - C_n^3 + \ldots (-1)^n C_n^n = C_n^1 - C_n^0$$

$$-C_n^3 + \ldots (-1)^n C_n^n = -C_n^2 C_n^1 - C_n^0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(-1)^n C_n^n = (-1)^n C_n^{n-1} + (-1)^{n-1} C_n^{n-2} \ldots + C_n^1 - C_n^0.$$

Rezultă :

$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k C_n^k = -\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k k$; am ținut seamă că, $C_n^k = C_n^{n-k}$,

deci,

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \cdot k = 0 \cdot$$

Soluții bune am primit de la : *V. Nicula*, elev, București.

Problema 4335

O triodă are panta statică $S = 1{,}32$ mA/V iar rezistența interioară $R_i = 53000\ \Omega$. Să se calculeze factorul de amplificare static și dinamic, precum și panta dinamică a tubului, știind că în circuitul anodic se găsește o rezistență de 2 M Ω.

Romulus Sfichi, Sighișoara

Soluția autorului. Factorul de amplificare static al triodei este :

$$\mu = R_i S = 53000 \cdot 1{,}32 \cdot 10^{-3} = 70$$

Factorul de amplificarea dinamic al triodei este :

$$K = \mu \frac{R_a}{R_i + R_a} = 70 \frac{2 \cdot 10^6}{5{,}3 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^6} = 68{,}2$$

Panta dinamică a triodei este :

$$S_d = S \frac{R_i}{R_i + R_a} = 1{,}32 \frac{5{,}3 \cdot 10^4}{5{,}3 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^6} = 0{,}034 \text{mA/V}.$$

Problema 4336

O rețea de difracție are 450 trăsături pe 1 mm. Studiind la spectroscop difracția prin rețea obținută de la o sursă de lumină monocromatică, se constată că este necesară o rotație de 15°20′ a lunetei spectroscopului — pentru a se obține 2 franje consecutive. Care este culoarea luminii monocromatice?

Merches Ioan, Botoșani

Soluția autorului. Utilizăm relația $\Delta = a \sin \varphi$,

Δ = diferența de drum,

a = constanta retelei,

φ = unghiul de rotație al lunetei spectroscopului într-un plan orizontal.

Pentru un interval de o interfranjă:

$\Delta = \lambda$ = lung. de undă a luminii monocromatice.

Deci: $\lambda = a \sin \varphi$

$$a = \frac{1}{450}\, mm = \frac{10^3}{450}\, \mu = 2{,}22\, \mu,$$

$$\varphi = 15°20' \rightarrow \sin \varphi = \sin 15°20' = 0{,}266.$$

În sfîrșit avem:

$$\lambda = a \sin \varphi = 2{,}22 \cdot \mu \cdot 0{,}266 = 0{,}59\, \mu.$$

Lungimii de undă de 0,59 μ (exact: 0,5893 μ) îi corespunde culoarea *galbenă*.

Problema 4337

Dacă există relația $a + b + c = 0$, atunci avem și relația:

$$\frac{a^5 + b^5 + c^5}{(a^2 + b^2 + c^2)(a^3 + b^3 + c^3)} + \frac{a^7 + b^7 + c^7}{(a^3 + b^3 + c^3)(a^4 + b^4 + c^4)} =$$

$$\frac{(a^3 + b^3 + c^3)(a^4 + b^4 + c^4)}{(a^2 + b^2 + c^2)(a^5 + b^5 + c^5)} + \frac{(a^2 + b^2 + c^2)(a^7 + b^7 + c^7)}{(a^4 + b^4 + c^4)(a^5 + b^5 + c^5)} = 2.$$

Dan Florescu, elev București

Soluție. Să considerăm pe a, b, c rădăcinile ecuației $x^3 + px + q = 0$. Notăm $S_n = a^n + b^n + c^n$ și avem: $S_1 = a + b + c = 0$. $S_2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc) = -2p$, deoarece $ab + bc + ac = p$. Deci, $S_2 = -2p$.

Avem: $a^3 + pa + q = 0$; $b^3 + pb + q = 0$; $c^3 + pc + q = 0$ (1) întrucît a, b, c sînt rădăcinile ecuației $x^3 + px + q = 0$. Adunînd relațiile (1) se obține: $S_3 + pS_1 + 3q = 0$ și $S_3 = -3q$.

Înmulțind relațiile (1) respectiv cu a, b, c și adunîndu-le se obține: $S_4 + pS_2 + qS_1 = 0$ și $S_4 = 2p^2$.

Înmulțind relațiile (1) respectiv cu a^2, b^2, c^2 și adunîndu-le se obține: $S_5 + pS_3 + qS_2 = 0$ și $S_5 = 3pq + 2pq + 5pq$. Înmulțind relațiile (1) respectiv cu a^3, b^3, c^3, și adunîndu-le se obține: $S_6 + pS_4 + qS_3 = 0$ și $S_6 = -2p^3 + 3q^2$. Înmulțind relațiile (1) respectiv cu a^4, b^4, c^4, și adunîndu-le se obține: $S_7 + pS_5 + qS_4 = 0$ și $S_7 = -5p^2q - 2p^2q = -7p^2q$.

Inlocuind cele obținute în relația ce trebuie demonstrată, se obține:

$$\frac{5pq}{(-2p)(-3q)}+\frac{-7p^2q}{(-3q)(2p^2)}=\frac{(-3q)(2p^2)}{(-2p)(5pq)}+\frac{(-2p)(-7p^2q)}{(2p^2)(5pq)}=2.$$

Problema 4338

Pe laturile AB, BC, CA ale unui triunghi echilateral se iau respectiv punctele M. N. P astfel încît AM = BN = CP. Dreapta AN se taie cu BP și cu CM respectiv în A_1 și C_1, iar CM se taie cu BP în B_1. Să se arate că: a) triunghiul $A_1B_1C_1$ este echilateral; b) ortocentrele acestor două triunghiuri echilaterale se găsesc în același punct.

Corneliu Georgescu, Craiova

Soluție. a) Triunghiul *CNA* este egal cu triunghiul *BAP* și *BMC* fiindcă au cîte două laturi și unghiul cuprins, respectiv egale. Rezultă:

$$AN=BP=CM;\ \text{și}\ \sphericalangle CAN=\sphericalangle ABP=\sphericalangle BCP$$

Triunghiul ACC_1 = tr. BAA_1 = tr. CBB_1, fiindcă au $AC = AB = BC$ și unghiurile adiacente acestor laturi respectiv egale. Rezultă:

$$CC_1=AA_1=BB_1\ \text{și}\ AC_1=BA_1=CB_1$$

Prin scădere, găsim $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1A_1$.

b) Fie *H* ortocentrul triunghiului *ABC*. Trebuie să arătăm că $HA_1 = HB_1 = HC_1$.

Tr. HAA_1 = tr. HBB_1 = tr. HCC_1 fiindcă $HA = HB = HC$, și $\sphericalangle HAA_1 = 30° - \sphericalangle CAN$; $\sphericalangle HBB_1 = 30° - \sphericalangle ABP$; $\sphericalangle HCC_1 = 30° - - \sphericalangle BCP$.

Generalizare dată de: *Gh. Dobrotescu*, Predeal, *I. Hadîrcă*, Breaza și *D. Ene*, Ploiești

Se dă triunghiul ABC în care se duc dreptele AA', BB' și CC' ce fac același unghi cu laturile triunghiului ABC, luate în același sens. a) *Cele trei transversale unghiulare se taie două cîte două formînd triunghiul $A_1B_1C_1$ asemenea cu cel dat.* b) *Triunghiul ABC și $A_1B_1C_1$ au comun,* punct dublu, unul din punctele lui Brocard.

Soluția. Triunghiurile *ABC* și $A_1B_1C_1$ sînt direct asemenea:

$$\sphericalangle A_1=\sphericalangle A_1CA+\sphericalangle A_1AC=\alpha+A-\alpha=A\ \text{etc.}$$

Se cunoaște — a se vedea *Tr. Lalescu* „Geometria triunghiului", cap. X — că punctul dublu a celor două figuri se află la intersecția cercurilor AA_1C și C_1CC. Ori aceste cercuri sînt tangente în *A* la *BA* și în *A* la *AC* respectiv, deci sînt cercuri adjuncte, de același sens, ele definesc deci un punct Brocard.

Problema 4343

Se dă triunghiul dreptunghic ABC (A = 90) a cărui ipotenuză BC este împărțită în n părți egale, n fiind un număr impar. Dacă se notează cu α unghiul sub care se vede din A subdiviziunea care conține mijlocul ipotenuzei, cu h înălțimea triunghiului și cu a ipotenuza să se demonstreze că $tg\,\alpha=\dfrac{4nh}{(n^2-1)a}$.

(Olimpiada internațională, Sinaia 1960)

Soluție dată de *Victor S. Olteanu*, elev ș.m. 19 București. Dacă notăm $\sphericalangle MAN = \alpha$, $n = 2p + 1$, atunci vom avea $MN = \frac{a}{n}$. Exprimînd aria triunghiului MAN în două moduri obținem relația:

$$A_{MAN} = \frac{1}{2} MN \cdot AH = \frac{1}{2} AM \cdot AN \sin \alpha,$$

de unde:

$$AM \cdot AN \sin \alpha = MN \cdot AH; \; AM \cdot AN \sin \alpha = \frac{ah}{n}. \tag{1}$$

Avînd în vedere că $BM = NC = \frac{ap}{2p+1}$ înseamnă că mediana ipotenuzei AO este în același timp, mediana laturii MN din triunghiul MAN și deci, avem relația:

$$4\,AO^2 = 2(AM^2 + AN^2) - MN^2;$$

$$AM^2 + AN^2 = \frac{4\,AO^2 + MN^2}{2};$$

$$AM^2 + AN^2 = \frac{a^2(n^2+1)}{2n^2}. \tag{2}$$

Aplicînd teorema cosinusurilor în triunghiul MAN laturei MN avem:

$$MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM \cdot AN \cos \alpha;$$

$$AM \cdot AN \cos \alpha = \frac{AM^2 + AN^2 - MN^2}{2};$$

$$AM \cdot AN \cos \alpha = \frac{a^2(n^2-1)}{4n^2} \tag{3}$$

Împărțind relațiile (1) și (3) găsim relația $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4nh}{(n^2-1)a}$,

Observare. La același rezultat am fi ajuns dacă în loc să aplicăm teorema medianei triunghiului MAN, am fi aplicat teorema cosinusurilor în triunghiurile AMB și ANC, de unde scoteam pe AM^2 și AN^2.

Problema 4344

Să se construiască un triunghi ABC cunoscînd mărimile h_a, h_c ale înălțimilor vîrfurilor A, B precum și mărimea m_a a medianei vîrfului A.

(Olimpiada internațională, Sinaia 1960)

Soluția dată de *Victor S. Olteanu*, elev București. Ducînd perpendiculara MN din mijlocul laturii BC pe latura AC obținem linia mijlocie în triunghiul dreptunghic $BB'C$, astfel că $MN = \frac{BB'}{2}$.

Se construiește cercul de diametru $AM = m_a$ și construim coardele $AA' = h_a$ și $MN = \frac{h_b}{2}$. Dreapta MA' intersectează dreapta AN în punctul C, iar dacă luăm simetricul punctului C în raport cu M, găsim și punctul B. Triunghiul este construit.

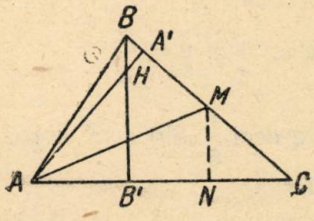


Fig. 1.

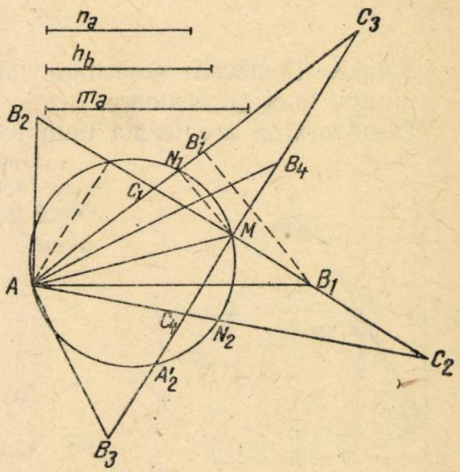


Fig. 2.

Demonstrație. Prin construcție am descris cercul de diametru $AM = m_a$ și am construit segmentele $AA' = h_a$ și $MN = \frac{h_b}{2}$. Deoarece unghiul $AA'M$ este înscris într-un semicerc înseamnă că el este drept și ceviana $AA' = h_a$ este înălțimea ce pleacă din A. Deoarece am luat $MB = MC$ înseamnă că ceviana $AM = m_a$ este mediana ce pleacă din A. Deoarece unghiul ANM este înscris într-un semicerc înseamnă că el este drept și dacă coborîm perpendiculara BB' pe laturi AC, atunci MN este linie mijlocie în triunghiul $CB'B$, adică avem $BB' = 2\,MN$. Știind că $MN = \frac{h_b}{2}$ rezultă că înălțimea BB' are lungimea h_b

Discuția. Problema este posibilă dacă avem $h_a \leqslant m_a$ și $\frac{h_b}{2} \leqslant m_a$. Dacă $h_a = m_a$ atunci triunghiul ABC este isoscel cu baza BC, iar dacă $\frac{h_b}{2} = m_a$ atunci triunghiul ABC este dreptunghic în A. Dacă mărimile h_a, $\frac{h_b}{2}$, m_a pot reprezenta laturile unui triunghi dreptunghic, adică dacă $h_a^2 + \frac{h_b^2}{4} = m_a^2$, atunci triunghiul ABC este dreptunghic în C.

În toate cazurile avem patru soluții care sînt două cîte două egale și simetrice în raport cu mediana AM, care este o mediană comună tuturor celor patru triunghiuri și care reprezintă și axa de simetrie a întregii figuri.

Problema 4348

Un vas de tablă în formă de trunchi de con are razele 2a și a iar generatoarea 6a. Să se dimensioneze un dreptunghi de tablă din care să se poată tăia dintr-o singură bucată suprafața laterală a vasului, cu cît mai puține deșeuri.

C. Menciu, Craiova

Soluție. Desfacem suprafața laterală a trunchiului de con, tăind-o de a lungul unei generatoare.

Desfășurarea are forma unui sector de coroană cu razele $6a$ și $12a$.

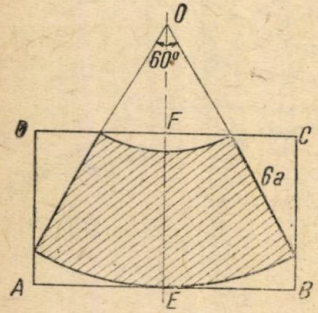


Fig. 1.

Baza mare desfășurată dă un arc de cerc care face parte dintr-un cerc cu raza $12a$. Dacă u este unghiul la centru al acestui arc, avem

$$12au = 4\pi a, \text{ deci } u = \frac{\pi}{3}$$

Aria laterală este deci $\frac{1}{6}$ din aria coroanei cu razele de mai sus.

Să circumscriem acestei suprafețe desfășurate un dreptunghi, astfel ca axa de simetrie a desfășuratei să fie și axa de simetrie pentru dreptunghi. Se vede că lungimea dreptunghiului este egală cu latura exagonului regulat înscris cercului cu raza $12a = AB$.

Lățimea dreptunghiului este:

$$BC = OE - OF = 12a - 3a\sqrt{3} = 3a(4 - \sqrt{3}).$$

Aria desfășuratei este $S = 18\,\pi a^2$; aria dreptunghiului $S_1 = 36a^2(4 - \sqrt{3})$. Procentul de deșeuri 30,9%.

Problema 4350

În calea unui fascicul convergent, la un metru de punctul de convergență se așază pe rînd două lentile; prima apropie cu 40 cm, iar a doua depărtează cu 40 cm punctul de convergență. Să se calculeze convergența și distanța focală a celor două lentile.

Numitor Cancer, profesor, Tg. Jiu

Soluția. În primul caz $p = -1$ m și $p' = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$ cm deci:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{-1} + \frac{1}{0{,}6} = \frac{-0{,}4}{-0{,}6} = \frac{2}{3} \text{ dioptrii}$$

și

$$f = \frac{-1 \cdot 0{,}6}{-0{,}4} = 1{,}5 \text{ m}$$

În al doilea caz $p = -1$; $p' = 1 + 0{,}4 = 1{,}4$ m

deci

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{-1} + \frac{1}{1{,}4} = \frac{0{,}4}{-1{,}4} \simeq -0{,}29 \text{ dioptrii}$$

și

$$f = \frac{-1 \cdot 1{,}4}{-1 + 1{,}4} = -\frac{1{,}4}{0{,}4} = -3{,}5 \text{ m}.$$

Problema 4397

În triunghiul ABC ducem prin vîrfurile A, B, C perpendiculare pe laturile AB, BC, CA. Se formează astfel triunghiul $A'B'C'$. Se cere:

a) *Să se arate că triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sînt asemenea.*

b) *Să se calculeze raportul de asemănare al celor două triunghiuri în funcție de elementele triunghiului ABC.*

c) *Dacă notăm cu R, R_1, R_2, R_3 razele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC, BCA', CAB', ABC' avem relația: $R_1R_2R_3 = R^3$.*

Cezar Ivănescu, profesor Tîrgoviște

I. *Soluție* dată de *Mircea Stan*, București. a) Este evident că triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sînt asemenea căci au unghiurile respectiv egale, ca avînd laturile perpendiculare prin construcție.

b) Raportul r de asemănare va fi egal de pildă, cu $\frac{AB}{C'B'}$. Problema se reduce așadar, la calcularea laturei a triunghiului $A'B'C'$ în funcție de elementele triunghiului ABC. Avem de exemplu:

$$C'B' = AC' + AB' = \frac{c}{\operatorname{tg} B} + \frac{b}{\sin A}$$

(din triunghiurile dreptunghice $C'BA$ și ACB'). Rezultă că:

$$r = \frac{c}{c \operatorname{ctg} B + b \operatorname{cosec} A} = \frac{b}{b \operatorname{ctg} A + a \operatorname{cosec} C} = \frac{a}{a \operatorname{ctg} C + c \operatorname{cosec} B}$$

c) Triunghiurile BCA', CAB' și ABC' fiind dreptunghice, înseamnă că: Rezultă că:

$$R_1 = \frac{A'C}{2} = \frac{a}{2 \sin C}; \quad R_2 = \frac{AB'}{2} = \frac{b}{2 \sin A} \text{ și } R_3 = \frac{c}{2 \sin B}.$$

Rezultă că:

$$R_1 R_2 R_3 = \frac{abc}{8 \sin A \sin B \sin C} = R^3.$$

II. *Soluția* dată de *P. Păncescu*. Odobești. a) Unghiurile ABC și $CA'B$ avînd laturile perpendiculare rezultă că ele sînt egale. La fel se arată

și la celelalte unghiuri. Deci unghiurile fiind egale triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sînt asemenea.

b) Pentru a calcula raportul de asemănare trebuie să cunoaștem cel puțin două laturi omologe. Să calculăm lungimea laturii $B'C'$ în funcție de elementele triunghiului ABC. Vom avea: $B'C' = AB' + AC'$.

Deoarece $\sphericalangle A = \sphericalangle B'$ în triunghiul dreptunghic ACB' avem: $AB' = \frac{b}{\sin B'} = \frac{b}{\sin A}$, dar $S(ABC) = \frac{1}{2}$ bc sin A. Din aceste două relații rezultă că: $AB' = \frac{b^2 c}{2S}$.

În triunghiul ABC' avem: $AC' = \frac{c}{\operatorname{tg} B}$, dar $\operatorname{tg} B = \frac{4S}{a^2 + c^2 - b^2}$.

Rezultă că: $AC' = \frac{c(a^2 + c^2 - b^2)}{4S}$, deci avem: $B'C' = \frac{b^2 c}{4S} + \frac{c(a^2 + c^2 - b^2)}{4S} = \frac{c(\omega^2 + b^2 + c^2)}{4S}$. Raportul de asemănare a triunghiurilor este:

$$\frac{AB}{B'C'} = \frac{BC}{C'A'} = \frac{CA}{A'B'} = \frac{4S}{a^2 + b^2 + c^2}$$

c) Deoarece într-un triunghi dreptunghic raza cercului circumscris este egală cu jumătate din ipotenuză avem:

$$R_1 = \frac{A'C}{2} = \frac{a^2 b}{4S}; \quad R_2 = \frac{AB'}{2} = \frac{b^2 c}{4S}; \quad R_3 = \frac{BC'}{2} = \frac{c^2 a}{4S}$$

deci,

$$R_1 R_2 R_3 = \frac{a^3 b^3 c^3}{64 S^3} = \left(\frac{abc}{4S}\right)^3 = R^3.$$

Problema E: 1548

Într-o G.A.C. două echipe au de scos sfeclă de zahăr. Dacă prima echipă lucrează 18 zile, iar a doua 16 zile, termină parcela prevăzută precum și dacă prima echipă lucrează 21 zile și a doua 12 zile. În cît timp fiecare echipă în parte termină lucrarea?

I. Popov

Soluție aritmetică. Prima dată, prima echipă a făcut cu 3 zile mai puțin, iar a doua echipă cu 4 zile mai mult, deci atît cît face prima în 3 zile, a doua face în 4 zile.

Prima dată, prima echipă a făcut 18 zile și a doua 16 zile, care echivalează cu $\frac{16 \cdot 3}{4} = 12$ zile făcute de prima.

Deci prima echipă poate termina lucrarea în $18 + 12 = 30$ zile.

A doua oară, a doua echipă a făcut 12 zile iar prima echipă 21 zile, ceea ce echivalează cu $\frac{21 \cdot 4}{3} = 28$ zile făcute de a doua echipă.

Deci, a doua echipă poate termina lucrarea în $28 + 12 = 40$ zile.

Problema E : 1549

Două automobile pleacă unul din București spre Ploiești și celălalt din Ploiești spre București. Primul are viteza de 40 km/h și pleacă la ora 8, al doilea are viteza de 60 km/h și pleacă la ora 9. Se cere :

a) *La ce distanță și la ce oră se vor întîlni prima dată ;* b) *După ce ajung în orașele respective — și considerăm că se întorc imediat — la ce distanță se vor întîlni a doua oară? Distanța dintre orașe este de 60 km.*

C. Nicolau, elev București

Soluție. Notăm cu x timpul scurs de la plecarea celui de-al doilea automobil pînă la întîlnirea cu primul.

$$40(x+1)+60x=60\,;\ 40x+40+60x=60\,;\ 100x=20\,;$$

$$x=\frac{1}{5}\,h=12\text{ min.}$$

Se vor întîlni prima dată la $9^h\ 12^{min}$.

În $\frac{1}{5}\,h$ al doilea va parcurge $\frac{60}{5}=12$ km, deci se vor întîlni la $60-12=48$ km de București.

Primul ajunge la Ploiești după $\frac{60}{40}=1\frac{1}{2}=1^h\ 30^{min}$ de la plecarea din București, deci la $9^h\ 30^{min}$.

Al doilea ajunge în București după $\frac{60}{60}=1^h$ de la plecarea din Ploiești, deci la 9^h.

$y=$ timpul după care se întîlnesc a doua oară de la plecarea celui dintîi.

$$60\left(y-\frac{1}{2}\right)+40y=60\,;\ 60y+40y=90\,;\ 100y=90\,;$$

$$y=\frac{9}{10}\,h=54^{min}.$$

În $\frac{9}{10}\,h$ primul a parcurs $\frac{9}{10}\cdot\frac{40}{1}=36$ km.

Deci se vor întîlni la $60-36=24$ km de București.

Problema E : 1553

Cum putem aduce 6 l apă de la rîu, dacă avem numai un vas de 4 l și altul de 9 l?

M. F. L.

Soluție. Umplem vasul de 9 l și îl vărsăm în cel de 4 l, astfel că în cel de 9 l ne rămîn 5 l. Îl vărsăm jos pe cel de 4 l și turnăm din nou din cel de 9 l pînă îl umplem. În vasul de 9 l rămîne 1 l. Vărsăm iarăși conținutul vasului de 4 l și punem în el 1 l din vasul de 9 l. Vasul de 9 l care rămîne gol îl umplem.

Punem din el apă pînă umplem vasul de 4 l în care deja se află 1 l de apă. Deci din vasul de 9 l am luat 3 l și au rămas 6 l.

Problema E : 1554

Un muncitor mai vîrstnic și unul mai tînăr lucrează la aceeași uzină. Cel vîrstnic face drumul în 30 minute și cel tînăr numai în 20 minute. Într-o dimineață, cel vîrstnic a plecat cu 5 minute înaintea celui tînăr. După cîte minute muncitorul cel tînăr ajunge pe cel vîrstnic?

M. F. L.

Soluție. Cel vîrstnic face $\frac{1}{30}$ din drum pe minut. Cel tînăr face $\frac{1}{20}$ din drum pe minut.

Cel vîrstnic plecînd cu 5 minute înainte avea un avans de $\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$ din drum. Diferența dintre vitezele lor era $\frac{1}{20}-\frac{1}{30}=\frac{1}{60}$ deci, cel tînăr recuperează diferența dintre ei în $\frac{1}{6}:\frac{1}{60}=10$ minute. Muncitorul tînăr ajunge pe cel vîrstnic după 10 minute.

Problema E : 1574

Într-o G.A.S. de pe 100 ha s-a recoltat 2800 q grîu. De pe unele hectare s-a recoltat cîte 30 q, iar de pe altele cîte 20 q. De pe cîte ha s-a recoltat cîte 30 q și de pe cîte s-a recoltat cîte 20 q la ha?

O.M.M.F., cl. V, 1960

Soluție. Dacă de pe toate ha s-ar fi recoltat 30 q, atunci în total s-ar fi recoltat $30 \times 100 = 3000$ q.

Dar s-au recoltat numai 2800 q, deci cu 3000—2800=200 q mai puțin, pentru că au fost și ha de pe care s-a recoltat numai 20 ha, deci cu 30—20=10 q mai puțin.

$200 : 10 = 20$ ha de pe care s-au recoltat 20 q grîu la ha.

$100 - 20 = 80$ ha de pe care s-au recoltat 30 q grîu la hectar.

Problema E : 1577

Să se reducă la forma cea mai simplă fracția:

$$\frac{(a-b)^3+3(a-b)^2b+3(a-b)b^2+b^3}{(a+b)^3-3(a+b)^2a+3(a+b)a^2-a^3}$$

(O.M.M.F., 1960, cl. VII București)

Soluție. Avem:

$$\frac{(a-b)^3+3(a-b)^2b+3(a-b)b^2+b^3}{(a+b)^3-3(a+b)a+3(a+b)a^2+a^3}=\frac{[(a-b)+b]^3}{[(a+b)-a]^3}=\frac{a^3}{b^3}$$

Problema E : 1581

Să se arate că:

$$\frac{a+b-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}{a+b}=1-\frac{1}{ab}$$

$$\frac{1+\sqrt{2}+a}{1+a\sqrt{2}-a}=1+\sqrt{2}$$

C. Ionescu-Țiu

Soluție. Partea I-a a primei identități devine:

$$\frac{a+b-\left(\frac{a+b}{ab}\right)}{a+b}=\frac{(a+b)\left(1-\frac{1}{ab}\right)}{a+b}=1-\frac{1}{ab}$$

Identitatea II-a devine:

$$(1+\sqrt{2}\cdot a-a)(\sqrt{2}+1)=\sqrt{2}+2a-a\sqrt{2}+1+\sqrt{2}\cdot a-a=$$
$$=1+\sqrt{2}+a$$

Deci,

$$\frac{1+\sqrt{2}+a}{1+\sqrt{2}\cdot a-a}=1+\sqrt{2}$$

CHESTIUNI DE EXAMEN

PROBLEME DATE LA OLIMPIADA DE MATEMATICĂ, ETAPA REGIONALĂ DIN 24 MARTIE 1961, LA LUCRAREA SCRISĂ

Clasa a XI-a a școli medii

4772. Se consideră cercurile (C_1) și (C_2) de ecuații respectiv

$$x^2+y^2-8x+m=0 \text{ și } x^2+y^2-6y-11+m=0$$

a) Să se cerceteze dacă există valori ale lui m pentru care cercurile corespunzătoare (C_1) și (C_2) sînt tangente. Să se precizeze în acest caz poziția lor relativă. b) Se duc tangentele din origine la cercul (C_1); dreapta punctelor de contact taie axa ox în P. Fie Q punctul analog unde dreapta punctelor de contact ale tangentelor din origine la cercul (C_2), taie axa Oy. Să se afle locul geometric al intersecției dreptei PQ cu axa radicală a cercurilor (C_1) și (C_2). În ipoteza că cercurile date sînt reale, să se delimiteze locul geometric.

Gh. D Simionescu

4773. Coordonatele punctului $M(x, y)$ care se mișcă în planul xoy verifică relațiile:

$$x = \sin(x + t) \text{ și } \operatorname{tg} y = \sqrt{1 + t^2}$$

Ecuația traiectoriei descrisă de M se poate pune sub forma

$$y = f(x)$$

a) În ce interval variază timpul t pentru ca M să descrie întreaga traiectorie? Să se determine intervalul maxim I pe care poate varia x pentru ca $f(x)$ să fie o funcție continuă și să se motiveze continuitatea. b) Să se stabilească mulțimea valorilor $f(x)$ pentru x I, sau domeniul de variație a lui $f(x)$. c) Să se calculeze derivata funcției $f(x)$. Să se scrie ecuația tangentei la traiectoria punctului M, în punctul de abscisă nulă. Să se indice forma acestei traiectorii în vecinătatea punctelor de abscise $x = -1$ și $x = 1$. Să se reprezinte traiectoria punctului M, pe baza rezultatelor obținute mai sus. Funcțiile trigonometrice inverse care apar în rezolvarea acestei probleme se consideră definite cel mult pe intervalul cuprins între $-\frac{\pi}{2}$ și $\frac{\pi}{2}$.

T. Roman

Anul III — școli pedagogice

4774. La lucrările de primăvară ale unei G.A.C., 3 grape cu tracțiune animală și 2 grape de tractor au grăpat un teren de 0,72 km în 10 ore. A doua zi, după 6 ore de lucru, se defectează o grapă trasă de animale. Grapele rămase trebuie să lucreze 48 minute în plus față de ziua precedentă pentru a grăpa aceeași suprafață. Care este productivitatea orară (suprafața grăpată într-o oră) a unei grape de tractor și cu ce procent o depășește pe cea a grapei trase de animale?

* * *

4775. O construcție de formă paralelipipedică este acoperită cu tablă galvanizată, acoperișul având o pantă de 30°. Să se afle cîte foi de tablă de dimensiunile 0,80 × 1,60 m sînt necesare știind că la baza acoperișului dreptunghiul are dimensiunile 8 × 20 metri, iar pentru fixarea tablei și deșeuri se socotește 12%. Care este înălțimea (maximă) a acoperișului?

* * *

Anul IV — școli pedagogice

4776. Trei întreprinderi A, B, C, urmează să distribuie suma de 4660 lei pentru a premia cîte 3 muncitori, care au realizat depășiri mai mari și anume: Proporțional cu depășirile de 5%, 7% și 12% la întreprinderea A și proporțional cu depășirile de 8%, 11% și 15% la întreprinderea B. La întreprinderea C premierea se face invers proporțional cu timpul de care revine întreprinderii C este $\frac{62}{171}$ din suma atribuită celorlalte două execuție a unei comenzi importante: 5 zile, $4\frac{1}{2}$ zile și $3\frac{3}{4}$ zile. Suma la un loc, iar suma care revine întreprinderii A este $\frac{11}{8}$ din suma atribuită întreprinderii B. Să se afle ce sumă primește fiecare muncitor premiat.

* * *

4777. Într-un trapez isoscel, se cunosc: perimetrul p, baza mică b și înălțimea i.

a) Să se determine unghiul ascuțit x făcut de bază cu o latură oblică, cu ajutorul lui $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ b) Să se calculeze aria trapezului în funcție de p, b, și i.

Școli profesionale — anul I

4778. Dintr-o prismă de oțel cu baze pătrate se taie un trunchi de piramidă avînd baza mare și înălțimea cît baza și înălțimea prismei. Care este greutatea materialului căzut dacă latura bazei prismei este de 90 mm, înălțimea de 145 mm, latura bazei mici a trunchiului 60 mm și greutatea specifică a oțelului 7,85 gf/cm³.

N. Dumitru (București)

4779. a) Cîți litri alcool de 90% trebuie adăugat unei soluții de 7 litri alcool de 50% pentru a obține o soluție de 62% ? Să se verifice rezultatul. b) Generalizare. Cîți litri dintr-o soluție cu o concentrație de q% trebuie adăugată la k litri dintr-o aceeași soluție cu o concentrație de p% pentru a ridica concentrația soluției la r% ? Să se verifice rezultatul obținut pe cazul general și pe cazul numeric de la punctul a). c) Cum trebuie modificată formula de la punctul b) în cazul că urmează să se micșoreze concentrația soluției ? Dar dacă această micșorare, trebuie realizată prin adăugarea unei cantități minime de lichid ?

Școli profesionale anul II și anul II meserii

4780. Directivele Congresului al III-lea al P.M.R. prevăd că „atenția principală în domeniul dezvoltării industriale se va acorda sporirii producției siderurgice".

Să se afle producția de fontă, oțel și laminate finite pline din 1965 știind că: a) triplul producției de oțel va fi mai mic decît încincitul producției de fontă cu atît cu cît va fi mai mică producția de fontă de cît cea de laminate finite pline. b) $1/7$ din producția de laminate finite pline va depăși $1/10$ din producția de fontă cu $1/33$ din producția de oțel; c) depășirea de către producția de oțel a celei de fontă este mai mică cu 0,1 U decît 70% din producția de fontă. (U reprezintă un milion de tone).

T. Roman

4781. Un vas are forma unui cilindru închis printr-un con de aceeași bază. Înălțimea h a conului este egală cu a cilindrului. a) Se fixează vasul cu axa verticlă și cu vîrful în jos și se umple vasul cu lichid, pe jumătate din capacitatea sa. Să se exprime cu ajutorul lui h înălțimea la care se ridică lichidul în vas ? b) Să se schițeze croiala pe o tablă metalică pentru execuția vasului de mai sus. Să se determine dimensiunile și unghiurile părților componente cunoscînd: raza cilindrului de 5 cm și înălțimea sa de 12 cm.

Anul III şcoli meserii

4782. Pentru a măsura diametrul d al bazei unei găuri conice, al cărei unghi de înclinare $\alpha = 24°$, se introduce în gaură o bilă sferică de rază 20 mm şi se măsoară distanţa $h = 14$ mm de la punctul cel mai înalt al sferei şi planul bazei găurii. Să se arate cum se poate calcula dimetrul d.

Ion Soare, Bucureşti

Anul I şcoli maiştri

4783. a) Norma de timp pentru prelucrarea unei piese se reduce, datorită unei inovaţii, de la 15 minute la 10 minute. Cu ce procent a crescut numărul de piese realizate în 8 ore adică productivitatea muncii? b) Norma de timp pentru prelucrarea unei piese se micşorează cu a% datorită unor inovaţii. Cu ce procent a crescut productivitatea muncii? Se va verifica rezultatul de la a) cu ajutorul rezutatului obţinut la b).

4784. O schelă are în secţiune forma unui trapez dreptunghic în care AB este baza mare şi DC platforma schelei (baza mică), AD şi BC sînt stîlpi de susţinere (AD vertical, iar BC oblică); AC, BD sînt contravîntuiri perpendiculare între ele (diagonalele trapezului). Se cunoaşte $AB = 6$ m; $AD = 2{,}5$ m. Să se calculeze BD, AC, DC, BC.

Gh. D. Simionescu

Anul II — şcoli maiştri

4785. Se proiectează pentru o hală, un monorail de transportat piese de la o maşină la alta a cărui cale de rulare este o şină dublă T. Pe o porţiune $A'A$ şina merge paralel cu peretele la o distanţă de 2 m; din cauza unor maşini, şina trebuie apropiată de peretele xy aşa că porţiunea BB' să fie la distanţa de 1 m de acest perete. Această deviere între A şi B se face pe o lungime de 4,5 m în proiecţia pe xy, arcele de racordare avînd razele $R = 2$ m şi centrele în O şi O'.

Să se afle lungimea şinei de rulare între A şi B. (Folosiţi în rezolvare segmentul OO' şi unghiurile care se formează în punctul O. Se utilizează tablele ale valorilor naturale sau ale logaritmilor funcţiilor trigonometrice.

Helga Kery (Braşov)

4786. Într-un con circular drept, aria laterală s şi unghiul maxim la vîrf $2x$ sînt date. a) Să se calculeze volumul acestui con, cu ajutorul lui s şi al funcţiilor trigonometrice ale lui x. b) Să se calculeze derivata volumului cînd x variază. c) Să se determine valorile lui x, pentru care se anulează această derivată şi să se calculeze volumul conului corespunzător.

Tiberiu Roman

PROBLEME PROPUSE *

4787. Se dau două cercuri (O) și (O') ce se întîlnesc în A și B. Fie M un punct variabil pe cercul (O). Dreptele MA și MB întîlnesc a doua oară cercul (O') respectiv în N și P.

Să se arate că: a) înălțimile triunghiului MNP trec fiecare prin cîte un punct fix; b) locul geometric al ortocentrului triunghiului MNP este un cerc concentric cu cercul (O).

Virgil Nicula, student București

4788. O cuantă de lumină ce cade pe o substanță, extrage prin efect fotoelectric un electron liber. Care este valoarea lucrului de extracție, dacă frecvența cuantei incidente este de $10^9 MHz$, iar electronul extras are suficientă energie pentru a părăsi substanța cu viteza de 20 km/s?

I. Merches, profesor Botoșani

4789. Să se reconstituie următoarea adunare scrisă în baza 6, știind că suma scrisă în baza 10 este 1065.

$$\begin{array}{r} 1\,x\,x\,5\,+ \\ x\,2\,x\,x \\ \hline x\,x\,x\,x \end{array}$$

Gh. Petrescu, profesor Pitești

4790. Să se construiască numai cu rigla axa radicală a două cercuri.

Anghelache Tudorică, student București

4791. Să se reprezinte grafic funcțiile:

$$2y_1 = \sqrt{2+x|x|+2\sqrt{1+x|x|}} - \sqrt{2+x|x|-2\sqrt{1+x|x|}}$$

$$2y_2 = \sqrt{2-x|x|+2\sqrt{1-x|x|}} - \sqrt{2-x|x|-2\sqrt{1-x|x|}}$$

$$2y_3 = \sqrt{2+x|x|+2\sqrt{1+x|x|}} + \sqrt{2+x|x|-2\sqrt{1+x|x|}}$$

$$2y_4 = \sqrt{2-x|x|+2\sqrt{1-x|x|}} + \sqrt{2-x|x|-2\sqrt{1-x|x|}}$$

C. Ionescu-Țiu

4792. Pe latura BC a triunghiului ABC se construiesc triunghiurile echilaterale BDC și BEC (D fiind de aceeași parte cu A față de BC). Să se verifice relația:

$$AD^2 + AE^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

I. Avramescu, profesor Rm. Vîlcea

*) VIII (4789, 4796, 4812, 4819); IX 4787, (4790, 4792, 4793, 4794, 4802, 4811, 4815); X (4795, 4797, 4799, 4800, 4804, 4807, 4816, 4818, 4821, 4822); XI (4788, 4791, 4798, 4800, 4801, 4803, 4805, 4806, 4808, 4809, 4810, 4813, 4814, 4817, 4820).

4793. Se dă ecuația: $x^2 - 2mx - 1 = 0$, unde m, este un parametru variabil.

a) Să se arate că nu există valori pentru m astfel ca rădăcinile ecuației de mai sus să fie cuprinse în intervalul $(0; 1)$;

b) Să se formeze ecuația de gradul doi în y, care are rădăcini pe $y_1 = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ și $y_2 = \sqrt{y_1} - \sqrt{x_2}$.

I. Dăneț, profesor Feteşti

4794. Să se rezolve ecuația

$$x^2 + ax + b = 0, \text{ știind că } x_1 = 3x_2 \text{ și } x_1 x_2 = a - 1$$

C. Ionescu-Țiu

4795. Printr-un conductor de nichelină cu secțiunea de 0,25 mm², trec într-o secundă 21.10^{18} electroni. Știind că în 5 minute se ridică temperatura unei mase de apă de 1,2 kg cu 11°C, să se afle lungimea conductorului și tensiunea de la capetele lui.

$$\left(\varrho = 0{,}42\,\frac{\Omega\ \text{mm}^2}{\text{m}}\right)$$

Paxino Gh., elev Sinaia

4796. Un strung de picior este pus în mișcare cu ajutorul unei pedale solidar legată cu o roată având $D_1 = 75$ cm. Această roată este legată printr-o curea de transmisie cu o a doua, având $D_2 = 18$ cm, iar pe axul acestuia este fixat obiectul de strunjit. Vîrful cuțitului se află la $d = 25$ mm de axul roții mici. Strungul apasă pe pedală de 40 ori pe minut, dînd roții mari o rotație completă la fiecare apăsare. Să se calculeze viteza cu care este tăiată piesa.

* * *

4797. Un grup electrogen produce o tensiune electromotoare de 230 V. Rezistența interioară a generatorului este de 0,2 Ω. De la generator se alimentează printr-o linie de 400 m din conductor de cupru de 16 mm², un motor electric care, în plină sarcină, absoarbe un curent de 30 A. Să se calculeze: a) tensiunea la bornele generatorului, cînd motorul este în plină sarcină; b) tensiunea la bornele motorului, în aceeași situație; c) curentul în linie în cazul unui scurt circuit pe linie la o distanță de 300 m de la generator.

* * *

4798. Să se demonstreze că lungimea unei coarde care trece prin focarul unei parabole este de 4 ori segmentul care unește focarul cu punctul de contact al tangentei paralelă cu coarda.

* * *

4799. Să se rezolve ecuația:

$$\operatorname{tg}(m+3)x \cdot \operatorname{tg} mx = \operatorname{tg}(m+1)x \cdot \operatorname{tg}(m+2)x$$

C. V. Costăchescu

4800. Considerăm tetraedrul $ABCD$, fie G centrul lui de greutate și a, b, c, α, β, γ lungimea muchiilor.

Ce relație avem între muchii dacă muchia AD este egală cu bimediana corespunzătoare muchiilor AD și BC?

Să se arate că în acest caz triunghiul GAD este dreptunghic in G.

N. Mihăilcanu

4801. Se dă funcția $f(x) = x^2 + 1$ dacă $x \leqslant x_0$ și $f(x) = ax + b$, dacă $x > x_0$. Să se determine constantele a și b astfel ca $f(x)$ să fie continuă și derivabilă în punctul $x = x_0$.

* * *

4802. Fie ABC un triunghi oarecare. Fie AE, BF și CG trei drepte concurente oarecare. Dreptele EG și EF întîlnesc paralela dusă prin A la BC în punctele M și N. Să se arate că: $MA = AN$.

I. Cucurezeanu, student București

4803. Se dă $y = f(x) = x^2 - 2x \cos \alpha + 1 - \sin^2 \alpha$, unde $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$.

a) Care sînt valorile particulare ale lui α pentru care curbele $y = f(x)$ sînt tangente axei x-ilor. Să se figureze aceste curbe pe același grafic după ce s-au precizat coordonatele punctului lor comun. *b*) Să se arate că în afară de cele stabilite mai sus, curba taie axa x-ilor în două puncte P_1 și P_2 de abscise pozitive. *c*) Pentru care valori ale lui α abscisele x_1 și x_2 ale punctelor P_1 și P_2 satisfac relația $x_1^2 + x_2^2 = 2$. *d*) Care este relația independentă de α între abscisele x_1 și x_2? *e*) Care sînt coordonatele punctului comun curbelor pentru un arc α diferit de $\frac{\pi}{4}$ și complementul său.

(Bacalaureat Franța, 1960)

4804. Fie un triunghi ABC, dreptunghic în A, în care $\sphericalangle C = 30^\circ$ și $AB = a$. Pe perpendiculara în B pe planul ABC se ia $SB = a\sqrt{3}$.

a) Să se arate că planele SAB și SAC sînt perpendiculare. Prin B se duce planul perpendicular pe SA. Acest plan taie pe SA în I și pe SC în J. Să se arate că triunghiul BIJ este dreptunghic și că IJ este paralelă la AC. *b*) Se taie tetraedrul $SABC$ printr-un plan paralel cu muchiile SB și AC; secțiunea în acest tetraedru este patrulaterul $MNPQ$, M fiind pe AB. Care este natura acestui patrulater? Să se calculeze perimetrul în funcție de a și BM (se va pune $BM = x$). Ce se remarcă? *c*) Să se calculeze aria $MNPQ$ în funcție de a și x. Să se reprezinte grafic variația ariei cînd M descrie segmentul AB. Se poate afla maximum după remarca de la punctul *b*)? *d*) Să se determine M pentru care aria $MNPQ = k\sqrt{3}$, aria ABC, k fiind un număr pozitiv dat. Să se discute prin calcul și să se facă graficul rezultatelor acestei discuții.

(Bacalaureat, Istambul, 1960)

4805. Pe dreapta xy se dau trei puncte fixe A, B, C punctul B fiind între A și C. Fie ($\triangle$) perpendiculara dusă în C pe dreapta xy. Se duc prin A și B două drepte variabile însă perpendiculare între ele. ($\sphericalangle APB = 90°$). Dreptele AP și BP taie dreapta $\triangle$ respectiv în M și N.

a) Să se demonstreze că AN și BM sînt perpendiculare între ele.

b) Să se demonstreze că cercul circumscris triunghiului AMN taie dreapta xy într-un al doilea punct fix, D.

c) Să se demonstreze că cercul de diametru MN taie dreapta xy în două puncte fixe I și J.

d) Care este locul geometric al centrului cercului circumscris triunghiului BMN.

e) Fie Q punctul de intersecție al dreptelor AN și BM. Să se demonstreze că dreapta PQ trece printr-un punct fix, k.

(Journal de mathématiques élémentaires, 1961)

4806. Un magnet rectiliniu cu un moment magnetic de 15 unități *MKSA*, este așezat într-un cîmp de inducție magnetică uniformă. Pentru a menține magnetul într-o direcție perpendiculară pe vectorul inducției magnetice a cîmpului, trebuie exercitat un cuplu mecanic cu un moment de 3.10^{-4} newton-metru. Care este intensitatea inducției magnetice? Care va fi momentul unui cuplu mecanic care va menține magnetul la 135° de la poziția de echilibru care ar lua-o, dacă ar fi lăsat să se orienteze liber în cîmp.

(Bacalaureat, Madagascar, 1960)

4807. Știind că $\operatorname{tg} x = \dfrac{2b}{a-c}$ să se calculeze expresiile:

$$Y = a\cos^2 x + 2b \sin x \cos x + c \sin^2 x$$

$$Z = a \sin^2 x - 2b \sin x \cos x + c \cos^2 x$$

(Journal de mathématiques élémentaires, 1961)

4808. Să se calculeze:

$$\lim_{x_0} \left[\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{1-\cos x} \right];$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x^2-1)}; \qquad \int \frac{2x\,dx}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$$

(Gazeta de matematică, Lisabona)

4809. La bornele unui electromotor monofazic, pe a cărui plăcuță indicatoare se citește:

$$U = 380\ V,\ I = 5A,\ \cos\varphi = 0{,}8.\ f = 50\ Hz$$

se conectează în derivație o capacitate de 10 μF.

Care este curentul total prin circuit și care este decalajul lui față de tensiunea aplicată?

Mihai Popescu, R. Sărat

4810. Să se reprezinte grafic funcțiile:

$$y=1-\sqrt{x};\ y=1+\sqrt{x};\ y=1-\sqrt{-x};\ y=1+\sqrt{-x};\ (y-1)^4=x^2.$$

Să se scrie ecuațiile tangentelor la aceste curbe în punctele unde curbele taie axa x-ilor.

C. Ionescu-Țiu

4811. Se dă un cerc O și o dreaptă oarecare Δ. Fie M un punct mobil pe cerc și N piciorul perpendicularei din M pe Δ. Se cere locul geometric al punctului I, mijlocul segmentului MN.

* * *

4812. Să se arate că expresiile:

$$E_1=3^{2n}\cdot 5^{2n}-2^{6n}$$

$$E^2=n\cdot 45^{n+1}-8\cdot 45^n-16(n+1)\,45^{n-1}+53\cdot 8^n$$

sînt divizibile cu 1961.

E. Constantinescu, profesor Tr. Măgurele

4813. Fie AB un diametru al cercului O și M un punct mobil pe acest cerc. Tangenta în M taie tangentele din A și din B respectiv în punctele C și D. Se cere locul geometric al punctului I, intersecția diagonalelor AD și BC ale trapezului $ABCD$.

C. Săndulache, profesor Bacău

4814. Se consideră parabola $y=ax^2+bx+c$ avînd vîrful în punctul V. Fie M un punct mobil pe această parabolă și P piciorul perpendicularei dusă din M pe tangenta în vîrful ei. Să se demonstreze că perpendiculara dusă din punctul P pe dreapta MV trece printr-un punct fix și să se determine coordonatele acestui punct.

Să se aplice rezultatul obținut la parabola $y^2=2px$.

C. Săndulache, profesor Bacău

4815. Într-un cerc se consideră doi diametri perpendiculari AB și CD și un punct M mobil pe cerc. Coarda AM taie diametrul CD în punctul I. Să se determine și să se reprezinte grafic, locul geometric al punctului P intersecția dreptei BI cu tangenta în M.

* * *

4816. Directivele Congresului al III-lea al P.M.R. prevăd ca producția de aluminiu să fie de 50 000 tone în anul 1965. Se cere: a) Care este intensitatea totală a curentului care alimentează băile electrolitice, dacă echivalentul eltrochimic al aluminiului este 0,09 mg/C și zilnic se obțin 155,52 tone aluminiu? b) Care este puterea curentului ce alimentează băile electrolitice, dacă tensiunea este 5 V? c) Care este energia în kWh consumată pentru fiecare tonă de aluminiu? d) Cît costă kilogramul de aluminiu obținut prin electroliză, dacă 1 kWh se socotește 0,50 lei? e) Care este grosimea stratului de aluminiu depus în 24 ore pe suprafața catozilor, dacă suprafața este 1000 m² și densitatea aluminiului este 2,7 g/cm³?

M. Țarălungă, profesor Bacău

4817. La o rețea trifazată cu tensiunea între faze de 363,3 V și o frecvență de 50 Hz este montat în stea un receptor format din trei impedanțe identice. Fiecare inpedanță este compusă dintr-o rezistență activă de 100Ω o inductanță de 0,1 H și o capacitate de 50 μF. a) Să se calculeze intensitatea curentului electric pe fiecare linie, precum și puterea activă consumată de receptor. b) Să se determine valoarea capacității pentru care puterea activă este maximă. c) La ce valoarea a frecvenței, curentul dintr-un circuit este decalat cu $\frac{\pi}{4}$ față de tensiunea de alimentare.

Discuție.

Schüszler Alfred, profesor Lugoj

4818. Se împart laturile BC, CA, AB ale triunghiului ABC în același raport prin punctele M, N, P (situate între vîrfuri). Notăm cu A', B', C', intersecțiile cevienelor $AM = l_a$, $BN = l_b$, $CP = l_c$ cu cercul circumscris triunghiului și cu α, β, γ unghiurile ascuțite făcute de dreptele lui Simson ale punctelor A', B', C' în raport cu triunghiul ABC respectiv cu laturile BC, AC, AB. Să se demonstreze relația :

$$l_a \cos \alpha + l_b \cos \beta + l_c \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2R}$$

Tomescu I. Ion, student București

4819. Un tractor rutier UTOS-2 circulă pe un drum uscat de țară cu viteza 5-a.

Să se determine puterea în C.P. necesară învingerii rezistenței la rostogolire știind că greutatea tractorului este $G = 3400$ kg, coeficientul de frecare la rostogolire $\mu = 0{,}05$, iar viteza 5-a a tractorului este $v = 13$ km/h.

Sfichi Romulus

4820. Față de axele dreptunghiulare xoy se consideră punctele A și B, care se proiectează în A_1, B_1 pe axa ox și în A_2, B_2 pe axa oy. Fie C punctul comun dreptelor AA_1, BB_2. Dreapta A_1B_2 întîlnește dreptele OA și OB respectiv în M și N, dreapta CM taie axa ox în P, iar CN taie axa oy în Q. Să se demonstreze că dreptele AB, A_1B_2, A_2B_1 și PQ sînt concurente.

În ce caz cele patru drepte sînt paralele și ce interpretare geometrică rezultă ?

Gh. D. Simionescu

4821. O cădere de apă de 30 m înălțime are un debit de 2,5 m^3 pe secundă. Căderea acționează o turbină a cărui randament este de 4/5, iar această turbină mișcă un dinam cu randamentul egal cu 5/6. Curentul electric debitat de dinam este folosit într-o intreprindere la distanță de 10 km de hidrocentrală.

1. Tensiunea la bornele dinamului este de 10 000 V. Se cere să se calculeze : a) puterea disponibilă la bornele dinamului ; b) rezistența interioară a dinamului ; c) secțiunea firului de cupru necesar pentru a lega intreprinderea de hidrocentrală știind că numai 10% din puterea dispo-

nibilă a dinamului se pierde în fir prin efectul Joule-Lenz. d) masa cuprului necesar pentru construirea firului.

2. Care ar fi masa de cupru necesară pentru aceleași condiții ale problemei, dacă tensiunea la bornele dinamului ar fi numai de 2500 V? Se va considera: 1 kg echivalent cu 10 jouli; rezistivitatea cuprului $= 0{,}0272 \frac{\Omega\ mm^2}{m}$ și masa specifică a cuprului 8,9 g/cm³.

Maria Codreanu, profesoră, București

4822. Se consideră punctele A, B, C pe un cerc și punctele D pe AB și E pe CD astfel că $AD = m.\ DB$ și $DE = n.\ EC$, unde m și n sînt numere constante. Dacă A și C sînt fixe, iar B mobil să se afle locul punctelor D și E.

Tudor Zamfirescu, cl. XI, ș.m. 22 București

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PROPUSE PENTRU ȘCOALA DE 7 ANI *

E: 1703. Să se afle două numere, știind că raportul lor este $\frac{6}{11}$, iar cel mai mic multiplu comun al lor este 1386.

I. Velescu, profesor, C. de Argeș

E: 1704. Să se arate că:

$$(a+b)(b+c)(a+2b+c)+(b+c)(c+a)(b+2c+a)+$$
$$+(c+a)(a+b)(c+2a+b)+2(a+b)(b+c)(c+a=$$
$$=(a+2b+c)(b+2c+a)(c+2a+b)$$

* * *

E: 1705. O brigadă de tractoriști ară o tarla în 8 zile. După ce ară jumătate din tarla, își măresc productivitatea arînd cu 6 ha mai mult pe zi și terminînd astfel de arat tarlaua cu o zi mai devreme.

Să se afle suprafața arată și cît s-a arat pe zi de fiecare dată.

L. Boștenaru, Alexandria

E: 1706. Să se demonstreze identitatea:

$$\frac{a(1-a)}{(a-b)(c-a)}+\frac{b(1-b)}{(a-b)(b-c)}+\frac{c(1-c)}{(b-c)(c-a)}=1$$

unde

$$b \neq a \neq c \neq 1$$

* * *

---

*) V (E: 1703, 1705, 1707, 1708); VI (E: 1709, 1712, 1713); VII (E: 1704, 1706, 1710, 1711).

E : 1707. Trei pionieri au depus, într-o săptămînă, la C.E.C. suma de 45 lei. Dacă suma celui de al doilea s-ar dubla, iar a celui de al treilea s-ar tripla, ei ar avea împreună 84 lei. În cazul că suma celui de al doilea se triplează, iar a celui de al treilea se dublează, suma crește cu încă 3 lei față de situația precedentă. Ce sumă a depus la C.E.C. fiecare pionier ?

Marica Ștefan, profesor Tr. Severin

E : 1708. O brigadă de tractoriști a arat un teren al unei G.A.C. În prima zi a arat 1/3 din teren. În a doua zi a arat 2/7 din ceea ce a rămas din prima zi. În a treia zi a arat 2/5 din ceea ce a rămas din a doua zi iar a patra zi a arată 4/5 din ceea ce a rămas din a treia zi și încă 3 ha terminînd de arat. Să se afle cîte hectare are terenul.

* * *

E : 1709. Un tractorist pleacă de la S.M.T. la o gospodărie agricolă colectivă. După 45 min se oprește într-un sat și află că mai era 1 km pînă să parcurgă 1/3 din întreaga distanță. Mărește după aceea viteza tractorului cu 6 km/oră și ajunge la destinație după $1\frac{1}{4}$ ore. La ce depărtare se află gospodăria agricolă colectivă față de S.M.T. ?

D. Mîrzan, profesor R. Vîlcea

E : 1710. Să se calculeze cel mai simplu posibil, expresia :

$$E = a^3 + b^3 + 3(a^3b + ab^3) + 6(a^3b^2 + a^2b^3)$$

știind că $a + b = 1$.

(672, Matematikai Lapok, Budapesta)

E : 1711. Să se simplifice fracția :

$$\frac{x^8 + x^7 - x^6 - x^4 + x^3 - 1}{x^6 - x^4 + x - 1}$$

* * *

E : 1712. Care sînt fracțiile cu numitorul și numărătorul de cîte două cifre ale căror valori să fie cuprinse între $\frac{1}{8}$ și $\frac{1}{9}$?

C. I. T.

E : 1713. Să se construiască un triunghiu ABC cunoscînd vîrful A, mijlocul laturii AC și piciorul bisectoarei dusă din vîrful C.

* * *

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

Soluții primite pînă la 1 martie 1961

(urmare din numărul precedent)

SIGHIȘOARA (Brașov) **Ș.m. 1** cl. VIII Floca Margareta (4398, 99, E: 1571—73, 76, 78, 81, 87, 88, 90, 91, 93), Kohn Naftali (E: 1583, 84, 87—89, 91,93, 97, 600, 02, 10, 11, 15, 31), Răducan Dorina (E: 1574, 76, 77, 79, 81, 83, 84, 89, 90, 95, 97, 98, 600, 07, 08, 10). Cl. IX. Vonica Octavian (4398, 99, 414, 42, 54, 56, 67, 70, 86). Cl. X. Grozea Maria (4421, 23, 31, 32, 41, 43, 54, 67, 98), Gwosdinsky Margareta (4398, 99, 407, 41—43, 56, 67, 70, 94). Cl. XI. **Ciulei Mircea** (4377, 400, 18, 23, 27, 41, 43, 48, 51, 60, 63, 67—73, 75, 80—84, 86, 88, 90, 95, 99, 500, 04—07, 09, 27, 31, 38, 43), **Neagu Gheorghe** (4376, 80—84, 86, 90, 91, 93, 94, 96—402, 08, 10, 12, 16, 19—22, 25, 27, 31, 32, 34, 37, 41, 43, 46, 48, 49, 52, 53, 67—70, 72, 73, 80—84, 86, 88, 90, 95, 97, P), Pintea Paula (4382, 83, 94, 419, 20, 33, 44, 52, 63, 83), Popescu Gabriel (4380—83, 94, 96, 416, 19, 20, 80, 81).

Ș. m. 2. Cl. VIII. Klusch Doris (E: 1572—74, 76, 78—81, 86—88, 90), Jacodi Mihaela (E: 1571, 72, 76, 78—81, 85. 88, 90, 93, 98). Cl. X. Cornea Marius (4380—82, 90, 411, 16, 20, 23, 47, 52), **Vlăduțiu** Mircea (4348, 51, 53, 54, 59, 65, 75, 80—82, 84—86, 90, 91, 94, 96, 410, 11, 16, 17, 19, 20, 23, 27, 47, 49, 52, 54, 64, 72, 75, 80—84, 89, 96, 98). Cl. XI. Kessler Peter (4377, 80—84, 88, 90, 94, 96).

SIMERIA (Hunedoara) Cl. VIII. Frățilă Vasile (E: 1574, 75, 77, 78, 81, 87, 89, 91, 604, 05, 07, 10, 14—16).

SINAIA (Ploiești). **Ș. m.** George Enescu. Cl. X. **Paxino C. Gh.** (4380—84, 89—92, 96 98, 99, 405, 07, 09, 12, 15, 16, 18—22, 29, 31—35, 39—44, 47, 52, 54, 67, 72, 75, 81—84, 86, 87), Puiu Mihai (4380—83, 88, 90, 91, 96, 400, 05, 12, 15, 16, 19, 20, 27, 33, 35, 40, 44, 47, 52, 53, 72, 75, 81, 83, 84), **Tănase Virgil** (4380—84, 90, 91, 96, 98, 400, 09, 11, 12, 15, 16, 20, 22, 31, 33, 34, 38, 40, 42—44, 47, 52—54, 61, 67, 72, 76, 80—84, 87, 96, 97, 504, 09, 27, 39, P).

SLATINA (Argeș). **S. m.** Tudor Vladimirescu. Cl. X. Badea Const. (4380—83, 96, 416, 19, 20, 44, 48, 52, 76, 81), Buicescu A. Mircia (4380—83, 420, 81), Ionescu Horia (4381—83, 96, 97, 408, 15, 16, 20, 23, 44, 48, 52), Trandafir Ion (4381—83, 91, 97, 413, 15, 20, 44, 48, 81).

STREHAIA (Oltenia). **Ș. m.** cl. VIII. Bîlteanu Georgeta (E: 1583, 87, 89, 91, 97, 98, 600, 04, 05, 08, 10, 11), Bora Alex. (idem), Bran Mircea (idem), Ciaplea C. Floarea (idem), Colțan Emil (idem), Epuran C. Ion (E: 1583, 84, 86, 87, 89—95, 97, 98), Gheorghiță Ionel (E: 1583, 87, 89, 91, 97, 98, 600, 04, 05, 08, 10, 11), Lupșoiu C. (idem), Mihăilescu Gabriela (idem), Mîndreanu Eugne (idem), Mîndreanu C. Iulia (idem), Racocea Cezar (idem), Tutunaru V. Gh. (idem), Vînătoru Adrian (idem).

SUCEAVA. **Ș. m. 1** Ștefan-cel-Mare. Cl. VIII. Murărescu Mihai (E: 1573, 74, 76—79, 84, 87, 600, 04, 10). Cl, XI. Sutac Ioan (4377, 80—83, 91, 96, 417, 19, 52).

TECUCI (Galați). **Ș. m. 2.** Cl. VII. Moscovici Carol (E: 1571, 73, 74, 77, 79, 81, 83, 86, 87, 89, 91, 96). Șotropa Codruța (E: 1583, 84, 89, 90, 94, 97, 99, 600, 03). Cl. IX. Halpern Elias (4390, 98, 407, 42, 53, 67, 75, 80, 81, 84, 96). Cl. X. Adrian Lidia (4383, 80, 409, 34, 47, 61, 83, 84, 86, 97), Bubulac Marioara (4380, 83, 84, 80, 409, 47, 56, 72, 80, 82, 83), Ene Lucia (4380, 82, 85, 90, 96, 412, 29, 44, 52, 72, 81—83, 96), Petrică Gheorghe (4380—83, 99, 409, 16, 18, 34, 52, 43), Theodor Teodor (4333, 35, 90, 447, 72, 80—83). Cl. XI. Moscovici Henry (4419, 20, 23, 31, 53, 64, 75, 80, 83, 84,

TIMIȘOARA (Banat). **Student** Perianu Dan (fac. mec.) (4348, 49, 51, 54, 55, 59, 62, 67, 70, 74—76, 79, 82, 83, 96, 98, 99, 401, o3, 11, 16).

Ș. m. 1. Cl. X. Hatvany Adalbert (4380—82, 84, 90, 91, 96, 419, 20).

Ș. m. 2. Nikolaus Lenau. Cl. VI. Teleagă Petru (E: 1574, 79, 80, 88, 97, 601, 04, 06—08, 10, 13, 14). Cl. VIII. Popescu Viorela (E: 1573, 74, 78, 80, 81, 86, 89, 90, 92, 94, 96, 97, 605), Szenda Suzana (4475, E: 1583, 84, 87, 89—92, 96, 97, 99—601, 04, 05, 07, 10, 11, 13, 16). Cl. XI. Berg Fritz (4396, 419, 47, 52, 60, 61, 63, 84, 97), Blum Herta (4396, 419, 47, 52, 60, 61, 63, 73, 81, 84, 97), Dengl Gunther (4418—20, 23, 44, 47, 52, 60, 72, 81, 83, 84).

Ș. m. 3. Cl. VI. Rappelfeld Ruti (E: 1572, 73, 83—85, 88, 90, 92, 95). Cl. VII. Babeu Constanța (E: 1571, 73, 74, 77—79, 81, 97), Cl. X. Ecstein Gheorghe (4376—85, 89—91, 93, 95—400, 04—23, 26, 28, 33, 37, 55, 71, 73—75, 80—84).

Ș. m. 5. Cl. VIII. Brezoi Carmen (E: 1558—61, 67, 69, 71, 73, 74, 77, 79, 81). Lungociu Mircea (E: 4390, 405, 16, 75, 80, E: 1572, 78, 80, 82, 83, 93), Predescu Voichița (E: 1558—61, 67, 69, 71, 73, 74, 77, 79, 81, 84, 89). Cl. IX. **Lustig Gheorghe** (4376—86, 90, 91, 93—400, 04—08, 10—21, 23—27, 29, 31—36, 40, 46, 47, 52—54, 60, 63, 67, 72—75, 80—82, 84, 89, 96, 98).

Ş. m. 7. Cl. VIII. Bogoevici Doru (4390, E: 1571—75, 77—79, 81, 87, 89, 91, 96). Cl. X. Băleanu Corneliu (4381, 82, 91, 93, 97, 400, 05, 08, 12, 14, 16, 17, 20, 33, 47, 53). Cl. XI. Galeriu Dorin (4419, 20, 52, 80—84), Suciu Cornel (4377, 80—83, 90, 91, 96, 97, 405, 23, 44, 52).

Şc. profesională construcţii. Absolvent (?) (E: 1617, 20, 21, 23, 27, 28, 31).

TITU (Bucureşti). Ş. m. cl. IX. Avrămescu Ioan (4381, 82, 90, 91, 420, 52, 53, 81).

TÎRGOVIŞTE (Ploieşti). Ş. m. Grigore Alexandrescu. Cl. XI. Cijan Doru (4380—83, 91, 96, 419, 20, 53, 83).

Ş. m. 3. Nicolae Bălcescu. Cl. X. Anghelescu I. Dumitru (4380—84, 86, 89—91, 98 99, 407, 09, 16, 22, 31, 34, 43, 47, 54, 84, 96, P), Creţu Gh. Dumitru (4380—84, 89—91, 94, 98, 99, 407, 09, 12, 15, 16, 20—22, 31, 32, 34, 39, 41—45, 47, 52, 54, 56, 61, 67, 70, 72, 75, 78, 80, 81, 83, 84, 86, 87, 94—97), Frîncu M. Zaharia (4415, 19, 20, 47, 72—75, 80, 81, 83, 84, 96, 507, 09, 10, 17, 30, 43). Cl. XI. Dumitrică V. Aurel (4419—22, 25, 27, 29, 31, 32, 34, 37, 38, 41—44, 47, 52—57, 60, 61, 63, 67—70, 72—76, 80—84, 86—88, 90, 91, 94—98).

Şc. de 7 ani nr. 2. Cl. V. Donoiu Magda (E: 1574, 79, 83, 84, 95, 97, 600, 04, 10, 14), Tomescu Cristian (E: 1574, 79, 83, 84, 97, 600, 04, 10, 14). Cl. VII. Baicu Georgeta (E: 1600, 01, 04, 07, 08, 10, 12, 13, 15, 16), Voiculescu Elena (E: 1600, 01, 04, 07, 08, 10, 12, 13, 15, 16).

Ş. m. serală Uzina metalurgică .Cl. VIII. Pavel I. Marin (4381, E: 1578, 79, 82—84, 87, 89—91, 94—96, 98).

TÎRNĂVENI (Mureş). Ş. m. Alexandru Sahia. Cl. X. Costea I. Viorel (4380, 92, 423, 48, 54, 75, 81, 84, 98, 99).

TÎRGU CĂRBUNEŞTI (Oltenia). Absolvent Guşiţă Marin (4382, 86, 96, 410, 11, 19, 20, 38, 44, 47, 52, 59, 61). Cl. VI. Guşiţă Marcel (4439, 41, 45, 54, 57, 67, 76, 86—88, 91, 94, 95).

TÎRGU JIU (Oltenia). Ş. m. 1 Ecaterina Teodoroiu. Cl. VI. Bănică Marian (E: 1571, 73, 74, 79, 87, 95, 97, 600, 04, 10).

Ş. m. 2. Tudor Vladimirescu Cl. X. Mihuţ Antonie (4311, 37, 42, 69, 75, 81, 82, 408, 16, 20, 44, 52, 68, 81, 83), Popescu Victor (4312, 69, 75, 80, 82, 411).

Ş. m. 3. Cl. VIII. Ceapă Const. (4380, 82, 98, E: 1559—61, 64, 67, 69, 70, 72, 74, 78, 79, 81—85, 88—602, 04, 05, 08, 10, 11, 16).

TÎRGUL LĂPUŞ (Maramureş). Ş. m. Liviu Rebreanu. Cl. VII. Bellu Mircea (E: 1571, 74, 75, 79, 81, 89, 91, 95, 600, 10, 11, 13), Bercovici Iosif (E: 1571, 74—79, 81, 600, 05, 13), Sălniceanu Sever (E: 1571, 74—79, 81, 600, 05, 07, 08, 13). Cl. IX. Damian Nicolae (4398, 99, 405, 07, 34, 41, 43, 67, 75, 81).

TÎRGU OCNA (Bacău). Absolvent Mihai M. M. (4376—85, 88, 90, 94—96, 400, 12, 16, 19, 20, 23—29, 53, 61—63, 65, 71, 75, 79, 81—83, 90, 96, 97, P).

TÎRGU MUREŞ. Ş. m. Papiu Ilarian. Cl. VII. Gersch Egon (E: 1560, 61, 64, 70, 73, 78, 80, 90, 95, 97), Stratan Valentin (E: 1571, 73—75, 77—80, 84, 87, 88, 90, 91, 95).

TÎRGU NEAMŢ (Bacău). Ş. m. Ştefan cel Mare. Cl. VIII. Gross Marian (E: 1599, 600, 04, 07—10, 15, 16), Rosenzweig Frisy (E: 1599, 600, 04, 07—11, 15—17), Simion Vasile (E: 1599, 600, 03, 04, 07, 08, 10, 11, 13—16), Zelicovici Adriana (E: 1599, 600, 04, 07—11, 15—17). Cl. IX. Gherşin Burdu (4381, 82, 91, 420, 52, 53, 75, 81, 83, 96), Scharf Wolf (4381, 82, 91, 420, 52, 53, 75, 81, 83, 96).

TULCEA (Dobrogea). Cl. VII. Slanov Natalia (E: 1571, 75, 77—81).

TURDA (Cluj). Ş. m. Mihai Viteazu. Cl. VIII. Botău Maria (4381, 82, 90, 452, 53, 75, R: 1571, 81, 89, 91, 93, 96). Cl. IX. Apostol Adriana (4381, 85, 91, 407, 20, 32, 41, 43, 44, 54, 56), Filip N. Liana (4381, 91, 99, 407, 20, 32, 41, 43, 56, 83), Purcaru Liana (4391, 407, 20, 32, 34, 43, 44, 53, 56, 67, 81). Cl. XI. Pop Valer (4380—83, 90, 98, 99, 409, 15, 16, 18—25, 29, 31, 32, 34, 35, 38, 40, 43, 46, 47, 51—54, 56, 61, 63, 64, 67, 69, 70, 75, 78, 79, 81—84, 95—97).

TURNU MĂGURELE (Bucureşti). Cl. VI. Bălan Rodica (E: 1572, 80—84, 86, 87, 90, 92, 94, 95, 97, 98, 600, 01, 04, 06, 07, 10), Frăţilescu Oana (E: 1582—84, 94, 97, 98, 600, 04, 08, 10). Cl. X. Peţa Tudor (4389, 98, 99, 407, 22, 31, 34, 43, 56, 70, 94).

TURNU SEVERIN (Oltenia). Absolvent Roată Radu (4380—84, 90, 96, 419, 20, 22, 31, 52, 54, 72, 81, 83). Cl. VI. Roată Delia (E: 1577, 81, 88, 90, 92, 96, 97, 600, 04, 09, 10). Cl. VII. Ianăş Emanoil (E: 1590, 91, 604, 10, 13, 17, 20, 22, 30, 31), Ioan Mircea (E: 1584, 85, 87, 88, 90, 92, 93, 95, 97, 600, 02), Popescu Gh. (E: 1573, 76, 79, 84, 94, 600, 01, 04, 13, 14), Somcekescu Aurora (E: 1574, 78, 79, 84, 87, 95, 97, 600, 04, 07, 10), Vicea I. Florina (E: 1574, 78, 79, 84, 88, 97, 600, 10, 15, 16), Vulpescu Dan (E: 1588—93, 96, 600, 01, 04, 05, 07—09, 11, 13, 14, 16, 17, 20). Cl. VIII. Vicea N. Anca (E: 1571, 73, 74, 78, 79, 84, 88, 89, 91, 99—601), Vicea N. Mihaela (E: 1578, 79, 88, 91, 93, 96, 98, 99, 600, 10, 16). Cl. X. Nocioiu Doru (4381—83, 91, 413, 16, 20, 81, 84).

TUZLA (Dobrogea). Cl. V. Perjan Ilinca (E: 1579, 84, 94, 97, 600, 10). Cl. VII. Popa Petre (E: 1542, 69, 73, 78, 91, 92,

VALENII DE MUNTE (Ploiești). Ş. m. Cl. VIII. Bărbulescu Janeta (E: 1573, 74, 78, 79, 84, 600, 07, 08, 10, 15), Călinoiu D. (E: 1574, 76, 77, 79, 84, 91, 96, 97, 600, 03, 10, 11), Cernat I. Maria (E: 1574, 79, 84, 87, 95, 600, 04, 10, 13, 14), Cojocaru I. Elena (E: 1571, 73, 74, 78, 87, 89, 90, 92, 607), Cotună C. I. (E: 1578, 80, 84, 87, 89, 91, 93 98, 600, 09, 10), Enescu I. Paul (4390, E: 1571, 74, 76—80, 84, 92), Ionescu Pavel (4398, 99, 405, 75, E: 1571, 77, 79, 91, 95, 97, 600, 04, 10, 13, 16), Mănescu St. Daniela (E: 1607, 08, 10, 13, 16, 57, 71, 73, 78, 89, 96), Mistorică Gh. Gh. (E: 1574, 76, 78, 79, 84, 97, 607, 09, 10, 13, 14, 15), Năstase Filofteia (E: 1573, 74, 78, 79, 84, 600, 08—10, 13), Podaşcă D. Paul (E: 1571, 74, 78, 79, 81, 84, 87, 91, 600, 10), Popa Filofteia (E: 1584, 90, 92, 95, 97, 600, 04, 08, 10, 13), Şandru C. (E: 1574, 79, 83, 84, 90, 91, 96, 97, 600, 04, 08, 10, 15), Tudoroiu D. (E: 1574, 77, 79, 84, 91, 96, 97, 600, 10, 11, 16), Zaharia C. I. (4390, 490, E: 1573, 78, 79, 80, 81, 83—85, 87, 89—91, 95—97, 600, 04, 08—10, 16).

VASLUI (Iaşi). Ş. m. 1 Mihail Kogălniceanu. Cl. VIII. Corcoţoiu Ioan (E: 1585, 87, 89, 90, 93, 94, 97, 99—602, 04, 05, 07, 10, 16). Cl. X. Cuştişanu Aron (4380—83, 416, 20, 80).

ZALĂU (Cluj). Cl. VII. Elec T. Maria (E: 1571, 73, 75, 78, 81—84, 87, 89—95), Oros Ioana (E: 1599, 600, 04, 05, 07, 08, 10, 15, 17, 20—22, 28). Cl. IX. Gajzago Maria (4434, 43, 44, 47, 52, 67), Cl. XI. Gajzago Katalin (4420, 47, 55, 61, 72, 80, 81, 83, 84, 90, 96, 97).

*

— Elevii claselor IX—XI nu vor trimite soluţii la problemele propuse pentru şcoala de 7 ani. Problemele rezolvate trebuie să fie din ultimele trei numere apărute ale G.M.F.-B şi vor fi trimise numai odată în cursul unei luni. Problemele de matematică vor fi expediată într-un singur plic şi vor fi însoţite de un borderou cu numerele problemelor, scrise în ordine crescîndă. Idem pentru problemele de fizică. Pe plic se va scrie localitatea, şcoala şi clasa pe care o urmează rezolvitorul. La rubrica rezolvitorilor nu se va anunţa decît cel puţin 10 probleme bine rezolvate. Problemele propuse să fie însoţite de una sau mai multe soluţii.

*

Pînă la 1 februarie 1961 s-au mai evidenţiat următorii rezolvitori de probleme de fizică, după cum urmează:

1. Pascu Adrian (cl. X, ş. m. 1 Bucureşti), **2. Răzvan Vladimir** (cl. X, ş. m. 1 Bucureşti), **3. Breazu Ioana** (cl. XI, Roşiorii de Vede), **4. Cancer Şerban** (cl. IX, ş. m. 11 Bucureşti), **5. Şutac Sidonia** (cl. X, Sighişoara), **6. Blidaru A. Ion** (cl. IX, Drăgăşani), **7. Kindich Richard** (cl. XI, Oraviţa), **8. Piscupescu Gabriel** (student I.P.G.G. Bucureşti), **9. Gruian Ştefan** (absolvent, Alba), **10. Bluoss Hans Ioachim** (cl. X, ş. m. 7 Bucureşti), **11, Frîncu M. Zaharia** (cl. X, ş. m. 1 Tîrgovişte), **12. That Frieder** (absolvent Sibiu).

*

De la 1 septembrie 1960 pînă la 1 februarie 1961 s-au primit soluţii bune la problemele de fizică, după cum urmează:

ABRUD (Cluj). Cl. IX. Muck Ana (4368, 73, 86, 98, 319, 27). Cl. X. Bordei Mihai (4268, 73, 86, 98, 319, 27).

AFUMAŢI (Bucureşti). Cl. XI. Camburu Cristache (4389, 92, 98, 99, 422, 31, 32, 34, 42, 43, 54, 56, 70, 88).

AIUD (Cluj). Cl. .X Leţia Ioan (4389, 98, 99, 409, 22).

ALBA (Hunedoara). **Absolvent Gruian Ştefan** (4367, 92, 98, 99, 401, 03, 09, 31, 32, 34, 39, 41, 42, 54, 56, 67, 76, 86, 87, 95).

ANINA (Banat). Cl. XI. Croitoru Cornel (4422, 31, 34, 42, 43, 56, 69, 78, 86, 88, 95).

ARAD (Banat). Cl. IX. Iacobovici Neomi (4239, 68, 86). Cl. X. Crivăţ Dan (4367, 422, 31, 37, 43).

BABADAG (Dobrogea). Cl. X. Ignat Ion (4398, 99, 421, 22, 31, 34, 41—43, 67).

BACĂU. Cl. XI. Flachs Iacob (4189, 212, 38, 39, 40, 98).

BAIA DE ARIEŞ (Cluj). Cl. IX. Ciura Alexandru (4421, 31, 34, 41, 43). Cl. X. Totolici Gabriel (4422, 31—33, 56, 86—88, 95, 98).

BEIUŞ (Crişana). Ş. m. 1. Cl. X. Ovanez Mihai (4389, 98, 99, 407, 22, 31, 32, 34, 42, 43, 56).

BIRLAD (Iaşi). Cl. X. Bernstein Monica (4422, 31, 34, 43, 70), Vicol Dorina (4399, 422, 31, 34, 43, 70).

BOTOŞANI (Suceava). Cl. X. Pavelescu Valeria (4179, 240, 68, 72, 78, 87), Segall Arnold (4349, 52, 98, 99, 421, 22, 31, 34, 42, 43). Cl. XI. Bauer Gh. (4398, 99, 422, 31, 34, 41, 43, 52, 54, 57, 69, 88, 95).

BRĂILA (Galaţi). Cl. X. Löhr Friederich (4333, 67, 89, 98, 99), Pricop Maria (4367, 89, 98, 99), Turcu Ioan (4101, 02, 56, 70, 79, 85—87, 89), Vlahu Margareta (4367, 89, 98, 99).

BRAŞOV. Şc. tehn. maiştri. Cl. X. Bunea Ionel (4349, 67, 89, 98, 99, 407, 22, 31, 32, 34, 43, 56), Croitoru Gh. (4389, 98, 99, 407, 22, 31, 32, 34, 43, 56), Gavrilă Gh. (4389, 98, 99, 407, 22, 31, 32, 34, 43, 56), Mileşan V. (4349, 89, 98, 99, 407, 22, 31, 34, 43), Olaru Gh. (4389, 98, 99, 407, 22, 31, 32, 34, 43, 47, 56, 67). Cl.

XI. Bălea Nicolae (4398, 99, 422, 31, 32, 34, 42, 43, 70, 95).

BUCUREȘTI. **Studenți: Cornblum Eugen** (fac. energetică) (4277, 325, 36, 67, 98, 99, 401), Panait Nicolae (Inst. Polit.) (4268, 77, 300, 50, 52, 56, 67), **Piscupescu Gabriel** (IPGG) (4268, 70, 73, 77, 87, 98, 300, 19, 25, 33, 36, 52, 58, 67, 98, 401, 03, 21, 22, 31, 34, 41, 42), Tomoioagă M. Dorin (Inst. constr.) (4319, 25, 33, 36, 67), Țuțuianu Ovidiu (4398, 99, 401—03, 07, 09, 21, 22, 31, 34, 37, 43, 67, 95).

Tehnician I.O.R. Drăgan St. Marin (4398, 99, 401, 07, 21, 22, 31, 32, 34, 41, 43, 56, 70).

Ș. m. 1. Cl. X. Grunblatt Mihai (4267, 73, 86, 87, 98), Gugu Dan (4063, 68, 88, 101), **Pascu Adrian** (4268, 73, 79, 85, 87, 98, 99, 300, 18, 19, 25, 27, 33, 34, 36, 49, 52, 67, 89, 92, 98, 99, 409, 21, 22, 31, 34, 37, 39, 41—43, 56, 67, 69, 70, 86, 87, 94, 95), **Răzvan Vladimir** (4156, 64, 85, 87, 212, 32, 38, 39, 68, 73, 79, 86, 87, 98, 300, 18, 19, 25, 28, 33, 52, 56, 58, 67, 89, 92, 98, 99, 421, 32, 34). Cl. XI. Butnaru Chirea (4317—19, 25—28, 33, 49, 52, 56, 58, 67).

Ș. m. 7. Cl. X. Stan Ștefan (4268, 73, 86, 98, 319, 27, 34, 49, 52, 57), Tatu Gabriel (4268, 73, 79, 86, 319). Cl. XI. **Bluoss Hans Ioachim** (4156, 61, 67, 212, 38—40, 268, 71, 73, 77, 79, 85—87, 96, 98, 318, 25, 33).

Ș. m. 8. Cl. VIII. Moraru Mariana (E: 1566, 85, 88, 97, 398, 99).

Ș. m. 10. Cl. X. Teodorescu Catrinel (4238—40, 68, 73, 86, 87, 98, 318, 33).

Ș. m. 11. Cl. VIII. Gropper Jean (4102, 238, 68, 86, 319, 67, 98, 99, 467, 70, 86, 89, E: 1484, 92, 94, 516), Hristescu Ruxandra (4102, 398, 99, 421, 41, 67, 86), Persache Octavian (4398, E: 1585, 88, 602). Cl. IX. Indescifrabil (4398, 431, 34, 56), Cancer Șerban (4268, 86, 98, 319, 67, 89, 98, 99, 407, 34, 36, 42, 43, 54, 56, 86, E: 1484, 92, 94, 516), Gianni Emanuel (4024, 39, 63, 319, 421). Cl. X. Ghița Vl. Viorel (4268, 87, 98, 325, 33).

Ș. m. 15. Cl. VIII. Paidiu V. Ion (4212, 39, 68, 85, 86, 98).

Ș. m. 16. Cl. XI. Deleanu Denise (4268, 73, 87, 98, 318, 19, 25, 33, 35, 49, 52, 58).

Ș. m. 17. Cl. X. Vass Gh. (4376, 98, 99, 402, 21, 31, 34, 67, 77, 86).

Ș. m. 18. Cl. X. Buimovici Alex. (4389, 98, 99, 407, 09, 21, 22, 31, 34, 41, 43).

Ș. m. 19. Cl. IX. Feran Monica (4268, 86, 98, E: 1565, 66). Cl. XI. Olteanu Victor (4214, 38—40, 68, 70, 73, 86, 87, 98).

Ș. m. 20. Cl. XI. Făgărășanu I. Teodor (4212, 32, 38—40, 68, 73, 86, 98, 318, 19, 25, 33), Ilie Mihai (4240, 68, 70, 73, 77, 87, 98, 318, 33, 56, 67, 98, 99, 409, 21, 22, 31, 34, 37, 42, 43), Ivănescu Eug. Cristian (4268, 70, 77, 87, 98, 318, 25, 33, 56, 67, 98, 99, 422, 31, 34, 37).

Ș. m. 22. Cl. XI. Mihăilescu I. Nicolae (4421, 22, 34, 37, 41—43, 54, 57, 58, 67, 69, 70, 78, 86, 95).

Ș. m. 23. Cl. XI. Anghel Marius (4421, 22, 31, 32, 34, 43).

Ș. m. 32. Cl. X. Dumbravă Mircea (4352, 67, 89, 98, 99, 409, 21, 22, 31, 34, 43).

BUZĂU (Ploiești). **Ș. m. 1.** Cl. IX. Marcoci I. Doina (4389, 98, 441, 86). Cl. X. Bocioacă Radu (4398, 99, 421, 22, 31, 34, 41, 95), Udrescu Florin (4063, 100, 02, 407, 09, 31, 34, 87).

BUZIAȘ (Banat). Cl. IX. Megerle Ecaterina (4398, 99, 407, 31, 41). Cl. X. Doboșan Ioan (4398, 99, 407, 31).

CĂLĂRAȘI (București). Cl. X. Costea George (4398, 99, 407, 09, 31, 32, 34, 43, 56, 67), Monciu Alexandru (4389, 98, 99, 407, 21, 22, 31, 32, 34, 39, 41, 43, 45, 46).

CARANSEBEȘ (Banat). **Ș. m. 1.** Cl. VII Năvligu I. V. (E: 1585, 88, 602). Cl. X. Crețu Adrian (4319, 33, 98, 99), Divk Margareta (4367, 98, 99, 431, 34).

CIACOVA (Banat). Cl. X. Zahan Marcel (4392, 98, 99, 407, 21, 22, 31, 34, 42, 43, 67, 70, 87, 94).

CÎMPIA TURZII (Cluj). Cl. X. Nemeș Mihai (4389, 98, 99, 409, 32, 67, 94).

CÎMPINA (Ploiești). **Ș. m. 2** „Ilie Pintilie". Cl. IX. Gîrboveanu Adriana (4398, 99, 407, 56, 86). Cl. X. Sedai Ștefan (4349, 52, 67, 98, 99).

CÎMPULUNG MOLDOVENESC (Suceava). **Ș. m.** Cl. X. Cotlarciuc N. (4349, 67), Donca Maria (4349, 67), Frățeanu Const. (4349, 67), Hmelevski Gertrud (4333, 49, 67, 98, 99, 407, 09), Manu Oxana (4349, 67), Mihaiuc Oltea (4349, 67), Rosner Igo (4333, 49, 67), Procopiuc G. (4349, 67, 98, 99, 407, 09).

Liceul Militar. Cl. XI. Cotlarciuc N. (4333), Strul Alex. (4314, 18, 19, 25, 33, 34, 49, 52, 67, 98, 409).

CÎMPULUNG MUSCEL (Argeș). Cl. X. Scărlătescu N. Doru (4186, 89, 212, 20, 32, 37—40, 73, 98).

CLUJ. **Ș. m.** G. Bariției. Cl. X. Tomuța Liviu (4268, 73, 87, 96—98). Cl. XI. Iosubescu Dan (4212, 32, 38, 68, 73, 77, 79, 86, 87, 96, 98, 367, 98, 434, 37, 42, 67, 70, 95).

Ș. m. Emil Racoviță. Cl. XI. Benga Gh. (4268, 73, 87, 325, 33, 52, 67).

CONSTANȚA (Dobrogea). **Ș. m. 1.** Cl. IX. Bădică I. Dan (4232, 39, 97, 318, 19, 25, 27, 28, 33), Baldoveni Mirela (4305, 27, 39, 67), Brînzănescu Vasile (4268, 86, 98, 319, 67, 98, 99, 421, 34, 41—43, 67, 86), Frunză Ștefan (4268, 86, 319, 67).

CRAIOVA (Oltenia). Ş. m. 3. Cl. XI. Pavel Radu (4349, 52, 56, 58, 67, 98, 99, 421, 22, 31).

DEJ (Cluj). Cl. XI. Szabo Carol (4398, 99, 431, 34, 42, 95).

DEVA (Hunedoara). Cl. XI. Clipii Tudor (4398, 99, 422, 34), Crişan Mircea (4398, 99, 407, 09, 21, 22, 31, 34, 42, 67, 86).

DRĂGĂŞANI (Argeş). Cl. X. Oltu Orest (4268, 73, 77, 79, 87, 96, 98). Cl. XI. **Blidaru Ion** (4268, 73, 79, 86, 87, 98, 327, 67, 98, 99, 422, 31, 34, 42, 43, 57, 69, 70, 88, 91, 95), Iliescu D. Victor (4398, 99, 407, 42, 43, 58, 67, 78, 86, 94).

FĂLTICENI (Suceava). Ş. m. 2. Cl. IX. Rabinovici Silviu (4268, 86, 98, 319).

FOCŞANI (Galaţi). Ş. m. Unirea. Cl. X. Pantelimon Anton (4268, 73, 79, 85—87, 96, 98, 300, 33, 49, 67, 98, 99, 422, 31, 34, 43). Ş. m. 2. Cl. X. Segal Zeilic (4319, 25, 27, 33, 52, 67, 98, 99, 422, 31, 34, 43).

GALAŢI. Ş. m. 1. Indescifrabil. (4349, 52, 67, 98, 99, 421, 22, 31, 34, 41, 43). Cl. X. Ender Lucian (4268, 73, 86, 98).

IAŞI. Ş. m. 6. Cl. VII. Stavilă Rodica (E: 1576, 85, 88, 601).

LIPOVA (Banat). Cl. XI. Mihalcea Ioan (4318, 25, 49, 98, 99, 421. 31, 34, 37, 41).

LONEA (Hunedoara). Cl. X. Fărtat C. Radu (4398, 99, 407, 09, 21, 22, 31, 32, 34, 41, 43, 54).

LUGOJ (Banat). Ş. m. 1. Cl. XI. Sfetcu Ioan (4349, 50, 52, 56, 67, 98, 99, 409, 31, 32, 34).

MOINEŞTI (Bacău). Cl. X. Aniţoaie Emil (4398, 434, 43, 70, 86).

MORENI (Ploieşti). Cl. X. Marinescu Alex. (4389, 98, 99, 407, 09, 21, 22, 31, 32, 34, 35, 41, 43, 67, 94). Cl. XI. Paraschivoiu Ioan (4238—40, 68, 73, 87, 98, 300.

ORADEA (Crişana). Ş. m. 1. Cl. X. Faur Ioan (4399, 422, 34, 43). Cl. XI. Hulea Ioan (4398, 99, 421, 22, 31, 34, 69), Pascu Nicolae (4268, 73, 86, 87, 98, 333).

Ş. m. 4. Cl. XI. Farcas Irina (4279. 99, 333, 56, 67, 98, 99, 401, 03, 21, 22, 31, 34, 37, 41—43, 57, 96).

ORAŞ „Dr. PETRU GROZA" (Crişana). Cl. XI. Nica Tănase (4398, 99, 434, 43).

ORAVIŢA (Banat). Cl. XI. Kindich Richard (4167, 79, 89, 212, 32, 38—40, 68, 73, 87, 98, 349, 52, 58, 67, 98, 401, 07, 09, 22, 31, 34, 37, 43, 56), Sasu Ramiro (4389, 98, 99, 407, 21, 22, 31, 32, 34, 43, 67, 69, 88).

PAŞCANI (Iaşi). Cl. X. Bucan V. Liviu Alex. (4185, 87, 212, 68, 98).

PETROŞANI (Hunedoara). Ş. m. 1. Cl. VIII. Crihană Lascăr (4441, 67, 94, E: 1576, 85, 88, 602).

PIATRA NEAMŢ (Bacău). Ş. m. 2. Cl. IX. Teodorescu Voltaire (4398, 99, 431, 56, 58).

PITEŞTI (Argeş). Ş. m. 1. Cl. X. Stanc i Ion (4421, 22, 31, 34, 43, 87).

Ş. m. 3. Cl. VIII. Ionescu Marcel (4398, 99, E: 1562, 65, 85, 88, 97).

PLOIEŞTI. Ş. m. 1. Cl. VIII. Andronescu Gabriel (E: 1562, 65, 76, 85). Cl. X. Emanoil Const. (4389, 98, 99, 421, 22, 31, 34, 41—43, 54, 67, 86, 87).

Ş. m. 2. Cl. X. Erbiceanu Mihai (4398, 407, 09, 21, 22, 31, 34, 41, 43, 67), Petrec Alex. (4389, 98, 99, 407, 09, 22, 31, 34, 42, 43, 54, 67, 86).

Ş. m. 3. Cl. VIII. Condrescu Mădălina (4212, 38, 39, 68, 73, 86, 98, 319, 33, 34, 49, 67, E: 1516, 62, 65), Stăvaru Cristina (4268, 73, 86, 98, 300, 19, 49, 67, 98, E: 1569). Cl. X. Hoinărescu Călin (4422, 31, 34, 43).

PUCIOASA (Ploieşti). Cl. X. Radu Gh. (4212, 38, 39, 68, 73, 85, 86, 87, 98, 319, 26, 28, 33, 34, 67, 99, 407, 09).

ROŞIORII DE VEDE (Bucureşti). Cl. X. Bursumac Marian (4232, 35, 37—40, 68, 77, 87, 318, 25, 33), Rădulescu Silvia (4232, 35, 38—40, 68, 73, 87, 318, 25, 33), Rosmanet Ştefan (4232, 37—40, 68, 73, 318, 25, 33). Cl. XI. Breazu Ioana (4349, 52, 56, 58, 67, 89, 99, 402, 21, 22, 31, 32, 34, 36, 37, 39, 41—43, 54, 56, 57, 67, 69, 70, 76—78, 86—88, 94, 95), Buracu Eugen (4232, 38—40, 68, 73, 87, 316, 25, 33), Rîcu Ana (4212, 14, 32, 37, 39, 40, 68, 77, 86, 87, 318, 25, 33).

SALONTA (Crişana). Cl. IX. Crăciun Viorica (4398, 99, 407, 41, 43,. 67), David Floarea (4398, 99, 407, 43, 67).

SĂVENI (Suceava). Cl. X. Zoler David (4389, 92, 99, 431, 34, 42, 43, 56, 70).

SIBIU (Braşov). Absolvent That Frieder (4398, 99, 422, 31, 34, 69, 86—88, 95, 401, 07, 21, 32, 37, 42, 43, 56, 67, 70).

SIGHIŞOARA (Braşov). Ş. m. 1. Cl. IX. Olteanu Elena (4389, 99, 441, 42, 94), Stanciu Vasile (4398, 99, 407, 41—43, 56, 57, 70, 99). Cl. X. Cristea Voicu (4398, 99, 407, 21, 31, 32, 34, 41, 42, 56, 70), Frunzetti Dan (4349, 52, 67, 89, 99, 409, 21, 22, 39, 41, 43, 45, 67, 70, 86, 87), Gruncă Adrian (4381, 82, 89, 98, 99. 407, 21. 31, 32, 34, 41, 54). Cl. XI. Dumitriu Virginia (4398, 99, 407, 21, 22, 31, 32, 34), Pintea Paula (4318, 19, 25, 28, 33, 49, 56, 58, 67, 98, 409), Şutac Sidonia (4407, 22, 31, 34, 37, 41—43, 45, 56—58, 67, 69, 70, 76, 86—88, 95).

Ş. m. 2. Cl. XI. Brătianu Silviu (4352, 67, 98, 99, 431).

SINAIA (Ploieşti). Cl. X. Puiu Mihai (4389, 98, 99, 407, 09, 21, 22, 31, 32, 34, 41—43, 54, 67, 87).

TECUCI (Galaţi). Ş. m. 2. Cl. X. Enc Lucia (4407, 09, 22, 33, 87).

TIMIȘOARA (Banat). Ș. m. 1. Cl. X. Munteanu Dan (4349, 52, 67, 98, 99).

Ș. m. 3. Cl. VIII. Abramovici Alex. (4212, 38, 68, 85, 319, 25, 27, 33, 49, 67, 89, 98, 99, 407, E: 1515, 31).

TÎRGOVIȘTE (Ploiești). Absolvent Brezeanu Florin (4268, 73, 77, 79, 85—87, 96—98, 300, 01).

Ș. m. Nicolae Bălcescu. Cl. X. Frîncu M. Zaharia (4421, 22, 31, 32, 34, 39, 41—43, 45, 54, 56, 58, 67, 70, 78, 86, 87, 94, 95, 503, 04, 23, 27).

TÎRGU CĂRBUNEȘTI (Oltenia). Cl. XI. Gușiță Marin (4358, 92, 401—03, 07, 21, 22, 34).

TÎRGU NEAMȚ (Bacău). Ș. m. Ștefan cel Mare. Cl. IX. Gherșiu Burclu (4399, 421, 34, 41, 42, 56, 67, 70, 86), Scharf Wolf (4398, 99, 421, 34, 41, 42, 56, 67, 70, 86).

TURDA (Cluj). Ș. m. 1 Mihai Viteazu. Cl. IX. Apostol Adriana (4319, 27, 67, 98, 99). Cl. X. Iosif Nicolae (4398, 99, 407, 09, 22, 31, 34, 41, 43, 54, 58, 67), Olar Iacob (4398, 99, 407, 22, 31, 32, 34, 41—43, 56).

TURNU SEVERIN (Oltenia). Ș. m. 2. Cl. X. Mocioiu Doru (4398, 99, 409, 31, 34, 56).

VASLUI (Iași). Ș. m. 1 Mihail Kogălniceanu. Cl. X. Cițișteanu Aron (4398, 99, 421, 22, 32, 34).

EVIDENȚIAȚI

1. **Țintăreanu Mihai** (cl. VIII, ș.m. 11 București), 2. **Piscupescu Gabriel** (student IPGG București), 3. **Popescu A. Dorel** (cl. XI, ș.m. 1 Arad), 4. **Persache Octavian** (cl. VIII ș.m. 11 București), 5. **Fințescu Elena**, (cl. XI ș.m. 10 București), 6. **Ilie Mihai** (cl. XI ș.m. 20 București), 7. **Deleanu Denise** (cl. XI ș.m. 16 București), 8. **Gianni Emanuel** (cl. X ș.m. 11 București), 9. **Garabedian Rodica** (cl. XI ș.m. Brașov), 10. **Georgescu Stelian** (cl. X ș.m. 10 București), 11. **Stan Ștefan** (cl. X ș.m. 7 București), 12. **Teodorescu Catrinel** (cl. XI ș.m. 10 București), 13. **Medaru Doina** (cl. VII ș.m. 11 București), 14. **Mihu Răzvan** (cl. X ș.m. 11 București), 15. **Bolocanu C. Gabriel** (cl. XI ș.m. 26 București), 16. **Chiriță Marcel** (absolvent București), 17. **Danciu P. Iulian** (cl. X ș.m. 3 Brăila), 18. **Pîrșan Liviu** (cl. XI ș.m. 18 București), 19. **Vinea Alexandru** (cl. VIII ș.m. 32 București), 20. **Marian Iuliu** (cl. VIII ș.m. 3 Cluj), 21. **Tiurbe Codruța** (cl. VIII ș. m. 2 Arad), 22. **Cîmoca Gheorghe** (student matematici Cluj), 23. **Oprescu Constanța** (cl. VIII, ș.m. 4 București), 24. **Ilina Stelian** (cl. VIII Cîmpina), 25. **Iorga Valeriu** (cl. XI Lugoj), 26. **Rădulescu Dorin** (cl. VI ș.m. 11 București), 27. **Năstase Aurel** (cl. XI Focșani), 28. **Dinulescu Rodrig** (cl. VIII ș.m. 4 București), 29. **Feale Titi** (cl. VIII Buziaș), 30. **Busuioc Mihaela** (cl. VIII ș.m. 8 București), 31. **Pupăzan Nicolae** (locot. maj. Lugoj), 32. **Popovici I. Mariana** (cl. VIII Lugoj), 33. **Pantelimon Anton** (cl. X Focșani), 34. **Raicu Viorel** (cl. XI Drăgănești-Argeș), 35. **Grădeanu Gh.** (cl. XI Focșani), 36. **Boldea Ioan** (cl. X Lugoj), 37. **Gheju Petruc** (cl. XI Făget), 38. **Dache Constantin** (cl. VII Fetești, București), 39. **Gonciar Ștefan** (cl. VIII Fetești, București). 40. **Anghel Vasile** (cl. XI Mărășești), **Necula Mihai** cl. VIII ș.m. 13 București.

Pînă la 1 mai 1961 s-au mai primit soluții bune la problemele de matematică propuse în ultimele 3 numere ale „Gazetei matematice și fizice" seria B, după cum urmează:

AGNITA (Brașov). Cl. VIII. Gheorghioiu Liviu (E: 1617, 18, 20, 21, 23, 27, 29, 31, 36—38, 43, 46).

AIUD (Cluj). Ș.m. Avram Iancu. Cl. X. Leția Ioan (4419, 20, 44, 52, 53, 60, 84, 509).

ALEXANDRIA (București). Ș.m. Alexandru Ion Cuza. Cl. IX. Boștenaru Livius (4419, 20, 44, 84, 509, 16, 33, 36, 38, 43).

ANINA (Timișoara Cl. VIII. Costangioară Mioara (E: 1574, 78, 81, 87, 89, 99—601, 05, 10).

ARAD (Banat). Ș.m. 1 Ion Slavici. Cl. VI. Lupău Liliana (E: 1604, 08, 10, 11, 13, 15, 17, 20, 21, 27). Cl. VII. Petrelea Elisabeta (E: 1604, 07, 08, 10, 17, 18, 21, 23, 27, 42), Schwartz Ioan (E: 1600, 04, 07, 08, 10, 11, 15, 20, 21, 27), Than Francisc (E: 1600, 04, 07, 08, 10, 11, 15, 20, 21, 27). Cl. VIII. Dan Dorin (E: 1537, 90, 93, 96, 99, 604, 05, 07—09, 18, 20, 21), Vicol Wiliam (4475, 503, 19, 33, 35, 39, E: 1604, 12, 19, 20, 22, 23, 29, 30, 34, 37, 38, 41—43, 45—47). Cl. X. Ferenț Militor (4475, 80, 81, 83, 84, 97, 99, 509, 10, 17, 20, 43), Mihalaș Gh. Ioan (4461, 73, 75, 80, 81, 83, 93, 99, 510, 43), Puia Doru (4380, 469, 83, 84, 503, 04, 09, 17, 27, 39). Cl. XI. **Popescu A. Dorel** (4423, 27, 29, 47, 62, 64, 65, 71—73, 75, 79, 81, 82, 89, 90, 94, 98—501, 03—05, 07, 09, 19, 31, 33—36, 38—40, 43, 46, 61, 65, 70, 73, 75, 80, 84—86, 88, 91, 97, 99, 600, 02—04), Vîrșendan Ioan (4499, 500, 03—10, 19, 22, 31, 33, 36, 40, 42, 62, 75, 77, 80, 81).

Ș.m. 2. Cl. VIII. **Tiurbe Codruța** (4509, 43, E: 1599—601, 03—18, 20, 21, 23, 24, 27, 31, 34, 36—38, 41—43, 45—47). Cl. IX. Anonim (4496, 509, 19, 33, 36, 39, 51, 52), Stoinescu Marina (4480, 509, 17, 19, 37, 43, 51, 52, 61). Cl. XI. Hulea Ioan (4463, 72, 81, 83, 84, 96, 99, 500, 09, 19), Petrilă Conrad (4499, 500, 09, 13, 17, 43,

51, 62, 73, 74). Ş.m. 3. O. Terezia. Cl. VIII. Botescu Mircea (E: 1571—74, 79, 81, 86, 91, 96, 98).

BABADAG (Dobrogea). Cl. X. Ignat Ion (4420, 27, 53, 73, 80, 83, 84, 506, 09, 10, 17).

BACĂU. Ş. m. 2 Vasile Alecsandri. Absolventă Pintilie Marlena (4419, 20, 23—27, 29, 44, 59—61). Cl. IX. Vlad Constantin (4419, 44, 52, 56, 70, 81, 83, 89, 503, 06, 09, 37, 43).

BAIA DE ARIEŞ (Cluj). Cl. IX. Ciura Alexandru (4480, 81, 83, 84, 90, 509, 19, 33, 39, 43, 46).

BAIA MARE (Maramureş). Cl. VIII, serală. Barbur Ştefan (E: 1599, 600, 07, 08, 10, 16, 23, 27, 30). Cl. X serală. Pop Arghir (4506, 09, 17, 33, 43). Cl. XI. Vlahovici Nicolae (4419, 20, 22, 23, 25, 29, 31, 32, 34, 37, 42, 43, 52—54, 56, 95).

BALŞ (Oltenia). Cl. VIII. Voiculescu V. Florian (E: 1599—601, 04, 08—11, 13—16, 26, 27, 31).

BĂNEŞTI (Ploieşti). Cl. V. Sbîrnea St. Ion (E: 1600, 10, 13, 17, 20, 27, 33).

BEIUŞ (Crişana). Cl. X. Ovanez Mihai (4468—70, 75, 78, 80, 83, 84, 86, 88, 94, 503, 04, 06, 09, 10, 26, 27, 37, 43). Cl. XI. Nică Tănase (4463, 505, 09, 10, 40).

BISTRIŢA (Cluj). Cl. X. Cîrcu Ioan (4467, 69, 72, 73, 80, 87—89, 509, 43, 77), Galu Ioan (4409, 17, 43, 45, 72, 73, 80, 81, 89). Cl. XI. Olaru Grigore (4499, 505, 06, 09, 18, 19, 33, 40, 62, 73), Paşca Iuliu (4421, 37, 38, 60, 61, 63, 74, 83, 97, 503, 06, 09, 10, 17, 19, 27, 33, 43, 62), Ţîra Grigore (4499, 500, 03—06, 09, 10, 13, 14, 17—19, 33, 36, 49, 62, 66, 73).

BLAJ (Braşov). Ş.m. Ion Mureşan. Cl. IX. Berar Aurel (4475, 82, 84, 509, 17, 19, 29, 33, 36, 37, 43), Popa Monica (4475, 84, 96, 509, 19, 29, 33, 36, 37, 39).

BÎRLAD. Complexul şcolar. Cl. VIII. Basoc Dorina (E: 1585—88, 91, 92, 96, 97, 600, 10, 13, 16), Bobei Constantin (E: 1584, 85, 87, 96, 97, 600, 05, 08, 09, 13, 17, 20, 21, 31), Boidache Gavrilă (E: 1591, 93, 99, 600, 04, 05, 09—11, 13, 16, 17, 20, 21), Butnaru Artur (E: 1583, 85, 88, 89, 91—95, 97, 98), Coatu Aurica (E: 1584, 87, 600, 05, 08, 10, 13, 17, 21, 31), Goldstein Aron (E: 1600, 09—11, 16, 20, 27, 31, 37, 47), Mocanu Dumitra (E: 1584, 96, 97, 600, 05, 08, 17, 31), Rotaru Elena (E: 1587, 96, 97, 600, 08, 10, 17, 27), Sîrghie Aristiţa (E: 1587, 96, 97, 600, 08, 10, 21, 27, 28, 31), Zaharia Elena (4475, 503, E: 1584, 87, 96, 97, 600, 05, 08, 17, 31). Cl. X. Fieraru M. Ion (4453, 83, 96, 507, 09, 17, 37, 39, 40, 43), Rădiţă Dan (4452, 53, 56, 506, 07, 09, 17, 39, 40, 43).

BOLINTINUL DIN VALE (Bucureşti). Cl. IX. Dumitrache Georgeta (4447, 52, 72, 74, 81, 509, 30, 43). Cl. X. Badea Gheorghe (4419, 20, 23, 25—27, 29, 30, 33, 35, 38, 40, 47, 49, 52, 55, 60, 61, 72, 74, 81, 500, 07, 09, 22, 43), Deciu Aneta (4423, 27, 38, 41, 47, 52, 61, 72, 74, 506, 09, 10, 22), Dumitru Florica (4435, 33, 49, 52, 61, 74, 81, 500, 05, 10, 13), Dumitru Ion (4435, 38, 52, 59, 74, 507, 09, 22, 43), Florescu Cornel (4426, 38, 40, 49, 52, 74, 500, 01, 09, 22, 43), Marinescu Nicolae (4419, 27, 29, 52, 74, 500, 05, 09, 43), Mihuţ Octavian (4419, 20, 23—30, 33, 38, 47, 49, 50, 59—61, 72, 74, 81, 99, 500, 05—07, 08, 10, 22, 43), Pandele Tudor (4435, 47, 60, 61, 72, 74, 81, 509, 10, 22, 43), Popa Maria (4425, 35, 47, 49, 61, 74, 81, 507).

BORZEŞTI (Bacău). Anul I. Dorobăţ Nicolae (4434, 53, 82, 86, 95, 98, 99, 504, 09, 19, 27, 39).

BOTOŞANI (Suceava). Ş. m. August Treboniu Laurian. Cl. VI. Bucşă Lidia (E: 1583, 84, 94, 600, 04, 08, 10—12, 14), Leontescu Brînduşa (E: 1583, 84, 94, 600, 04, 08, 10—12, 14), Şelaru Elena (E: 1583, 94, 600, 04, 08, 10—14), Văcăreanu Raluca (E: 1583, 84, 94, 604, 08, 10—14). Cl. VIII. Ciuraru Moritz (E: 1573, 74, 79, 600, 04, 07—10, 13, 17, 18, 20), Drăgoi Cristian (4470, E: 1582, 86—89, 91, 95, 99—601, 04, 05, 07—11, 14—16). Cl. X. Galeriu Rodica (4444, 52, 57, 75, 83, 509, 19, 33, 39, 43). Absolvent Mocanu H. Ovidiu (4472—75, 80—84, 92, 96). Ş. m. 2 Mihail Eminescu. Cl. VIII. Ferenhans Tabie (E: 1583, 87, 89, 91, 600, 10, 13, 16, 18, 20, 21, 23, 37, 33, 54, 55), Leizerovici Adriana (E: 1589, 91, 93, 96, 99, 603, 05, 09, 18, 23, 29). Cl. IX. Gutman Tanţi (E: 1591, 96, 99, 603, 05, 09). Leibovici Bernard (4441, 43, 67, 86, 87, 503, 66).

BRĂNEŞTI (Bucureşti). Cl. VIII. Barbu Nicolae (E: 1620, 21, 31, 33, 34, 37, 42, 43, 45—47), Berbece Octavian (4473, E: 1570, 77, 81, 84, 87, 88, 90, 93—97), Drăgan Marius (4475, 520, 43, E: 1611, 20, 27, 31, 34, 37, 42, 43), Ionescu N. Ion (E: 1543, 87, 90, 93, 97, 98, 607, 10, 18, 21, 25, 27, 37, 46, 64), Pavel Marin (4453, E: 1570, 87—90, 93—98, 600, 04, 07, 08, 10, 11, 19, 20, 23, 25, 27, 28, 46).

BREAZA (Ploieşti). Ş. m. Dimitrie Cantemir. Cl. VIII. Bîrză Ilie (4470, 503, E: 1599—601, 03—18, 20, 21, 23, 24, 26—32). Cl. X. Zegheanu Petre (4380—85, 88, 90, 91, 96, 405, 11, 12, 15, 16, 19, 20, 27, 29, 52, 53, 75, 80, 81, 83, 84), Levki Mihai (4352, 67, 420—22, 29, 31, 32, 34, 36, 37, 40, 42, 43, 53, 54, 69, 70, 72—75, 80—84, 86—88, 94, 96).

BRĂILA (Galaţi). Şc. de 7 ani nr. 14. Cl. VII. Mihai V. Ion (E: 1599, 600, 05, 10, 14, 20, 21, 29, 31, 37, 47), Racicovski Nicoleta (E: 1599, 600, 10, 13, 18, 20, 21, 23, 28, 31, 37).

Ş. m. 3 Nicolae Bălcescu. Cl. X. Danciu P. Iulian (4419—22, 25—27, 29, 31—34, 39, 42—44, 47, 49, 52—54, 56, 60, 61, 67, 69, 73, 75, 76, 78, 80—84, 86—88, 96, 97), Frecuş Constantin (4420, 22, 29, 31, 32, 34, 39, 42—45, 47, 52, 53, 56, 61, 69, 70, 83, 84). Cl. XI. Rosman Izu (4381—83, 94, 96, 99, 407, 20, 22, 31, 34, 63, 73, 80, 81, 83, 84, 95, 96), Spătărescu Vasile (4375, 77, 80—82, 84, 96, 411, 19, 20, 81).

Ş. m. 4. Cl. VII. Scăraru Fănica (E: 1587, 90, 95, 97, 99, 607, 08, 10, 20, 22, 23, 31), Absolventă Giurgiu Maria (4380, 420, 23, 44, 63, 71, 72, 80, 81, 83, 87, 96).

BRAŞOV. Cl. VIII. Ciobanu Georgeta (E: 1599, 600, 03—05, 09—11, 14, 16). Cl. XI. Garabedian Rodica (4462, 66, 71, 80, 99—501, 05, 06, 09, 10, 19, 20, 22, 30—33, 38—40, 43, 56—59, 62, 65, 70, 73, 75, 77—81, 84, 88, 95, 99—604), Goşman Gheorghe (4431, 35, 63, 72, 81, 83, 84, 96, 97, 505, 06, 08, 09, 33, 43, 51).

Ş. m. 4 Ştefan Gheorghiu. Cl. V. Aldea Angela (E: 1583, 84, 94, 97, 600, 08, 10, 12, 14, 17). Cl. VIII. Brana Ion (4543, E: 1577, 78, 89, 96, 600, 05, 10, 13, 17), Costin Violeta (4543, E: 1600, 03, 04, 08—10, 13, 15, 42), Munteanu Dana (E: 1599, 601, 03, 09—11, 13, 14, 16, 23, 29), Pincovici Matei (E: 1587—90, 95, 97, 98, 601—04, 07—09, 13—15, 17, 20—23, 31). Purghel Florian (4549, E: 1599, 604, 08, 12, 18, 21, 23, 31, 34, 37), Topliceanu Vasilica (4470, 75, 81, 509, 20, 33, 43, 75, 91 610), Vulpe Viorel (4475, E: 1603, 05, 08, 09, 11, 13, 14, 20, 22, 31). Cl. XI. Klopet Ion (4503—05, 09, 10, 16, 19, 27, 33, 37, 39, 40), Vintilescu Vasile (4503—05, 09, 10, 16, 19, 27, 33, 37, 38, 40).

Ş. m. 5 Unirea. Cl. VIII. Munteanu Gh. Mihai (4419, 31, 32, 34, 36, 43, 56, 67, 70, 75, 81, 83, E: 1584, 87—89, 97, 99, 601—03, 05—07, 09, 16). Cl. IX. Munteanu Gh. Mircea (4419, 21—23, 27, 29, 30, 36, 41, 43, 44, 54, 56, 67, 70, 72, 75, 78, 80, 81, 83, 84, 86).

Şcoala profesională Steagul Roşu. Anul II. Drugă Leontin (E: 1617, 18, 20, 21, 23, 27, 31).

Şcoala de 7 ani nr. 6. Cl. VI. Vătui Florin (4470, 75, E: 1600—02, 04, 06—14).

BUCECEA (Suceava). Şc. de 7 ani. Cl. VII. Aron Paulina (E: 1618, 20, 26, 27, 38, 43, 47, 53, 57, 59, 60).

BUCUREŞTI. Studenţi. Bejan Costel (Fac. mecanică). (N — Asupra teoremei lui Fermat; 4377, 80—83, 90, 94, 412, 16, 62—64, 68, 71—75, 80—84, 89, 517, 19), Boţoacă Vasile (N — Despre inegalitatea lui Buniacovski şi O aplicaţie a logaritmilor; P. Dobrescu Dan (Fac. mat.-fiz.) (4499, 500, 03, 05, 09, 10, 13, 17, 19, 31, 36, 38—40, 43, 62, 70, 73, 75, 77, 80, 81, 84, 86, 93, 97, 602—07), Piscupescu Gabriel (IPGG) (4469, 86, 87, 95, 503, 04, 07, 10, 13, 14, 16, 17, 22, 24—28, 39, 40, 42, 44, 49, 51, 52, 54—56, 61, 63, 66, 70, 73, 75, 80, 85, 86, 91, 93, 96, 97, 99, 600, 02, 06, 07, 11—21, 24—29, 33, P), Ţuţuianu Ovidiu (Fac. energetică) (4472, 99, 503—06, 09, 16, 26, 27, 33, 35, 39, 40, 43, 49, 62, 66, 73, 75, 77, 79, 89, 600, 02, 07). Absolvenţi: Chiriţă Marcel (4425, 26, 29, 62, 64, 73, 76, 87, 88, 98—501, 03—11, 13, 16, 17, 19, 22, 24—28, 31—40, 42, 43, P), Drăgan St. Marin (4499, 505, 06, 09, 10, 17, 19, 31, 41), Pandrea Nicolae (ing. mec.) (N — Câteva probleme de rezistenţa materialelor), Popescu Gh. Andrei (4472, 81, 83, 84, 90, 96, 97, 505, 06, 09, 39).

Ş. m. 1 Nicolae Bălcescu. Cl. VIII. Ţilenschi Mircea (4503, 80, 81, E: 1617, 18, 20, 21, 23, 24, 26, 27, 30, 31). Cl. X. Chivu Gh. Tudor (4499, 506, 09, 18, 19, 36, 43, 75, 77, 91), Cristea Nicolae (4499, 503, 04, 06, 07, 09, 19, 27, 28, 31, 37, 39, 40, 43), Dorin Alexandru (4503, 04, 09, 19, 35, 36, 43, 68, 75, 77, 84, 91, 604, 07), Frimu Nadia (4499, 506, 38—40, 77, 604), Răzvan Vladimir (4420, 60, 72, 75, 80—84, 89, 90, 506, 09, 19, 35, 38—40, 43), Sterescu Antou (4499, 509, 17, 33, 35, 35, 40, 43, 75, 91), Tale Patru (4420, 68, 69, 80, 82—84, 88, 90, 526, 35, 37, 42—44, 61, 70, 75, 81, 90), Timoşenko Alexandru (4499, 509, 33, 37, 41—43, 56, 63, 66, 68, 71, 72, 81, 84, 85, 88, 96, 99, 600, 07, 45, 47, 50, 68, 69), Vasilescu E. Andrei (4499, 501, 06, 12, 31, 35, 77, 81, 82, 604). Cl. XI. Gugu Dan (4463, 72, 81, 83, 84, 99, 505, 09, 10, 17, 19, 31, 37, 39), Soceanu Gheorghe (4503, 04, 06, 09, 10, 27, 30, 75, 80, 81, 85, 86).

Ş. m. serală nr. 2 Tudor Vladimirescu. Cl. VIII. Vasile M. Ion (4475, 80, 81, 83, 517, 42, 43, E: 1503, 84, 89, 96, 97, 600, 10, 11, 20, 21, 26, 27, 31, 44, 52, 57, 59). Cl. IX. Grigoriu Mihai (4472, 75, 81—84, 90, 509, 19, 35, 43, 46, 51, 52, 61).

Ş. m. 3 Ion Neculce. Cl. V. Sloventz Şerban (E: 1617, 26, 27, 31). Cl. VI. Florea Flavius (E: 1582, 85, 87, 88, 90, 95, 601, 06, 07, 10, 13, 15), Nicolaescu M. Corneliu (E: 1615, 20—22, 26—28, 31, 37, 38, 41, 42, 47, 48, 56, 58, 59). Cl. VII. Popescu C. Radu (E: 1609, 11, 15, 19—25, 31, 37, 38, 42, 48, 53—60). Cl. IX. Ionescu N. St. (4481, 83, 96, 509, 12, 35, 38, 39, 610, 12). Cl. X. Dumitrescu Gheorghe (4472—75, 80—84, 96, 98, 99, 506, 09, 10, 19, 29—32, 38—41, 43, 47, 61), Sucitu Gh. (4458, 69, 70, 72, 75, 81, 84, 88, 90, 503), Sucitu Neculce (4499, 501, 04—06, 09, 16, 17, 19, 26—28, 30, 31, 33, 43, 75)

Ş. m. 4 Aurel Vlaicu. Cl. VIII. Amărioarei Ileana (E: 1617, 31, 37, 44, 48, 52), Arşanu Ion (E: 1584, 90, 94, 98, 604, 07, 09—11,

15—17, 20, 21, 27, 29, 31, 37, 42, 48, 52—57, 60), Baicu Valentin (E: 1610, 15—18, 20, 26, 27, 29, 37, 42, 52—57, 59, 60), Boroneanț Constantin (4475, 80—82, 96, E: 1599, 600, 04, 05, 10, 11, 16), Burdea Viorel (E: 1621, 27, 31, 38, 48, 52—57, 60), Chioveanu Viorel (E: 1610, 15—18, 20, 27, 31, 37, 42), Damian Mircea (E: 1617, 21, 29, 38, 42, 53, 57, 60), **Dinulescu Rodrig** (E: 1590, 92, 97, 600, 09—11, 18, 19, 20, 21, 23, 27, 29—31, 37, 38, 42, 47, 48, 52, 53, 57, 60), Dincă Aurel (4475, 517, 19, E: 1600, 05, 09, 10, 16, 26, 29, 31), Dumitrescu Carmen (4480, E: 1596, 97, 604, 10, 11, 17, 18, 20, 26, 27, 31, 37, 42, 53, 56, 57, 59, 60), Dumitru Cornel (E: 1519, 600, 04, 10, 16—18, 20, 21, 27, 31, 37, 43, 46, 47, 52), Găvenea Gloria (4508, 09, 33, 43, E: 1621, 23, 27, 37, 56, 57, 60), Georgescu Octavian (4508, 09, 33, 43, 84, 99, E: 1587, 89, 91, 96, 98—600, 04, 10, 16, 27, 56, 57, 60), Ionescu Olga (4509, 21, 33, E: 1623, 27, 37, 43, 56, 57, 60), Martin Maria (4519, 96, 99, 600, 04, 10, 16—18, 20, 21, 26, 31, 37, 43, 44, 46, 47, 49, 52), Moșteanu Maria (E: 1610, 17, 20, 21, 23, 26, 27, 29, 37, 42, 47), Nuțu Paul (E: 1631, 39, 53, 54, 56, 57, 60), Nicolau M. Elena (4508, 09, 33, 37, 43, E: 1621, 23, 27, 56, 57, 60), Nicolau Marian (E: 1607, 10, 15—17, 20, 27, 37, 42), Oros Justin (4519, E: 1617, 18, 20, 21, 27, 33, 37, 43, 44, 46, 47, 52, 53, 57—59), Ostap Rodica (4519, E: 1621, 31, 37, 43, 44, 46, 47, 52, 57), **Oprescu I. Constantin** (4519, 43, 44, 47, 53, 80, 81, E: 1593, 95, 97—99, 609, 11, 16—18, 20, 21, 23, 24, 26, 28—31, 37, 38, 43, 46, 57, 87, 93, 95, 97—99), Petrișor Teodor (E: 1627, 29, 37, 38, 48, 52—56, 60), Predoi Ion (E: 1584, 87, 90, 91, 98, 604, 10, 15, 17, 20, 21, 26, 37, 52—57, 59, 60), Săcăliș Dănuț (E: 1615, 17, 18, 20, 21, 26, 27, 29, 31, 37, 38, 42, 47, 52—56, 59, 60), Tăriceanu Mihaela (E: 1520, 629, 37, 42, 48—50, 53—57, 60), Trosca Adriana (E: 1617, 18, 20, 27, 33, 37, 43, 44, 46, 47, 53, 57, 59), Vasiliu Ileana (E: 1648, 50, 53, 55—59). Cl. IX. Gruia Mariana (4509, 19, 46, 56, 75, 77, 81, 84, 91, 604), Mărțis Gh. George (4509, 19, 28, 33, 37, 39, 46, 52, 54, 55, 61, 66).

Ş.m. 5. Dianu Mihai, elev (Scurt istoric al realizării și dezvoltării tubului electronic).

Ş.m. 6. Ilie Pintilie. Cl. X. Oneață Vasile (4420, 44, 52, 75, 81, 83, 84, 96, 509, 19). Cl. XI. Buță Apostol (4499, 500, 05, 06, 09, 10, 22, 51, 75, 78, 80).

Ş.m. 7 I. L. Caragiale. Cl. VIII. Anonim (E: 1617, 18, 20, 21, 23, 26, 30, 31, 33, 34), Opriș Valentin (E: 1599, 600, 05—11, 13—16), Racoveanu Dragoș (4443, 53, E: 1587—89, 91, 96, 600, 05, 09, 18, 43). Cl. X. Bunaciu Doina (4499, 509—10, 17, 27, 31, 37, 39, 43, 75, 77, 81, 82, 84, 88, 91, 99), Radian Theea (4499, 506, 08, 09, 17, 19, 31, 33, 36, 37, 39, 43, 75, 81), **Stan Ștefan** (4499, 501, 07—09, 17—19, 30—44, 46, 52, 57, 61, 64, 68, 70, 75, 81, 82, 84, 88, 91, 95, 99, 604, 07, 10). Cl. XI. Busuioc Ion (4419, 20, 48, 72, 83, 90, 99, 505, 09, 40).

Ş.m. 8 **Emil Racoviță**. Cl. V. Mîrzan Valeiu (E: 1583, 84, 94, 97, 98, 600, 04, 08, 10, 14, 17, 26, 27, 31). Cl. VI. Băruț Marian (E: 1600, 01, 04, 07—11, 14, 15, 17, 20, 21, 23, 27, 28, 42), Busuioc Ștefania (E: 1601, 04, 07, 08, 11, 13, 17, 20, 21, 31, 37, 38, 43, 47), Ciobanu Doina (E: 1586, 90, 95, 600, 01, 04, 06—08, 10—14, 21, 23, 28, 31, 37, 38, 43, 47), Cristoloveanu Liana (E: 1595, 600, 01, 04, 06—08, 15, 20, 23, 31), Catrina Ruxandra (E: 1600, 01, 04, 07, 08, 10, 11, 14, 15, 17, 20, 21), Constantinescu Dan (E: 1599, 600, 04, 10, 13, 15, 20, 21, 23, 25, 27, 28), Grosu Adrian (E: 1600, 01, 04, 06—08, 10, 11, 15, 20, 23, 37), Leroy Roger (E: 1600, 04, 07, 08, 10, 11, 13, 17, 27, 31, 42, 44), Mărgineanu Doina (E: 1600, 04, 07, 08, 10, 12—15), Oprea Gheorghe (E: 1600, 01, 04, 08, 10, 13, 15, 17, 20, 23, 27), Popescu Manuela (E: 1638, 47), Teodosiu Iosif (E: 1592, 94, 95, 97, 601, 06, 07, 11, 13—15, 17, 20, 21, 23, 27, 28, 38, 42, 43), Toma Mihai (E: 1584, 92, 94, 95, 97, 601, 07, 11, 13, 15, 17, 20, 21, 23, 27, 28, 31, 37, 38, 42, 44). Cl. VII. Busuioc Cătălina (E: 1582—84, 86, 87, 89, 92, 94, 96, 99, 604, 05, 07, 09, 11, 13, 17, 18, 20, 21, 29, 37), Mateescu Luminița (E: 1599—601, 03—11), Picu Gabriela (E: 1600, 01, 03—06, 08, 10, 11, 13, 14). Cl. VIII. **Busuioc Mihaela** (4472, 74, 75, 80, 81, 83, 84, 509, 17, 19, 33, 36, 43, 61, E: 1601, 03, 06—08, 13,—15, 17, 18, 20, 21, 23, 28, 29, 31, 37, 43), Constantin Martiana (4433, 53, 74, 75, E: 1592, 601, 09, 11, 16, 17, 20, 21, 23), Petroniu Doina (4433, 53, 74, 75, 80, 81, 83, 517, 19, 43, 61, 87, 92, 99, 600, 01, 04, 05, 08, 09, 11, 14, 16, 17, 28), Ștefănescu Lucia (4474, 75, 80, 81, 519, 500, 04, 05, 09, 10, 16, 20 23, 37, 43). Cl. X. Buiculescu Doina (4499, 503, 04, 09, 27, 54, 84, 85, 90, 91, 95, 96, 604).

Ş.m. 10. Cl. VI. Văutuș Anca (E: 1615, 17, 20, 21, 31, 33, 34, 36—38, 42). Cl. VII. Bîlbue Monica (E: 1643, 45, 50, 52, 57, 60, 63, 64, 71, 75), Cădere Dimitrie (E: 1639, 43—45, 50, 52, 57, 60, 63, 64, 71, 75), Chiescu Ioan (E: 1600, 01, 03—05, 07, 09, 10, 13, 14, 16), Popescu Ovidiu (E: 1573, 87, 88, 90, 91, 601, 07, 13, 20, 21, 23), Săndulescu Șerban (E: 1618, 19, 23—25, 29, 32, 43, 45, 46). Cl. VIII. Bădulescu Paula (4575, 77, 614, 15, 25, 33, E: 1643,

45, 57, 66), Ivan Florian (4486, 543, 61, E: 1620, 22, 37, 38, 42, 43, 46, 47, 49, 52—55), Marinescu Doina (4575 77, 601, 14, 15, 25, 33, E: 1542, 52, 57, 71), Moldoveanu Ecaterina (4575, 77, 81, 614 15, 33, E: 1649, 50, 57, 66), Nătăliuc Adriana (4577, 614, 15, 25, 63, E: 1643, 45, 49, 57, 66, 71), Sava Luminița (4577, 633, E: 1614, 15, 25, 41, 43, 44, 53, 57), Savin Roxana (4577, 614, 33, E: 1643, 45, 52, 57, 60, 65, 71, 74). Cl. IX. Budișteanu Radu (4420, 53, 75, 83, 500, 19, 33, 46, 52, 75, 77, 81, 604, 10), Niculescu Liliana (4509, 18, 20, 37, 39, 43, 47, 56), Panea Mihaela (4496, 99, 522, 36, 39, 46, 52, 77, 80, 81, 604). Cl. X. Georgescu Stelian (4434, 35, 38, 40, 48, 53, 60, 61, 64, 67—70, 73, 74, 76, 78, 80, 85, 88, 89, 94—97, 504, 08, 16, 17, 20, 23, 25—27, 32, 37, 40, 42, 44, 47, 56, 68). Cl. XI. Finţescu Elena (4499, 500, 03—10, 13, 17, 20, 21, 25, 27, 31, 33, 35—40, 42, 43, 49, 51, 54, 55, 59, 62, 63, 66, 68, 73—75, 77, 78, 80—82, 85, 86, 90, 93, 95, 96, 600, 02, 03, 06—08, 10, 11). Teodorescu Catrinel (4506, 13, 20, 49—52, 59, 62, 63, 65, 66, 70, 73, 75, 77, 78, 80, 82, 84—86, 91, 93, 95, 97, 99, 602, 04, 06—08, 10, 14, 15, 19, 20—25).

Ş.m. 11 **Dimitrie Cantemir**. Cl. V. Sporea Dan (E: 1583, 84, 94, 97). Cl. VI. Dumitru Mariana (E: 1620—22, 25, 37, 38, 54, 55, 62), Rădulescu Dorin (4543, E: 1587, 93, 600, 02—04, 06—08, 10, 14, 17, 18, 20—23, 27, 34, 36, 37, 42—44, 47, 51, 53—60), Stănculescu Radu (E: 1617, 20, 21, 28, 30, 31, 34, 36—38, 41, 42). Cl. VII. Medaru Doina (E: 1584, 86, 87, 89—91, 93, 94, 96, 98—600, 04, 05, 07—11, 16—18, 20, 21, 23, 28, 31, 34, 36, 38, 42, 43, 45, 47—59), Tonceanu Dan (E: 1617, 18, 20, 21, 23, 27, 28, 31, 36—38, 42, 43, 47, 48, 51, 53—60), Ursulescu Octavian (E: 1599—611, 13—16). Cl. VIII. Persache Octavian (4467, 83, 84, 86, 503, 09, 17, 19, 39, 42, 54, 61, 70, E: 1617—38, 41—47, 50, 53—60), Țînțăreanu Mihai (4381, 82, 98, 99, 420, 21, 31, 53, 503, 19, 36, 43, 48, 54, 61, 63, 75, 77, 79, 83, 90, 91, E: 1571—79, 81, 82, 84, 85, 87—612, 14—29, 31—34, 42, 43, 45—60). Cl. IX. Cancer Șerban (4509, 17, 36, 39, 43, 56, 610), Cuatu Eugen (4508, 09, 33, 36, 37, 39, 52, 75, 77, 81), Gropper Jean (4503, 09, 16, 17, 28, 36, 39, 54—56, 66, 75, 85, 90, 60), Simin Cornel (4509, 17, 36, 39, 56, 75, 610), Ursulescu Florin (4421, 33, 43, 67, 503, 09, 19, 36, 39, 43). Cl. X. Georgescu Horia (4380—83, 91, 94, 412, 19, 20, 27, 29, 44, 47, 52, 53, 75, 81, 83, 84, 86, 90, 508, 09, 33, 37, 39, 43), Gianni Emanuel (4362, 76, 84, 433, 35, 53, 81, 83, 88, 90, 91, 96, 438, 42—44, 48, 54, 87, 88, 91, 99, 501, 03—06, 09, 10, 16, 17, 19, 26, 27, 33, 39, 42, 43, 61, 66, 68, 77, 85, 88, 612, 33, 62), Mihu Răzvan (4419—22, 27, 31, 32, 34, 35, 39—45, 47, 52, 54, 67, 70, 75, 76, 81, 83, 84, 86, 87, 90, 94, 99, 503, 04, 08, 09, 16, 19, 27, 33, 37, 39, 40, 43), Stănculescu I. Ion (4360, 62, 65, 69, 70, 94, 98, 99, 422, 31, 34, 42, 67, 70, 76, 83, 84, 90, 503, 09). Cl. XI. Cristescu Dragoș (4463, 72, 79—81, 83, 96, 500, 05, 09, 20, 40). Rotaru George (4509, 35, 39, 40, 43, 88, 91, 93, 600, 07, 10, N), Voiculescu Cristian (4422, 29, 31, 49, 52, 53, 69, 75, 84, 86, 99, 503, 04, 09, 17, 19, 39, 40, 43, 52, 61, 85).

Ş.m. 12 **Spiru Haret**. Cl. X. Badea Mihai (4433, 60, 72, 74, 75, 81, 82, 84, 509, 17, 19, 32), Brill Erny (4499, 506—10, 19, 33, 39, 43, 88, 91, 95, 99, 607), Varujan Zahregian (4429, 75, 84, 99, 522, 33, 43, 62).

CONCURS PENTRU ELABORAREA UNOR PROBLEME LEGATE DE PRACTICĂ

Gazeta matematică și fizică seria B organizează un concurs pentru grupuri de probleme cu un conținut care să reflecte legătura matematicii și fizicii cu practica. În acest scop, participanții la acest concurs vor trimite pînă la 1. X. 1961 un număr de cel puțin 15 probleme împreună cu soluțiile lor într-un plic cu un motto, iar în interiorul plicului se va pune un altul mai mic, sigilat pe care se scrie același motto și care va conține numele și adresa autorului sau a autorilor.

Nu vor fi luate în considerare decît acele probleme care nu au apărut în alte cărți și reviste.

În funcție de calitatea și numărul problemelor se vor acorda premii în bani și se va asigura publicarea lor în periodicile Societății de științe matematice și fizice din R.P.R.

Pe plicurile trimise pe adresa redacției din str. Academiei nr. 14 — București, se va face mențiunea „Pentru concursul de probleme practice".

CĂTRE REZOLVITORII DE PROBLEME

Corespondenţii care ne trimit probleme rezolvate trebuie să redacteze fiecare problemă separat, însoţind-o de toate calculele necesare şi de figuri desenate cu îngrijire. Nu se vor trimite soluţiile mai multor probleme pe aceeaşi foaie. Problemele rezolvate de fizică se vor trimite separat, iar pe plic se va scrie: *Pentru redacţia de fizică.*

Se primesc lunar cel puţin zece soluţii numai la problemele şi exerciţiile din ultimele trei numere apărute. Pe plic se va scrie localitatea şi şcoala pe care o urmează rezolvitorii, pentru a se evita confuzii la întocmirea rubricii rezolvitorilor de probleme şi a listei celor evidenţiaţi. Soluţii la problemele propuse pentru şcoala de 7 ani se primesc numai de la elevii claselor V—VIII, sau ai şcolilor profesionale.

Problemele care se propun de către colaboratorii revistei să fie clar alcătuite şi însoţite de soluţii, să fie personale, iar nu luate din cărţi sau reviste. Elevii sînt sfătuiţi să înceapă a propune probleme numai după ce au rezolvat un număr destul de mare de exerciţii şi probleme. Problemele propuse, dar necorespunzătoare, nu se pot publica. Dacă un corespondent constată că unele probleme propuse au fost publicate în cărţi sau reviste, este rugat să ne arate precis volumul şi pagina unde a mai apărut enunţul sau soluţia problemei respective.

Corespondentul nostru care a citit şi a înţeles deplin multe din soluţiile publicate, a rezolvat multe din problemele propuse, poate şi este îndemnat să încerce să schiţeze cîte o notă rezultată dintr-o observaţie făcută cu ocazia rezolvării unei chestiuni mai grele. Aceste note să fie *refăcute de mai multe ori înainte de a fi trimise,* pentru ca redactarea lor să fie *cît mai clară şi concisă.* Figurile să fie făcute separat. In redactare se vor evita prescurtările. Nu se va scrie: $|=$; $\sim$; $*^{*}*$; $\perp$; $||$; Tr., etc., iar trecerea de la un calcul la altul să fie explicată pentru a se putea urmări uşor desfăşurarea unei demonstraţii. Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

La publicarea problemelor rezolvate se vor menţiona rezolvitorii care au dat o bună redactare şi o soluţie interesantă, sau mai multe metode de rezolvare.

Tovarăşii colaboratori elevi sînt rugaţi să ne trimită date asupra activităţii lor extraşcolare la matematică şi la fizică, asupra activităţii cercurilor de matematică şi de fizică la care iau parte, pentru ca apoi, prin revistă, să se poată realiza cu succes un schimb de experienţă. Dările de seamă concrete se vor publica în G.M.F.-B.

Autorii sînt rugaţi ca la întocmirea articolelor şi notelor să ţină seama de următoarele: articolele sau notele să fie scrise clar cu cerneală sau dactilografiate la două rînduri şi pe o singură parte a foii, figurile să fie desenate îngrijit şi pe o foaie separată. Problemele propuse să fie însoţite de una sau mai multe soluţii.

Autorul să semneze clar lucrarea personală pe care o trimite pentru publicat, de asemenea să scrie adresa şi data trimiterii lucrării.

— Materialele care nu corespund profilului G.M.F.-B, nu vor fi publicate.

Colecţii şi numere din anii precedenţi

Societatea de Ştiinţe Matematice şi Fizice din R.P.R., posedă exemplare mai vechi din G.M.F.-B, şi G.M.F.-A.

Cititorii noştri îşi pot procura colecţii ca şi numere disparate, depunînd banii la poştă prin mandat poştal pe numele Societăţii de Ştiinţe Matematice şi Fizice, strada Academiei nr. 14, contul 070.004 la B.R.P.R., filiala Lenin.

Preţul unui exemplar este de lei 3 pentru G.M.F.-A şi de lei 1,50 pentru G.M.F.-B. Cheltuielile de transport sînt de 0,20 lei de exemplar.

ABONAMENTE — Societatea de Ştiinţe Matematice şi Fizice din R.P.R. primeşte abonamente la oricare din publicaţiile sale:

a) Pentru instituţii, şcoli, biblioteci la preţul de lei 60 anual, pentru fiecare din periodicile sale: G.M.F.-A, G.M.F.-B, M.F.L., Bulletin Mathématique şi 40 lei anual la „Mathematica".

b) Pentru profesori şi elevi la preţul de 18 lei la G.M.F.-B sau M.F.L. de 36 lei la G.M.F.-A, de 60 lei la Bulletin Mathématique şi de 40 lei la „Mathematica"

— Fiecare abonat este rugat să facă cunoscută G.M.F.-B şi altor colegi, pentru a face abonamentele din vreme în vederea planificării tirajului lunar.

— Abonamentele se pot face individual sau colectiv prin oficiile poştale locale sau prin factorii poştali.

BIBLIOTECA SOCIETĂȚII DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE DIN R.P.R.

1. E. RUSU	Bazele teoriei numerelor.
2. A. I. MARKUȘEVICI	Șiruri recurente.
3. N. N. VOROBIEV	Numerele lui Fibonacci.
4. P. S. ALEXANDROV	Introducere în teoria grupurilor.
5. I. S. SOMINSKI	Metoda inducției matematice.
6. GH. MIHOC	Elemente de calculul probabilităților.
7. H. IONESCU	Calcule numerice.
8. A. I. MARKUȘEVICI	Arii și logaritmi.
9. A. I. GHELFOND	Rezolvarea ecuațiilor în numere întregi.
10. O. SACTER	Despre conice și alte curbe.
11. ION IONESCU	Maxime și minime geometrice.
12. F. I. ZIGHEL	Cometele.
13. S. SKLOVSKI	Radioastronomia.
14. V. ATANASIU	Structura materiei.
15. V. V. SARONOV	Soarele și observarea lui.
16. O. KREINDLER	Elemente de calcul vectorial.
17. B. B. KUDRIAVȚEV	Experiențe simple cu ultrasunete.
18. M. V. PENTKOVSKI	Nomograme.
19. A. KAHANE	Elemente din teoria congruențelor de drepte.
20. GH. ȚIȚEICA	Culegere de probleme de geometrie, (revăzută și completată de G. D. SIMIONESCU).
21. A. HALANAY	Introducere în teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale.
22. N. STANESCU	Electronul.
23. V. SERGIESCU	Introducere în fizica solidului.
24. G. N. BERMAN	Cicloida.
25. C. BORȘ	Noțiuni de geometrie proiectivă.
26. AL. SANIELEVICI	Introducere în radioactivitate.
27. M. HEROVANU	Introducere în fizica atmosferei.
28. C. G. BEDREAG	Bibliografia fizicii romîne.
29. I. S. DUBNOV	Erori în demonstrațiile geometrice.
31. C. POPOVICI	Stelele, date fizice, structura internă, originea și evoluția lor.
32. C. DRIMBA	Elemente de mecanică cerească.
33. C. IONESCU-BUJOR	Elemente de transformări geometrice (I).
34. NICOLAE MILEA	Elemente de geomagnetism.
35. GH. A. CHIȚEI	Metode pentru rezolvarea problemelor de aritmetică.
36. G. PETRESCU	Cutremure de pămînt.
37. C. IONESCU-BUJOR	Elemente de transformări geometrice (II).
38. O. SACTER	Olimpiade matematice.
39. A. I. MARKUȘEVICI	Numere complexe și reprezentări conforme.
40. I. S. GRADSTEIN	Teorema directă și reciprocă.
41. A. I. HINCIN	Fracții continue.
42. V. A. USPENSKI	Unele aplicații ale mecanicii în matematică.
43. V. G. BOLTEANSKI	Ce este derivarea?
44. G. N. BERMAN	Despre numere și studiul numerelor.

Litografia și Tipografia Învățămîntului. — c. 1326

Lei 1,50

E 1426

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE
DIN R.P.R.

GAZETA MATEMATICĂ ȘI FIZICĂ

(SERIA B)

Anul XII august 1961

8

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

(SERIA B)

Anul XII, nr. 8 august 1961

SUMARUL

		Pag.
1.	Schemele de contacte şi algebrele lui Boole de prof. univ. Adolf Haimovici	449
2.	Mişcarea relativă de prof. Gh. Vieroşanu	460
3.	André Marie Ampère de prof. dr. ing. Ion S. Antoniu	468
4.	Probleme rezolvate (4355; 4356; 4358; 4359; 4360; 4361; 4362; 4364; 4365; 4367; 4368; 4369; 4370; 4372; 4373; 4375; 4385; 4390; 4391; 4393; 4394)	477
5.	Chestiuni de examen (4823—4834)	490
6.	Probleme propuse (4835—4867)	493
7.	Exerciţii şi probleme propuse pentru şcoala de 7 ani (E: 1714 — E: 1726)	499
8.	Despre activitatea extraşcolară la matematici a cercului „Dimitrie Pompeiu"	501
9.	Cărţi noi	503
10.	Rubrica rezolvitorilor de probleme	504

ANUL XII — 8 — AUGUST

COMITETUL DE REDACŢIE

Ailincăi M., profesoară; *Atanasiu V.*, lector, redactor pentru fizică; *Boiangiu D.*, lector; *Ionescu-Bujor C.*, prof. univ.; *Ionescu-Ţiu C.*, profesor, redactor pentru matematică; *Manolescu Şt.*, profesoară; *Muşat I.*, profesor; *Petrovanu A.*, profesor; *Sacter O.*, conf. univ., redactor şef; *Simionescu D. Gh.*, conf. univ.; *Csiki Zoltan*, asistent.

REDACŢIA: Str. Academiei, 14 — Tel. 14.46.53 — Bucureşti 1

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar putea interesa redacţia noastră se vor trimite pe adresa de mai sus.

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

(SERIA B)

Anul XII, nr. 8 august 1961

SCHEMELE CU CONTACTE ŞI ALGEBRELE LUI BOOLE

ADOLF HAIMOVICI, prof. univ., Iaşi

Este bine cunoscut că matematica s-a dezvoltat în strînsă legătură cu tehnica ; de foarte multe ori, noţiuni matematice abstracte au apărut ca urmare a dezvoltării tehnicii şi invers, probleme puse de tehnică au apărut şi capătă soluţii din partea matematicii.

În ultimul timp, o noţiune matematică introdusă de mult în ştiinţă, aceea de „algebră a lui Boole", şi-a găsit aplicaţii în tehnica realizării unor scheme electrice cu funcţionare prescrisă, scheme care se întîlnesc, de exemplu, în centralele telefonice automate. Astfel, operaţii pe care tehnicienii le efectuau în mod empiric, au căpătat o explicaţie teoretică, permiţînd progresul tehnicii pusă acum în faţa unor probleme pentru care o soluţionare empirică ar fi cu totul insuficientă.

În cele ce urmează, prezentăm cititorului tocmai aplicaţiile despre care am vorbit mai sus. Pentru a uşura înţelegerea expunerii am inversat ordinea istorică. Am început cu schemele electrice şi am arătat cum apare necesitatea de a se utiliza algebra lui Boole. În realitate, noţiunea de „algebră a lui Boole" a apărut independent şi mult înaintea studiului matematic al schemelor electrice.

§ 1. *Noţiuni fundamentale.* În cele ce urmează vom opera cu următoarele noţiuni dintre care, unora, le vom aduce unele precizări.

a) noţiunea de *schemă electrică,* b) noţiunea de *linie conductoare de curent,* c) noţiunea de *întrerupător* sau de *contact.*

Amintim că în tehnică se întîlnesc două categorii de contacte. 1) *contact normal deschis* — este contactul care în stare neacţionată este deschis şi care atunci cînd e acţionat e închis, şi 2) *contact normal închis* — este contactul care în stare neacţionată e închis şi care în stare acţionată e deschis. Vom nota cu litere mici, $a, b, c, \ldots$ contactele normal deschise şi cu $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, contactele normal închise. Vom adopta, în plus, următoarea convenţie : dacă într-o schemă oarecare o aceeaşi literă, de exemplu a, intervine de mai multe ori, vom înţelege că toate contactele notate cu această literă sînt închise sau deschise simultan, adică sînt închise sau deschise cu o aceeaşi manetă ; dacă în aceeaşi schemă se întîlneşte de mai multe ori litera a şi de mai multe ori litera $\bar{a}$, vom înţelege că toate contactele notate cu $\bar{a}$ sînt închise sau sînt deschise simultan, pe cînd cele notate cu a sînt închise atunci cînd primele sînt deschise, şi invers.

d) *Legătura* sau *conexiunea în serie.* Vom nota o schemă formată din două contacte legate în serie cu un punct ; de exemplu, dacă contactul a este legat în serie cu b, schema obţinută se va nota cu $a \cdot b$; uneori vom omite punctul şi vom scrie ab.

e) *Legătura* sau *conexiunea în paralel.* Pe aceasta o vom nota cu semnul $\cup$; dacă contactul a este legat în paralel cu contactul b, se obţine o schemă care se notează cu $a \cup b$.

f) *Noţiunea de dipol* π *cu contacte.* Contactul normal deschis, contactul normal închis, linia conductoare neîntreruptă şi linia conductoare

întreruptă se vor numi, cu un cuvînt, dipoli π simpli cu contacte (dipoli — pentru că au două borne).

Schemele obținute prin legarea în serie sau în paralel a doi dipoli π simpli cu contacte sînt dipoli π cu contacte (fig. 1, 2). Tot așa sînt schemele obținute legînd în serie sau în paralel doi dipoli π cu contacte care nu sînt simpli. Orice dipol π cu contacte se obține repetînd de un număr finit de ori operațiile de conectare, în serie sau în paralel, a doi dipoli π cu contacte.

Vom nota de multe ori, pentru simplificare, un dipol ca un pătrat sau ca un dreptunghi (fig. 3 a) cu două segmente perpendiculare pe două laturi opuse. Vom înțelege că în acest pătrat sau dreptunghi, notat în figură cu A sau cu B, există mai multe legături în serie sau în paralel între diverse contacte; segmentele perpendiculare arată cele două borne ale dipolului.

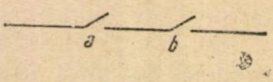


Fig. 1.

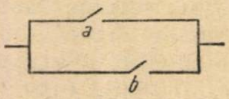


Fig. 2.

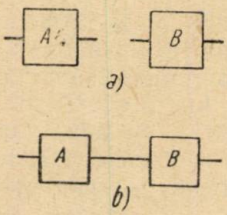


Fig. 3.

Dacă notăm cu A și B doi dipoli π cu contacte, dipolul π obținut legînd în serie A și B se notează $A.B$ sau AB; el este desenat în fig. 3 b; cel obținut legînd în paralel A și B se notează $A \cup B$; el este desenat în fig. 3 c. Evident, un dipol are o *intrare* și o *ieșire*; ca atare, el poate conduce curent în permanență, să fie întrerupt în permanență, sau, în sfîrșit, în unele cazuri să conducă, în altele nu. Dipolul care conduce atunci cînd A nu conduce, și care nu conduce, atunci cînd A conduce, se notează cu $\bar{A}$. Vom arăta mai jos că și acesta este un dipol π cu contacte.

§ 2. *Formula de structură a unui dopil π cu contacte.* Orice dipol care nu e simplu se obține, după definiția pe care am dat-o mai sus, legînd în serie sau în paralel doi dipoli. Așadar, un dipol C care nu e simplu e format din legarea în serie sau în paralel a doi dipoli A și B. El se poate scrie deci, sub forma:

$$C = AB, \text{ sau } C = A \cup B.$$

Dacă A și B sînt dipoli simpli, relațiile de mai sus arată cum se poate obține C din dipoli π simpli. Dacă nu sînt simpli, atunci A și B la rîndul lor, fiind dipoli π, se obțin din alți doi dipoli prin conectare în serie sau în paralel, așadar

$$A \equiv A_1 \cdot A_2, \text{ sau } A \equiv A_1 \cup A_2$$

și

$$B \equiv B_1 \cdot B_2, \text{ sau } B \equiv B_1 \cup B_2.$$

Dacă avem de exemplu,

$$A \equiv A_1 \cdot A_2 \text{ și } B \equiv B_1 \cup B_2.$$

va rezulta:

$$C \equiv (A_1 \cdot A_2)(B_1 \cup B_2).$$

De obicei, se renunță la paranteze pentru A_1A_2 și se scrie

$$C \equiv A_1 A_2 \cdot (B_1 \cup B_2).$$

Dacă A_1, A_2, B_1, B_2 sînt dipoli π simpli, rezultă că am aflat cum se poate monta dipolul C din dipolii simpli. Dacă nu sînt simpli, operația va continua pînă cînd se va ajunge la o formulă numită *formula de structură* a schemei C, care arată cum se poate monta această schemă din dipoli simpli.

De exemplu, dacă considerăm schema din fig. 4, se vede că ea se obține legînd în paralel A cu $\bar{b}$, (cu notațiile din figură), adică:

$$C \equiv A \cup \bar{b}$$

La rîndul său, A este format din legarea în serie a lui A_1 cu A_2:

$$A \equiv A_1 \cdot A_2;$$

A_1 este schema formată legînd în paralel a cu d, adică

$$A_1 \equiv a \cup d,$$

iar A_2 s-a format legînd în serie b cu A_2'': $A_2 \equiv b \cdot A_2''$.

În sfîrșit, A_2'' este dipolul

$$A_2'' = c \cup \bar{c}$$

Așadar,

$$A_2 = b \cdot (c \cup \bar{c}) \quad A \equiv (a \cup d) \cdot b\,(c \cup \bar{c})$$

și

$$C \equiv (a \cup d)\, b\, (c \cup \bar{c}) \cup \bar{b}.$$

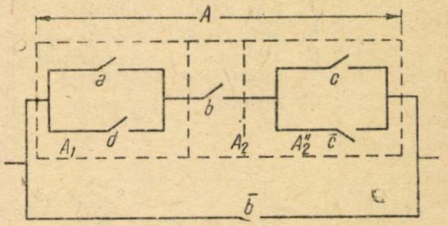


Fig. 4.

Evident, gruparea A_1, A_2, A_2'' s-ar fi putut face și altfel. Vom vedea mai jos că acest mod de grupare nu are importanță. Formula ultimă obținută pentru C este *formula de structură* a dipolului din fig. 4.

Reciproc, dacă se dă o formulă de structură a unei scheme, schema se poate construi. Va trebui în acest scop, să parcurgem în ordine inversă un raționament de tipul celui parcurs mai sus.

§ 3. *Probleme importante în teoria dipolilor* π *cu contacte.* În teoria dipolilor π cu contacte se pun cîteva probleme importante. Iată unele dintre ele:

Problema I. Dat fiind un dipol π cu contacte și cunoscînd pozițiile contactelor $a, b, c, \ldots$ care intră în construcția lui, să se afle dacă dipolul conduce sau nu.

Problema II. Dat fiind un dipol π cu contacte, care trebuie să fie poziția (sau pozițiile) contactelor care intră în construcția lui, pentru ca dipolul să conducă (sau să nu conducă)?

Problema III. Să se construiască un dipol cu funcționare prescrisă: să conducă sau să nu conducă, cînd anumite contacte sînt acționate și altele neacționate.

§ 4. *Echivalența funcțională a dipolilor.* În vederea rezolvării acestor probleme vom introduce în prealabil, noțiunea de *dipoli funcțional echivalenți.* Doi dipoli se zic funcțional echivalenți, dacă, fără a fi neapărat identici, funcționează la fel, adică ambii conduc atunci cînd anumite contacte — aceleași în ambii dipoli —sînt acționate și anumite contacte — aceleași în ambii dipoli — sînt neacționate și ambii nu conduc cînd anumite contacte sînt acționate și altele neacționate, bine înțeles, aceleași în ambii dipoli.

De exemplu, dipolii A și B din fig. 5, care au formulele de structură

$$A \equiv (a \cup b) \cdot c \quad B = a \cdot c \cup b\ c,$$

sînt funcțional echivalenți. Lucrul se poate vedea scriind într-un tablou toate posibilitățile pentru contactele a, b, c și studiind pe cele două scheme dacă A și B conduc sau nu, în același timp. Se obține astfel, următorul rezultat:

	a	b	c	A	B
1	neacționat	neacționat	neacționat	nu conduce	nu conduce
2	acționat	neacționat	neacționat	nu conduce	nu conduce
3	neacționat	acționat	neacționat	nu conduce	nu conduce
4	acționat	acționat	neacționat	nu conduce	nu conduce
5	neacționat	neacționat	acționat	nu conduce	nu conduce
6	acționat	neacționat	acționat	conduce	conduce
7	neacționat	acționat	acționat	conduce	conduce
8	acționat	acționat	acționat	conduce	conduce

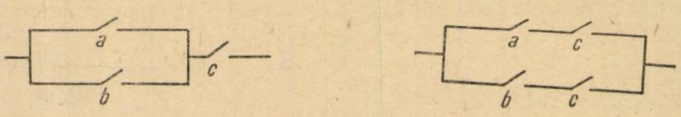


Fig. 5.

Astfel de analize ale dipolilor, pe schemă, sînt de multe ori greoaie. Lucrurile se pot face însă mai ușor, folosind o anumită convenție deosebit de utilă în teoria dipolilor π cu contacte. Această convenție se enunță astfel:

Unui dipol π cu contacte îi asociem numărul 1, dacă el conduce și numărul 0 dacă nu conduce.

În loc să spunem că „îi asociem numărul *1* sau *0*", vom mai spune „*are valoarea 1 sau 0*".

De aici rezultă imediat necesitatea de a găsi numerele asociate dipolilor $\overline{A}$, $A \cdot B$, $A \cup B$, atunci cînd se cunosc numerele asociate lui A și B. Este evident că, pentru $\overline{A}$, numerele asociate vor fi *0* sau *1*, atunci cînd lui A îi asociem *1* sau *0*, cu alte cuvinte, numerele asociate lui $\overline{A}$ se obțin din tabloul I.

(I)

A	0	1
$\overline{A}$	1	0

.

Pentru dipolul A, B (fig. 3 b) numerele asociate se obțin din tabloul (II).

(II)

A	B	$A \cdot B$
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

pentru că dipolul C obținut conectînd în serie A cu B conduce numai cînd A și B conduc simultan (are valoarea 1 cînd A și B au simultan valoarea 1) și nu conduce (are valoarea 0) în toate celelalte cazuri. Este evident faptul că valoarea lui $A \cdot B$ este produsul valorii lui A și B, obținut după regula obișnuită a înmulțirii numerelor *0* și *1*.

Pentru dipolul $A \cup B$ (fig. 3 c) numerele asociate (valorile) se obțin din tabloul III:

(III)

A	B	$A \cup B$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1

pentru că dipolul $A \cup B$ conduce atunci cînd măcar unul din dipolii A sau B conduc.

Observație. Tabloul (I) stabilește o corespondență între valorile pe care le ia $\bar{A}$ și cele pe care le ia A. Putem interpreta litera A, care pînă acum reprezenta un dipol, și ca o *variabilă* care poate lua valorile 0 sau 1; la fel $\bar{A}$. În loc să spunem că A și $\bar{A}$ iau valorile 0 sau 1, vom spune că A și $\bar{A}$ iau valori în L_2, înțelegînd prin L_2 mulțimea formată din numerele 0 și 1. Corespondența între $\bar{A}$ și A este atunci o funcție pe care o vom nota

$$\bar{A} = f(A).$$

Această funcție este definită pe mulțimea L_2 (adică A poate lua valorile 0 sau 1) și ia valorile în L_2 (adică $\bar{A}$ poate și ea lua valorile 0 sau 1). Se mai zice că $\bar{A} = f(A)$ dat de tabloul (I) este *funcția de lucru* a dipolului $\bar{A}$ în raport cu dipolul A.

În mod analog, tabloul (II) stabilește o corespondență între valorile lui $C \equiv A \cdot B$ și perechile de numere *asociate* lui A, respectiv B. Dacă interpretăm ca mai sus A și B și ca variabile care iau valorile 0 sau 1, adică definite fiecare pe L_2, atunci mulțimea perechilor de numere de mai sus se numește *produsul cartezian* al lui L_2 cu el însuși; acesta se notează $L_2 \times L_2$. Atunci, $C = A \cdot B$ este o funcție definită prin tabloul II pe $L_2 \times L_2$ cu valori în L_2 (adică C ia valoarea 0 sau 1, cînd perechea de variabile A și B ia una din perechile de valori (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1).

Vom mai spune că tabloul (II) reprezintă *funcția de lucru a dipolului* $C = A \cdot B$ *în raport cu dipolii* A *și* B.

La fel tabloul (III) reprezintă funcția de lucru a dipolului $A \cup B$, în raport cu dipolii A și B. Și ea este definită pe $L_2 \times L_2$ și ia valori în L_2.

§ 5. *Funcția de lucru a unui dipol.* Să considerăm un dipol A, a cărui formulă de structură este cunoscută; aceasta se obține după cum am văzut, din literele $a, b, \ldots \bar{a}, \bar{b}, \ldots$ legate prin semnele $\cdot$ și $\cup$, fiecare literă reprezentînd contacte. Putem atunci interpreta literele acestea și ca variabile care pot lua valori în L_2. Expresiile $A_1 = a.\ b$ sau $A_2 = a \cup b$ sînt pe de o parte noi dipoli, dar ele pot fi considerate ca valori ale dipolului A_1 sau A_2 cînd a și b iau valori în L_2. Atunci $A_1 = a.b$ și $A_2 = a \cup b$ *sînt funcțiile de lucru* ale unor dipoli obținuți prin montarea contactelor a și b în serie sau paralel. Cu acestea, prin montare în serie sau în paralel, se obțin formulele de structură ale altor dipoli π oarecari. Și acestea pot fi interpretate ca funcțiile de lucru ale noilor dipoli.

Se poate spune deci, în general, că dacă în formula de structură a unui dipol considerăm cele n litere $a, b, \ldots$ ca variabile în L_2, atunci fiecărei n-uple de numere 0 sau 1 (0 sau 1 pentru a; 0 sau 1 pentru $b, \ldots$, 0 sau 1 pentru l) îi *corespunde* un număr pentru dipol. Dacă valoarea dipolului este 1 pentru o n-uplă de numere, atunci el conduce atunci cînd a ia prima valoare a n-uplei, b ia a doua, ..., l ia a n-a valoare. Dacă e zero, atunci el nu conduce. Am stabilit deci, cu ajutorul formulei de structură, o corespondență între produsul cartezian $L_2 \times L_2 \ldots \times L_2$

(de n ori) și L_2. Această corespondență reprezintă *funcția de lucru* a dipolului. Vom mai spune că *funcția* de lucru e *generată* de formula de structură.

Exemplu. Să considerăm expresia algebrică:

$$E = a\,(b \cup \bar{c}) \cdot (b\,c \cup a),$$

care e formula de structură a dipolului din fig. 6. Ea generează funcția

$$f\,(a, b, c) = a\,(b \cup \bar{c}) \cdot (b\,c \cup a),$$

definită în $L_2 \times L_2 \times L_2$ (pentru ternele de numere 0 sau 1) cu valori în L_2. Cunoscînd valorile lui a, b, c, se poate afla valoarea lui $f(a, b, c)$, adică se poate afla dacă dipolul conduce sau nu.

Să aflăm de exemplu, $f(1, 0, 1)$. Această valoare este

$$f\,(1,0,1) = 1\,(0 \cup 0) \cdot (0 \cdot 1 \cup 1) = (1 \cdot 0) \cdot (0 \cup 1) = 0 \cdot 1 = 0,$$

cu alte cuvinte dipolul nu conduce. Cititorul este îndemnat să calculeze valorile lui $f(a, b, c)$ în celelalte șapte cazuri posibile.

Cu aceasta s-a rezolvat problema I, pusă mai sus.

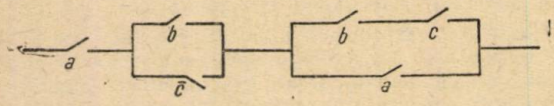


Fig. 6.

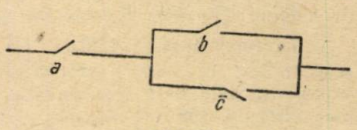


Fig. 7.

Se poate întîmpla ca doi dipoli să fie funcțional echivalenți. Va rezulta atunci că funcțiile lor de lucru, fie ele f și g, adică, corespondențele dintre mulțimea valorilor pe care le iau variabilele și aceea a valorilor pe care la ia f respectiv g, să fie aceleași. Ca exemplu, să considerăm și expresia

$$E' = a\,(b \cup \bar{c}),$$

care e formula de structură a dipolului din fig. 7.

Fie $g(a, b, c)$ funcția de lucru a dipolului de mai sus, adică

$$g\,(a, b, c) = a\,(b \cup \bar{c}).$$

Se vede ușor că

$$g\,(1, 0, 1) = 1\,(0 \cup 0) = 1 \cdot 0 = 0.$$

Se va constata de către cititor că

$$\begin{aligned} g\,(0,0,0) &= f\,(0,0,0) = 0 \quad , \quad g\,(0,0,1) = f\,(0,0,1) = 0, \\ g\,(1,0,0) &= f\,(1,0,0) = 1 \quad , \quad g\,(1,0,1) = f\,(1,0,1) = 0, \\ g\,(0,1,0) &= f\,(0,1,0) = 0 \quad , \quad g\,(0,1,1) = f\,(0,1,1) = 0, \\ g\,(1,1,0) &= f\,(1,1,0) = 1 \quad , \quad g\,(1,1,1) = f\,(1,1,1) = 1. \end{aligned}$$

Cei doi dipoli *funcționează* la fel, adică sînt simultan închiși sau deschiși și funcțiile lor de lucru, adică corespondențele pe care le stabilesc f și g între $L_2 \times L_2 \times L_2$ și L_2 sînt aceleași, fără ca expresiile lor algebrice să fie aceleași (adică, fără ca schemele să fie identice).

Cu această ocazie se pune *problema simplificării schemelor*, adică a găsirii unei scheme care să fie funcțional echivalentă cu o schemă dată, dar care să fie mai simplă decît ea; noțiunea de „simplitate" a unei scheme poate avea mai multe sensuri; de exemplu, „mai simplu" poate însemna: „cu mai puține contacte" sau „cu linii conductoare", „de lungime mai scurtă", sau „cu mai puține suduri" etc.

§ 6. *Reguli fundamentale de calcul.* Pentru simplificarea schemelor va trebui să cunoaștem cîteva reguli de calcul simple, obținute ca urmare a convenției fundamentale făcute de noi în § 4 și a noțiunii de echivalență. Iată aceste reguli:

1)	$a \cdot a = a$	1′)	$a \cup a = a$ (idempotența)
2)	$a \cdot b = b \cdot a$	2′)	$a \cup b = b \cup a$ (comutativitatea)
3)	$a(bc) = (ab)c$	3′)	$a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c$ (asociativitatea)
4)	$a(b \cup c) = a \cdot b \cup a \cdot c$,	4′)	$a \cup bc = (a \cup b)(a \cup c)$ (distributivitatea)
5)	$a(a \cup b) = a$	5′)	$a \cup ab = a$ (absorbția)
6)	$0 \cdot a = 0$	6′)	$0 \cup a = a$
7)	$1 \cdot a = a$	7)	$a \cup 1 = 1$
8)	$a \cdot \bar{a} = 0$	8′)	$a \cup \bar{a} = 1$
9)	$\bar{\bar{a}} = a$		—
10)	$\overline{a \cdot b} = \bar{a} \cup \bar{b}$	10′)	$\overline{a \cup b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$ (regulile lui de Morgan)

Primele 9 reguli de pe coloana I și 8 de pe coloana II-a, se verifică fie arătînd că dipolul a cărui formulă de structură se găsește în membrul I, *funcționează* la fel ca cel a cărui formulă de structură se găsește în membrul al II-lea, fie prin verificare numerică, arătînd că *funcțiile de lucru* ale celor doi dipoli din membrul I și al II-lea sînt egale. Semnul = din aceste relații trebuie înțeles ca indicînd echivalența funcțională a dipolilor sau egalitatea funcțiilor de lucru.

Observație. Regulile de mai sus rămîn valabile dacă dipolii simpli a, b, c se înlocuiesc cu dipoli π oarecare A, B, C. Verificarea se face la fel ca mai sus.

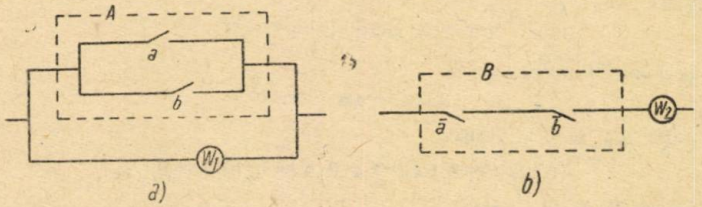


Fig. 8.

Rămîne să verificăm regulile 10) și 10′). Să ne ocupăm de regula 10). În acest scop să considerăm dipolii din fig. 8 a și fig. 8 b, în care W_1 și W_2 sînt variabile asociate unor lămpi considerate și ele ca dipoli (dreptunghiurile punctate reprezintă dipolii A și B). Să presupunem că la extremitățile ambilor dipoli există diferență de potențial. Atunci din prima schemă se vede că:

$$W_1 = \bar{A},$$

pentru că lampa W_1 e aprinsă atunci cînd prin A nu trece curent și e stinsă cînd prin A trece curent. Din a doua schemă se vede că

$$W_2 = B.$$

În adevăr, dacă trece (sau nu trece) curent prin lampa W_2, atunci trece (sau respectiv, nu trece) prin B.

Pe de altă parte, $A = a \cup b$, $B = \bar{a}\bar{b}$; dar W_1 și W_2 funcționează la fel. În adevăr, dacă ambele contacte a, b, sînt deschise, A nu conduce și W_1 e aprinsă. În acest caz însă, $\bar{a}$ și $\bar{b}$ sînt închise și W_2 e aprinsă. Dacă unul măcar din contactele a, b, e închis, A conduce și W_1 e stinsă. Dar atunci măcar unul din $\bar{a}$ și $\bar{b}$ e deschis, B e deschis și, deci, W_2 e stinsă. Așadar,

$$W_1 = W_2 \text{ și deci: } \bar{A} = B.$$

adică

$$\overline{a \cup b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$$

În mod analog se verifică:

$$\overline{a \cdot b} = \bar{a} \cup \bar{b}.$$

§ 7. *Echivalența algebrică a schemelor.* Două scheme sînt algebric echivalente atunci cînd folosind regulile 1), 1'), 2, 2'), ..., 10'), formula de structură a uneia se reduce la formula de structură a celeilalte.

Ca exemplu, se poate arăta că expresiile E și E', utilizate mai sus, sînt algebric echivalente. Să pornim de la expresia E

$$E = a\,(b \cup \bar{c}) \cdot (b \cdot c \cup a).$$

Folosind regula 4, $a \cdot (b \cup \bar{c}) = a \cdot b \cup a \cdot \bar{c}$ și deci,

$$E = (a\,b \cup a\,\bar{c})\,(bc \cup a).$$

Considerînd $A = b \cdot c \cup a, ab = B, a\bar{c} = C, E$ se scrie

$$E = (B \cup C) \cdot A,$$

sau, folosind regula 2):

$$E = A\,(B \cup C).$$

Folosind 4):

$$E = A \cdot B \cup A \cdot C = B \cdot A \cup C \cdot A,$$

adică:

$$E = ab \cdot (bc \cup a) \cup a\,\bar{c}\,(bc \cup a).$$

Folosind din nou 4):

$$E = (ab\,b\,c \cup ab\,a) \cup (a\,\bar{c}\,b\,c \cup a\,\bar{c}\,a).$$

Din 1) urmează:

$$bb = b, \text{ deci } abbc = abc.$$

Folosind 2) și apoi 1) avem:

$$a\,b\,a = a\,a\,b = ab.$$

Folosind 2), apoi 8) și 6') avem:

$$a\,\bar{c}\,b\,c = a\,\bar{c}\,c\,b = a \cdot 0 \cdot b = (a\,b)\,0 = 0.$$

În sfîrșit, folosind 2) și 1) avem:

$$a\,\bar{c}\,a = a\,a\,\bar{c} = a\,\bar{c}.$$

Așadar:

$$E = (a\,b\,c \cup a\,b) \cup (0 \cup a\,\bar{c}).$$

Considerînd $ab = D$ și folosind 5'), avem:

$$a\,b\,c \cup a\,b = D\,c \cup D = D = ab.$$

Folosind 6'),

$$0 \cup a\,\bar{c} = a\,\bar{c}$$

și deci:

$$E = a\,b \cup a\,\bar{c} = a \cdot (b \cup \bar{c}).$$

Așadar, E este algebric echivalent cu E'. De data aceasta, semnul $=$ a însemnat „algebric echivalent".

Alt exemplu. Fie expresia

(1) $$E = \overline{(\bar{a} \cup b\,\bar{c})}\,d \cup (b\,c \cup \bar{d}) \cdot a.$$

Această expresie se poate simplifica astfel: Folosind 10) și 10'), 9) și apoi 4):

$$\overline{(\bar{a} \cup b\,\bar{c})}\,d = \overline{(\bar{a} \cup b\,\bar{c})} \cup \bar{d} = \bar{\bar{a}} \cdot \overline{b\,\bar{c}} \cup \bar{d} = a \cdot (\bar{b} \cup \bar{\bar{c}}) \cup \bar{d} =$$

$$= (a\,\bar{b} \cup a\,c) \cup \bar{d} = a\,\bar{b} \cup a\,c \cup \bar{d},$$

și

$$(b\,c \cup \bar{d}) \cdot a = a\,b\,c \cup a\,\bar{d};$$

aşadar:

$$E = a\bar{b} \cup ac \cup \bar{d} \cup abc \cup a\bar{d}.$$

Schimbînd ordinea termenilor

$$E = ac \cup abc \cup \bar{d} \cup a\bar{d} \cup a\bar{b}.$$

Folosind 5'),

$$ac \cup acb = ac,$$

$$\bar{d} \cup a\bar{d} = \bar{d}$$

şi deci:

(2) $$E = ac \cup \bar{d} \cup a\bar{b}.$$

Aceasta din urmă este algebric echivalentă cu prima şi după cum se poate vedea printr-un raţionament simplu, cele două scheme care au formulele de structură (1) şi (2) sînt funcţional echivalente. Se poate chiar enunţa, în urma unui raţionament simplu, teorema generală:

Două expresii algebric echivalente generează funcţii de lucru egale, adică sînt funcţional echivalente.

Aceeaşi expresie (2) se poate scrie şi sub altă formă. Să observăm că:

$$E = (ac \cup a\bar{b}) \cup \bar{d} = a(c \cup \bar{b}) \cup \bar{d}.$$

Folosind 4') şi considerînd $c \cup \bar{b}$ ca un dipol unic, se găseşte

3) $$E = (a \cup \bar{d}) \cdot (c \cup \bar{b} \cup \bar{d}).$$

Expresia (2) se caracterizează prin aceea că ea cuprinde trei termeni legaţi prin semnul $\cup$ (conexiune în paralel), fiecare termen cuprinzînd literele a sau $\bar{a}$, b sau $\bar{b}$, c sau $\bar{c}$, d sau $\bar{d}$, legate prin semnul $\cdot$ (conexiune în serie). Ea reprezintă un dipol π format din trei alţi dipoli π legaţi în paralel, fiecare din aceştia avînd contacte legate în serie.

Expresia (3) cuprinde doi termeni legaţi prin $\cdot$ (serie), fiecare din aceştia cuprinzînd literele a, $\bar{b}$, $\bar{c}$, d sau respectiv a, b, c, d legate prin $\cup$ (paralel). Ea reprezintă un dipol π format din alţi doi dipoli π, formaţi la rîndul lor din contacte legate în paralel.

Se poate demonstra că orice expresie algebrică este echivalentă cu o altă expresie algebrică formată din mai mulţi termeni legaţi prin $\cup$ (paralel), fiecare termen fiind format din litere (barate sau nu) legate prin semnul $\cdot$ (serie) sau cu o altă expresie algebrică formată din paranteze legate prin $\cdot$ (serie), în fiecare paranteză aflîndu-se litere, barate sau nu, legate prin $\cup$ (paralel).

Se demonstrează în teoria dipolilor π şi teorema următoare, ceva mai grea, pe care noi nu o demonstrăm:

Doi dipoli funcţional echivalenţi sînt şi algebric echivalenţi.

Cu ajutorul acestor teoreme generale se justifică şi observaţia de la sfîrşitul § 2, după care, atunci cînd se scrie formula de lucru a unui dipol, nu are importanţă modul de grupare a dipolilor.

§ 8. *Rezolvarea problemei a II-a.* Cu aceste pregătiri putem trece la rezolvarea problemei a II-a. Şi pe aceasta o vom rezolva printr-un exemplu, teoria generală tratîndu-se pe aceeaşi cale ca şi aceea pe care o vom folosi în exemplul nostru.

Să considerăm un dipol π a cărui formulă e dată în (1). În ce caz acest dipol conduce şi în ce caz nu conduce? Să vedem, în primul rînd, cînd conduce; cu alte cuvinte, cînd funcţia de lucru a dipolului are valoarea 1. Pentru rezolvarea problemei vom face

diverse transformări asupra expresiei (1) și o vom aduce la forma (2). Se pune deci întrebarea, ce valori trebuie atribuite contactelor (ce poziție trebuie să aibă contactele) pentru ca

$$a\,c \cup \bar{d} \cup a\,\bar{b} = 1.$$

Or, pentru ca o astfel de expresie să fie 1, trebuie ca măcar un termen să fie 1, adică măcar una din egalitățile

$$ac = 1,\ \bar{d} = 1,\ a\,\bar{b} = 1,$$

să fie satisfăcute. Dar ac este 1 numai cînd $a = c = 1$, $\bar{d} = 1$, cînd $d = 0$, $a\bar{b} = 1$ cînd $a = b = 1$, adică $a = 1$, $b = 0$. Așadar, soluțiile problemei noastre sînt:

1) $a = c = 1$ b și d, oarecari,
2) $d = 0$ a, b, c, „
3) $a = 1, b = 0$ c, d. „

Să vedem, acum, cînd nu conduce dipolul nostru. Pentru aceasta, este mai comod să folosim expresia (3) echivalentă cu (1). Se pune, deci, problema rezolvării ecuației

$$(a \cup \bar{d})(c \cup \bar{b} \cup \bar{d}) = 0.$$

Această egalitate este realizată atunci cînd măcar unul din termeni este zero, adică atunci cînd măcar una din egalitățile

$$a \cup \bar{d} = 0,$$

$$c \cup \bar{b} \cup \bar{d} = 0$$

este satisfăcută.

Prima este satisfăcută atunci cînd

$$a = \bar{d} = 0 \text{ oricare ar fi } b \text{ și } c,$$

și a doua, atunci cînd

$$c = \bar{b} = \bar{d} = 0 \text{ oricare ar fi } a.$$

Rezultă, deci, că soluțiile problemei noastre sînt:

1) $a = 0,\ d = 1,$ b și c — oarecare

și

2) $b = 1,\ c = 0,\ d = 1,$ a — oarecare.

§ 9. *Rezolvarea problemei a III-a.* Considerațiunile de mai sus servesc și la rezolvarea problemei a III-a. Și pe aceasta o vom trata doar printr-un exemplu: Să se găsească dipolul π cu trei contacte a, b, c care realizează următoarea funcțiune:

1) Cînd contactele sînt toate sau două dintre ele închise, dipolul nu conduce;

2) Cînd nici unul sau numai unul din contacte este închis, dipolul conduce.

Funcția de lucru a acestui dipol va depinde de cele trei contacte, adică va fi $f(a, b, c)$, cu precizările din problemă:

$$f(0,0,0) = 1,\quad f(1,1,1) = 0,$$

$$f(1,0,0) = 1,\quad f(1,0,1) = 0,$$

$$f(0,1,0) = 1,\quad f(1,1,0) = 0,$$

$$f(0,0,1) = 1,\quad f(0,1,1) = 0.$$

Să încercăm să generăm această funcție cu o expresie de forma

$$f(a,b,c) = A\,a\,b\,c \cup B_1\,\bar{a}\,b\,c \cup B_2\,a\,\bar{b}\,c \cup B_3\,a\,b\,\bar{c} \cup C_1\,a\,\bar{b}\,\bar{c} \cup C_2\,\bar{a}\,b\,c \cup C_3\,\bar{a}\,\bar{b}\,c \cup D\,\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}.$$

unde A, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3, D sînt numere necunoscute avînd valoarea 0 sau 1. Aflarea lor se va face prin metoda coeficienților nedeterminați, în modul următor:

a) Să presupunem că $a = b = c = 0$. Atunci, membrul I are valoarea 1, iar membrul II se reduce, folosind regulile de calcul, la D. În adevăr, avem:

$$a\,b\,c = 0\cdot 0\cdot 0 = 0,\ \bar{a}\,b\,c = 1\cdot 0\cdot 0 = 0, \ldots$$

$$\bar{a}\,\bar{b}\,c = 1\cdot 0\cdot 1\cdot 0 = 0,\ \bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c} = 1\cdot 1\cdot 1 = 1$$

$$f(0,0,0) = 1 = 0 \cup 0 \cup \ldots \cup 0 \cup D\,1 = 0 \cup D\,1 = D;$$

așadar:

$$D = 1.$$

b) Să presupunem acum $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$. Membrul I are valoarea 1 iar membrul al doilea, calculat ca mai sus, se reduce la C_1. Deci,

$$C_1 = 1.$$

În mod analog se găsește $C_2 = C_3 = 1$.

c) Să presupunem $a = b = 1$, $c = 0$. Membrul I e nul, iar membrul al doilea se reduce la B_3. Deci

$$B_3 = 0,$$

și analog se găsește:

$$B_1 = B_2 = 0.$$

d) Să presupunem în sfîrșit, $a = b = c = 1$. Membrul I e nul, iar membrul al doilea este A. Deci,

$$A = 0.$$

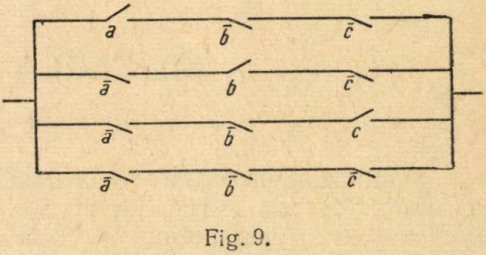


Fig. 9.

Așadar, formula de structură a dipolului nostru e

$$E = \bar{a}\,\bar{b}\,c \cup a\,\bar{b}\,\bar{c} \cup \bar{a}\,b\,\bar{c} \cup \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$$

iar schema este dată în fig. 9.

Bineînțeles aceasta se mai poate simplifica: așa de exemplu, se știe (vezi regula 1) că $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \bar{a}bc \cup \bar{a}\bar{b}c \cup \bar{a}\bar{b}\bar{c}$. Înlocuind aceasta în E avem:

$$E = \bar{a}\,\bar{b}\,c \cup \bar{a}\,b\,\bar{c} \cup \bar{a}\,\bar{b}\,c \cup \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} \cup \bar{a}\,b\,\bar{c} \cup a\,\bar{b}\,\bar{c} =$$

$$= (\bar{a}\,\bar{b}\,c \cup \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}) \cup (\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} \cup \bar{a}\,b\,\bar{c}) \cup (a\,\bar{b}\,\bar{c} \cup \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}) =$$

$$= \bar{a}\,\bar{b}\,(c \cup \bar{c}) \cup \bar{a}\,\bar{c}\,(b \cup \bar{b}) \cup \bar{b}\,\bar{c}\,(\bar{a} \cup a)$$

Cum însă $a \cup \bar{a} = b \cup \bar{b} = c \cup \bar{c} = 1$, rezultă:

$$E = \bar{a}\,\bar{b} \cup \bar{b}\,\bar{c} \cup \bar{a}\,\bar{c}.$$

Observații. Dacă vom avea de construit un dipol cu 4 contacte, expresia pe care o vom utiliza pentru generarea funcției de lucru va avea forma de mai sus, dar va conține 16 termeni, fiecare conținînd o singură dată una din literele *a, b, c, d* (cu bară sau nu). (Se poate calcula că sînt 16 astfel de termeni). Dacă va trebui să construim un dipol cu *n* contacte, *a, b,...*, vom încerca o expresie cu 2^n termeni, fiecare conținînd literele *a, b,...* (barate sau nu). Se poate demonstra că o astfel de expresie generează întotdeauna funcția de lucru a unui dipol cu funcție prescrisă.

§ 10. *Algebra lui Boole.* Pentru studiul problemelor I, II și III am utilizat un calcul convenabil cu numerele 0 și 1, între care se introduc regulile de operație definite prin tablourile (I), (II), (III) din § 4, reguli de operații care satisfac condițiile fundamentale 1) ... 10') date în § 6. Mulțimea de numere 0,1 pe care am notat-o L_2 și regulile de calcul astfel definite constituie o Algebră a lui Boole. Astfel de algebre au fost studiate de George Boole în 1847, pentru a exprima matematic legile logicii formale.

După cum se vede, anumite legi matematice abstracte și-au găsit aplicații mult mai tîrziu (în 1910 — Ehrenfest, în 1938 Șestakov și Shannon) în probleme foarte concrete ale dipolilor cu contacte. La noi, acad. *Gr. C. Moisil* și elevii lui au adus contribuții importante la teoria algebrică a schemelor de tipul celor studiate mai sus. Pentru o tratare mai aprofundată a problemelor din acest articol să se consulte:

1) *Gr. C. Moisil:* Scheme cu comandă directă, cu contacte și relee. Editura Academiei R.P.R., 1959.
2) *Gr. C. Moisil:* Teoria algebrică a mecanismelor automate, Editura Tehnică, 1959.

MIȘCAREA RELATIVĂ

Prof. *Gh. Vieroșanu*

Manualele elementare de mecanică abordează problema relativității mișcărilor dar nu adîncesc implicația pe care o are această relativitate în fundamentarea unor noțiuni de bază ale mecanicii, cum sînt inerția, forța, relația dintre forță și accelerație, forțele zise de inerție, greutatea corpurilor pe Pămînt etc.

Prin articolul de față vom încerca să lămurim, într-un mod pe cît se poate mai simplu, această implicație.

Sisteme de referință. După cum se știe, mișcarea unui mobil constă din variația în timp a poziției sale în raport cu un sistem de referință alcătuit din trei axe de coordonate necoplanare legate rigid de unul sau mai multe corpuri materiale. În studiul mișcării mobilului, sistemul de referință se consideră fix. În realitate, nici un sistem de referință din Univers nu este absolut fix, ci se mișcă în raport cu alte sisteme de referință.

În ordinea sistemelor de referință se poate face însă o ierarhizare. Astfel, un sistem de axe solidar cu sistemul solar [1] este de preferat unui

[1] Se poate considera ca sistem solar un sistem de trei axe rectangulare avînd originea *O* în centrul maselor sistemului solar (un punct din apropierea centrului Soarelui), axele *OX* și *OY* cuprinse în planul orbitei Pămîntului, una paralelă cu linia absciselor și alta perpendiculară pe aceasta, iar axa *OZ* perpendiculară pe planul orbitei.

sistem de axe solidar cu Pămîntul, iar acesta din urmă este de preferat unui sistem de axe solidar cu un vehicul.

O deosebită importanță prezintă clasificarea sistemelor de referință în *sisteme inerțiale* și *sisteme neinerțiale.*

Un sistem de referință este inerțial, dacă satisface relația fundamentală $\bar{F} = m\bar{a}$, pentru orice mișcare raportată la el, $\bar{F}$ fiind forța reală evidentă aplicată asupra mobilului, m masa mobilului și a accelerația dobîndită. Dacă $\bar{F} = 0$, și $\bar{a} = 0$, iar mobilul se află, față de sistemul inerțial, în repaus sau în mișcare rectilinie uniformă (legea inerției).

Sistemele de axe solidare cu sistemul solar sau cu stelele zise fixe se comportă ca sisteme inerțiale. Orice sistem care execută o mișcare de translație rectilinie și uniformă față de un sistem inerțial este și el, la rîndul său, tot inerțial.

Sistemele de referință care se mișcă cu accelerație față de sistemele inerțiale sînt sisteme neinerțiale. Sistemele neinerțiale se caracterizează prin aceea că nu satisfac relația fundamentală pentru toate mișcările raportate la ele.

Un sistem de axe solidar cu Pămîntul este un sistem neinerțial, deoarece există unele mișcări raportate la Pămînt în care se observă o variație a vitezei mobilului (deci o accelerație), fără să se observe intervenția unei forțe reale evidente. Menționăm printre acestea: rotația planului de oscilație a unui pendul (experiența lui Foucault), variația accelerației gravitației cu latitudinea, abaterea cursurilor de apă și a curenților de aer de la direcția lor inițială, abaterea corpurilor în căderea lor de la verticală etc.

În practică, Pămîntul se tratează însă ca un sistem inerțial, deoarece nu diferă prea mult de sistemele inerțiale.

Un sistem de axe solidar cu un vehicul este prin excelență un sistem neinerțial. Aplecarea călătorului pe spate, în față sau lateral, cînd vehiculul accelerează, frînează sau cotește, înseamnă variații ale vitezei călătorului, în raport cu vehiculul, care nu se pot justifica prin intervenția asupra călătorului a unei forțe reale evidente.

Mișcarea relativă. Tema cunoscută în mecanica newtoniană sub titlul de „mișcarea relativă" constă din următoarele:

Fiind date un mobil M și două sisteme de referință S_1 și S_2, să se studieze relația dintre cele două mișcări ale mobilului M față de cele două sisteme și mișcarea unuia din sisteme față de celălalt, considerat fix.

Vom examina cazul care prezintă o importanță practică deosebită, *cînd unul din sisteme este inerțial iar celălalt neinerțial.*

Vom considera sistemul inerțial ca fiind fix, îl vom numi *sistem absolut* și îl vom nota cu S_a. Vom numi pe celălalt sistem, care se mișcă cu accelerație față de S_a, *sistem relativ* și îl vom nota cu S_r.

Mișcarea mobilului M față de sistemul absolut S_a se numește *mișcare absolută,* mișcarea aceluiași mobil M față de sistemul relativ S_r se numește *mișcare relativă,* iar mișcarea sistemului relativ S_r față de sistemul absolut S_a se numește *mișcare de transport* (sistemul S_r transportă, în mișcarea sa față de S_a, mobilul M dimpreună cu mișcarea sa relativă).

Se poate ușor observa că mișcarea absolută a mobilului M rezultă din compunerea mișcării lui relative cu mișcarea de transport.

Aici ne vom mărgini să studiem relațiile dintre vitezele, dintre accelerațiile și dintre forțele care intervin în cele trei mișcări: absolută, relativă și de transport.

Pentru simplificarea studiului, vom lua ca mobil, un punct material[1] M, iar în ce privește mișcarea de transport, vom lua în considerație punctul geometric M_r solidar (invariabil legat) cu sistemul de referință S_r și care coincide la momentul dat cu punctul material M.

Viteza $\bar{v}_a$ și accelerația $\bar{a}_a$ din mișcarea absolută a mobilului (punctului material M) se numesc respectiv *viteza absolută și accelerația absolută;* viteza $\bar{v}_r$ și accelerația a_r din mișcarea relativă a aceluiași mobil M se numesc respectiv *viteza relativă* și *accelerația relativă*, iar viteza $\bar{v}_t$ și accelerația $\bar{a}_t$ din mișcarea de transport (a punctului geometric M_r față de S_a) se numesc respectiv *viteza de transport* și *accelerația de transport.*

Relația dintre viteze. Experiența și teoria arată că între vitezele absolută, relativă și de transport, de la un moment dat, există totdeauna relația:

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t \tag{1}$$

Relația (1) arată că viteza relativă $\bar{v}_r$ adunată vectorial cu viteza de transport $\bar{v}_t$ *completează* totdeauna viteza absolută $\bar{v}_a$.

Relația dintre accelerații. Experiența și teoria arată că relația dintre accelerațiile absolută, relativă și de transport, de la un moment dat, nu se mai aseamănă în toate cazurile, cu relația (1) a vitezelor. Dacă mișcarea de transport a sistemului de referință S_r este combinată și cu o rotație, accelerația relativă a_r adunată vectorial cu accelerația de transport $\bar{a}_t$ nu mai completează, în cazul general, accelerația absolută a_a. Pentru completare, este nevoie să se mai adauge vectorial o *accelerație complementară* $\bar{a}_c$, astfel că relația dintre accelerații devine:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_c \tag{2}$$

Accelerația complementară $\bar{a}_c$ se mai numește și *accelerația lui Coriolis,* după numele celui care a introdus-o cel dintîi în calcule.

În ce privește accelerația de transport $\bar{a}_t$, este clar că ea provine din variația în timp a vitezei de transport a punctului geometric M_r bine determinat (cel care coincide cu M la momentul dat). Accelerația $\bar{a}_t$, este nulă cînd mișcarea de transport a sistemului S_r este o mișcare de translație rectilinie uniformă.

Cum se explică apariția accelerației $\bar{a}_c$ a lui Coriolis?

Se poate observa că, dacă mișcarea de transport a sistemului S_r include și o rotație, punctul material mobil M va întîlni, în mișcarea sa relativă, puncte geometrice M_r (solidare cu sistemul S_r) a căror viteză de transport de la un moment dat variază cu distanța lor față de axa de rotație

[1] Și un corp solid, de orice dimensiuni, se poate asimila în unele împrejurări, spre exemplu cînd execută o mișcare de translație, cu un punct material, considerînd toată masa corpului concentrată în centrul lui.

a sistemului S_r. Această variație a vitezei de transport de-a lungul traiectoriei relative dă naștere accelerației $\bar{a}_c$ a lui Coriolis.

Așa fiind, este evident că accelerația $\bar{a}_c$ este nulă în următoarele cazuri:

1. Cînd mișcarea de transport a sistemului S_r este o mișcare de translație, deoarece în acest caz toate punctele geometrice M_r solidare cu sistemul S_r au la un moment dat aceeași viteză de transport.

2. Cînd mișcarea de transport a sistemului S_r include și o rotație, dar mobilul M se află în repaus relativ. În acest caz, mobilul M coincide tot timpul cu același punct geometric M_r.

3. Cînd mișcarea de transport a sistemului S_r include și o rotație, dar traiectoria relativă a mobilului M este paralelă cu axa de rotație a sistemului S_r. În acest caz, toate punctele geometrice M_r situate pe traiectoria relativă au, la un moment dat, aceeași viteză de transport.

Relația dintre forțe. Aici este vorba de relația dintre forțele aplicate asupra punctului material M, care satisfac relațiile fundamentale ale mecanicii, raportate la cele două sisteme S_a și S_r, adică de relația dintre forța absolută $\bar{F}_a = m\bar{a}_a$ și forța relativă $\bar{F}_r = m\bar{a}_r$, m fiind masa punctului material M. Despre o forță aplicată asupra punctului M_r nu poate fi vorba întrucît punctul M_r este un punct geometric (fără masă).

Relația dintre forțele absolută și relativă aplicate asupra punctului material M de masă m se deduce din relația (2) a accelerațiilor, multiplicînd cu m toți termenii acestei relații:

$$m\bar{a}_a = m\bar{a}_r + m\bar{a}_t + m\bar{a}_c \tag{3}$$

Întrucît ne interesează forța relativă în funcție de forța absolută, vom scrie relația (3) sub forma:

$$m\bar{a}_r = m\bar{a}_a + (-m\bar{a}_t) + (-m\bar{a}_c) \tag{4}$$

Punînd $m\bar{a}_r = \bar{F}_r$, $m\bar{a}_a = \bar{F}_a$, $-m\bar{a}_t = \bar{F}_t$ și $-m\bar{a}_c = \bar{F}_c$, relația (4) devine[1]:

$$\bar{F}_r = \bar{F}_a + \bar{F}_t + \bar{F}_c \tag{5}$$

Relația (5) arată că forța relativă $\bar{F}_r$ se obține adăugînd vectorial la forța absolută $\bar{F}_a$ încă două *forțe complementare* $\bar{F}_t$ și $\bar{F}_c$ denumite respectiv *forța complementară de transport* și *forța complementară a lui Coriolis* (după denumirile accelerațiilor respective $\bar{a}_t$ și $\bar{a}_c$.

Natura și terminologia forțelor $\bar{F}_t$ și $\bar{F}_c$. După cum se știe, forțele propriu zise se datorează acțiunilor reciproce dintre corpuri. Dacă sistemul de referință absolut este inerțial (cum l-am presupus noi [1], forța absolută $\bar{F}_a = m\bar{a}_a$ reprezintă forța *reală* rezultantă pe care exteriorul material o exercită asupra mobilului M.

Ce interpretare se dă forțelor complementare $\bar{F}_t$ și $\bar{F}_c$?

Fizicienii consideră forțele $\bar{F}_t$ și $\bar{F}_c$ *fictive* și le denumesc *forțe de inerție*. Matematicienii (care se ocupă cu mecanica rațională) consideră

---

[1] Termenii $-m\bar{a}_t$ și $-m\bar{a}_c$ din relația (4) reprezintă forțe, deoarece sînt produse ale masei printr-o accelerație.

forțele $\bar{F}_t$ și $\bar{F}_c$ *reale* pentru un observator solidar cu sistemul relativ S_r și *inexistente* pentru un observator solidar cu sistemul absolut S_a și le denumesc *forțe complementare* [1].

Întrucît concepțiile diferite cu privire la natura forțelor F_t și $\bar{F}_c$ și denumirile diferite date acestor forțe provoacă multe confuzii, consider că este necesar să se adopte o concepție materialistă unitară și o denumire de asemenea unitară cu privire la aceste forțe. În acest scop propun următoarele:

Să se considere *reală* forța absolută $\bar{F}_a$ care satisface relația fundamentală $\bar{F}_a = m \cdot \bar{a}_a$ raportată la sistemul de referință absolut *inerțial* și să se considere *aparente* forțele F_t și $\bar{F}_c$ care trebuie adăugate vectorial la forța reală $\bar{F}_a$ pentru a se obține forța relativă $\bar{F}_r$, care satisface relația fundamentală $\bar{F}_r = m\bar{a}_r$ raportată la sistemul relativ *neinerțial*.

Tratarea forțelor $\bar{F}_t = -m\bar{a}_t$ și $\bar{F}_c = -m\bar{a}_c$ ca aparente se justifică prin aceea că și accelerațiile $-\bar{a}_t$ și $-\bar{a}_c$, care li se atribuie, sînt tot aparente. Într-adevăr, accelerațiile $-\bar{a}_t$ și $-\bar{a}_c$ nu sînt accelerațiile proprii ale mobilului M, ci accelerațiile sistemului S_r transferate cu sens contrar asupra mobilului M pentru motivul că sistemul S_r se consideră fix.

Mișcările componente, ale mobilului M față de sistemul S_r, determinate exclusiv de forțele $\bar{F}_t$ și $\bar{F}_c$ sînt tot atît de aparente cum sînt spre exemplu mișcarea Lunii în raport cu norii sau mișcările stîlpilor de telegraf în raport cu trenul cu care călătorim.

În ce privește denumirea de forțe complementare, dată forțelor $\bar{F}_t$ și $\bar{F}_c$, ea este cea mai potrivită.

Vom da acum cîteva exemple de efecte ale forțelor $\bar{F}_t$ și $\bar{F}_c$, înțelegînd că e vorba de efecte aparente întrucît și forțele sînt aparente.

Exemple de efecte ale forței complementare de transport $\bar{F}_t$.

— Să considerăm un vehicul în mișcare. Cînd vehiculul accelerează, frînează sau cotește, corpurile din vehicul, care nu sînt solidare cu el, ies din starea de repaus relativ și încep să se miște. Variația aparentă (în raport cu vehiculul) a vitezei oricăruia din aceste corpuri se atribuie forței complementare de transport $\bar{F}_t$. Cînd vehiculul cotește, forța $\bar{F}_t$ este o forță complementară *centrifugă* de transport, fiind îndreptată spre exteriorul traiectoriei curbe a vehiculului.

— Să considerăm un dispozitiv centrifugal și un corp sau o particulă M, care se desprinde la un moment dat din solidaritatea cu rotorul dispozitivului centrifugal. Ce se va întîmpla cu corpul M?

Pentru un observator de pe Pămînt, corpul M se va mișca cu viteză liniară dobîndită (deci datorită inerției) după tangenta la traiectoria circulară pe care se mișcase pînă în acel moment.

Pentru un observator solidar cu rotorul dispozitivului centrifugal, corpul M, care pînă atunci se afla în repaus relativ (față de rotor), se va

---

[1] Matematicienii au rezervat denumirea de „forță de inerție" pentru forța $F = -m\bar{a}$ pe care mobilul o exercită ca reacțiune asupra agentului material care îi cauzează accelerația $\bar{a}$.

mișca după raza de rotație de la acel moment, spre exterior, sub acțiunea unei forțe centrifuge de transport $\bar{F}_t$.

Exemple de efecte ale forței complementare $\bar{F}_c$ a lui Coriolis.

— Să considerăm un disc circular mare(spre exemplu divanul fermecat din Parcul de odihnă și cultură I. V. Stalin din București) executînd o mișcare de rotație în jurul unei axe verticale trecînd prin centrul său.

Un observator, solidar cu discul, aruncă, de-a lungul unei raze a discului, marcată cu creta, o bilă. Observatorul va vedea că bila în mișcarea ei relativă (față de disc) rămîne în urma sau o ia înaintea razei marcate, după cum ea a fost aruncată dinspre centrul discului spre periferie sau invers. Abaterea bilei de la direcția în care a fost aruncată se atribuie forței complementare $\bar{F}_c$ a lui Coriolis. În raport cu Pămîntul, bila avea, înainte de a fi aruncată (ca și observatorul care a aruncat-o), aceeași viteză liniară ca și punctul M_r de pe disc, din dreptul ei. În cursul mișcării relative (față de disc), bila întîlnește însă puncte M_r aparținînd discului, care au viteza liniară mai mare sau mai mică decît a ei, astfel că ea rămîne în urma sau o ia înaintea acestora, după cum bila se depărtează sau se apropie de axa de rotație a discului.

— La fel se explică și abaterea curenților de apă și de aer de pe suprafața Pămîntului de la direcția lor inițială. Ei rămîn în urmă, în raport cu sensul de rotație al Pămîntului (se abat spre Vest), dacă vin dinspre Pol spre Ecuator (adică dacă se depărtează de axa de rotație a Pămîntului) și o iau înainte (se abat spre Est), dacă vin dinspre Ecuator spre Pol (adică dacă se apropie de axa de rotație a Pămîntului).

Tot astfel, un corp în cădere se abate de la direcția verticală inițială, spre Est, întrucît se apropie de axa de rotație a Pămîntului.

Aceste abateri de la direcția inițială sînt tot efecte aparente ale forței $\bar{F}_c$ a lui Coriolis.

Greutatea corpurilor față de Pămînt. Să considerăm un corp M de masă m căzînd în vid în apropiere de Pămînt. Corpul M se află sub acțiunea exclusivă a forței rezultante a cîmpului gravitațional creat de toate corpurile din Univers (se înțelege că acțiunea gravitațională a Pămîntului, care este cel mai aproape, predomină, acțiunile Lunii și Soarelui fiind mici, iar cele ale altor corpuri cerești fiind neînsemnate)

Să raportăm mișcarea de cădere a corpului, pe de o parte la sistemul solar, considerat ca sistem absolut, iar pe de altă parte la Pămînt, considerat ca sistem relativ.

Într-un punct dat, corpul va avea față de sistemul solar o accelerație absolută $\bar{g}_a$, iar față de Pămînt o accelerație relativă g_r.

Forța absolută $\bar{G}_a = m\bar{g}_a$, reprezintă *greutatea absolută* a corpului (rezultanta forțelor de atracție exercitate asupra lui de către toate corpurile din Univers), iar forța relativă $\bar{G}_r = m\bar{g}_r$, reprezintă *greutatea relativă* (față de Pămînt) a corpului (aceea pe care noi o notăm obișnuit cu $\bar{G} = m\bar{g}$).

Între greutatea relativă $\bar{G}_r$ și greutatea absolută $\bar{G}_a$ există o relație asemănătoare cu relația (5) :

$$\bar{G}_r = \bar{G}_a + \bar{F}_t + \bar{F}_c \qquad (6)$$

Așadar, în cazul general (cînd corpul se află în mișcare față de Pămînt), greutatea relativă $\bar{G}_r$ a corpului se obține adăugînd vectorial la greutatea absolută reală $\bar{G}_a$, forțele complementare $\bar{F}_t$ și $\bar{F}_c$.

În momentul inițial al căderii libere sau cînd corpul este în repaus față de Pămînt, fiind suspendat sau așezat (deci cînd $v_r=0$), forța $\bar{F}_c$ a lui Coriolis este nulă și relația (6) devine:

$$\bar{G}_r = \bar{G}_a + \bar{F}_t \qquad (7)$$

Relația (7) arată că greutatea relativă $\bar{G}_r$ a unui corp în repaus pe suprafața Pămîntului, depinde de greutatea absolută $\bar{G}_a$ și de forța complementară de transport $\bar{F}_t$ în punctul în care se află corpul.

În ce privește greutatea absolută $\bar{G}_a$, ea variază invers proporțional cu patratul distanței dintre corp și centrul Pămîntului (conform legii atracției universale și bineînțeles neglijînd atracțiile Lunii, Soarelui și a altor corpuri cerești).

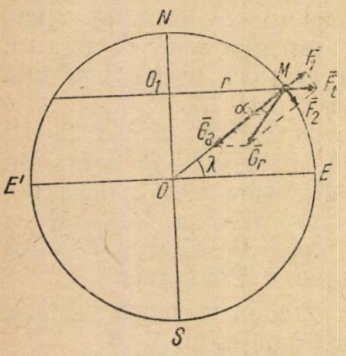


Fig. 1. Mișcare relativă.

Greutatea absolută $\bar{G}_a$ și implicit greutatea relativă $\bar{G}_r$ descresc cu altitudinea și cresc, pentru aceeași altitudine (spre exemplu pentru altitudinea zero = nivelul mării) cu latitudinea, datorită formei turtite sau de geoid a Pămîntului.

În ce privește forța complementară de transport $\bar{F}_t$, aceasta se datorește în cea mai mare parte mișcării de rotație a Pămîntului și numai într-o mică măsură mișcării de translație (de revoluție) a Pămîntului.

Să luăm în considerație numai influiența mișcării de rotație a Pămîntului, neglijind influiența mișcării de translație.

Fie corpul considerat M situat pe suprafața Pămîntului, la nivelul mării și la latitudinea λ (fig. 1).

Grutatea absolută $\bar{G}_a$ a corpului M este dirijată după raza Pămîntului spre centru (dat fiind că practic, numai atracția Pămîntului contează). Forța complementară de transport $\bar{F}_t$, datorită mișcării de rotație a Pămîntului, este dirijată după raza cercului-paralelă pe care se află corpul M, spre exterior.

Greutatea absolută $\bar{G}_r$ este egală cu suma vectorială (care se obține cu regula paralelogramului) a forțelor $\bar{G}_a$ și $\bar{F}_t$ (v. figura).

Pentru a analiza efectele forței F_t asupra greutății corpului, descompunem forța $\bar{F}_t$ în două componente: una $\bar{F}_1$, după direcția razei Pămîntului și implicit a forței $\bar{G}_a$ și alta $\bar{F}_2$ perpendiculară pe $\bar{F}_1$. După cum se vede, componenta $\bar{F}_1$, fiind direct opusă greutății absolute $\bar{G}_a$, diminuiază intensitatea acesteia, iar componenta $\bar{F}_2$ abate direcția acesteia de la direcția razei Pămîntului cu unghiul α.

Este ușor de văzut că forța F_t și implicit componenta F_1 crește cu raza r a cercului-paralelă pe care se află corpul, adică de la Pol spre

Ecuator ($F_t = m\omega^2 r$, unde m = masa corpului = constantă și ω = viteza de rotație a Pămîntului = constantă).

După cum se știe, accelerația g_r a gravității, la nivelul mării, variază de la 983 cm/s², cît este la Pol pînă la 978 cm/s², cît este la Ecuator, adică cu circa 0,5% din valoarea pe care o are la Pol. Se înțelege că, cu același procent variază și greutatea relativă a unui corp pe suprafața Pămîntului, deoarece $G_r = m\, g_r$.

Calculele arată că din cele 0,5% variație maximă (de la Pol la Ecuator) a greutății unui corp, situat la nivelul mării, 0,11% se datorează formei de geoid a Pămîntului, 0,34% se datorează mișcării de rotație, iar 0,05% se datorează mișcării de translație a Pămîntului.

În ce privește unghiul α cu care direcția greutății (verticala sau direcția firului cu plumb) se abate de la direcția razei Pămîntului, aceasta are valoarea maximă de numai 6′, la latitudinea de 45°.

Rezolvarea unor probleme în care intervine forța centrifugă. Există numeroase probleme în care se dă, se cere sau se utilizează forța centrifugă aplicată asupra mobilului în mișcare circulară. Se înțelege că aici este vorba, fie de o forță centrifugă fictivă aplicată asupra mobilului pentru necesități de calcul, fie de o forță centrifugă *aparentă* de transport. Despre forța centrifugă *reală* nu poate fi vorba întrucît aceasta nu este aplicată asupra mobilului, ci este exercitată de către mobil, ca reacțiune, asupra agentului material (legăturii) care i-a cauzat accelerația centripetă.

De cele mai multe ori, forța centrifugă este introdusă în probleme în mod greșit sau în cel mai bun caz pentru necesități de calcul, considerîndu-se că ea echilibrează forțele reale care imprimă mobilului accelerația centripetă, adică forțele a căror rezultantă constituie însăși forța centripetă. În realitate, forța centripetă nu este echilibrată, așa că atît forța centrifugă introdusă cît și echilibrul realizat de ea sînt fictive.

În aceste cazuri este mai bine ca atît în vorbire cît și în calcule să se folosească forța centripetă reală în locul forței centrifuge fictive, ținîndu-se bineînțeles seama că aceste forțe sînt egale și direct opuse.

Astfel, ca un exemplu, problema în care se cere să se afle tensiunea firului cu care se învîrtește un corp într-un plan vertical, cînd corpul ajunge 1) în punctul culminant și 2) în punctul cel mai de jos, se rezolvă astfel:

Se iau în considerație cele două forțe reale care se exercită asupra corpului: forța $\bar{G}$ cu care corpul este atras de Pămînt și forța $\bar{T}$ cu care firul trage de corp spre centrul de rotație, mărimea acesteia reprezentînd tensiunea firului [1].

Dacă folosim forța centrifugă fictivă F_{cf} scriem ecuația reprezentînd echilibrul fictiv:

$$\bar{G} + \bar{T} + \bar{F}_{cf} = 0 \qquad (8)$$

[1] Tensiunea firului este egală în mărime cu una din cele două forțe egale și de sensuri contrarii care întind firul (forța cu care mîna trage de un capăt al firului și prin intermediul firului, de corp = forța cu care corpul trage în sens contrar de celălalt capăt al firului și prin intermediul firului, de mînă.

Dacă folosim forța centripetă reală $\bar{F}_{cp}$, scriem că aceasta este rezultanta (suma vectorială) a forțelor $\bar{G}$ și $\bar{T}$:

$$\bar{F}_{cp} = \bar{G} + \bar{T} \qquad (9)$$

Putem, așadar, să rezolvăm problema dispensîndu-ne de forța centrifugă și de ecuația (8) și folosind forța centripetă și ecuația (9), după cum urmează:

— În punctul culminant, cele două forțe $\bar{G}$ și $\bar{T}$, sînt îndreptate ca și rezultanta lor $\bar{F}_{cp}$ în jos, spre centrul de rotație, ceea ce permite să scriem:

$$F_{cp} = G + T,$$

de unde:

$$T = F_{cp} - G = \frac{mv^2}{R} - mg$$ (m = masa corpului, v = viteza corpului în punctul culminant, R = raza traiectoriei circulare și g = accelerația gravitației).

— În punctul cel mai de jos, $\bar{T}$ și $\bar{F}_{cp}$ sînt îndreptate în sus, spre centrul de rotație, iar $\bar{G}$ în jos, ceea ce permite să scriem:

$$F_{cp} = T - G$$

de unde:

$$T = F_{cp} + G = \frac{mv^2}{R} + mg.$$

În mod asemănător se poate utiliza forța centripetă în locul forței centrifuge și în alte probleme care reclamă pe cea din urmă.

În ce privește forța centrifugă aparentă de transport, ne putem dispensa de ea, dacă ne punem în situația observatorului solidar cu sistemul absolut. Astfel, la centrifugarea corpurilor cu diferite dispozitive centrifugale, corpul desprins din solidaritatea cu rotorul dispozitivului centrifugal fuge de axa de rotație a acestuia după tangenta la traiectoria circulară pe care se mișcase pînă atunci, în virtutea inerției (datorită vitezei dobîndite), așa cum fuge noroiul desprins de pe roata unui vehicul în mișcare.

ANDRÉ MARIE AMPÈRE

de prof. dr. ing. *ION S. ANTONIU*

Încă de foarte multă vreme, navigatorii constatau că busola lor era întotdeauna deranjată, dacă în drumul lor, întîlneau furtuni însoțite de manifestări electrice. Abia pe la mijlocul secolului al XVIII-lea, prin experiențele lui Lomonosov și Richmann în Rusia și Franklin în America, s-a dovedit natura electrică a trăsnetului și fulgerilor. Oamenii de știință au căutat să vadă dacă nu cumva există vre-o legătură între acul magnetic al busolei și electricitatea atmosferică, adică în general între magnetism și electricitate.

Numai după descoperirea pilei electrice de către Volta (1800), oamenii de știință au avut la dispoziție un curent electric permanent și suficient de intens pentru a putea face și alte cercetări în afară de acelea pe care le puteau efectua cu mașinile electrostatice sau cu condensatoarele electrice, singurele surse de energie electrică cunoscută pînă atunci.

André-Marie Ampère

De problema legăturii dintre magnetism și electricitate se ocupă și Hans Christian Oersted (1777—1851) profesor de fizică la Universitatea din Copenhaga. El era convins că există o acțiune a curentului electric asupra acului magnetic însă, mulți ani încercările sale pentru a dovedi acest lucru, au rămas infructuoase, deoarece sursele de curent de care dispunea erau slabe și deci deviațiile acului magnetic erau abia perceptibile și neconcludente.

În iarna anului 1819—1820, dispunînd de o baterie mai puternică, formată din 20 de elemente Volta *), în timpul unor experiențe efectuate la curs în fața studenților, a izbutit să demonstreze că : un conductor străbătut de curentul electric dat de pilă și așezat deasupra acului magnetic provoacă devierea acestuia. Devierea obținută a fost de circa 45°.

Oersted își continuă cercetările și în aprilie 1820 reuși să obțină o deviație de aproape 90°. După ce repetă de nenumărate ori și în diferite moduri aceste experiențe, Oersted anunță la 21 iunie 1820 descoperirea sa savanților din întreaga Europă, printr-un memoriu scris în limba latină. La 4 septembrie 1820, Arago face la Academia de Științe din Paris un raport asupra experiențelor lui Oersted, relative la influența reciprocă a „galvanismului" și magnetismului arătînd că a asistat la Geneva la repetarea acestor experiențe de către profesorul de la Rive, care au reușit pe deplin. În urma acestui raport, Arago a fost însărcinat de Academie să repete și el aceste experiențe.

Procesul verbal al ședinței Academiei din ziua de 11 septembrie 1820 este foarte laconic și nu spune decît atît : „Domnul Arago a repetat în fața Academiei experiențele domnului Oersted".

Printre membrii Academiei, care au asistat la aceste două ședințe era și André-Marie Ampère, un om de 45 ani, dar care părea mult mai bătrîn, profesor la Școala Politehnică din Paris și inspector general școlar, preocupat în special de matematici și chimie, renumit botanist, în special cunoscător al florilor. Fizica îl interesa prea puțin la acea vreme. Avusese multe supărări în viață și era extrem de distrat.

Experiențele efectuate de Arago l-au interesat însă într-atît încît a fost cu totul captat de noutatea chestiunii. Sesiză imediat importanța fenomenului, lăsă totul și se preocupă numai de această problemă. În timp de două săptămîni, printr-o străfulgerare de geniu, Ampère a

*) circa 30 volți.

Mihai și alții. Fiecare elev membru al cercului este obligat să respecte următoarele reguli:

1. Să participe regulat la ședințele cercului,
2. Să obțină note peste 7 la fizică și matematică,
3. Să se aboneze și să colaboreze la G.M.F.-B.

Regulamentul este respectat de toți membrii cercului. Ambele cercuri numără 87 de participanți. In cadrul cercului s-au rezolvat probleme din G.M.F.-B, din diferite culegeri de probleme de matematici, s-au discutat diferite note interesante, teoreme și altele. In perioada dinaintea Olimpiadei s-au făcut ore speciale de pregătire în care s-au studiat și s-au rezolvat diferite tipuri de probleme date la Olimpiadele din anii precedenți, fie din cele publicate în G.M.F.B, fie din cele publicate în „Olimpiade matematice" de O. Sacter, precum și din diferite „Culegeri de probleme". Datorită unei munci organizate și susținute au reușit la Olimpiada matematică etapa regională 1958 elevii: Răduță Apolodor și Lăzărescu Mihai. In anul 1959 la etapa regională au mers 22 elevi dintre care elevul Răduță Apolodor a fost distins cu premiul I la matematică; la etapa finală o abținut mențiune. Anul acesta au fost distinși cu premii și mențiuni elevii: Ghiță Teodor, Marinescu Crișu și Mihuț Octavian la etapa regională și au fost admiși pentru etapa finală.

Pentru o bogată activitate în cadrul G.M.F.-B au fost distinși în 1959 cu mențiuni elevii Ghiță Teodor și Răduță Apolodor.

In cadrul cercului de matematică au fost prezentate referate interesante, probleme și note și diferite teoreme generalizate. Astfel elevul Mihuț Octavian a prezentat referatele „Figuri de matematicieni", „Maxime și minime", „Teorema lui Ceva și Menelaus", „Despre ecuații logaritmice"; elevul Răduță Apolodor a prezentat referatele „Metoda inducției complete", „Numere pitagorice"; elevul Ghiță Theodor, „Simetria figurilor finite, „Caleidoscop matematic", „Despre însumarea coeficienților binominali"; Badea Gheorghe, „Asupra unor ecuații de gradul II"; Dobre Elena, „Asupra teoremei bisectoare"; Năstase Ion, „In legătură cu relația lui Stewart"; Costache Ilie, „Proprietăți ale triunghiului oarecare și ale cercului circumscris" și altele. In cadrul cercului s-au mai rezolvat și propus probleme diferite. Astfel elevul Răduță Apolodor a propus problema:

Să se determine valorile parametrului k pentru rădăcinile „a" și „b" ale ecuației:

$(k-3)x^2-2(k-6)x+k=0$, **ce sînt legate prin relația** $a^2+b^2-5(a+b)-1=0$.

Rădăcinile a și b sînt reale sau imaginare?

Elevul **Costache Ilie** a dat următoarea soluție:

Relațiile dintre rădăcini și coeficienți sînt:

$$a+b=\frac{2(k-6)}{k-3},\quad ab=\frac{k}{k-3}$$

Insă $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$, iar relația dată devine:

$$\frac{4(k-6)^2}{(k-3)^2}-\frac{2k}{k-3}-\frac{10(k-6)}{k-3}-1=0$$

$$\text{sau } 4(k-6)^2-2k(k-3)-10(k-6)(k-3)-(k-3)^2=0,$$

$$\text{sau } -9k^2+54k-45=0 \text{ sau } k^2-6k+5=0.$$

Ultima ecuație are rădăcinile $k_1=1$, $k_2=5$

Discriminantul ecuației date este:

$$D=(k-6)^2-k(k-3)=36-9k=9(4-k),$$

unde urmează discuția:

$D>0$, cînd $k<4$, rădăcinile sînt reale

$D=0$, cînd $k=4$, rădăcinile rădăcinile sînt egale $x_1=x_2=-2$.

$D<0$, cînd $k>4$ rădăcinile sînt imaginare.

In caz particular, pentru $k=1$, rădăcinile a și b sînt reale, iar pentru $k=5$, imaginare.

Elevul **Mihuț I. Octavian** a propus problema:

Să se demonstreze identitatea:

$$\operatorname{tg}^2x+\operatorname{ctg}^2x=\frac{2(3+\cos 4x)}{1-\cos 4x}.$$

Elevul **Ghiță Theodor** a dat următoarea soluție:
Pornim de la formula

$$1 - \cos 4x = 2 \sin^2 2x = 8 \sin^2 x \cos^2 x$$

putem deci înmulți membrul I al identității cu 8 $\sin^2 x$ $\cos^2 x$ și membrul al doilea cu $1-\cos 4x$, Obținem:

$$8(\sin^4 x + \cos^4 x) = 4 + 2(1 + \cos 4x) \text{ în care înlocuim}$$

$$1 + \cos 4x = 2 \cos^2 2x = 2(\cos^2 x - \sin^2 x)^2 = 2(\cos^4 x + \sin^4 x - 2 \cos^2 x \sin^2 x)$$

prin simplificare rămîne:

$$2(\sin^4 x + \cos^4 x) = 1 + \cos^4 x + \sin^4 - 2 \cos^2 x \sin^2 x, \text{ sau}$$

$$\cos^4 x + \sin^4 x + 2 \cos^2 x \sin^2 x = 1, (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 = 1.,$$

identitate evidentă. De asemenea membrii cercului au alcătuit și Gazeta matematică pe școală în care sînt publicate diferite note și probleme interesante din G.M.F.-B și din alte cărți. Au fost construite două afișiere în care sînt expuse pe rînduri, de sîrmă, diferite corpuri geometrice construite de elevii membri ai cercului, din carton pe care sînt deduse ariile, volumele și proprietățile lor. In continuare în școala noastră ducem o luptă susținută pentru ca activitatea cercului să se îmbunătățească și mai mult și în cadrul cercului să fie antrenați cît mai mulți elevi care să-și mărească orizontul de cunoștințe pentru a deveni cetățeni folositori patriei.

Responsabilul cercului de matematică

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

Evidențiați

Pînă la 1 octombrie 1960 s-au mai evidențiat ca rezolvitori de probleme de matematică propuse în G.M.F.-B nr. 5—8 următorii:

1. **Făgărășanu I. Theodor** (cl. XI ș.m. 20 București), 2. **Scarlat G. Nicolae** (absolvent, Pitești), 3. **Capotescu Mircea** (absolvent Făget), 4. **Sîrghie Mircea** (clasa XI, Rădăuți), 5. **Leonte Alexandru** (stud. matematică, București), 6. **Strătilă G. Șerban** (clasa XI, Pitești), 7. **Munteanu Ioan** (student matematică, Iași), 8. **Ciucu I. Cornel** (clasa X ș.m. 1 Cîmpina), 9. **Olteanu S. Victor** (clasa XI, ș.m. 19 București), 10. **Szasz Carol** (student matematică, Cluj), 11. **Chiriță Marcel** (absolvent București), 12. **Vasilescu V. Mihai** (absolvent C.-Lung Muscel), 13. **Ursu Constantin** (clasa XI, Buhuși), 14. **Ene P. Dumitru** (absolvent Ploiești). 15. **Stan A. Mircea** (clasa XI ș.m. 1 București), 16. **Ou V. Ion** (clasa X R. Vîlcea), 17. **Băluță Gheorghe** (clasa XI Adjud), 18. **Popescu Virgiliu** (clasa X, R. Vîlcea), 19. **Popescu D. Dorel** (clasa XI ș.m. 1 Arad), 20. **Popa Nicolae** (clasa XI, Focșani), 21. **Moldovan Grigor** (student mat. Cluj), 22. **Vinea Vladimir** (clasa X, ș.m. 32 București), 23. **Ilie Mihai** (clasa X ș.m. 20 București), 24. **Spiratos Antonio** (clasa X ș.m. 2 Brăila), 25. **Ionescu D. Alexandru** (student mecanică Timișoara), 26. **Tănăsescu T. Miron** (clasa X Horezu), 27. **Gheju Petru** (clasa XI Făget), 28. **Stancu V. Mihai** (student matematică Iași), 29. **Dascălu Paul** (clasa XI, ș.m. 1 Iași), 30. **Grădeanu Gh.** (clasa XI, ș.m. 1 Iași), **Năstăsescu Constantin** (clasa X Pucioasa), 32. **Craioveanu Mircea** (absolvent Sibiu), 33. **Năstase Aurel** (clasa XI, Focșani), 34. **Pop Ioan** (student matematică Iași), 35. **Moga Ion** (clasa XI Darabani), 36. **Adameșteanu Ion** (clasa XI, Pitești), 37. **Mihăescu Doru** (clasa X R. Vîlcea), 38. **Tănase Mihail** (clasa X Sinaia), 39. **Lustig Gheorghe** (clasa XI ș.m. 5 Timișoara), 40. **Cănilă C. Constantin** (clasa XI, Roman), 41. **Barbu Gh. Emil** (absolvent Drăgănești-Olt), 42. **Mocanu Ovidiu** (absolvent Trusești), 43. **Ionescu Vladimir** (clasa VIII ș.m. 3 Tg. Jiu). 44. **Șerbănescu Nicolae** (clasa VIII Moreni), 45. **Perju Gheorghe** (clasa XI, Focșani), 46. **Anițescu N. Maria** (clasa VIII ș.m. 1 Tg. Jiu), 47. **Diaconescu C. Radu** (clasa IX ș.m. 1 Pucioasa), 48. **Jipa Constantin** (clasa VIII Moreni), 49. **Opriș M. Ion** (clasa X ș.m. 1 Ploiești), 50. **Popescu Mircea** (clasa XI, Slatina), 51. **Hiriș Viorel** (clasa XI, ș.m. 1 Timișoara), 52. **Ghiță R. Teodor** (clasa XI, Bolintinul din Vale), 53. **Covar Eugen** (clasa X Bicaz), 54. **Moțit M. Horia** (clasa IX ș.m. 2 Brăila), 55. **Cojocaru Ion** (clasa XI, Breaza), 56. **Rozman Izu** (clasa X, ș.m. 2

Brăila), 57. **Cornblum Eugen** (absolvent Bucureşti), 58. **Grigorescu I. Şerban** (clasa IX ş.m. 1 Bucureşti), 49. **Birsan Romanel** (student polit. Cluj), 60. **Cristea Nicolae** (clasa X, ş.m. 1 Bucureşti), 61. **Sucitu Gheorghe** (clasa X ş.m. 3 Bucureşti), 62. **Popescu Gh. Domiţian** (clasa IX, ş.m. 24 Bucureşti), 63. **Bănică Gh. Constantin** (absolvent C-lung Muşcel), 64. **Persache Octavian** (clasa VIII ş.m. 11 Bucureşti), 65. **Bibicu Ion** (clasa VIII ş.m. 2 Brăila), 66. **Cruşoveanu Victor** (clasa X, Bechet), 67. **Teodorescu Catrinel** (clasa X ş.m. 10 Bucureşti), 68. **Cornea Filip** (absolvent Caransebeş), 69. **Moraru Radu** (absolvent Cluj), 70. **Ghica S. Anton** (clasa IX. ş.m. 3 Piteşti), 71. **Georgescu V. Teodorel** (absolvent Ploieşti), 72. **Rosenberg Flavia** (clasa VIII ş.m. 1 Focşani), **Lungu Şerban** (absolvent Cluj), 74. **Niţă Constantin** (clasa X Pucioasa), 75. **Olaru Nicolae** (absolvent Constanţa), 76. **Vlad I. Valentin** (clasa XI ş.m. 7 Bucureşti), 77. **Pavelescu Valerian** (clasa X Botoşani), 78. **Vlad Virgiliu** (clasa VIII ş.m. 7 Bucureşti), 79. **Bolocan Gabriel** (cl. IX ş.m. 26 Bucureşti), 80. **Pavel N. Radu** (clasa XI ş.m. 3 Craiova), 81. **Vîlceanu Gheorghe** (clasa VIII ş.m. 1 Ploieşti), 82. **Nelepcu Grigore** (cl. XI ş.m. 2 Reşiţa).

*

Pînă la 1 octombrie 1960 s-au mai primit cîte cel puţin zece soluţii bune la problemele de matematică propuse în G.M.F.-B numerele 5—8, după cum urmează :

ABRUD (Cluj). **Ş.m. „Horia, Cloşca şi Grişan".** Cl. VIII. Bordei Tudor (4283, E: 1528—34, 37—39). Cl. IX. Muck Ana (4131, 33, 42, 45, 48, 248, 50, 91, 302, 38). Cl. X. Bordei Mihai (4140, 42, 47, 51, 54, 77, 91, 248, 302, 38).

ADJUD. **Absolvenţi:** Grigoraş Vasile (4164, 86, 87 89, 94—201, 05—15, 17, 20, 21, 24, 29, 32—34, 36, 38, 47), Moldoveanu Leonida (4194), 95, 203—05, 07, 08, 11, 48, 50, 56, 57, 302), Pascal Gh. Vasile (4131—33, 40, 42, 43, 45, 47, 48, 51, 53, 54, 77, 81, 92, 95, 203, 07, 42, 45). Cl. XI. Apostol Vasile (4131—33, 39, 42—55, 62, 66, 77, 84, P), **Băluţă Gh.** (4131—33, 36, 42, 45, 47, 52—54, 62, 66, 71, 77, 92, 94, 96—98, 203—10, 13, 15, 20, 23, 30, 33, 41—48, 56, 57, 59, 60, 62, 65, 71, 302—04, 06—09, 37), Murăraşu Nicolae (4197, 203, 07, 10, 13, 15, 23, 33, 41—48, 56, 65, 303, 06).

Şcoala de 7 ani Păuneşti Adjud (Bacău). Cl. V. Anghel N. C. (E: 1513, 17, 22, 27—29, 32, 34, 38), Berbece I. Georgeta (E: 1517, 21, 29, 30, 32, 34, 39), Cautiş I. Aurel (E: 1499, 500, 03, 10, 17, 27, 29, 32, 34, 35), Mocanu N. Aurora (E: 1517, 21, 25, 26, 29, 30, 34, 35, 38, 39), Nica B. C. (4153, 210, E: 1517, 22, 28, 32, 34, 35, 38), Novac I. Gh. (4148, E: 1517, 29, 35, 38, 39). Cl. VI. Bahluianu Ilinca (4153, E: 1524, 28—30, 32, 34, 35, 38, 39), Matei Lenuţa (E: 1516, 21, 24, 28—30, 32, 34, 35, 38, 39), Savin Dumitru (E: 1512, 24, 28—30, 32, 34, 35, 38, 39). Cl. VII. Berbece C. Dumitru (4154, 210, E: 1502, 04, 07, 08, 14, 21, 23—27), Dodu Virginia (4142), 53, E: 1516—19, 25, 26, 30, 39), Moise Neculai (E: 1509, 08, 14, 23, 29—32, 38, 39), Novac Virginia (4224, E: 1442, 48, 53, 515—17, 30, 33, 38, 39), Vasilache Maria (4142, 52—54, 77, E: 1528—30, 32—34, 36—39).

AFUMAŢI (Bucureşti). Cl. X. Camburu Cristache (4131—37, 42—47,, 49, 52—54, 62, 65, 66, 68, 71, 77, 80, 83, 92, 94, 200, 07—10, 21, 38—40, 48, 56).

AIUD. Cl. IX. Leţia Ioan (4192, 94—97, 203, 04, 07—10, 24, 30, 56, 57).

ALEXANDRIA. **Ş.m. „Al. I. Cuza".** Cl. VIII. Boştenaru I. Livius (4225, 71, 98, 309, E: 1529, 31, 32, 38, 39, 41—43, 45—53).

ARAD. **Ş.m. 1 „Ion Slavici".** Cl. VIII. Silvestru Aurelia (4131, 77, 208, 86, 98, 319, E: 1532, 39, 42, 46). Cl. XI. Macovei Rodica (4192, 98—200, 03, 07, 36, 41, 45), **Popescu A Dorel** (4146, 54, 56, 62—66, 70, 79, 85—90, 92, 94—200, 03, 06—15, 20, 32, 33, 36, 38, 43, 45—48, 67, 71, 302—09, 28), Popeţiu Dorina (4131—34, 36, 42, 47, 53, 54, 62, 65, 77), Vîrşendaru Ion (4196, 210, 41, 44, 45, 48, 56, 303, 08, 12).

Ş.m. 2 Olga Bancic. Cl. VIII. Stoinescu Marina (4193, 210, E: 1512, 18, 20, 26, 28, 32, 37, 42, 47, 51, 53). Cl. IX. Iacobovici Noemi (4224, 44, 45, 65, 71, 91, 305).

Ş.m. 3. Cl. VIII. Soseanu Petre (4144, 203, (4192, 94, 207, 08, 38, E: 1512—20, 22, 23, 26). 30—32, 38—41, 43—48, 50, 52), Vasar Traian (4192, 94, 207, 08, 38, E: 1412—20, 22, 23, 26).

BABADAG. Cl. IX. Andrei Gh. (P), Ignat Ion (4131—35, 42—45, 47, 52—54, 62).

BACĂU. Absolvent Lupu Dan (4192, 95, 97, 203, 08, 09, 33, 36, 41, 43, 45, 48, 50, 56, 58, 63, 302—09).

Ş.m. 1 „George Bacovia". Cl. X. Kloetzer Eugen (4094, 105, 09, 18, 31—33, 36, 42—45, 47, 52, 53, 62, 66, 71, 75, 77, 80, 92, 207, 08, 10, 20, 36, 38, 41, 43, 45), Guţu D. Iulian (4131—33, 36, 37, 42—48, 52, 65, 71, 75, 83, 92, 94, 200, 03, 06, 06, 08—10, 24, 33, 41, 45, 46, 302, 03).

Ş.m. 2 Vasile Alecsandri. C. IX. Vlad M. Const. (4162, 80, 224, 36, 68, 78, 90, 92, 98, 319, 28).

Şc. pedagogică mixtă. An. II. Focşeneanu I. Şt. (4014, 17, 142, 45, 62, 66, 77, 248).

BAIA DE ARIEŞ. Cl. VIII. Ciura Al. (4192, 207, 08, 10, 17, 24, 38, 48, 56, 68, 71, 86, 98, E: 1512—20, 22—26, 30—32, 38, 39).

BAIA MARE. Absolvent, Razmoş Valentin (4131—33, 42, 43, 45—48, 53, 54, 62, 66, 71, 77, 93, 207, 45).

Ş.m. 1. Cl. VIII. Coteţ Ioan (4192, 207, 10, 327, E: 1512, 53, 17, 18, 20, 22, 25, 32, 43, 47, 49, 50, 52—54).

BALŞ (Reg. Craiova). Cl. VIII. Voiculescu V. Florian (E: 1512, 13, 15—18, 20, 22, 32, 38, 47, 50, 52).

BECHET (Craiova). Cl. VIII. Brandemburg I. Florea (4248, E: 1530, 32, 38, 39, 41—43, 45, 47, 49, 51—53), Popescu M. Paul (E: 1530—33, 38—40, 45—47, 50, 53). Cl. X. **Cruşoveanu Victor** (4131—37, 42—45, 47, 48, 52—54, 62, 63, 66, 68, 69, 71, 73, 75, 81, 83, 92—95 ,97—200, 03, 07, 10, 24, 33, 36, 45, 48).

BEIUŞ. Cl. VII. Moga Mihai (E: 1512, 13, 15, 16, 18, 20, 22, 25, 38, 39). Cl. XI. Mihele Aurel (4192—94, 96, 98, 99, 203, 04, 07, 08, 10, 41, 45).

BICAZ. Cl. X. **Covar Eugen** (4192, 94—200, 03, 05—11, 20, 24, 25, 36, 41, 44, 45, 48, 49, 52, 53, 56, 57, 60, 62, 65, 71, 78, 80, 82, 89, 90, 302, 03, 05—09).

BISTRIŢA. Cl. X. Ormenişan Ioan (4192, 93, 97, 98, 202, 04, 07—10, 14, 20, 24, 36, 41, 44, 302—06, 08, 09), Paşca Iuliu (4192, 98, 206, 11, 17, 33, 38, 39, 41, 42, 48, 56, 68, 73, 86, 98, 303, 05, 08, 12), Tira Grigore (4192, 96, 99, 248, 50, 302—09).

BOLINTINUL DIN VALE (Bucureşti). Cl. VIII. Mihuţ I. Oct. (4136, 37, 39, 46, 50, 66, 68, 92, 97—99, 204, 23, 33, 43, 59, E: 1499, 500, 06, 12—15, 18, 19, 22, 28, 29, 31, 32, 38, 39), Zaharia Rada (E: 1529, 32, 38, 29, 41, 43, 45, 47, 50, 52). Cl. XI. **Ghiţă R. Teodor** (4157, 238—51, 53, 55—59, 62—65, 76, 78, 80, 82—84, 86—89, 95, 99, 303—10, 14, 19, 21, P), Năstase D. Ion (4134, 44, 46, 48, 211, 23, 48, 50, 56, 57, 63, 75, 308).

BOTOŞANI. **Ş.m. M. Eminescu.** Cl. X. Bauer Gh. (1452, 54, 55, 77, 98, 99, 236, 44, 45, 48, 52, 57, 67, 71, 83). Cl. XI. Constantin Radu (4220, 40, 41, 48, 50, 57, 59, 62, 67, 68, 78, 87), Băscălescu Dan (4192, 94—96, 200, 03, 05—08, 10, 11, 14, 17, 24, 30, 36, 44, 45, 73, 83), Grosu Virgil (4131—34, 36, 42—48, 51—54, 62, 66, 75, 77, 83, 92, 94, 98, 203, 05, 07, 08, 10—12, 15, 44, 45), Vaiser Gherta (4192, 203, 07, 08, 36, 41, 56, 302, 05). **Ş.m. „T. Laurian".** Cl. X. Amurăriţei Gh. (4131, 37, 42—48, 53, 54, 58, 62, 66, 68, 72, 80, 83, 92, 95—99, 203, 08—10, 36, 40, 42, 45), **Pavelescu Valerian** (4131—34, 36, 42, 43, 45, 47—49, 52, 53, 55, 62, 71, 77, 95, 98, 203, 07—11, 41—45, 48, 50, 53, 56, 57, 66, 67, 71, 82).

BRĂILA. **Ş.m. 2 N. Bălcescu.** Cl. VII. Stănescu I. Teodor (4221, E: 1488, 99—501, 06, 07, 17, 22, 25, 32, 38, 39). Cl. VIII. **Bibicu Ion** (4192, 94, 203, 07, 08, 24, 48, 49, 56, E: 1512, 13, 15, 17—24, 26, 30—32, 37—39, 41—45, 47—54), Nicolaescu A. Mădălina (E: 1512, 17, 18, 20, 22, 30, 32, 38, 39, 45). Cl. IX. Frecuş D. Const. (4131—35, 42, 43, 45, 47, 53, 54, 62, 76, 92, 94—97, 207, 08), **Moţit M. Horia** (4192, 95—97, 205, 06, 08, 11, 12, 15, 22, 24, 32, 36, 38, 39, 42, 44—46, 48, 50, 60, 62, 63, 65, 67, 68, 71, 73, 86, 89, 98, 302, 04, 05, 07—09, 15, 19). Cl. X. **Rozman Izu** (4192, 95, 97—99, 203—10, 12, 20, 30, 33, 38, 39, 41, 42, 44, 45, 48—50, 56, 57, 62, 67, 68, 71, 73, 80, 86, 87, 98, 302—09, 12, 33), **Spiratos Antonie** (4192, 95, 97—99, 403—10, 12, 20, 30, 33, 36, 39, 42, 44, 45, 48—50, 56, 57, 61—63, 67, 68, 73, 89, 86, 87, 98, 302—09, 12, 18, 25, 33, 38).

Ş.m. 3. Cl. VIII. Abramovici Ella (4192, 203, 04, 07, 08, 38, 48, 56, 57, 68, 98, E: 1512, 17, 18, 20, 22, 25, 26, 30, 32,, 38 45, 47, 50), Săraru Sebastian (4131, 32, 42, 45, 53, 62, 77, E: 1501, 02, 11—13, 15, 17, 19, 20, 22, 29). Cl. IX. Pană Elena (4192, 95, 96, 203, 07, 08, 32, 39, 42, 57, 62, 73, 98, 302, 05), Pană Gabriela (4192, 95, 96, 203, 07, 08, 32 39, 42, 62, 73, 98, 302, 05), **Preda Georgeta** (4192, 95, 203, 07, 08, 32, 39, 242, 45, 48, 57, 62, 98, 305), Schwartz Iuji (1492, 95, 203—05, 07, 08, 12, 38, 39, 42, 44, 45, 48, 50, 56, 57 62, 68, 73, 80, 98, 302, 05, 09). Cl. X. Turcu Ion (4131, 33—37, 42—45, 48, 54, 62, 66, 68, 73—77, 92, 94, 95, 97, 99, 200, 03, 05—11). Cl. XI. Giurgiu Maria (4162, 66, 67, 75, 77, 80, 83, 87, 220, 36, 40—47).

BREAZA. **Ş.m. „Aurel Vlaicu".** Cl. VI. Aldea Mariana (E: 1500, 07, 12—15, 22, 25, 39), Dobrotescu Elena (E: 1500, 07, 10, 25, 43, 45, 46, 50, 51, 54), Popescu C. Marina (E: 1500, 07, 10, 12—16, 22, 25, 38, 39), Manta C. Maria (E: 1507, 13, 14, 16, 22, 25, 43, 46, 50, 51, 54), Popescu C. Marina (E: 1500, 07, 10, 12—16, 22, 25, 39, 41).

Ş.m. „D. Cantemir". Cl. XI. **Cojocaru Ion** (4131—35, 38—45, 47, 48, 50—55, 67—69, 71, 72, 75, 77, 79, 92, 97—99, 203, 07, 08, 13, 22, 24, 31, 33, 40, 41, 43—45, P).

BUCUREŞTI. **Studenţi:** Antoniu I. Sorin **(Fac. energetică)** (4192, 95, 96, 99, 202, 03, 05, 07, 08, 10, 36, 38, 40, 41, 44, 45), **Leonte Alexandru (fac. matem-fizică** (4131—38, 42—54, 57, 60, 62, 63, 65, 66, 69, 71, 72, 74, 75, 77—80, 83, 92—95, 97—215, 20, 22, 24, 25, 28, 31—34, 36, 38—43, 45, 46, 77, P).

Absolvenţi: Chiriţă Marcel (4192, 94—200, 02, 03, 05, 07, 08, 10—14, 17, 20, 24, 29, 32, 33, 35—48, 50, 52, 54—60, 62, 63, 67, 68, 70, 71, 73, 77, 83, 85—87, 89, 90, 95, 96, 98, 300, 01, 32), **Cornblum Eugen** (4179, 94, 206, 08112, 17, 20, 24, 35, 38, 44, 48, 50, 56—58, 61, 65, 68, 71, 78, 80, 83, 87, 89, 98—309, 12, 14, 19, 31—33, 37, 38, P), **Necula V.** (4248, 49, 54, 65—67, 71, 72, 78, 80, 82, 92, 302—09, 14, 16, 21, 33, 37, 38), Rădulescu Bucur (4220, 21, 36, 41, 43, 45, 46, 48, 50, 57, 58, 62, 71, 89, 300).

Anonim I. (4192, 94—98, 203, 06—09, 13,

20, 24, 33, 41, 45, 47—50, 57, 59, 60, 63, 67, 78, 80, 83, 303—09, 21, 37, 38).

Ş.m. 1 „N. Bălcescu". Cl. VIII. **Grigorescu I. Şerban** (4192, 94, 95, 97, 203, 04, 07, 08, 10, 13, 15, 21, 22, 24, 25, 38, 42, 45, 48, 49, 56, 57, 65, 68, 71, 80,, 83, 98, 308, 09, 37, E: 1513, 16, 18—20, 22—24, 26, 32, 33, 42, 51, 54). Cl. X. Butnaru C. Chirea (4192, 203, 07—10, 12, 30, 32, 37—40, 43, 44, P), **Cristea Nicolae** (4131—35,, 42, 43, 45, 48, 52, 54, 62, 66, 68, 69, 73, 75, 77, 89, 92, 94, 97, 203, 07—12, 20, 24, 36, 39, 45, 48, 56—60, 26, 65, 98), Grunblatt Mihai (4192, 94, 95, 203, 06—10, 38, 39), Gugu Dan (4192, 94, 95, 97—200, 38—41, 48, 67, 86, 302—09, 33). Cl. XI. Căzănescu V. Virgil (41949—200, 03, 04, 06—11, 13, 15, 20, 24, 30, 33, 34, 36, 41—47), Petrov V. Octavian (4192, 212, 32, 38—41, 43—45, 65), **Stan A. Mircea** (4195, 99, 206, 12, 15, 29, 30, 32, 38—40, 48—50, 52, 56, 57, 61, 62, 65, 67, 68, 71—73, 77, 78, 80, 83, 88—91, 93, 98, 302, 03—09, 12, 16, 19, 20, 27, 30, 33, 37, 38, 43, 44, 51, 59, 65, 67, 70, 71, 73, 75, P),

Ş.m. 2 „Tudor Vladimirescu". Cl. VIII. Grigoriu Mihai (4162, 68, 77, 80, 215, 24, 38, 68, 71, 86, 98), Nistor Elena (4177, 62, E: 1514—18, 20, 22, 32). Cl. X. Frankenfeld Georgian (4192, 94—97, 203, 06—12, 20, 24, 36, 39, 44, 45, 47, 48, 56—60, 62, 65, 98).

Ş.m. 3 „Ion Neculce". Cl. VI. Nicolaescu M. Corneliu (E: 1512, 13, 15, 17, 22, 28—31, 38, 39), Popescu C. Radu (E: 1512—17, 22, 25, 28, 29, 31, 38—41, 43, 44, 46, 49, 50, 52—54), Treistar Mihaela (E: 1513, 17, 22, 28, 38, 43, 45, 46, 49, 50, 52). Cl. VII. Sucitu Al. (4207, 10, E: 1528, 38—41, 43—46, 49, 50, 52, 54). Cl. VIII. Andreescu Paul (4207, 56, 68, 98, E: 1512—15, 32, 39), Apostol Sanda (E: 1512—25, 30), Ionescu Nişcov Ştefan (4205, 07, 56, 68, 98, E: 1512—15, 32). Cl. X. **Sucitu Gh.** (4131—35, 42—45, 47, 48, 52, 53, 56, 61, 62, 71, 72, 75, 77, 92, 94—98, 203—08, 10—14, 38, 39, 44, 46, 68, 71, 73, 98).

Ş.m. 6 „Ilie Pintilie". Cl. VII. Seişan Theodor (E: 149, 09, 12, 13, 15, 17, 22, 25, 31). Cl. VIII. Anton Alex. (4192, 203, 07, 08, 10, E: 1512—14, 16—20, 22, 25, 26).

Ş.m. 7. I. L. Caragiale. Cl. VIII. **Vlad I. Virgiliu** (4192, 94, 203, 10, 20, 56, 62, 65, 69, 71, 327, E: 1514, 16, 21, 23, 26—32, 38—54). Cl. XI. Lupan Liliana (P), **Vlad I. Valentin** (4183, 205, 06, 08, 12, 14, 15, 17, 20, 22, 33, 37—40, 42—48, 50, 52, 65, 68—73, 77—79, 82, 83, 86, 87, 98, 303, 06, 13, 37).

Ş.m. 8. Cl. X. Buiculescu Doina (4203, 07, 08, 10, 36, 44, 45, 48, 56, 57, 302, 05).

Ş.m. 10 mixtă. Cl. VII. Sibiceanu Cornelia (E: 1499, 501, 06, 09, 13, 14, 16, 22, 25, 29, 31, 39, 404, 43, 48, 50, 52, 54). Cl. VIII. Bendirschi Boria (4203, 04, 24, E: 1512, 13, 15, 16, 18—20, 23, 24, 26), Marincovici Ruxandra (4207, E: 1512, 15, 17, 18, 20, 22, 32, 38, 41, 45, 47, 48), Marinescu E. Emil (4192, 94, 224, 48, E: 1512, 15, 26, 32, 47). Cl. IX. Dumitrescu Emilia (4131, 32, 35, 42, 44, 45, 47, 62, 66, 77, 80, 92, 95—97, 203, 07, 45, 48, 62, 302, 05), Cl. X. **Teodorescu Catrinel** (4192, 94—98, 203, 06—09, 13, 20, 24, 33, 41, 45, 47—50, 57, 59, 60, 63, 67, 8, 80, 837, 303—09, 21, 37, 38).

Ş.m. 11 D. Cantemir. Cl. VI. Maftei Sorin (E: 1512, 15, 17, 28, 38, 41, 45, 46, 49, 53), Stănculescu I. G. Radu (E: 1503, 07, 17, 21, 22, 30, 38, 41, 45, 46, 49, 53). Cl. VII. Cl. VII. Medaru Doina (4210, E: 1505, 09, 14, 18—21, 25, 32, 38, 39, 41—45, 47—50, 52, 59, 60, 70), Cl. VIII. Agracostea Mihai (4192, 207, 08, E: 1512, 13, 15—20, 22, 24—26). Cancer Şerban (4248, E: 1528—32, 38—50, 52—54), Filip Zincuţa (E: 1530—32, 39, 41, 43—48, 50, 52—54), Gropper Jean (4248, 49, 56, 78, E: 1528—32, 38—54), Moga Jeanina (E: 1512, 17, 18, 22, 32, 45, 47, 50, 52), Popescu Anca (E: 1512, 17, 18, 20, 22, 32, 45, 47, 50, 52), **Persache Octavian** (4144, 53, 54, 77, 92, 207, 10, E: 1499—504, 06—23, 25, 26, 32, 33, 39, 41, 43—45, 47—50, 52), Suciu Cornel (4248, 56, 58, 68, 86, 319, 47, 48, 50, 52—54, E: 1528—32, 28—45, 47, 48, 50, 52—54), Ursulescu Florin (4138, 92, E: 1512, 13, 15—20, 22, 24—26, 29, 32, 37—39, 41—48, 50, 52,, 53). Cl. IX. Gianni Emanuel (4131—33, 35,, 42, 44—49, 53, 63, 66, 77, 80, 302, P), Stănculescu I. Ion (4142, 56, 239, 48, 50, 56, 73). Cl. X. Cătănescu I. Vasile (4192, 95—97, 203, 06—08, 41, 43—46), Popescu T. Corneliu (4248—50, 56—60, 62, 63, 65, 78, 89, 90, 330, 38), Rădulescu I. Dan (4192, 95, 203, 04, 07, 10, 12, 36, 38, 39, 44, 47), Stănculescu I. Ion (4131—36, 42—49, 52—55, 62, 66, 354). Cl. XI. Cristescu Dragoş (4192, 93, 212, 38—41, 43, 48, 56, 57, 68), Isbăşoiu Const. (4207, 08, 10, 38, 40, 41, 56, 57, 60, 63, 68, 87, 98).

Ş.m. 12 „Spiru Haret". Cl. VIII. Haios Ladislau (E: 1512, 17, 18, 20, 22, 29, 40, 45, 50, 53), Nicolaide Al. (E: 1512, 13, 16, 19, 20, 26, 32, 47, 54), Strinian M. Dumitru (4131—33, 42, 53, 54, 62, 77, 248), Vodă Viorel (4248, 51, 71, 83, 302, 03, 05, 08, 12, 16, 37, 59, 65, 69, 71, 75).

Ş.m. 13 „Mihai Viteazu". Cl. V. Enăceanu Florin (E: 1512—17, 22, 25, 29, 31, 38, 39—41, 44—46, 49, 50, 52, 53). Cl. VII. Flondor Paul (4248, E: 1521, 24, 30, 32, 38, 42, 45, 47, 51). Cl. VIII. Badea Adrian (4132, 33, 42, 53, 77, 207, 38, E: 1510, 12, 17, 18, 20, 25), Brader Anca (E: 1512—18, 20, 30, 47), Guţă Cristian (E: 1540, 41,

43, 45—50, 52), Săvescu Napoleon (4271, 48, E: 1513, 14, 20, 22—24, 26, 28, 32, 34, 37). Cl. XI. Dăscălescu R. Florin (4134, 36, 42—48, 92, 94, 96, 200, 03, 36).

Ş.m. 15 „Elena Sîrbu". Cl. VI. Marcusohn Berry (E: 1512, 13, 15, 22, 30, 38, 39, 45, 49, 50). Cl. VIII. Paidiu V. Ion (4192, 94, 203, 05, 21, 22, 48, 49, 56, 57, 59).

Ş.m. 16. Gheorghe Coşbuc. Cl. VIII. Mendelsohn Marina (4192, 94, 238, E: 1512, 13, 15, 17, 18, 25), Morgenstern Schoel (E: 1530, 32, 38—42, 43, 45, 47, 48, 52, 59, 60, 70), Moscovici Corneliu (4248, 49, 56, 57, 68, 71, 78, E: 1529—32 38—45, 47—50, 52, 54), Sieglei Goldiţa (4268, 98, E: 1530, 31, 38, 41—43, 47, 49).

Ş.m. 17 „Matei Basarab". Cl. VIII. Kaufman Marcel (4131—33, 62, 77, E: 1501—04, 06—10). Cl. IX. Crainic Emanuel (4131—33, 43—45, 53, 54, 62, 68, 77). Cl. X. Faibiş Elianu (4131, 99, 217, 40, 48, 52, 56, 57, 59), Ganea Şt. (4158, 83, 89, 92, 200, 03 04, 06—10, 13, 15, 20, 24, 30, 33, 36, 37, 40, 43, 46, 48, 49, 52, 56, 65, 71, 82, 83, 87). Cl. XI. Moraru Florian (4192—200, 03, 12, 14, 20, 24, 31—33, 36—47), Popescu Ovidiu (4131—37, 48, 62, 63, 66, 68, 74, 75, 77, 80, 81, 241, 43, 47, 65, 67, 68, 78, 302, 03, 05, 08, 09, 30), Segal Adrian (4192, 94—98, 200, 12—15, 20, 31—33, 36, 38—47).

Ş.m. 18 „M. Eminescu". Cl. VI. Enăceanu Dan (E: 1512—17, 21, 22, 25, 27, 29, 31, 38, 39, 41, 43—46, 48—50, 52). Cl. IX. Moldoveanu Teodora (4145, 48, 53, 54, 58, 73, 77, 79—81, 83, 87, 92—95, 99, 203, 07, 08, 10, 17, 20, 21, 23, 30, 33, 36, 37, 41—45, 47, 56, 69, 71, 78). Cl. XI. Negoescu T. Alin (4248, 56—60, 68, 73, 78, 85—87, 90).

Ş.m. 19 „Ion Creangă". Cl. VIII. Dăscălescu Sorin (4131, 32, 42, 45, 52, 53, 62, 77, 92, 93, 96, 207, 10, E: 1499, 501—04, 06—10, 12—20, 22, 25—27), Feran Monica (4192, 94, 271, 78, E: 1532, 42, 47, 51, 54). Cl. XI. Olteanu S. Victor (4131—38, 42—49, 51—53, 55, 58, 62, 63, 66, 68, 71, 72—75, 77, 79—81, 83, 85—87, 91—211, 13—15, 20—22, 24, 29, 30, 33, 36, 38—47).

Ş.m. 20 „Gheorghe Şincai". Cl. IX. Buiculescu N. Mioara (4203, 08, 10, 44, 45, 48, 56, 57, 62, 68). Cl. X. Ilie Mihai (4192, 94—98, 200, 03, 04, 06—11, 13, 15, 20, 24, 33, 36, 41—48, 50, 53, 57, 59, 60, 62, 65, 67, 72, 78, 80, 82, 83, 90, 302—09, 37), Ivănescu Cristian (4203, 07, 08, 36, 41, 43—45, 304, 09). Cl. XI. Dumitrescu Lucian (4192, 94, 96, 99, 203, 07, 08, 10, 40, 41, 56, 57, 62), Făgărăşanu I. Teodor (4131—37, 42—49, 55, 58, 62, 92, 94—98), Popa Al. (4131—37, 42—49, 52—58, 62—66, 68, 71—73, 75, 77, 80, 81, 83, 86, 89, 92, 94—200, 03, 04, 06—15, 17, 20, 22, 24, 30—33 36, 38—46, 48—53, 56—60, 62, 63, 65, 67—69, 71—74, 77—80, 83, 85—87, 89—91, 96—98, 302—09, 12, 19, 25, 27, 28, 33, 37, 38), Stănescu Radu (4192, 94, 96, 99, 203, 07, 08, 10, 24, 36, 41, 45, 56, 57, 62).

Ş.m. 22 „Gheorghe Lazăr". Cl. X. Rădulescu P. Nicolae (4131—33, 35, 42—45, 47, 62, 77, 244, 48), Simionescu Ion (4302—09, 19, 33). Cl. XI. Zamfirescu Tudor (4192, 97—99, 203, 06—08, 36, P.N.).

Ş.m. 23 „D. Bolintineanu". Cl. IX. Cleanoveanu Eugen (4192, 203, 07, 08, 10, 48, 57, 71, 78). Cl. XI. Bîrzoi Viorel (4131—33, 42, 45, 53, 62, 77, 287), Răcăuţeanu Nicolae (4200, 10, 40, 302—05, 07, 09).

Ş.m. 24 „V. Alecsandri". Cl. IX. Popescu Gh. Domiţian (4204, 06—11, 13, 24, 38—42, 44, 45, 47—51, 56, 57, 59, 60, 62, 63, 68, 71, 73, 78, 80, 83, 98, 302, 04, 05, 07—09, 11, 12, 30, 37). Cl. X. Popescu Natalia (4192—94, 97, 203, 04, 07, 08, 10, 41—45, 47).

Ş. m. 25. Cl. VIII. Dumitru Remus (4168, 77, 82, 221, 69, 98, E: 1504, 08, 11, 18—20, 23, 24, 26, 32).

Ş.m. 26 „Al. I. Cuza". Cl. IX. Bolocan C. Gabriel (4131—35, 42, 43, 45, 47, 48, 52—54, 62, 63, 66, 68, 69, 71—73, 75, 77, 92, 94, 95, 97, 203, 07, 08, 13, 15, 24, 43, 45, 47, 48, 65, 83).

Ş.m. 27. Cl. VIII. Max Erna (4131—33, 62, 77, 80, 94, E: 1518, 20, 21, 23, 32, 47, 51).

Ş.m. 28 „Dr. Petru Groza". Cl. VIII. Köppich Maria (E: 1512, 22, 25, 47). Cl. IX. Faro Laurenţiu (4131—33, 42, 43, 45, 47, 54, 56, 60, 66, 77, 92, 96, 203, 07, 12, 32, 36, 38, 39, 44, 45, 48, 57, 68, 73, 86, 98, 100). Cl. X. Constantinescu Şerban (4204, 05, 56, 57, 63, 68, 73, 302—09), Jiru Monica (4302—08, 15, 16, 21, 37—39). Cl. XI. Anghel Marius (E: 4422, 24, 33, 35, 36, 38—40, 43, 46), Răutu Nadia (4198, 200, 20, 30, 33, 36, 41, 43—45).

Ş.m. 32 „Filimon Sîrbu". Cl. VII. Florea George (E: 1512—17, 21, 22, 25, 27), Cl. IX. Dumbravă Mircea (4131—35, 42, 43, 45, 47, 48, 53, 62, 66, 68, 77, 92, 302, 07). Cl. X. Vinea Vladimir (4192, 94, 95, 97, 203, 08—10, 12, 13, 15, 25, 27, 32, 36, 38, 39, 41, 42, 45, 48—51,, 56, 57, 60, 63, 65, 68, 71, 73, 77, 78, 85, 86, 90, 91, 93, 98, 99, 302, 04, 05, 07—09, 15 17, 19, 23, 25, 30, 38).

Ş.m. 39. Cl. VIII. Gianni Grigore (E: 1512—20, 22, 23, 25, 28, 30, 31).

Ş.m. de muzică nr. 1. Cl. VIII. Dumitrescu Cristian (E: 1512—23, 25, 30, 47, P).

Şc. elem. 49. Cl. VII. Mereuţă Doina (E: 1499, 507, 08, 10, 12 13, 15, 17—20, 22).

Şc. elem. 82. Cl. VII. Derner Ştefania (E: 1512, 13, 15, 22, 25, 31, 38, 39, 43, 45, 49, 50, 52 54) Marcovici Elda (E: 1512, 13, 15, 16, 22, 25, 29, 31, 38, 39, 43—45, 49, 50, 52 54). Ludwig Al. (E:

1512—16, 22, 25, 38, 39, 41, 43—45, 50, 52—54).

Şc. elem. 135. Cl. VI. Motoi Marin (E: 1528, 30, 31, 38, 39, 41, 45, 46, 49, 53, 55, 59, 63, 70).

Fără indicaţia şcolii. Bluoss Hans (4134, 35, 37, 44, 46, 48, 53, 55, 58, 62, 65, 66, 72, 73, 75, 77, 80, 83, 84, 92, 94, 95, 97, 203, 07, 08, 13, 20, 24, 33, 42).

BUHUŞI. Absolvent Savinoiu Vasile (4133, 66, 68, 70, 85, 95—97, 205, 10, 20, 29, 33, 45, 48, 61, 68, 73). Cl. VII. Coşeraru A. Ionel (E: 1512, 13, 15—18, 28—43, 52, 53). Cl. X. Pop N. Eugen (4168, 95—97, 204, 05, 10, 20, 33, 36, 41, 43, 45, 46, 48, 57, 61, 68, 71, 73, 85), Cl. XI. **Ursu Const.** (4192—99, 203—13, 15, 20, 22, 24, 25, 36—48, 50, 56, 57, 60—65, 68, 69, 71, 73, 78, 87, 93, 97, 98, 302, 09, 12, 27, 33, 37, 38).

BURDUJENI. Cl. XI. Costinescu A. Petre (4192, 208, 41, 302—05, 09, 12).

BUZĂU. **Ş.m. 1 „B. P. Hajdeu".** Cl. VII. Pătrăscioiu Marcel (E: 1530, 32, 37—39, 42, 43, 47, 50, 52). Cl. VIII. Costea M. Ion (4210, 309, E: 1530, 32, 41, 42, 44, 45, 47, 48, 50, 51), Ionescu V. Grigorian (4192, 207, 327, E: 1512—15, 17, 18, 20, 22, 25, 41, 43—45, 49—50, 52, 54). Cl. IX. Rujan Dan (4192, 95, 96, 203, 04, 07, 36, 42, 44, 45, 48, 50, 312, 32, 38, 39, 68, 73, 86, 98). Cl. IX. Udrescu Florin (4144, 48, 54, 63, 66, 73, 80, 92, 203, 08, 10, 13, 24, 36, 39, 42, 44, 48, 49, 56, 71, 98). Cl. X. Stoicescu T. Ion (4240—45, 47, 48, 53, 56, 65, 67, 71, 73, 82, 87, 98, 302—09, 19, 33). Cl. XI, Ciurea Costel (4131, 32, 34, 36, 42, 45, 53, 54, 59, 62, 71, 73, 77, 80, 83, 96, 203, 07, 10, 50), Ghigulescu Doina (4248, 54, 65, 68, 87, 304, 05, 07—09, 12), Munteanu Violeta 4131, 32, 34, 36, 42, 45, 53, 54, 59, 62, 71, 73, 77, 80, 83, 93, 96, 203, 07, 10, 98, 50, 68, 87, 98), Spinescu Teodor (P).

Ş.m. 2 „M. Eminescu". Cl. XI, Bocioacă Radu (4192, 95, 98, 203—05, 07, 38—41).

Şc. pedagogică mixtă. An. I .Cristudor N. Elena (E: 1540—45, 47—50, 52—54).

Şc. de 7 ani Haleş — Valea-Rea. Cl. VI. Cimpeanu Angela (E: 1540, 43, 45, 48—54), Negulescu Elena (E: 1540, 43, 45, 48—54), Vişava Victoriţa (E: 1540, 43, 45, 48—54), Cl. VII. Maziliu Elena (E: 1540, 41, 43, 45, 48—50, 52—54), Stanciu Nicoleta (E: 1555, 58—62, 64, 67, 69, 70), Zirnea Elena (E: 1540, 41, 43, 45, 48—50, 52—54).

BUZIAŞ. Cl. X, Rămneaţu Ana (4131, 32, 36, 42, 45, 47, 53, 62, 77, 92, 210).

CARACAL. **Ş.m. 1,** Cl. VIII, Popa C. Emil (4248, 49, 62, 71, 78, E: 1528, 29, 31—33, 39, 41, 42, 45, 47—49, 53, 54), Susanu Marian (4177, 92, 207, 08, 10, E: 1499—504, 07, 08, 11—13, 15, 17—22), Cl. X, Iacob Traian (4142, 44—48, 77, 80, 203, 09, 36, 41, 68, 78, 79, 85—87, 98, 327, 33, 34), Păunescu Doru (4194, 203, 04, 07, 08, 10, 11, 32, 38, 39, 48, 56, 57).

Ş.m. 2, Cl. IX, Tăbîrcă Nicolae (4192, 94, 104, 08, 13, 36, 42, 44, 45).

CARANSEBEŞ, **Absolvent Cornea Filip** (4131—33, 42, 43, 45, 47, 48, 50, 51, 53, 54, 58, 60, 62, 66, 68, 69, 75, 77, 80, 81, 98, 99, 203, 06—10, 21, 23, 24, 34, 36, 41, 42, 45, 56, 57, 66), Cl. X. Băndoi Lucia (4134, 36, 42, 44, 45, 47, 53, 54, 77, 92, 203, 10).

CIMPIA TURZII. Cl. VIII. Botezan Nicolae (4194, 203, 08, 10, 38, E: 1499, 500, 06, 08, 15, 18, 19, 29, 30, 46, 51, 53, 92), Ganea Macedon (4192, 94, 203, 06—11, 36, 38, 39, 44, 45, 302, 04, 05, E: 1493, 95, 97), Cl. IX. Gligor Victor (4192, 94, 95, 97, 203, 07—11, 45), Nemeş Mihai (4131—34, 43, 42, 45, 53, 62, 77, 92, 95, 207, 08, 12, 38, 39, 56, 68, 73, 98, 305, 19, 27).

CIMPINA. **Ş.m. 1 „N. Grigorescu",** Cl. X, Ciuciu Cornel (4131—37, 42,—49, 52—55, 58, 62, 63, 66, 68, 69, 71—75, 77, 80, 81, 83, 92, 94—98, 200, 03, 05—11, 3, 15, 20, 22, 24, 30, 33, 34, 36, 41, 43—45, 48—50, 52, 56, 60, 62, 65, 71, 78, 80, 83, 89, 93).

Ş.m. 2 „Ilie Pintilie". Cl. IX. Teodorescu Viorel (4192, 94, 95, 97, 203—08, 12, 24, 36, 38, 39, 44, 45), Cl. X. Sedai St. (4192, 94, 96, 207, 08, 24, 32, 39, 42, 48, 56, 57, 68, 71, 73, 80).

Şc. tehnică maiştri. An II. Cruceru Filimon (4132, 50—53, 66, 80, 203, 05).

CIMPULUNG MOLD. Cl. X. Constantin N.G. (P).

CIMPULUNG MUSCEL. **Absolvent** Bănică G. Constantin (4156, 57, 226, 65, 67, 68, 71—73, 75—77, 79, 80, 82, 83, 86, 87, 89, 95—98, 100—09, 11, 14, 16, 20, 21, 25, 28, 33, 34, 36, 37, P), **Vasilescu Mihai** (4131—34, 38—45, 47 48, 50—54, 56—58, 62, 75, 77—80, 83—85, 92—99, 202, 03, 12, 17, 20, 29, 32, 36, 38, 40—45, 49, 50, 52, 54—58, 68, 75, 83, 87, 98, 300, 01, P).

Ş.m. „Dinicu Golescu". Cl. IX. Bădescu N. Lucian (4192, 94, 95, 97, 203, 07, 08, 10, 13, 15, 22, 24, 36, 44, 45, 47, 48, 56, 57, 65, 69, 71, 302, 04, 05, 07—09, 38). Cl. X. Scărlătescu Doru (4135, 43, 44, 63, 66, 71, 72, 75, 77, 80, 99, 230, 33, 36, 41, 42, 44, 46, 67, 68), Cl. XI. Guja Aurel (4190, 96, 98, 302—09).

Şcoala pedagogică. An. III. Ivaşcu Gh. (4192, 204, 05, 07, 08, 10, E: 1512, 15, 17), An IV. Georgescu Severică (4192, 203, 07, 08, 23, 45, 56, 62, 63, 68, 70, 73, 86, —0, 98).

CLUJ. **Studenţi : Bîrzan Romanel (Inst. Politehnic)** (4138, 44, 49—52, 55, 67, 74, 75, 77, 80, 95—98, 200, 02, 05, 06, 08—11, 15, 20, 22, 24, 30, 33, 48, 56, 65, 67, 69, 71, 83, 302, 04, 07—09, 37, 41, 51, 75, P),

Moldovan Grigor (Fac. mat. fiz.) (4131—55, 62, 65, 66, 68, 71, 77, 80, 92—94, 96—98, 100, 03, 04, 06—10, 13, 15, 29, 30, 33, 36, 41, 43—45, P), **Szasz Carol (Fac. mat. fiz.)** (4131—39, 41—55, 58, 59, 62, 63, 66—68, 71, 73—77, 80, 81, 83, 92, 94—99, 202—05, 07—11, 13, 20, 21, 29, 30, 33, 36, 41—46, 48), Toader Mihai (Mat. fiz.) (4282, 83, 308, 21, 37, 48, 51, 54, 60, 69).

Absolvenți: Moraru Radu (4131—34, 38, 39, 41—48, 51, 53, 62, 66, 67, 74, 77, 92, 93, 95, 96, 200, 03, 09, 35—40, 45, 48, 60, 70, 77, 83, 85, 87, 90, 98, 300, 01), **Lungu Șerban** (4192, 94—200, 03, 04, 06, 08, 11—14, 20, 24, 29, 31—33, 35, 38—50, 302, 03, 05, 06), Pop Dorina (4131—36, 38—44, 62, 66, 68, 70, 71, 74, 75, 77, 80, 83, 87).

Ș.m. 2 „Gheorghe Coșbuc". Cl. VII. Miclea Lucia (E: 1529, 31, 40, 43—46, 50, 52), Moraru Miron (E: 1512—20, 22, 24, 29, 32, 43, 47, 50). Cl. VIII. Jeflea Alexandrina (4192, 207, 08, 38, 56, 68, 85, 98, E: 1512—1 14, 16—20, 22, 25, 26, 29—32, 38, 39).

Ș.m. 3 „Gh. Barițiu". Cl. VI. Farcaș Petru (E: 1499, 500, 03, 07, 10, 12, 15, 27, 28, 38), Pop Cornel (E: 1499, 500, 03, 07, 10, 12, 15, 17, 21, 27—29, 39—41, 43, 49, 50, 52—54). Cl. X. Crișan Ștefan (4198, 203, 10, 20, 30, 33, 36, 41, 44, 45, 48). Cl. XI. Dunca Victor (4212, 32, 68, 70, 77, 79, 87, 96, 89), Iosubescu Dan (4207, 08, 10, 12, 32, 36, 38, 68, 73, 86, 87, 98).

Ș.m. 4 „Emil Racoviță". Cl. VI. Gross Adalbert (E: 1499—501, 03, 07, 13, 15, 20, 25, 29), Samson Paul (E: 1499—501, 03, 07, 12, 13, 15, 17, 22, 29, 38, 39). Cl. VII. Ilian Virgil (E: 1540, 41, 43—46, 48—50, 52, 53).

Ș.m. 5 „A. Șincai". Cl. XI. Stoica Aurel (4137, 42—44, 46, 52, 53, 71, 76, 80, 89, 94, 95, 97, 220, 41, P).

Ș.m. N. Bălcescu. Cl. VII. Perl Toma (E: 1528, 29, 38, 39, 41, 43, 45, 46, 48, 50, 52).

Șc. de 7 ani Săulea-Sărmaș. Cl. VII. Stoica Viorica (E: 1518—20, 22, 29, 32, 37—39).

CONSTANȚA. **Absolvent Olaru Nicolae** (4131—35, 43—55, 62, 66, 68, 71, 74, 76, 77, 80, 89, 95, 96, 98, 99, 203, 05, 06, 12, 37—39, 41, 45).

Ș.m. 1 „Mircea cel Bătrîn". Cl. VII. Mirea Maria (E: 1515, 17, 19, 22, 25, 40—42, 45, 47, 49, 50), Munteanu Maria (4207, E: 1507, 10, 17, 40—49, 51), Păunescu Mariana (4132, 33, 42, 53, E: 1504, 05, 10—12, 17, 20). Cl. VIII. Bîrzănescu Vasile (4192, 94, 207, 10, 22, 24, 38, E: 1512—18, 20—27). Cl. IX. Angelescu Traian (4192, 94, 224, 38, 68, 78, 86, 98, 319). Cl. X. Bdică I. Dan (4192, 205, 07, 08, 10, 56, 77, 89, 306), **Nițulescu Alexandru** (4094—99, 102, 31, 42, 45, 808).

Ș.m. 3 Cocoș Grigore (E: 1512, 13, 15, 17, 22, 29, 31, 38, 39, 68).

Șc. de 7 ani. Cl. VI. Sandu Viorel (E: 1512, 16—19, 22, 42—44, 47, 50, 52). Cl. VII. Botezatu Liliana (E: 1515, 22, 25, 40—42, 45—47, 49, 54), Horodîncă Nicolae (E: 1504, 07, 19, 15, 16, 18—22). Șchiopea Dumitru (4131, 57, E: 1504, 07, 09, 13, 15, 16, 18, 21, 22, 25, 26, 32, 36).

CODLEA. Cl. VI. Pivodă Lucia (E: 1513, 15—17, 22, 28, 38, 39, 43, 44, 46, 47, 52, 53).

CORABIA. Cl. VII. Steplecaru Eugenia (E: 1512, 13, 15, 17, 22, 27, 29, 38, 39). cl. VIII. Alexandru Nicolae (E: 1532, 41, 43, 45, 50, 52, 60, 63, 70); Delu Maria (4256, 98, (E: 15, 29, 30, 32, 33, 38, 60 70); Diaconu I. Tudorel (E: 1532, 38, 42, 48—50, 53, 59, 60, 70); Rezeanu Sonia (E: 1550, 53, 59, 60, 62, 65, 70); cl. XI. Tătaru Al. (4282, 90, 93, 302—05, 07—09, 38).

CRAIOVA. Vasilescu Gh. student Inst. ped. de 3 ani (4131, 32, 36, 38, 43, 47, 48, 51, 71, 73, 84, 95, 97, 203, 07, 10, 25, 41, 43, 47); **abs. Marinică C. Ion** (4192, 93, 95—99, 208, 29, 41—45, 48, 50, 83); cl. X. Ghejan I. Nicu (4152, 54, 62, 71, 77, 207, 08, 57, 63); **ș.m. 2 „Frații Buzești"** cl. VI Iordăchescu Anca (E: 1517, 18, 22, 25, 30, 31, 32, **38, 39, 41), cl. VII Bărboiu D. Nicolae (E:** 1528—31, 38—45,; ș.m. 3 cl. X. Stoica Manuela (4192, 94, 95, 97, 203, 04, 07, 08, 12, 24, 32, 36, 44, 45) cl. XI Nicolaescu Doina (4192, 204—06, 08, 09, 11, 15, 52, 60, 303, 05, 07, 09); **Pavel N. Radu** (4135—37, 71, 92, 95, 96, 98, 99, 203, 04, 06—08, 10, 17, 20, 29, 30, 33, 36, 41—46, 48, 50, 56—59, 61, 63, 67, 71, 78, 80, 90, P); ș.m. 4 cl. VIII Șipoteanu Elvira (40105, 54, E: 1506, 12, 16—18, 20, 22, 25, 32, 41); cl. IX Corîci I. Antonie (4134, 53, 57, 62, 92, 96, 249); Nica I. Maria (4262, 68, 98, 319, E: 1528, 32, 53); cl. X Iordăchescu Viorel (4155, 62, 66, 80, 92, 13, 15, 96, 203—05, 07, 08, 10, 17, 36, 41, 44, 45, 48); **Grupul școlar Electroputere**, An. I. Catrina Dumitru (4192, 95, 97, 98, 203, 13, 20, 32, 33, 38—43, 45); **școala de 7 ani 1**, cl. VI. Petrescu Ionel (E: 1516, 17, 21, 22, 25, 27, 29, 30, 38, 39); **școala de 7 ani, 7** cl. VI. Ghițulescu I. Dan (E: 1527, 30, 31, 38, 41, 45, 49, 50, 52, 53); **Școala de 7 ani 9**, cl. VI. Pelivau Ileana (E: 1538, 41, 44, 49, 52, 53); **școala de 7 ani 10** cl. VI. Diaconescu Mihaela (E: 1512, 13, 22, 38, 39, 41, 44, 50, 52, 53); cl. VII. Popa T. Mihai (E: 1528, 29, 34, 38, 39, 41, 43, 50, 52, 53).

CUGIR. cl. VIII Seral: Moldovan Nițâ (4192, 94, 207, 38, E: 1518—20, 23, 26).

CURTEA DE ARGEȘ. Bădescu Horia (4097, 100, 01, 08, 14, 32, 33).

DARĂBANI, ș.m. cl. XI. **Moga Ion** (4131—36, 39, 42, 54, 59, 62, 66, 68, 71, 73—75,

77, 80, 81, 92, 93, 96, 203, 07—11, 30, 35, 41—43, 45, 46, 57, 62).

DEJ. cl. VI Suciu Octavian (E: 1510, 12—15, 22, 28, 29, 31, 38—41, 43—46, 48—50).

DEVA. **şc. medie Decebal.** cl. VI Reclaru Lucian (E: 1512—16, 22, 25, 27), cl. XI Caraman Dan (4131—33, 36, 42, 43, 45, 117, 48, 52—54, 92, 94, 95, 99, 203, 07, 09—12, 38, 39, 41, 43); Clipii T. Tudor (4192, 212, 14, 20, 36—41, 43—45, 48, 68, 73, 87, 96, 305, 08, 09, 37, 38).

DRĂGĂNEŞTI-OLT. cl. VIII Cîndrea Gh. Ion (4208, E: 1508, 10, 13, 17, 18, 20, 22, 26, 32, 33, 38, 42, 47, 53, 54); cl. IX. Văleanu M. Ion (4131—34, 42, 47, 95, 245); cl. XI Nicula Năstase (4203, 08, 36, 303, 05, 41, 50, 57).

DRĂGĂŞANI. **abs. Barbu Gh. Emil** (4132—34, 42, 46, 48, 52, 53, 55, 58, 62, 66, 68, 71, 74, 75, 77, 80, 83, 92, 97, 203, 06—08, 10, 15, 33, 36, 41—43, 45, 48, 50, 62, 67, 80, 95, 303); şc.m 1 cl. IX Stănescu I. Cicerone (4194, 96, 203, 10, 38, 41, 47, 65, 69, 302, 05, 07, 09, 11, 27, 37, 38); cl. X. Blidaru Ion (4133, 42, 45, 46, 52—54); Gornistu C. Gh. (4132, 42, 43, 45, 47, 53, 54, 62, 77, 92, 94, 96, 203, 07, 08, 42, 47, 48, 56, 62, 65, 69, 71, 83, 302, 05, 09, 27, 37, 38); Oltu Orest (4192, 95, 96, 203, 07, 08, 10, 12, 36, 38, 40—45).

FĂGEŢ. **abs. Capotescu Mircea** (4131—55, 58, 60, 62, 63, 65—68, 70—77, 80, 83, 87, 92—214, 20, 24, 29, 32—34, 36, 38, 39, 47—50, 56—58, 65, 67, 70—72, 78, 82, 84, 88, 89, 98, 300); Costea Dumitru (4144, 49, 52, 53, 66, 92—95, 97, 203, 08, 10, 17, 23, 24, 33, 36, 41, 44, 45, 57, 65, 77, 83, 87); cl. XI. **Gheju Petru** (4253—13, 20, 24, 30, 33, 34, 38—40, 42, 47—50, 52, 53, 56—58, 65—68, 71, 78, 80, 82, 83, 87—90, 98, 302—09, 15, 37, 38).

FĂLTICENI. cl. VIII. Purnichi Mihai (E: 1540—43, 45—48, 50, 52, 54).

FĂTEŞTI GARĂ. cl. VI. Gonciar Ştefan (4153, E: 1502, 07, 10, 12, 15, 22, 25, 30, 38, 39); cl. XI. Dobre Cornel (4131, 36, 44, 48, 92, 94, 203, 07, 08, 10, 20, 24, 33, 36, 39—42, 44, 48. 56, 68, 73, 83, 95, 98, 302, 05, 06, 08, 09, 33, 38).

FOCŞANI. **ş.m. Unirea.** cl. VIII. Ion Matei (4162, 77, 80, 92, 207, E: 1499, 506, 07, 10—15, 17, 18, 20, 22, 23, 25, 26); **Rosenberg Flavia** (4192, 94, 203, 07, 10, 24, 42, 48, 49, 71, 78, 80, 302, 05, 09, E: 1512—27, 30, 32, 38, 39, 47—50, 54); cl. IX Cramer Eugenia (4162, 73, 207, 08, 10, 38, 39, 73, 302, 04, 07, 09); cl. X. Molla Ion (4134, 35, 42, 43, 45, 47, 48, 56, 63, 92, 95, 203, 08, 22, 38, 39, 45, 56, 57, 62, 68, 74, 93, 302, 05), cl. XI. Calţaru N. Ovidiu (4250, 56, 57, 69, P); **Grădeanu G.** (4131, 33—35, 43, 44, 46—49, 52, 54, 55, 58, 65, 72, 73, 80, 83, 89, 92—95, 97—99, 203—11, 13, 15, 16, 20, 24, 33, 36, 38—46); **Năstase Aurel** (4209, 13, 32, 46, 48 50, 52, 56, 75, 62, 63, 65—67, 71—93, 81—83, 86, 87, 90, 300, 02—09, 16, 25, 33, 37, 47, 51—54, 56, 60, 62, 67, 69, 70, 75); **Perju C. George** (4192, 94, 96—99, 214, 20, 21, 33, 36, 39, 42, 48, 49, 56, 57, 65, 68, 70, 71, 73, 77, 78, 80, 83, 86, 87, 98, 302—09, 15, 16, 25, 33, 37, 38); **Popa Nicolae** (4248—50, 52—67, 71, 72, 74, 75, 78, 80, 82, 84, 88, 90, 93, 95, 302, 12, 14, 16, 21, 31, 37, 38, P).

GĂEŞTI. cl. VIII. Alexandrescu Petruş (4192, 94, 96, 97, 221, 36, 42, 48, 71, 302, 05, 09, E: 1514, 21, 24, 32, 38, 39, 42, 43, 47, 49, 50, 52, 53.

GALAŢI. **s.m. 1.** cl. VIII. Strat Gheorghe, (4256, 315, 16, E: 1512—15, 17, 18, 22, 25, 40—43, 45—54); **ş.m. 2.** cl. XI. Prodan Iulian (4131—33, 36, 37, 42—45, 47—49, 52—54, 62, 66, 67, 80, 83, 92, 95, 98, 203, 06—09, 30, 32, 33, 40—42); **ş.m. 3.** cl. VII. Segalinschi Alexe (E: 1506—08, 12—17, 21, 25, 29, 30, 38, 39); cl. IX. Ivănescu Alexandru (4133—35, 44, 45, 62, 66, 75, 87, 92, 95, 97, 203, 07, 45). cl. XI. Oancea V. Nicolae (4248, 60, 61, 78, 302, 03, 08, 42, 51, 69), Anomin (4192, 94, 203, 08, 48, 56, 65, 305, 07, 09).

GIURGIU. **Ş.m. 1.** cl. VIII. Gros Boris (4192, E: 1512, 13, 15—20, 22, 24, 25, 32); Grozeanu Ioan (4192, E: 1499—501, 06, 07, 12, 13, 15—20, 22, 24, 25); Stănescu Şt. Veronica (4139, 42, 44, 46, 48, 52, 54, 92, 94, 202, 05, 07, 09, 11, 12, E: 1500, 03, 08, 10, 11, 12, 18, 20 P) ; Capu Mircea (4162, 77, 222, E: 1508, 11, 18, 20, 26, 32, 37), cl. IX Mîrlogeanu R. Ilie (4142, 43, 45, 47, 62, 73, 77, 203, 17, 44, 45, 50, 69, 80, 302, 05).

HAŢEG. cl. VIII. Petriu Emil (4208, 56, 98, E: 1528—32, 38, 39, P).

HOREZU **ş.m. A. I. Cuza,** cl. VII Cismaru Valentin (4853 E: 1499, 500, 07, 12, 13, 16, 22, 29, 38), cl. X. **Tănăsescu T. Miron** (4192, 97, 98, 99, 203—11, 20, 22, 24, 30, 31, 36, 39, 40, 44, 45, 48, 56, 57, 59—63, 68, 71, 73, 77, 78, 86, 87, 89, 90, 96—98, 302—05, 07—09, 11, 12, 18, 19, 25, 27, 28, 30, 33, 38.

HUEDIN, cl. VIII Popşa Octavian 4192, 94, 224, 25, E: 1500, 01, 07, 10, 12, 13, 15, 17, 18, 20, 22, 25, 32, 38—43, 45, 47, 50, 52, 53.

HUŞI. Abs. Dolteanu Temistocle (4192, 95, 200, 03, 06—10, 19, 20, 22, 29, 30, 36, 41, 44, 45, 467, 57—60, 69, 75, 78, 90, 302, 04, 06, 09, 11) cl. VI Bostan Gh. Constantin (E: 1512, 12, 15, 16, 21, 22, 27—31, 38, 39), cl. VII Patraş Mihai (4262 E :1512—17, 20, 22, 25, 32, 38, 39 P).

IAŞI, studenţi. Munteanu I. Ion (mat. fiz.) (4131—37, 42—48, 50—55, 57, 58, 60, 62, 66,

68, 69, 71—75, 77—78, 80, 83, 93—95, 97, 203, 13, 15, 24, 25, 27, 29, 31, 33, 36, 41—46, 48—50, 65—67, 71, 72, 83, 95, P), **Pop Ioan** (mat. fiz.) 4137, 302, 09, 11—17, 19—22, 25, 27, 29—34, 37—39, 41—49, 51, 53—55, 57, 59—65, 67, 69—73, 75 P), **Stancu V. Mihai** (4265, 72, 80, 82, 83, 203, 04, 06—09, 14, 30, 37, 38), Stănescu Nelu (4131—34, 42—55, 62, 66, 92, 94, 200, 03—15, 20, 22, 24—25, 41—46, 50, 56—61, 63, 65 P). **Ş.m. 1 „Mihail Sadoveanu"** cl. VIII Goldenberg Daniel (4131—33, 42—45, 47, 48, 53, 62, cl. IX. Peiu Mihai (4131, 33, 42, 43, 47, 48, 52—54, 207, 08, 10, 12, 32, 38, 39, 56, 57, 62, 68, 73, 86, 87, 98), Buzămurgă Liliana (4131—33, 35, 36, 42, 45, 48, 53, 54, 66, 87, 79, 80, 89, 92, 203, 40, 68). Caceaunov Claudia (4134—37, 42—47, 49, 52—56, 62, 66, 73, 77, 79, 80, 89, 95, 96, 203, 10, 40, 68), **Dascălu Paul** (4131, 37, 42—50, 52—55, 62, 66, 68, 71, 73, 77, 80, 83, 92—99, 203, 07, 08, 10, 12, 15, 23, 30, 36, 38—40, 44, 45). Zaharia Ecaterina (4133—36, 44—49, 52—54, 56, 66, 73, 77, 79, 80, 89, 92, 94, 203, 20, 40, 68, cl. XI Banacovschi Ioan (4132—33, 35, 36, 43, 45—48, 52, 53, 66, 75, 77, 79, 89, 91) ; **ş.m. 2** cl. VIII Corduneanu Maria (4192, 238, E: 1512—22, 25, 26), cl. XI Scheide Rodica (4133, 42, 45, 92, 207, 305), **ş.m. 3** Costache Negruzzi, cl. VIII, Serter Irvin (4192, 94, 207, 10, 38, 45, E: 1512—16, 18—20, 23, 26), cl. IX Tofan Emil (4131—33, 45, 62, 77, 92—94, 224); cl. XI Garginschi Radu (4194, 99, 203, 05, 07—09, 40, 44, 57, 07, 90, 203, 06, 08, 09) ; Matei Dragoş (4131, 32, 34, 35, 37, 45, 75, 98, 203, 13, 48, 62, 77, 83, 92, 94, 207—09, 31, 46, 56, 67, 72, 80, 303, 06, 08, 37). Pavel Nicolae (4138, 95, 99, 204, 05, 11, 23, 30, 34, 36, 39, 41, 42, 48, 50, 57, 62, 63, 67, 78, 83, 89, 90, 92, 302—09, 37, 38), Petrişor Silviu (4194, 99, 200, 07, 08, 10, 13, 20, 41, 45, 46). Pintilie Ion (4192—200, 03, 06, 07, 09, 10, 11, 15, 20, 22, 24, 25, 30, 34, 41—45, 47), **ş.m. 4 „G. I. Brăileanu"**, cl. VIII Georgescu Marieta (4162, E: 1499—503, 05, 10, 12—20, 22, 24, 25), Hortopeanu Ioana (E: 1512—27). cl. X Perju Natalia (4192, 203, 05, 07—11, 36, 43, 45).

INEU. cl. VIII. Kilyeni Ecaterina (4162, 79, E: 1499, 507, 10).

LUGOJ. Locot. Pupăzan Nicolae (4248—51, 56—58, 65, 67, 71, 72, 78, 80, 302—09, P), cl. VII Brînda M. Rodica (E: 1525, 27—32, 38, 39, 43, 50, 52), cl. VIII Popovici I. Mariana (E: 1504, 06, 07, 09, 12, 13, 17, 19, 20, 22, 24—27, 30, 32, 38, 39, 41, 47, 53), Vasiliu Dan (E: 1512—18, 22, 25, 29, 31, 32, 38, 39, 41, 43—47, 49, 50, 52—54), cl. X. Jurca Iulian (4143, 44, 48, 49, 63, 66, 71, 73—75, 93, 96, 241, 44, 45, 87, 305).

MINDRA (raion. Făgăraş). şc. de 7 ani. cl. VI Cocan Doina (E: 1499—501, 12, 13, 15, 22, 27—29, 37), Grama Gh. (E: 1527—29, 30, 39, 44, 45, 49, 50, 53).

MĂRĂŞEŞTI. **ş.m. 1** cl. X. Anghel Vasile (4134, 36, 43, 47, 54, 68, 71, 77, 93, 99, 203, 08, 10, 14, 30, 36, 40, 41, 44, 45, 50).

MEDIAŞ. cl. X. Ifrimelia Ştefan (4131, 44, 48, 53, 54, 92, 95, 97, 203, 12, 44, 50, 57, 73, 302, 04, 05, 09, 38), Schuster Bernd (4131—35, 42, 45, 53, 54, 62, 66, 77).

MOINEŞTI. cl. X. Popa Gheorghe (4131—33, 34, 36, 42, 45—48, 52—54, 62, 66, 73, 75, 77, 80, 92, 94, 95, 97, 99, 208—10, 33, 40—41, 43, 44—46).

MORENI. cl. VI. Tocan Gabriel Mihai (E: 1499, 501, 12—17, 21, 22, 25, 28—31, 38—41, 43, 45, 46, 47—50, 52), cl. VII. Namicos Adrian (1499, 501, 06, 08, 10—13, 15—18, 20, 22, 32, 34, 38, 39). cl. VIII. Drăgan Mihai (4132, 77, 40, 48, 56, 68, 98, E: 1501, 06, 08, 09, 14, 15, 19, 22, 26, 28—30, 32, 37, 39), **Jipa Gh. Const.** (4131—33, 42—45, 47, 48, 53, 62, 66, 77, 210, 38, 48, 56, 57, 68, 98, E: 1499—504, 06—12, 15, 17—20, 22, 27, 30—32, 38, 39), Şerbănescu Nicolae (4131—33, 42—45, 47, 48, 53, 54, 15, 22, 27—29,39), Grama Gh. (E: 1527—29, 03, 04, 06, 08, 10—18, 20, 25, 26).

NĂSĂUD. **ş.m. George Coşbuc.** cl. X. Zăgreanu Marius (4153, 96, 42, 44, 48, 50, 56, 65, 68, 98), Tîrnăvean Al. (4131—33, 45, 47, 48, 77, 229, 41, 44, 45).

OCNA MUREŞ. cl. VIII. Horovitz Ossi (4260, 319, E: 1531, 32, 38, 39, 41—46, 50, 52, 53), cl. XI. Lipaşcu Ecaterina (4131—34, 36, 38, 43—45, 51—54).

ODOBEŞTI. **Abs.** Dragomir Constantin (4192, 203, 07, 08, 29, 36, 41, 42, 44, 45), cl. IX Petrescu Adrian (4192, 95—97, 203, 07, 08, 36, 42, 44, 45), cl. X. Păncescu Paul (4171, 73, 96, 209, 10, 12, 22, 33, 41, 43, 46, 48, 50, 65, 67, 71—73, 83, 305, 06, 08, 16, 19, 37). cl. XI. Stoicof Stelian (4132, 33, 36, 42, 43, 47, 53, 54, 66, 203, 07, 44, 45).

ODORHEI. cl. VIII. Peter Arpad (4131—32, 62, 68, 77, 80, E: 1500, 02, 04, 08, 11).

ORADEA. **ş.m. 1** cl. VII. Pocoznoi Dorin (E: 1483—88, 90—94, 501, 03, 06—09, 13, 16—18, 22, 25), Wald Robert (4208, 33, 56, 73, 98, E: 1512, 20, 22, 25, 27, 29—32, 38, 41, 43—49, 52—54), **ş.m. 2** cl. VIII. seral. Goia Traian (4162, 77, 80, 222, E: 1508, 18—20, 23, 24), cl. VIII Ilie Magda (4162, 77, 80, 222, E: 1508, 18—20, 23, 24), ş.m. 4 cl. X. Bărbulescu Aurelia (4303, 08, 09, 48, 92, 207, 08, 36, 45, 50, 68, 70, 86, 87, 90, 98), Nistorescu Rodica (4194—97, 201, 04, 08, 09, 11, 20, 21, 24, 25, 30, 33, 42, 43, 45, 46).

ORAŞUL STALIN ş.m. 1 cl. IX. Constantinescu Laurenţiu (4197, 98, 203, 07, 08, 12, 13, 17, 20, 23, 31, 33, 36, 38, 42, 44, 45). cl. X. Savin Gheorghe (4133, 34, 42—49.

52—55, 62, 65, 66, 77, 80, 92, 94, 95, 99, 200, 03—05, 07, 08, 10, 21, 41, 45, 48, 56, 63, 71), Stoia Dan (4195, 96, 207, 10, 44, 50, 56, 309, 28) ; **ș.m. 5 „Unirea"** cl .VIII Munteanu Gh. Mihail (4192, 203, 10, E: 1512, 13, 15—20), cl. IX Munteanu Gh. Mircea (4132—34, 42, 43, 45, 47—49, 62, 66, 68, 77, 92, 15—97, 203, 10, 14, 15, 21, 36, 38—40, 77), cl. X. Sburlan Mihail (4131—34, 42, 43, 45—47, 52—55, 58, 62, 68, 77, ș.m. 6 Ștefan Gheorghiu cl. VII Darafti Viorel (E: 1512—22, 24, 26), cl. X. Klopot Ion (4192, 95—97, 203—05, 07—11, 15, 17, 20, 21, 23, 25, 40, 41, 44, 45), cl. X. Vintilescu Vasile (4192, 95—97, 203—05, 07—11, 15, 17, 20, 21, 23, 25, 40, 44, 45), cl. XI Kindich Richard (4215, 20, 33, 43, 45, 46, 67, 71, 90, 93, 312, 38).

OȚELUL ROȘU. (reg. Timișoara), cl. VI. Nîrligu Vasile (E: 1531, 38, 39, 43, 45, 49, 50, 53).

PANGEȘTI. cl. IX. Teirău Eugen (4192, 207, 08, 10, 62, 78, 304, 07, 09, 38).

PAȘCANI. șc. m. „C. Burcă" cl. X. Bucan Alex. (4131—33, 42—46, 52—55, 62, 66, 75, 77, 93, 207, 08, 48, 62).

PETROȘANI. cl. VII. Crihana Lascăr (4207, 56, E: 1528—30, 32, 38, 40—45, 47, 50—54). Popa Radu (4207, 08, E: 1514, 15, 23, 26, 29—32, 38, 39). cl. IX Coșulschi Mircea (4131—33, 42, 43, 45—49, 52, 53, 74, 77, 80).

PITEȘTI. **Abs. Scarlat C .Nicolae** (4131—37, 39, 40, 43, 45, 54, 63, 66, 68—75, 77, 80, 83, 85, 87, 92, 94—213, 17, 21, 22, 24, 28—30, 32—50, 52—58, 60—63, 65, 67—69, 71, 73, 75, 78, 80, 83, 86, 87, 91, 95, 98, 300, 01). cl. IX. Pătrașcu I. Gh. (4237, 40, 50, 68, 56, 302, 04, 05, 08, 09, 37), Popescu I. Remus (4131, 32, 35, 42, 45 47, 53, 54, 92, 207, 08, 39, 44, 48, 56, 71, 73); cl. XI. **Adameșteanu Ion** (4137, 55, 72, 73, 87, 89, 91, 94, 95, 97, 204, 07—09, 12—15, 22, 29, 32—34, 38—41, 43, 44, 56, 57, 60, 62, 65, 68, 71—73, 77—79, 86, 90, 98, 99); **Strătilă Șerban** (4131—37, 42—55, 57—60, 62, 63, 65—69, 77—78, 80—83, 91, 94—200, 03—11, 13, 15, 20—25, 28, 30, 31, 33, 34, 36, 41, 47, P) ; **ș.m. 3. Al. Odobescu** cl. IX. **Ghica S. Anton** (4146, 50, 51, 57, 65, 68, 69, 71, 72, 74—76 80, 81, 83, 91, 95, 97—200, 05, 09, 13, 20, 21, 28, 30, 31, 33, 36, 41, 43, 44, 46, 47, N.P.) ; Zamfir D. Cornel (4192, 94—96, 203, 05, 07, 09—11, 13, 21, 38, 39, 44, 48).

PLOEȘTI. **Abs. Georgescu V. Teodorel** (4131—34, 40—43, 45, 47, 48, 51, 53, 62, 66, 71, 72, 74, 75, 77, 80, 97, 99, 203, 07, 08, 13, 33, 36, 41, 43—47, 67, 71, 80, 83, 88); **ș.m. 1 I. L. Caragiale** cl. VIII. Aiomer Sergiu (4192, 94, E: 1510, 1213. 16, 17, 20—22, 25, 27, 32, 39, 41—43, 45, 47—50); Nicolae Grigore (4131—33, 68, 77, 92, 94, E: 1502, 04, 12, 15—23, 25—29, 32, 31—39). Pîrvulescu Const. 4131—33, 42, 45, 47, 53, 54, 62, 92, 207, E: 1499—504, 06—08, 10—18, 20, 22, 25—27), Stoian N. Andrei (4194, 207, 98, E: 1519, 22, 38—43, 45, 47—50, 52). **Vîlceanu Gh.** (4131—33, 42—45, 47, 48, 53, 54, 62, 66, 68, 77, 92, 94, 203, 07, 08, 10 E: 1499—501, 04, 06—08, 10, 12—20, 22, 25, 26). cl. IX. Lazea T. Adrian (4192, 96, 207, 08, 10, 50, 56, 57, 60, 302, 05, 09). Leonte Emilia (4131—33, 42—45, 53, 62, 77, 305). cl. X Drugea I. Gh. (4153, 54, 58, 62, 66, 69, 73—75, 77, 80, 81, 83, 92, 94—97, 203, 05, 07—09, 10, 11, 20, 36, 39—41). Emănoil Const. (4192, 203, 04, 07, 08, 24, 36, 42, 44, 45, 48—50, 56, 57, 65, 71, 78, 304—05, 07, 09. Gheorghiade Al. (4134—37, 46, 48, 49, 52, 53, 55, 66, 80, 92, 94—98, 200, 03, 04, 06—11, 41). **Opriș M. Ion** (4191, 94, 95, 97, 98, 200, 03, 06—11, 13, 15, 20, 22, 24, 36, 40—46, 48, 50, 56, 57, 62, 65, 68, 93, 78, 83, 86, 98, 302—04, 07—09, 19, 27, 33, 37). Absol. **Ene P. Dumitru** (4191, 92, 94—99, 203, 05—10, 13, 15, 20, 21, 24, 29—33, 35—36, 38—46, 48—50, 54, 56—62, 65, 68, 70—73, 77, 80, 82, 83, 06, 87, 98, 300, P) ; Pechiu Traian (4248, 56, 57, 60, 303—05, 07, 09); **ș.m. 2 „A. Toma"** cl. VIII Bădeanu Iulian (4162, 77, E: 1499, 503, 06, 07, 10—13, 17, 18, 20, 22, 25, 29, 30, 32, 38, 41, 46, 41, 52. Stoica Petre (E: 1500, 10, 12, 15—20, 22, 25) ; **ș.m. 3 „Mihai Viteazul"** cl. VI. Brener Paul (E: 1512—17, 21, 22, 25, 30, 31, 38—40, 43—45, 49, 50, 52). cl. VIII Glava C. Mihai (4192, E: 1512, 15, 17, 18, 20, 22, 25, 26, 39), cl. XI. Constantinescu Marcel (4131, 33—36, 42—45, 48, 54, 56).

PUCIOASA. **ș.m. 1** .cl. VI Tîrcă Mihail (4142, 62, 207, E: 1507, 08, 21, 26, 27, 32, 38, 39), cl. VIII. Bucăloiu Nicolae (4131, 32, 33, 77, 92, E: 1512, 17, 18, 20, 22, 25), Rîmbu Revișoara (4192, 94, 207, 38, E: 1499, 500, 12, 13, 15—20, 22, 25, 26, 31, 32, 37—39, 41, 43, 47, 49, 52, 53). cl. IX. **Diaconescu C. Radu** (4192, 94—99, 203, 07, 08, 10, 12, 13, 18, 20, 24, 34, 36, 38, 39, 41, 42, 44, 45, 48—50, 56, 57, 65, 67, 72, 73, 78, 80, 83, 85, 86, 93, 98, 302—06, 08, 09) ; Dobrescu Ion (4193, 96, 203, 07, 17, 19, 44, 80, 324) ; Longin Șerban (4134, 35, 44, 52, 75, 76, 80, 94, 95, 97, 203, 07, 08, 10, 12, 13, 21, 24, 25, 32, 36, 39, 44, 45, 56, 68, 71, 73, 78), Marin I. Victor (4131—35, 42—45, 47, 48, 52—54, 62, 63, 66, 73, 75, 77, 80, 92, 203, 10, 20, 33, 36, 44, 45), Rîmbu Eliade (4169, 75, 92, 96—98, 203, 07, 08, 10, 12, 23, 15, 17, 20, 22—24, 33, 36, 42, 4445, 47, 303, 34, 38, 39, 42), cl. X. **Năstăsescu Const.** (4265—73, 76, 78—80, 82—92, 95, 96, 98—300, 02, 09, 11—16, 19—22, 25, 27, 33, 34, 37, 38, 40), Niță Constantin (4230, 37,

51—53, 62, 66—68, 73, 76, 79, 80, 82, 83, 85—87, 90, 91, 93, 95—97, 300, 02—06, 08, 09, 11, 19, 21, 25, 27, 28, 33, 34, 38, P), Rizescu Elena (4131—33, 42, 45, 48, 53, 54, 77), cl. XI. Popescu S. Gh. (4134, 75, 79, 91, 95, 204, 07—12, 38, 39, 43—45, 304, 05, 09, 12, 18, 25, 33).

RĂDĂUȚI. **ș.m. 1** cl. X. **„Sîrghie Mircea"** (4131. 36, 42—49, 52—54, 62, 66, 71, 73—75, 77, 80, 81, 85, 87, 92, 94—200, 03—05, 07—10, 12, 13, 15, 20, 24, 27, 30, 32, 34, 41, 48—50, 52, 53, 56—60, 62, 63, 65, 67, 68, 71, 77, 80, 86, 87, 93, 98—300).

REGHIN. ș.m. 1 Suciu Dorel (4131—33, 35, 42—45, 53, 54, 62, P).

REȘIȚA. cl. VIII. Forul Iosif (4162, 77, E: 1499, 501, 06—22, 25, 26), Niță Constantin (4131, 32, 34, 42, 45, 53, 62, 77, 240).

RIMNICU SĂRAT. **ș.m. 1 „Al. Vlahuță"**. cl. X. Lascu I. Nicolae (4131—33, 42, 47, 92, 98, 207, 80, 90). Tîrțan Gr. Liviu (4132. 33, 42, 45, 47, 53, 92, 98, 20, 307, 08, 56, 57, 90), **ș.m. 2 Nelepcu Grigore** (4131—33, 42—44, 53, 62, 77, 92, 94, 207, 30, 48, 99, 68, 71, 78, 98, E: 1499—501, 04, 06, 08, 10, 12, 13, 16, 18—20, 22, 23, 25, 31—33, 37—39).

RIMNICU VILCEA. **ș.m. „N. Bălcescu"**. cl. IX. Nicolaescu Gh. Gh. (4131, 32, 44, 53, 62, 68, 77, 92, 203), cl. X. **Ou V. Ion** (4165, 71, 92, 94—200, 03—15, 20, 21, 24, 30—33, 36—50, 52, 53, 56—62, 65—68, 71—73, 78, 80, 82—87, 89, 96, 98, 302—09), cl. XI. Apostoloiu Victor (4138, 39, 49, 67, 74, 87, 94—99, 203, 04, 07, 15—17,, 33—36, 40—46, 48, 50, 56—58, 61, 65, 67, 300), **Popescu I. Virgil** (4131—36, 42—45, 47, 48, 52—55, 59, 62, 66, 68, 71—74, 77, 80, 81, 92, 95—99, 204, 07, 08, 10—12, 17, 30, 30, 36, 41—48, 56, 61, 62, 68, 71, 73, 83, 86, 98, 312, 37), **ș.m. „Vasile Roaită"** cl. VI. Droașcă Bogdan (E: 1513, 16, 22, 29, 31, 39, 43, 44, 50, 52). cl. X. **Mihăescu Doru** (4192, 94—200, 03, 05—13, 20, 24, 36—42, 45—52, 57, 59—61, 63, 68, 71, 82, 83, 88, 302—09, 37).

ROMAN. cl. VIII. Niculescu G.G. (4135, 42, 44, 45, 53, 97, 203, 13, 37, 42, 48, 71, 83, E: 1520, 23, 26, 32, 42, 47, 54), cl. X. Răducanu Claudia (4134, 36, 42, 44—47, 49, 52, 53, 66), cl. XI, **Cănilă C. Const.** (4192, 95, 97, 98, 200, 03, 04, 06—09, 11, 20, 24, 30, 36, 40—46, 48—51, 53, 56, 57, 59—63, 65, 57, 68, 72, 73, 77, 78, 80, 89, 93, 95, 302—05, 07—09), Enache Gheorghe (4132, 34, 36, 47, 49, 52—54, 58, 62, 66, 71, 73, 77, 80, 83, 92, 94, 95, 203, 07, 08, 10, 36, 44, 45), Ilinoiu Eugen (4131—36, 42, 45, 47, 57, 62, 66, 68, 77).

ROȘIORII DE VEDE. **ș.m. T. Vladimirescu** cl. VIII. Nebunescu Alexandru (4144, 52, 80, 207, 07, E: 1502, 09, 11—17, 19, 20, 23—25), cl. XI. Borțun Gheorghe (4232, 38, 40, 68, 73, 87, 318, 25, 33, 39), Breazu Ioana (4268, 70, 73, 77, 79, 85—87, 96—98, 301, 18, 19, 25, 33, P).

ROZNOV. **șc. serală** cl. IX. Bîlea Petru (4248, 68, 71, 86, 98, 334, E: 1518, 22, 32, 38, 47, 50).

RUPEA. cl. IX. Lazea Ioan (4146, 48, 52, 53, 62, 77, 80, 92—97, 203, 07, 08, 11, 24, 36, 44, 45, 48, 50, 56, 57, 60, 63).

SALONTA. cl. VII. Rus Mircea (E: 1512—20, 22, 23, 25, 26), cl. VIII Borcea Valeria (4192, 207, E: 1515, 18, 21, 25, 26, 32, 38, 39, 41, 43, 45—48, 50, 52, 53), David Floarea (E: 1525, 28, 30, 34, 35, 38, 43, 47, 49, 52), Nagy Elvira (4131, 53, 62, 207, 10, E: 499, 507, 14, 18, 27, 32), Uverges Valeria (E: 1502, 03, 06, 12, 14, 16, 19, 23, 28, 30—33, 39, 42, 43, 47, 52—54).

SĂRMAȘ. cl. VI. Voica Marin (E: 1499, 502, 03, 13, 15, 23, 38, 39), cl. VIII. Voica Elena (E: 1499, 501, 02, 06, 07, 12, 13, 15, 17, 18, 29, 39).

SATU MARE. cl. VIII. Edeltrant Lini (4131—33, 42, 53, E: 1499, 506—08, 10), cl. IX. Coman Stela (4194, 207, 08, 42, 45, 48, 56, 57, 302, 05), Crișan Rodica (4131—35, 42, 43, 45, 62, 77), Trifu Eleonora (4192, 96, 97, 207, 08, 13, 32, 36, 39, 42, 45).

SIBIU. **Absol.** Andrei Maria (4248, 50, 54, 58, 71, 302, 03, 05, 08, 09); **Craioveanu Mircea** (4131—51, 62, 63, 65—69, 71, 77, 80, 81, 84, 91, 95—99, 213, 20, 24, 33, 34, 36, 40—47, P). **șc. m. nr. 1** cl. VI. Bucur Delia (E: 1499—501, 06, 07, 09, 28—31, 39—46, 48—54) ; cl. X. Bădilă Vasile (4203, 40, 41, 88, 303—05, 08, 09), Lungu Georgică (4192, 203, 07, 50, 56, 60, 68, 74, 86, 87, 302—06, 08, 12, 25, 33) ; **șc. m. nr. 3** cl. X Micu Doina (4134, 35, 42—44, 46, 47, 49, 52—55, 77, 83).

SIGHIȘOARA. Absol. Iuliuț Violeta (4132—34, 38, 42—45, 47, 48, 50—55, 62, 66, 71, 77, 80, 203, 29, 41, 48, 50, 75, 80, 83) ; Lang Hugo (4192, 95, 202, 04, 07, 08, 10, 13, 20, 41, 43, 48, 54—58, 60, 63, 67, 83, 89, 302, 03, 05, 08) ; **șc. m. nr. 1** cl. VII Floca Margareta (E: 1525—27, 29, 30, 33—35, 39, 43, 45, 50, 52) ; cl. IX Dumitrescu Paul (4131—33, 42—45, 47, 48, 52, 53, 57, 62, 66, 95, 96, 203—05, 10, 21, 23—25, 50, 56, 69, 304, 05, 07, 09, 23) **ș.m. 2** cl. IX Vlăduțiu Mircea (4213, 21, 42, 48, 50, 56, 73, 98) ; cl. X. Brătianu Silviu (4131—33, 36, 42, 45—47, 53—55, 62, 66, 71, 77, 87, 99, 207, 08, 40, 41, 56, 68, 73, 77).

SINNICOLAUL MARE. **șc.m.** cl. X. Dărău Constantin (4132, 42, 45, 62, 77, 80, 95, 212, 98, P).

SINAIA. **șc.m.** cl. IX. Puiu Mihai (4248, 49, 56—58, 62, 63, 65, 68, 71—73, 78, 86, 304, 05, 07, 09, P) ; cl. X. **Tănase Mihail** (4158, 60, 62, 63, 65, 66, 67, 71—80, 83,

85—87, 89, 91, 92, 94—200, 03—11, 13, 26, 33, 36, 41—47, P).

SLATINA. **Absol.** Florescu Vasile (4131, 34, 39, 43—45, 47, 48, 50, 53, 62, 66, 73, 77, 92, 95, 98, 99, 204, 07, 08, 10, 11, 36, 41, 44) ; cl. X. Buicescu Mircea (4131—33, 42, 45, 46, 239, 45, 48), Şerban Virgil (4131, 32, 34, 42, 43, 45, 47, 92, 97, 98, 203, 10, 44, 45), cl. XI. **Popescu Mircea** (4133, 34, 36, 40, 42—44, 46—48, 50—54, 62, 70, 71, 75, 80, 81, 92, 97, 203, 05, 07, 08, 10, 21, 30, 32, 40—46, 48, 56—58, 62, 68, 78, 83, 87).

SLĂNIC (Ploeşti) cl. VIII Rădan Sorin (4248, E: 1512, 17, 18, 20, 22, 30, 32, 38, 41, 42, 45, 47, 51).

SUCEAVA. **şc.m. 1.** cl. X Huţanu Leon (4192, 14, 95, 97, 203, 07, 08, 15, 20. 23, 36, 41—43, 45—47) ; Sorohan Liviu (4144, 46, 52, 53, 57, 62, 63, 71, 77, 79, 92, 95, 208, 10, 13, 17, 36, 41, 44), cl. XI. Bujor Const. (4192, 208, 41, 302—05, 09), Socoliuc Gh. (4131—34, 39—49, 51—54, 66, 68, 83, 87, 84, 92, 95, 97, 98, 203, 10, 41), Soroceanu Mihai (4131—33, 38, 43, 44, 45, 52, 53, 62, 66, 77, P).

TIMIŞOARA. Stud. **Ionescu D. Alex.** (Fac. mec.) (4133, 47, 66, 75, 77, 80—82, 95, 96, 203, 05, 07, 08, 13, 20, 29, 30, 33. 36, 40—46, 48, 50, 56, 59, 60, 63, 65, 67, 68, 73, 80, 82, 83, 90, 98, 300, 05—09, 14, 16, 19, 25, 27, 33, 37, 40, P), **Absol.** Zăgreanu N. (4203, 08, 11, 29, 44, 57—61, 73, 75, 89, 90, 95, 98), **şc.m. 1** cl. IX Munteanu Dan (4207, 08, 10, 12, 23, 36, 38, 39, 45), cl. X. Comşulea Corneliu (4131—33, 42, 44, 52, 53, 62, 77, 80, 92, 94, 207, 08), Mazilu Doru (4131—35, 43, 45, 62, 66, 71, 77, 79, 80, 89), cl. XI. **Hiriş Viorel** (4195, 200, 04, 24, 48—50, 56, 57, 62, 63, 65, 68, 71—73, 78, 80, 83, 93, 98, 302—09, 25, 28, 33, 37, 37, 51, 54, 60, 62, 65, 69—71, 73), **şc.m. nr. 2** cl. VIII Szende Suzana (4247, E: 1540, 32, 41, 50, 53, 54), cl. IX. Eckhardt Bangert (4195, 96, 203, 12, 32, 38, 39, 44, 45, 73, 98), cl. X. (4162, E: 1499, 500, 06, 08, 10, 12, 13, 15—10, 56, 57), şc.m. nr. 3 Grecu Rodica (4131, 34, 35, 44, 46, 48, 52, 62, 66, 71, 80, 92, 95, 97, 98, 203, 07, 08 10, 36, 40—42, 45), **şc.m. nr. 5** cl. VIII Eibenschitz Robert 46, 57). cl. XI. Bohu Erich (4195—99, 207—20, 22, 25, 26), cl. IX Gora Horaţiu (4143, Höckl Franz (4192, 203, 07, 08, 36, 40, 41, 53, 62, 66, 68, 77, 92, 208, 20, 21, 45, 48, 56, 83), cl. XI. Va iliu Radu (4131, 32, 34, 36, 99—201, 17, 18, 29, 31, 40, 48—63, 65, 67—73, 75—78, 80, 82—86, 89, 93, 95, 98, N), **şc.m. 7 cl. VII** Murgu Lucia (1512—19, 22, 25, 26), cl. VIII Andru Dorina (E: 1530, 32, 37, 38, 43, 47, 52), cl. XI. **Lustzig Gh.** (4138, 40, 50, 52, 59, 67, 72, 74, 83, 84, 4238. 71, 98, 305, E: 1519, 22—24, 26. 30. 32, 38, 41—43, 45—52), Rujan Octavian 42, 45, 47, 52, 59, 77, 92, 94, 98, 208).

TITU. cl. X. Sima G. Ion (4212, 37, 39, 68, 73, 87, 300, 18, 25, 27, 28, 33).

TIRGOVIŞTE. **Absol.** Frîncu M. Zaharia (4203, 04, 07, 08, 12, 17, 32, 36, 38, 39, 44, 45, 47, 68, 73, 90, 98), Stănciulescu Gh. Marin (4132, 42, 52, 66, 203, 48, 57, 58, 60), **şc.m. 2** cl. VII Marineanu T. Carmen (1499—502, 5—11), cl. VIII Zaharia M. Rodica (4131—33, 42, 45, 47, 53, 62, E: 1508—10, 20), cl. X. Migdalovici Iosefina (4162, 66, 71, 75, 77, 224, 44, 48, 78, 83, 90, 95), Stanca Constantin (4195, 96, 204, 08—11, 22, 30, 33, 36, 40—45, 48, 56, 57, 59, 67, 73, 83), Tănase I. Eugen (4131—34, 42—48, 52—54), Zaharia M. Adina (4131, 33, 34, 36, 43, 45, 52, 53, 62, 66, 71, 75, 77, 80, 92, 95, 97, 203, 07, 41, 45, 46, 48, 303, 07).

TG. CĂRBUNEŞTI. (Craiova). Guşiţă Marin (4192, 97, 203, 12, 24, 30, 37—39, 41, 43—45).

TG. JIU. **ş.m. 1** cl. VI. Bănică Marian (1512, 14, 17, 21, 22, 25, 27, 31, 38, 39), cl. VIII. **Anitescu N. Maria** (4192, 94, 207, 08, 10, 48, 56, 65, 83, 304, 05, 08, 37, E: 1512—20, 24, 25, 28—33, 38, 39, 41—43, 45—54), ş.m. 2 cl. VIII Borcan Al. Sabin (4162, 67, E: 1499—503, 06—10, 12—15, 17, 20—22, 25, 27, 31, 38, 39), cl. X. Hotărăscu Dan (4181, 92, 96, 97, 203, 07—10, 15, 20, 33, 36, 40—45, 48, 50, 56, 57, 83, 302—05, 08, 37, P', **ş.m. 3** cl. VII **Ionescu Vladimir** (4142, 43, 45, 47, 48, 56, 58, 59, 62, 65, 67, 78, E: 1513—20, 22, 24, 25, 28—32, 38, 38, 39, 41—43, 45, 46, 48, 50—54), cl. XI. Navolan Dan (4192, 94—96, 98, 203, 04, 07—10, 32, 36, 38—41), cl. VIII Ceapă V. Al. (4177, 92, 238, E: 1512, 13, 15, 17, 18, 20, 22, 25, 30, 32, 39, 41, 43—54).

TG. MUREŞ. cl. VI. Stratian Valentin (E: 1522, 25, 29, 30, 38, 43, 45, 50, 52, 53), Tudor Gelu (4142, 44, 53, 54, E: 1499, 501, 07, 10, 13ş, cl. VIII. Matei Magdalena (4192, 207, 08, E: 1512, 24, 25, 32, 38), cl. X. Stoica Emil (4131—34, 36, 42, 44, 47, 48, 77, 203, 10).

TG. NEAMŢ. cl. VIII. Gherşin Burelu (E: 1515, 17, 18, 20, 22, 32, 38, 45, 47, 50), Scharf Wolf (4319, E: 1531, 32, 38, 40, 42, 43, 45, 47, 52), Vigder Lică (E: 1512, 15, 17—20, 22, 50, 52, 58).

TIRNAVENI. cl. IX Costea Viorel (4148, 95, 208, 12, 42, 44, 45, 48, 57, 71, 73, 98, 305), cl. X Ifrimela St. (4132, 4134, 35, 42, 43, 45, 48, 66, 68, 77).

TRUSEŞTI. Absol. **Mocanu H. Ovidiu** (4149, 58, 71—74, 92, 94, 95, 99, 200, 04—09, 11, 13, 20, 24, 43, 48, 50, 56, 57, 60, 61, 65, 67, 77, 78, 80, 82, 83, 302—09, 14, 15, 21, 31, 37, 38), cl. VIII Dănilă Aurelia (E: 1529, 30, 32, 41, 43, 45, 47, 50, 52).

TULCEA. cl. X. Porneală Savu (4192, 94,

97, 203, 07—10, 13, 15, 48, 57, 71), 302, 04, 05, 07, 09, 11, 19, 27, 38).

TURDA. **Absol.** Rusu Dorin 4192, 95, 207, 08, 11, 24, 42, 48, 50, 58, 61), cl. VIII Apostol Adriana (4207, 56, 73, E: 1525, 30, 32, 38—40, 42—54), Crețu Caian (E: 1512—14, 16—19, 21, 22, 24, 25, 32, 38, 39), Filip Maria (4162, 92, 207, 08, E: 1501, 06, 08, 10, 25, 32, 38), Păcuraru Liana (E: 1513, 14, 19, 25, 30—32, 38—50, 52—54), cl. IX. Inoraș Augustin (4131—34, 42—46, 48, 49, 52, 53, 66, 75, 77), Suciu Ioan (4192, 94, 95, 97, 203, 06, 08—11, 32, 38, 45, 302, 05).

TURNU MĂGURELE. cl. V. Bălan Maria (E: 1541, 43, 44, 46, 49, 50, 52—54), cl. X. Pietrosu C. Mioara (4131—36, 42—45, 52, 62, 66, 68, 71, 73, 75, 77, 78, 80, 92—95, 97, 98, 203, 30, 33, 40, 41, 67).

TURNU SEVERIN. Absol. Nănuț Ion (4192, 96, 229, 37, 45, 50, 60, 78, 98, 302—05, 07—09), **ș.m. 1** cl. VI. Roată Delia (E: 1513, 16, 22, 30, 38, 39, 41, 43, 45, 50, 52), Vulpescu Dan (E: 1500, 01, 03, 06—10, 16, 17, 21, 38, 39, 41, 43, 44, 50, 52—54), Croitoru Traian (E: 1512, 13, 17, 18, 22, 25), Ogrășanu Olguța (E: 1512—14, 17—20, 22, 25), cl. IX Ganciu Vasile (4131—33, 62, 77), cl. X. Lungulescu Marius (4131—34, 42, 44—47, 52, 53, 66, 77, 203, 08, 10, 30—40, 44, 59, 68, 73, 87, 98), cl. XI Roată Radu (4133, 36, 46, 92, 95, 203, 07, 8, 10—12, 39—41, 43, 45), **ș.m. 3.** Mircea Ioan (E: 1530, 31, 38, 40, 43, 46, 52, 53).

URZICENI. cl. VIII. Baston Titus (4148, E: 1512—20, 22, 25—27).

URICANI, cl. VI. Orășan Elena (E: 1512, 15—17, 28, 29, 39, 49, 53), Șerbănescu Jenică (E: 1512, 15—17, 27—29, 39, 49, 53), Szegedi Marilena (E: 1499, 500, 03, 15, 17, 21, 27, 28).

VASLUI. cl. X. Roșca Dumitru (4195, 203, 07, 08, 10, 14, 36, 38, 40, 41, 43, 48, 56, 64, 68, 73, 86, 87, 99, 302—10, 14, 18, 19, 25, 36).

ZALĂU. cl. X. Gaizago Cătălin (4224, 25, 30, 68, 69, 78, 83, 87, 94, 99).

*

— Soluțiile problemelor propuse în acest număr se primesc pînă la 30 aprilie 1961. Elevii claselor IX—XI nu vor trimite soluții la problemele propuse pentru școala de 7 ani. Este de dorit să se trimită problemele rezolvate în număr de cel puțin zece și numai din ultimele trei reviste apărute, altfel nu pot fi anunțate la rubrica rezolvitorilor. Soluțiile trimise vor fi însoțite de un borderou, iar problemele așezate în ordinea lor numerică. Pe plic se va trece școala și localitatea.

*

Pînă la **1 noiembrie 1960** s-au mai evidențiat următorii rezolvitori de probleme din G.M.F.-B nr. 7—10/1960.

1. Scarlat Nicolae, student Facultatea Energetică Timișoara) ; **2. Gheorghiță Vitalie** (absolvent C-lung Muscel) ; **3. Constanda D. Cristian** (cl. XI ș.m. 1 Brăila) ; **4. Drugea I. Gheorghe** (cl. XI ș.m. 1 Ploești) ; **5. Țuțuianu Ovidiu** (absolvent București) ; **6. Neagu Gheorghe** (cl. XI Sighișoara) ; **7. Obadă Hareta** (cl. XI ș.m. 10 București) ; **8. Grăjdeanu George** (cl. X Focșani) ; **9. Constanda D. Grazziela** (cl. VIII ș.m. 1 Brăila) ; **10. Chiriță Marcel** (absolvent București) ; **11. Dumitrică V. Aurel** (cl. XI ș.m. 3 Tîrgoviște) ; **12. Raicu Viorel** (cl. XI Drăgănești-Olt) ; **13. Radu A. Gheorghe** (cl. X Pucioasa) ; **14. Crețu Gh. Dumitru** (cl. X ș.m. 3 Tîrgoviște) ; **15. Boldea Ioan** (cl. X ș.m. Lugoj) ; **16. Segal Zeilic** (cl. XI Focșani) ; **17. Iorga Valeriu** (cl. XI ș.m. Lugoj) ; **18. Sucitu Gheorghe** (cl. X ș.m. 3 București) ; **19. Popa Dorina** (cl. XI ș.m. 1 Lugoj) ; **20. Răduță Aristotel** (absolvent Bolintinul din Vale) ; **21. Sfetcu Ion** (cl. XI ș.m. Lugoj) ; **22. Jurca Gabriela** (cl. VII șc. de 7 ani nr. 12 Oradea) ; **23. Piscupescu Gabriel** (student Petrol și Gaze București) ; **24. Frangu Octavian** (cl. VII șc. de 7 ani nr. 18 Brăila); **25. Cojocaru Mircea** (cl. XI Fălticeni).

*

Pînă la **1 noiembrie 1960** s-au mai primit soluții bune, la problemele de matematică, propuse în G.M.F.- seria B nr. 6—9, după cum urmează :

ADJUD (Bacău). Ș.m. Avram Iancu. Cl. V. Gurămultă V. Dănuț (E: 1538, 41, 43, 46, 48, 50, 52, 53, 59, 60, 70, P). Cl. VII. Savin Dumitru (E: 1537, 40, 42, 43, 45, 46, 50—55, 60, 62, 63, 69, 70). Cl. X. Ciugudean Nicolae (4192—94, 96, 97, 903, 07, 08, 57, 87).

Școala de 7 ani Păunești. Cl. V. Anghel N. Costică (E: 1520, 30, 40—49, 54, 59, 60, 70), Anghel Gh. Lenuța (E: 1512, 21, 26, 33, 38—40, 50—52). Cl. VI. Berbece I. Georgeta (E: 1518, 20, 31, 38, 40, 41, 44—46, 48, 50, 52—55, 59, 60, 70), Cantiș I. Aurel (E: 1512, 30, 38—40, 43, 50, 52, 54), Marea A. Tatiana (E: 1520, 30, 32, 40, 41, 43—46, 48—50, 52—54, 59, 60, 70), Mocanu Aurora (E: 1520, 31, 32, 40, 41, 43—46, 48, 50, 52—54, 59, 60, 67, 70), Nică Costică (E: 1530, 39, 40, 44, 45, 48, 53, 54, 60, 70), Novac I. Gh. (E: 1530, 31, 40—46, 48, 50, 53, 54, 59, 60, 70), Cl. VII. Berbece C. Dumitru (4257, E: 1528—32, 34, 35, 38—44, 47, 50—53), Dodu Virginia (E: 1513, 20, 21, 28, 35, 38, 40—48, 50, 52—55, 59, 60, 69, 70), Matei Lenuța (4316, E: 1513, 40—46, 48, 50—55, 59, 60, 70), Moise Gh. Nicolae (E: 1540—47, 50, 52—54), Vasilache Maria (4324, E: 1540, 42, 50, 52—54).

ARAD. **Ş.m. 1 Ion Slavici.** Cl. VIII. Vicol Viliam (E: 1538, 39, 41, 42, 47, 53, 54, 59—61, 70), Cl. X. Frenţ Militon (4248, 50, 56, 57, 59, 61, 69, 71, 89), Cl. XI. Macovei Rodica (4266, 67, 71, 73, 90, 98, 302, 03, 05, 08, 25), Popescu A. Dorel (4249, 50, 56—58, 60, 62, 65, 68, 70, 72, 73, 78, 80, 85—87, 89, 96, 98—300). **Ş.m. 3** Cl. IX. Soreanu Petru (4248, 56—59, 51, 65, 69, 71).

BAIA DE ARIEŞ Cluj): Cl. XI. Totolici Gabriel (4158, 3202, 03, 08, 09, 18, 38, 44, 62, 69).

BAIA MARE. Cl. IX. Ilieşu Florin (4256, 68, 73, 87, 98, 305, 19, 27, 34, 64). Cl. X. Bob Vasile (4195, 96, 212, 27, 39, 44, 304, 05, 09). Cl. XI. Duca Carmencita (4203, 12, 38—40, 71, 73, 87, 98, 302, 03, 05, 08, 09, 18, 33, 38), Moldovan Petru (4248, 67, 71, 83, 88, 302, 05, 08, 37).

Şcoala de 7 ani Somcuţa Mare. Cl. VII. Weinberger Lia (E: 1532, 37, 39, 53, 55, 59, 60, 70).

BECHET (Craiova). Şc. medie. Cl. VIII. Ozunu I. Cezar (E: 1532, 38, 40, 43, 47, 50, 52, 59, 60, 70), Păceană Angela (E: 1538, 40, 41, 43, 45, 54, 55, 59, 60, 65, 70), Ţene Florea (E: 1532, 38—41, 43, 45, 47, 52—55, 59—61, 64, 70).

BICAZ. Cl. XI. Covar Eugen (4250, 67, 312, 16, 37, 41—47, 51, 54, 55, 60, 62, 65, 68—71, 75).

BISTRIŢA (Cluj). Şc. medie. Absolvent Verveagă Th. (4248, 50, 56—63, 67, 75, 95, 302, 03, 06, 08). Cl. XI. Paşca Iuliu (4250, 57, 60, 62, 65, 71, 87, 302, 09, 42, 60, 69).

BOLINTINUL DIN VALE (Bucureşti). Ş.m. Cl. VIII. Teodorescu Constanţa (E: 1513, 32, 38, 41, 47, 49, 61, 69, 70), **Răduţă Aristotel** (4192—99, 201, 03, 06, 07, 10, 17, 29, 36—50, 54—56, 67, 69, 71, 72, 82, 88). Cl. IX. Dodoiu Mariana (4192—99, 203, 04, 08, 10, 25, 36, 38—47, 67, 303, 33). Cl. X. Badea Gheorghe (4203, 07, 17, 29, 30, 36—42, 44—48, 50, 56, 67—69, 72, 73, 78, 303, 05, 06, 08, 27, 33, 37), Cristea Aurelia (4207, 30, 40, 41, 44, 46, 48, 56, 73, 88, 302, 05, 27), Dinu Aneta (4203, 36, 38—42, 44—46, 48, 56, 69, 303, 05, 08, 33), Dumitru Florica (4203, 07, 17, 30, 36, 39—41, 44, 46, 56, 305, 07), Grecu Petre (4207, 13, 30, 41, 44, 68, 72, 88, 302, 05, 06, 08, 27), Hagi Dumitra (4207, 17, 29, 37, 41, 47, 68, 72, 88), Iordache Gheorghe (4203, 07, 30, 36, 41, 48, 50, 56, 67, 68, 88, 303, 05, 08, 27, 33, 37), Marin Victoria (4217, 30, 46, 48, 67, 73, 303, 05, 06, 08, 27, 30), Marinescu Niculina (4203, 07, 17, 30, 46, 48, 67, 73, 303, 05, 06, 27, 33), Mihuţ I. Octavian (4203, 07, 13, 17, 29, 30, 36—42, 44—48, 50, 66—69, 72, 73, 88, 302, 03, 05, 06, 08, 27, 33, 37), Pandele Tudor (4207, 13, 30, 40, 41, 44, 46, 50, 56, 58, 73, 88, 302, 05, 06, 08, 27, 37), Vişan Dumitra (4230, 37, 41, 56, 67, 68, 305, 27, 33, 37). Cl. XI. Dobre Elena (4303, 04, 08, 09, 11, 54, 57, 68, 69, 71, 73).

BOTOŞANI. **Ş.m. „Treboniu Laurian".** Cl. X. Segal Arnold (4248, 56, 57, 98, 302, 04, 05, 08, 09, 42, 62, 67).

BRĂILA. Ş.m. 1. Cl. VIII. **Constanda D. Graziela** 4192—94, 203, 07, 08, 10, 15, 17, 24, 38, 68, 71, 78, 86, 98, 305, E: 1512, 13, 15—18, 20, 22, 29—32, 38—45, 48—54, Cl. IX. Gavrilă Ileana (4248, 56, 60, 68, 80, 98, 309, 19, 27, 69). Gherco Rodica (4248, 56, 60, 68, 80, 98, 309, 19, 27, 69), Gherguş Felicia (4248, 49, 68, 71, 86, 98, 319, 27, 65. Gomolea Viorica (4248—60, 68, 80, 98, 305, 09, 19, 27, 60), Lang Frusina (4248, 56, 60, 68, 80, 98, 309, 19, 27, 69), Montesconto Ionelia (4256, 60, 68, 80, 98, 309, 19, 27, 48, 69), Orăşanu Mariana (4256, 60, 68, 80, 98, 309, 19, 27, 48, 69), Stănescu Gloria (4256, 60, 68, 80, 98, 309, 19, 27, 48, 69), Teşca Rodica (idem). Cl. XI. **Constanda D. Cristian** (4192—200, 03, 04, 06—12, 15, 17, 20, 22, 24, 32, 36—41, 43—45, 47, 65, 68, 70—73, 77—79, 83, 86, 87, 90, 93, 96—98). **Ş.m. 3.** Cl. VIII. Gherghişan Mariana (4247, 55, E: 1530, 32, 38, 42, 43, 59, 60, 70). Cl. X. Alexandrescu Nicoleta (4192, 93, 95, 96, 207, 32, 37, 342, 45, 48—57), Andronescu Irina (4250, 56, 57, 60, 68, 71, 78, 98, 302, 04, 05, 07, 09, 11, 38). **Şcoala de 7 ani nr 18.** Cl. VII. Frangu Octavian (4192, 207, 08, E: 1516—26, 28—30, 32, 37—54).

BREAZA. **Ş.m. Aurel-Vlaicu.** Cl. VI. Petrescu Margareta (4248—50, 56, 71, 78, 98, 338, 51, 65, 71).

BUCECEA (Suceava). **Şcoala de 7 ani.** Cl. VII. Comănescu Alice (E: 1541, 46, 49, 53—55, 59, 60, 63, 70).

BUCUREŞTI. Studenţi. Chiriac D. Dumitru (Fac. Electronică) (4192, 94—99, 202, 03 10, 30, 31, 36, 41, 43, 44, 46), Grama Nicolae (Mat.-fiz.) (4250, 54, 67, 71, 80, 83, 302, 03, 05, 06, 08, 09, 37, 38, 51, 62, 64, 65, 67, 69, 70), Grigoraş Vasile (fac. construcţii) 4248, 49, 54, 56—60, 62, 63, 65, 67, 68, 70, 71, 73, 75, 77—79, 82, 83, 86, 87, 89, 98, 300, 02—09, 14), Panait Nicolae (fac. metalurgie))4248, 50, 56, 57, 65—67, 71, 82, 88, 90, 342, 44, 51, 54, 55, 60, 62, 65, 69, 70, 75), **Piscupescu Gabriel** (Inst. petrol-gaze) (4248—50, 54—57, 61, 63, 65—67, 75, 78, 80, 93, 302—09, 14, 16, 20, 31, 37, 47, 54, 60—65, 69, 75), Tomoiagă M. Dorin (Fac. construcţii) (4303—05, 07—09, 14, 54, 62, 69, P).

Absolvenţi. Butucea Ecaterina (4302—09, 12, 38, 62), **Chiriţă Marcel** (4242, 65, 302—09, 14, 16, 18—21, 25—27, 31—34, 36, 37, 41—43, 48—52, 54—56, 60, 62—63, 67, 69, 70, 75, P), **Tuţuianu Ovidiu** (4223, 25, 46, 48, 50, 53—58, 61—63, 68, 71, 73, 77, 79,

86, 89,96, 98, 300—09, 12, 14, 25,, 32, 33, 36, 54, 56, 59, 65, 67, 69, P).

Ş.m. 1 N. Bălcescu. Cl. IX. Grigorescu I. Şerban (4250, 62, 302—07, 47, 51, 65, 69). Cl. X. Grunblatt M. (4248, 50, 56—59, 62, 71). Cl. XI. Butnaru C. Chirea (4248, 56, 57, 62, 65, 68, 70, 71, 73, 77—79, 85—87, 96—300, P), Petrov V. Octavian (4257, 68, 70, 73, 77, 78, 79, 86, 87, 90, 98). **Ş.m. 3 Ion Neculce.** Anonim. (4309, 27, 40, 42, E: 1541, 45, 46, 48—50, 52). Cl. VI. Nicolaescu M. Corneliu (E: 1541, 43, 49, 50, 52, 53, 59, 70, 73, 74, 79). Cl. VIII. Haimovici Suzana (E: 1541, 43, 47, 50, 59—61, 63, 64, 69, 70). Cl. X. **Sucitu Gh.** (4249, 50, 56, 57, 59, 60, 62, 65, 69, 72, 78, 79, 83, 85—87, 93, 96, 302, 04, 05, 07—09, 15, 18, 19, 25, 27, 33, 37, 38, 42, 44, 47, 49, 51, 65, 67, 69, 71). **Ş.m. 4 Aurel Vlaicu.** Cl. VIII. Alexandru P. Anica (E: 1532, 40, 41, 43, 46, 50, 54, 55, 59, 60, 63, 70). Amarioarei Ileana (E: 1532, 40—43, 45—47, 55, 59, 60, 70). Baciu Valentin (E: 1532, 40, 47, 50, 52, 55, 59, 60, 64), Boroneamţ Constantin (E: 1541, 46, 48, 59, 60, 64, 65, 69), Bratu Smaranda (E: 1530, 32, 38, 42, 45, 49, 53, 59, 64, 70), Buta Mihai (E: 1543, 50, 52, 54, 57, 59—61, 64, 66, 67, 70), Cioacă Violeta (E: 1532, 40—43, 47, 51, 54, 59, 60), Constantin Constanţa (E: 1532, 40, 42, 46, 53, 69, 70), Costea Elena (E: 1532, 40—42, 47, 54, 59, 60, 70), Dinulescu Rodrig (E: 1532, 38, 40, 42, 46, 47, 51, 53—55, 59, 60, 70), Draica C. Dumitru (E: 1528, 30—32, 37—41, 43, 45), Dumitrescu Carmen (E: 1542, 45, 46, 50, 53, 55, 60, 70), Dumitru Cornel (E: 1540—42, 47, 49—51, 54, 59, 60, 71), Fus Mariana (E: 1540—43 45, 46, 48, 52, 63), Găveana Gloria (E: 1542, 47, 51, 54, 55, 59, 60, 63, 70), Georgescu Octavian (E: 1541, 42, 45, 47, 50—52, 54, 59, 60, 70—75, 77—81), Ionescu Olga (E: 1541, 43, 50, 54, 55, 59, 61, 63), Iordache Gheorghiţa (E: 1532, 40, 43, 46, 47, 50, 52, 54, 56, 59, 60, 63, 70), Maiovschi Aurel (E: 1530, 32, 33, 38, 43, 47, 52, 59—61, 70), Martin Maria (E: 1529, 30, 32, 33, 37, 38, 43, 45, 47, 52, 53, 60, 63, 70, 71, 73—81), Moşteanu Maria (E: 1532, 41, 43, 46, 50, 53, 59, 60, 69, 70), Nicolau Elena (E: 1528, 30, 32, 38, 40, 42, 45, 47, 53, 59, 60, 63, 70), Nicolau Marian (E: 1540—42, 46, 50, 53, 60, 64, 70), Ostap Rodica (E: 1541, 42, 44, 47, 51, 54, 55, 59, 60, 67), Petrişor Teodor (E: 1532, 42, 47, 51—54, 59, 60, 67, 70), Prună Rodica (E: 1530, 32, 38, 40, 41, 53—55, 59, 60, 70), Ristea Lucia (E: 1532, 40, 41, 43, 45, 52—54, 59, 60), Săcăliş Doina (E: 1540, 41, 43, 45, 49, 52, 59, 60, 64, 69, 70), Spiridon Ion (E: 1532, 40, 42, 45—48, 59, 60, 65, 70), Streza M. Vasile (E: 1540, 43, 46, 50, 52, 53, 56, 59, 60, 70), Şerbănescu Doina (E: 1540, 41, 43, 45, 52, 59, 60, 64, 70), Ştefănoiu Mircea (E: 1542, 55, 57, 59, 60, 63, 64, 67, 69, 70), Tomi Mihai (E: 1540, 41, 45, 46, 53, 55, 59, 60, 64, 70), Trosca Adriana (E: 1529, 30, 42, 43, 45, 47, 52, 53, 60, 63, 70), Vasiliu Ileana (E: 1541, 43, 45, 52, 53, 55, 59, 60, 69, 72—75, 77—81). Cl. XI. Bratu I. Ioana (4249—52, 65, 72, 302—05, 48). Moldoveanu Ioan (4248—50, 56, 57, 62, 63, 65, 68, 71—73, 80, 83, 98). **Ş.m. 6.** Cl. IX. Anton Alexandru)4249, 56, 57, 62, 65, 68, 71, 85, 86, 98). **Ş.m. 7 „I. L. Caragiale".** Cl. X. Radian Thea (4248, 57, 62, 65, 73, 302, 04, 09, 319, 42, 69), Stan Ştefan (4248, 49, 51, 56—58, 65, 71, 72, 78, 84, 90, 91, 304, 05, 07, 09, 15, 22, 30, 38, 42, 44, 47, 51, 53, 59, 65, 68, 69, 71, 73, 75), Tatu Gabriel (4192, 93, 95, 97, 302, 48, 56, 57, 60, 63, 65, 71, 72, 78, 302, 04, 05, 07, 09, 301). Cl. XI. Bluoss I. Hans (4206, 15, 36, 41, 43—50, 52, 56, 65, 67, 71, 80, 82, 83, 88, 302—09, 11, 16, 26, 37, 38), Busuioc Ion (4267, 68, 97, 302, 03, 05, 08, 09, 18, 25, 33, 37, 51, 56, 67, 69, 95). **Ş.m. 10.** Cl. VII. Popescu Ovidiu (E: 1522, 30, 39, 40, 43, 44, 50, 52, 60, 61, 69). Cl. VIII. Ivan Florina (E: 1540, 43, 47, 52, 55, 59, 60, 65, 70). Cl. IX. Niculescu Liliana (4256—58, 62, 63, 71, 83, 302, 05, 09, 30, 37). Cl. XI. **Obadă Hareta** (4302—06, 08, 09, 11, 12, 14, 18, 24, 25, 28, 29, 33, 36, 37, 48, 51, 55, 56, 60, 62—64, 69, 70, 76—84, 94—96, 98, 401, 12, 16). **Ş.m. 11 „D. Cantemir".** Cl .VI. Stănculescu I. Radu (E: 1514, 18, 25, 28, 29, 31, 39, 40, 44), Ştefănescu Maria (E: 1541, 45, 46, 49, 53—55, 59, 63, 60, 70, 93). Cl. VII. Horobeţ Adriana (E: 1529, 38, 43, 44, 52, 56, 59, 61, 63, 70), Maiorovici Cristian (E: 1540—46, 48—50, 52, 54). Cl. X. Crăciun Viorel (4192, 94, 203, 07, 08, 10, 12, 36, 39, 44, 45, 48, 50, 56, 57, 59, 68, 73, 98, 302). Mihu Răzvan (4192, 94, 203, 04, 07, 08, 10, 12, 32, 36, 47, 39, 44, 45, 50, 56, 57, 59, 68, 73, 79, 87, 98), Rădulescu I. Dan (4248, 50, 56, 57, 59, 62, 69), Voiculescu Cristian (4131—34, 42, 44, 47, 48, 53, 55, 56, 62, 66, 77, 80, 92). Cl. XI. Isbăşoiu Eugen (4302—05, 08, 09, 18, 19, 25, 33). **Ş.m. 12 „Spiru Haret".** Cl. X. Badea Mihai (4247, 83, 302, 03, 05, 08, 16, 37, 67, 69, 70, 75), Brill Erny (4248, 51, 71, 302, 05, 16, 53, 54, 59, 62, 65, 69, 71, 75). **Ş.m. 13 „Mihai Viteazu".** Cl. VII. Necula M. (E: 1529, 30, 32, 38, 39, 41—45, 47, 50, 52—54). **Ş.m. 16 „George Coşbuc".** Cl. VIII. Anghel Mioara (E: 1528—32, 37—41, 43—50, 52—54), Capatos Mirela (E: 1528—32, 38, 39, 41—45). Cl. IX. Mendelsohn Marina (4256—58, 62, 68, 71, 85, 86, 98, 319, 27). Cl. XI. Deleanu Denise (4248, 56—58, 60, 62, 63, 80, 82, 83, 90, 302, 03, 305, 06, 07, 08, 09, 12, 21, 37, 41, 42, 47, 51, 60, 67, 69—71, 75).

Ş.m. 17 „Matei Basarab". Cl. IX. Dumi-

după fiecare problemă rezolvată personal. trescu Paul (4224, 25, 50, 56, 69, 304, 05, 07, 09, 23). Cl. XI. Segal Adrian (4248, 49, 51—53, 65—68, 71—73, 79, 82, 85, 87, 90, 96, 98, 99). **Ş.m. 19 „Ion Creangă". Cl. VIII.** Feran Monica (4248—50, E: 1550, 52—54, 57, 64, 67, 68). Cl. XI. Olteanu S. Victor (4248—50, 52—63, 65—67, 71, 72, 78, 80, 82, 83, 89, 90, 95). **Ş.m. 20 „Gheorghe Şincai".** Cl. VIII. Calţaru N. Nicolae .4268, 69, 98, E: 1539, 41, 50, 53, 54, 59, 60, 70, P). Cl. XI. Calţaru N. Ovidiu (4241, 50, 56, 62, 66, 68, 69, 89, 95, 93, 302, 27, 31, 73, 41, 51, 54, 64, 75, 69, 82, 411, P), Hîrşan Dan (4203, 07, 41, 44, 48, 56, 57, 302—06, 08). **Ş.m. 21 germană.** Cl. XI. Boiangiu Cristian (4268, 73, 79, 85—87, 96, 98, 319, 33). **Ş.m. 22 „Gheorghe Lazăr".** Cl. XI. Zamfirescu Tudor (4249, 51—53, 56, 60, 65, 72, 80, N. P). **Ş.m. 23 „D. Bolintineanu".** Cl. IX. Cleanoveanu Eugen (4250, 302, 04, 05, 09, 38, 42, 48, 51, 65). Cl. XI. Barzoi Viorel (4248, 68, 98, 302, 08, 09, 18, 33, 69), Năstase D. Ion (4210, 23, 48, 50, 56, 57, 59, 63, 75, 303, 05, 08, 90). **Ş.m. 27.** Cl. VIII. Diaconescu Gh. Sorin (E: 1518—21, 32, 42, 47, 54, 57, 64, 66—68), Marin Florica (E: 1518—20, 26, 42, 47, 54, 67), Ursea Persida .E: 1518—20, 24, 32, 42, 47, 56, 57, 66—69'. Cl. X. Socoteanu Ion (4256, 57, 62, 71, 90, 302, 04, 07, 09). **Ş.m. 32 „Filimon Sîrbu".** Cl. X. Dumbravă Mircea (4156, 95, 97, 212, 32, 39, 48, 68, 71).

Şcoala de 7 ani nr. 150. Cl. VI. Brezeanu P. Alex. (E: 1528, 29, 38, 41, 46, 49, 53, 55, 59, 63, 70). **Şcoala de 7 ani nr. 151.** Cl. V. Manta Vasile (E: 1538, 39, 41, 43, 49, 52, 59, 60, 70). **Şcoala de 7 ani nr. 152.** Cl. VII. Clipea Mioara (9: 1541, 43, 46, 49, 50, 52, 53, 55, 60, 61, 70). **Şcoala de 7 ani nr. 165.** Cl. VI. Rădulescu Mariana (E: 1531, 38—41, 43—45, 70). Cl. VI. Zamfirescu I. Cristina (E: 1531, 38—41, 43—45, 70).

Şcoala de 7 ani nr. 173. Cl. VI. Ghiţescu Lucian (E: 1531, 39, 43, 46, 49, 50, 52, 50, 51, 70).

BUZĂU. **Şc. pedagogică de învăţători.** An I. Cristudor N. Elena (E: 1555, 58—62, 64, 69, 70). **S.m. 2.** Cl. XI. Bocioacă Radu .4256, 68, 73, 86—88, 98, 325, 18).

BUZIAŞ. (Timişoara). S.m. Cl. VI. Andraş Aurelia (E: 1539, 43, 50, 52—55, 60, 70), Rotko Ion (E: 1529, 38, 39, 41, 43, 46, 53, 55, 60), Opriş Viorel (E: 1529, 38, 39, 41, 43, 46, 53, 55, 60, 70). Cl. VII. Postelnicu Elena (E: 1528, 29, 38, 39, 43, 50, 53, 59, 60, 70), Borchescu Ioan (E: 1541, 65, 32, 53, 59, 70, 45, 29, 40, 39), Faure Ion E: 1528, 29, 32, 34, 49. 52, 53, 59, 60, 70), Gagea Dorica (E: 1529, 32, 38, 40, 43, 45, 46, 49, 50, 53, 60), Jivan Dorel (E: 1529, 32, 34, 35, 45, 46, 50, 52, 53, 59, 60, 61, 70), Jujuţ Ionel .E: 1529, 32, 41, 43, 45, 46, 49, 52, 59, 60, 65, 70), Popescu Viorel (E: 1532, 39—41, 45, 48, 50, 52—54), Seredan Traian (E: 1529, 32, 34, 43, 45, 50, 52, 53, 59, 60, 70), Sîrbu Nicolae (E: 1529, 32, 40, 45, 49, 52, 53, 59, 60, 70), Sămanţ Emilia (E: 1529, 32, 34, 38, 40, 43, 45, 46, 49, 50, 53, 59, 60, 70).

CARACAL. Ş.m. 1. Cl. IX. Bădescu Pantelie (E: 1532, 38—42, 46, 47, 50, 59, 70). Cl. X. Păunescu Doru (4258, 62, 63, 68, 73, 86, 98, 302, 05, 07, 08).

CIMPINA (Ploeşti). **Ş.m. 1 „N. Grigorescu".** Cl. VIII. Bîjea N. Ileana (E: 1532, 40, 42, 43, 47, 51, 54, 56, 60, 64, 66, 68—70). Brezeanu Semerad (E: 1528—38, 40, 42, 43, 46, 47, 50, 52, 55, 59—62, 65, 70), Grigorescu Alin (E: 1532, 42, 43, 54, 57, 60, 64, 66, 68—70), Ilina Stelian (E: 1532, 38, 39, 42, 43, 45, 47, 50, 52, 53, 59, 60, 65, 70), Mircea Gh. Alexandru (E: 1532, 34, 38, 39, 42, 43, 45, 47, 50, 52—54, 60), Miu I. Ion (E: 1532, 34, 38, 39, 43, 45, 50, 53, 55, 59, 60, 70), Nedelcu Ion (E: 1537, 40, 42, 43, 46, 47, 51—53, 55, 60, 64), Panaitescu M. Marin (E: 1534, 38, 39, 43, 45, 46, 50, 53, 59, 60, 70), Rusu C. Marian (E: 1530, 32, 38, 50, 53, 57, 59, 38, 60, 65), Seciu Gheorghe (E: 1534, 38, 39, 43, 45, 46, 55, 59, 60, 70), Sveriinschi Eugen (E: 1538, 43, 45, 50, 53, 55, 59, 60, 65, 70). Cl. IX. Gîrboveanu Gh. Adriana (4248, 49, 65, 68, 98, 319, 37, 34, 59, 68, 69, 71, 78). Cl. X. Teodorescu Viorel (4248, 50, 65, 68, 73, 78, 83, 87, 98, 304, 07, 09, 37).

CIMPULUNG MOLDOVENESC (Suceava). **Liceul Dragoş Vodă.** Cl. X*. Bruja Aurora (4248, 50, 56, 57, 68, 71—73, 79, 80, 86, 87, 98), Bulinski Pavel (idem), Cojocaru Adrian (idem), Cotlarciuc N. (4248, 50, 56, 57, 71, 72, 80), Daniliuc Valentina (idem), Dinică Maria (4250, 56, 57, 71, 72, 80, 84), Frăţeanu Const. (4248, 50, 56, 57, 71, 72, 80), Hmelenski Gertruda (idem), Maidaniuc Olga (idem), Manec Oxana (idem), Mihaiuc Oltea (idem), Paraschiv Dragoş (idem), Pintilie Dan (4248, 50, 56, 57, 68, 71—73, 79, 80, 86, 87, 98), Platon Mihaela (4248, 50, 56, 57, 71—73, 79, 80, 86, 87, 98). Procopiuc Gheorghe (4248, 50, 56, 57, 71, 72, 80), Rosner Igo (4248, 50, 56, 57, 71, 72, 80), Stroe Cornel (4248, 50, 56, 57, 68, 71—73, 79, 80, 86, 87, 98), Tăţeanu Nicolae (idem).

CIMPULUNG MUSCEL (Piteşti). Absolvent **Gheorghiţă Vitalie** (4192—99, 202—10, 12—16, 20—22, 24, 28—50, 52, P). Cl. XI. Şain Filofteia (4217, 41, 43, 50, 67, 73, 302, 03, 05—09, 25, 33).

CLUJ. **Studenţi:** Moldovan Grigor (4248, 56—58, 65, 67, 71, 72, 82, 89, 302—09, 14),

* Fiecare elev trebuie să-şi redacteze singur soluţiile problemelor şi apoi să semneze

Mureşan Sidonia (Inst. ped.) (E: 1528, 38, 40—42, 45, 53, 60, 65, 70), Proca Nicolae (P). **Ş.m. 4 E. Racoviţă.** Cl. VI. Marfievici Andrei (E: 1528, 39, 41, 45, 46, 49, 53, 55, 59, 70). Cl. VII. Gross Adalbert (E: 1543, 45, 49, 50, 52, 53, 60, 61, 69, 07), Ionescu Tudor (E: 1528, 29, 31, 39, 55, 59—62, 69, 70), Marian Iuliu (E: 1512—26), Maxim Al. (E: 1438, 41, 43, 45, 50, 52, 53, 60, 61, 70). Cl. VIII. Pagu Florian (E: 1532, 38, 43, 45, 47, 53, 55, 59—61, 70), Ştef Virgil (E: 1532, 38, 40, 43, 45, 47, 53, 59, 60, 70), Zidveanu Mariana (E: 1529, 30, 32, 33, 37—39, 41, 43, 44). Cl. XI. Benga Gh. (4248, 50, 56, 57, 63, 66, 304, 06, 08, 09, 51, 60, 62, 69, 70). **Ş.m. 5 Gh. Barițiu.** Cl. X. Tornuța Liviu (4248, 57, 62, 65, 71). Cl. XI. Iosubescu Dan (4256, 57, 71, 77, 79, 96, 302, 94, 05, 08, 09, 67), Dunca Victor (4271, 302—09, 12). **Ş.m. 8.** Laszlo Andrei (E: 1541, 43, 45, 46, 49, 50, 52, 53, 70), Lupan Anca (E: 1541, 46, 48, 49, 53, 55, 60, 70), Scurei Stelian (E: 1540, 41, 43, 45, 50, 52, 53, 55, 59, 60, 70). Cl. VIII. Filip Raluca (E: 1540, 42, 47, 48, 51, 55, 59—61, 86—70), Holan Suzana (E: 1540, 47, 48, 51, 59, 60, 64, 69, 70), Mânduc Liviu (E: 1540, 42, 47, 48, 51, 57, 59, 60, 67, 70), Miron Anca (E: 1540, 42, 47, 50, 51, 55, 59, 60, 67, 70), Mura Dorina (E: 1540, 42, 47, 48, 51, 55, 59—61, 70), Negru Olimpia (E: 1540, 42, 46—48, 59, 60, 70), Rodan Gh. (E: 1540, 42, 43, 45—48, 51, 60, 70), Rusu Mihai (E: 1540, 42, 46—48, 51, 59, 60, 69, 70), Săndulescu Const. (E: 1540, 42, 45—48, 50, 57, 59, 60), Tălpeanu Mihai (E: 1540, 42, 46—48, 51, 59, 60, 70). **Ş.m. 9. M. Eminescu.** Cl. VIII. Bondrea Tiberiu (E: 1541, 43, 45, 47, 48, 50, 52, 59, 60, 70). **Ş.m. 10 A. Şincai.** Cl. XI. Stoica Aurel (4248, 50, 52, 71, 304, 06, 08, 09, 12, 28, 33, 34, 38, 46, 47, 51, 54, 62, 67, 69).

Ş.m. muzică. Cl. VI. Farcaş Petru (E: 1528, 29, 39, 45, 46, 49, 51, 53, 60, 70). **Şc. de 7 ani Săulia de cîmpie.** Cl. VII. Stoica Viorica (E: 1542, 48, 50, 52—54).

CONSTANȚA. **Ş. m. 1 Mircea-cel-Bătrîn.** Cl. VIII. Paul Doru (E: 1528, 30—32, 38, 39, 45, 47—49). Cl. IX. Brînzănescu Vasile (4247—49, 56, 57, 305, 09), Frunză Șt. (4249, 56, 57, 305, 65, 69).

CORABIA cl. VII. Ninã Sonia (E: 1538, 47—50, 53, 59, 60, 70), Papandanatos Mariana (E: 1545, 50, 59, 60, 65, 70, 74), Stoica Marina (E: 1543, 45, 50, 59, 60, 65, 70), Dădulescu Magdalena (E: 1532, 38, 47—50, 53, 59, 60, 70), Dimineață Elena (4545, 47, 50, 59, 60, 65, 70), Dimulescu Aniela (idem), Lia Cornelia (4547, E: 1532, 38, 48, 50, 53, 59, 60, 62, 70), Naftali Gh. (E: 1531, 32, 38, 42, 43, 48—50, 53, 59, 60, 70), Poia St. (E: 1532, 37, 38, 42, 48, 50, 52, 53, 60). Cl. IX. Dănciulescu Rodica (E: 1532, 47, 49, 50, 53, 59, 60, 62, 65, 70), Ștefănescu Coralia (4247, E: 1532, 49, 50, 53, 59, 60, 62, 65, 70).

CRAIOVA. **Student.** Rusu Ștefan (Fac. mecaniz. agricult.) (P), Vasilescu Gh. (Inst. ped.) (4248, 50, 57, 58, 65, 66, 72, 80, 83, 337).

Absolvent Vasile A. Ioan (4267, 80, 302, 04—09, 51, 55, 60, 62, 65, 69, 70, P). **Şc. tehn. Electro-putere.** An II. Duțu N. Ionel (4193, 203, 07, 08, 10, 12, 50, 56, 68, 73, 90, 98, 300, 02—05, 08, 09, 12, 18, 19, 27, 28, 32, 33). **Ş.m. 2 Fraţii Buzeşti.** Cl. IX. Stănescu Ortansa (4214, 48—51, 53, 62, 63, 65, 67, 72, 78, 83, 86, 89, 93, 94, 302—09, 12, 30, 33, 37, 38, 51, 65, 70). **Ş.m. 3.** Cl. X. Cincheza Iuliana (4257, 65, 68, 73, 78, 302, 04, 05, 07, 09, 15, 38), Stoia Manuela (4265, 68, 73, 78, 86, 98, 302, 04, 05, 07, 09, 19). Cl. XI. Duță C. Rodica (4250, 53, 56—58, 60, 63, 83, 302—04, 08, 09, 37), Nicolaescu Doina (4256—58, 71, 78, 302, 06, 08, 14, 48, 51, 54, 360), Pavel N. Radu (4212, 32, 35, 37—40, 68, 70, 73, 77, 79, 85, 87, 96—301, 18, 19, 23, 25, 27, 28, 32, 33).

Şc. de 7 ani nr. 1. Cl. VII. Goga Ileana (E: 1541, 43—45, 48, 49, 51—54, 59—62). **Şc. de 7 ani nr. 2.** Cl. VII. Iordăchescu Ana (E: 1543—46, 50, 52, 53, 55, 60, 61). **Şc. de 7 ani nr. 7.** Cl. VII. Ghițulescu I. Dan (E: 1529, 43, 46, 48, 59—62, 69, 70). **Şc. de 7 ani nr. 9.** Cl. VI. Lăzărescu Rodica (E: 1528, 30, 38, 41, 45, 46, 53, 55, 59, 70), Stancu Gheorghița (E: 1528, 30, 38, 41, 45, 46, 53, 55, 59, 70). Cl. VII. Cincheza Ecaterina (E: 1528, 30, 38, 41, 43, 45, 46, 50, 52, 59, 60).

Şc. de 7 ani nr. 10. Cl. VII. Diaconescu Mihaela (E: 1540, 43, 45, 46, 49, 59—62, 70).

CUGIR. Ş.m. serală. Cl. IX. Modoran Nițã (4248, 50, 56, 57, 62, 68, 73, 85, 98). Cl. X. Mihuț Augustin (4287, 96, 97, 302—05, 07, 09, 42, 51). Cl. XI. Ștefănescu Gh. (4258, 59, 302, 03, 05, 07, 42, 51).

CURTEA DE ARGEȘ. Cl. VIII. Bărănescu Vasile (E: 1532, 38, 39, 43, 45, 47, 50, 52, 59, 60, 65, 70), (seral) Ionescu Ilie (4248, 49, 68, 71, 78, 98, 319, 34, 49, 65, 69, 73, E: 1441, 42, 44—46, 48, 50—52, 54, 62, 63, 66, 71, 73—75, 78, 80—82), Popescu Al. (E: 1532, 38, 39, 43, 45, 47, 52, 59—61, 65, 70). Cl. IX. serală. Hondor Gh. (4248, 56, 57, 65, 69, 71, 78, 311, 19, 68).

ERATĂ : La problema 4413 la $Q(x)$ se va adăoga $+ x$.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ ȘI FIZICĂ
pentru elevii școlilor medii, profesionale, pedagogice, tehnice

În acest an, Olimpiadele se vor desfășura la următoarele date
— etapa locală — 5 februarie 1961 la matematică
— 12 februarie 1961 la fizică
— etapa regională în zilele de 23 și 24 martie 1961
— etapa finală în zilele de 23—25 aprilie 1961.

Colaboratorii și cititorii revistei sînt invitați să popularizeze aceste Olimpiade și să-și dea concursul pentru a asigura deplina lor reușită.

Profesorii de specialitate sînt rugați să stimuleze participarea elevilor lor la Olimpiadele din acest an, în vederea obținerii unor cît mai bune rezultate în pregătirea tineretului școlar.

CĂTRE REZOLVITORII DE PROBLEME

Corespondenții care ne trimit probleme rezolvate trebuie să redacteze fiecare problemă separat, însoțind-o de toate calculele necesare și de figuri desenate cu îngrijire. Nu se vor trimite soluțiile mai multor probleme pe aceeași foaie. Problemele de fizică, rezolvate, se vor trimite separat, iar pe plic se va scrie: *Pentru redacția de fizică.*

Se primesc lunar cel puțin zece soluții numai la problemele și exercițiile din ultimele trei numere apărute. Pe plic se va scrie localitatea și școala pe care o urmează rezolvitorul, pentru a se evita confuzii la întocmirea rubricii rezolvitorilor de probleme și a listei celor evidențiați. Soluții la problemele propuse pentru școala de 7 ani se primesc numai de la elevii claselor V—VII, sau ai școlilor profesionale.

Problemele care se propun de către colaboratorii revistei să fie clar alcătuite și însoțite de soluții, să fie personale, iar nu luate din cărți sau reviste. Elevii sînt sfătuiți să înceapă a propune probleme numai după ce au rezolvat un număr destul de mare de exerciții și probleme. Problemele propuse, dar necorespunzătoare, nu se pot publica. Dacă un corespondent constată că unele probleme propuse au fost publicate în cărți sau reviste, este rugat să ne arate precis volumul și pagina unde a mai apărut enunțul sau soluția problemei respective.

Corespondentul nostru care a citit și a înțeles deplin multe din soluțiile publicate, a rezolvat multe din problemele propuse, poate și este îndemnat să încerce să schițeze cîte o notă rezultată dintr-o observație făcută cu ocazia rezolvării unei chestiuni mai grele. Aceste note să fie *refăcute de mai multe ori înainte de a fi trimise, pentru* ca redactarea lor să fie *cît mai clară și concisă.* Figurile să fie făcute separat. În redactare se vor evita prescurtările. Nu se va scrie: $\parallel$, $\perp$, $=$ $\parallel$, Tr., $\sim$, Δ, $^\circ$, etc. iar trecerea de la un calcul la altul să fie explicată pentru a se putea urmări ușor desfășurarea unei demonstrații. Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

La publicarea problemelor rezolvate se vor menționa rezolvitorii care au dat o bună redactare și o soluție interesantă, sau mai multe metode de rezolvare.

Tovarășii colaboratori elevi sînt rugați să ne trimită date asupra activității lor extrașcolare la matematică și la fizică, asupra activității cercurilor de matematică și de fizică la care iau parte, pentru ca apoi, prin revistă, să se poată realiza cu succes un schimb de experiență. Dările de seamă concrete se vor publica în G.M.F.-B.

Autorii sînt rugați ca la întocmirea articolelor și notelor să țină seama de următoarele: articolele sau notele să fie scrise clar cu cerneală sau dactilografiate la două rînduri și pe o singură parte a foii, figurile să fie desenate îngrijit și pe o foaie separată. Problemele propuse să fie însoțite de una sau mai multe soluții.

— Fiecare abonat este rugat să facă cunoscută G.M.F.-B și altor colegi, pentru a face abonamentele din vreme în vederea planificării tirajului lunar.

— Abonamentul se poate face individual prin oficiile poștale locale sau prin factorii poștali, cu prețul de 18 lei pe 1961 (12 numere).

Tipografia Învățămîntului, București — Nr. 5221 Lei 1,50

E 1126

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE
MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SERIA B

Anul XII februarie 1961

2

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

(SERIA B)

Anul XII, nr. 2 — februarie 1961

SUMARUL

pag.

1. *Dimensiuni şi unităţi de măsură în fizică de Teofil Mateş* 65
2. *Despre geometria lui Lobacevski de Gheorghe Tarnoky* 74
3. *Aplicaţii practice ale semiconductorilor* 79
4. *Note matematice de Costel Bejan, Iacob Voia şi Viorel Vodă* 86
5. *Caleidoscop matematic* 92
6. *Rezultatul întrecerii între şcolile medii din ţară pe anul 1960* 96
7. *Regulamentul întrecerii între şcolile medii pe anul 1961.* 97
8. *Probleme rezolvate (4025, 4061, 4083, 4085, 4092, 4097, 4098, 4099, 4108, 4113, 4119, 4126, E: 1499, 1500, 1504, 1505, 1545, 1551, 1552)* 98
9. *Probleme propuse (4544—4574).* 111
10. *Exerciţii şi probleme propuse pentru şcolile de 7 ani (E: 1633—1647).* 117
11. *Rubrica rezolvitorilor de probleme* 120

ANUL XII **2** FEBRUARIE

COMITETUL DE REDACŢIE

Ailincăi M., profesoară; *Atanasiu V.*, lector, redactor pentru fizică; *Boiangiu D.*, lector; *Ionescu-Bujor C.*, prof. univ.; *Ionescu-Ţiu C.*, profesor, redactor pentru matematică; *Manolescu St.*, profesoară; *Muşat I.*, profesor; *Petrovanu A.*, profesor, *Sacter O.*, conf. univ., redactor responsabil; *Simionescu D. Gh.*, conf. univ.; *Udrea E.*, profesoară.

REDACŢIA: Str. Academiei, 14 — Tel. 14.46.53 — Bucureşti I

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar putea interesa redacţia noastră se vor trimite pe adresa de mai sus.

1883

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

(SERIA B)

PUBLICAŢIE LUNARA PENTRU TINERET

Anul XII, nr. 2 februarie 1961

DIMENSIUNI ŞI UNITĂŢI DE MASURĂ ÎN FIZICĂ

de prof. *TEOFIL MATEŞ*, Arad

1. Valoarea şi unitatea unei mărimi

O caracteristică esenţială a mărimilor fizice este aceea că sînt măsurabile, adică se pot exprima cantitativ prin măsurare. A măsura o mărime înseamnă a o compara cu o altă mărime de aceeaşi natură, care se alege în mod convenţional ca unitate.

Raportul dintre mărimea de măsurat şi unitatea respectivă se numeşte valoarea sau măsura acelei mărimi. Notînd cu A mărimea, a unitatea şi α valoarea, putem scrie:

$$\alpha = \frac{A}{a} \text{ sau } A = \alpha \cdot a$$

deci:

mărime = valoarea . unitatea.

Valoarea fiind raportul a două mărimi de acelaşi fel, este un număr aritmetic abstract. Din acest motiv, dacă nu indicăm unitatea, rezultatul măsurării (valoarea, măsura) nu are semnificaţie fizică.

Deci în fizică important este nu numai cunoaşterea legilor şi a relaţiilor dintre mărimi, ci şi a unităţilor de măsură.

2. Mărimi fundamentale şi mărimi derivate

In fizică se caută, să se determine, experimental sau prin metode teoretice, diferite relaţii între mărimi. Numărul de relaţii principale între mărimile fizice fiind mai mic decît numărul mărimilor fizice, pentru determinarea tuturor, este necesar să se aleagă un anumit număr de mărimi numite *fundamentale*, iar celelalte mărimi numite *derivate* se definesc în funcţie de cele fundamentale.

Pentru definirea mărimilor fundamentale se folosesc acele legi în care apar două mărimi noi faţă de celelalte mărimi determinate în alte capitole ale fizicii. Aceasta înseamnă că există o anumită ordine a capitolelor fizicii, ordine în care se face şi studiul lor.

Primul capitol al mărimilor fizicii este *geometria*, în studiul celorlalte capitole ale fizicii fiind nevoie de mărimile geometrice. Aşa cum se scriu

astăzi legile geometrice, în acest capitol, este suficientă o singură mărime fundamentală : *lungimea.*

În *cinematică,* prima relație, aceea care definește viteza :

$$v = \frac{l}{t}$$

introduce, în afară de lungime, două mărimi noi : viteza și timpul. Pentru a putea determina viteza se alege timpul ca mărime fundamentală și deci cinematica are nevoie de două mărimi fundamentale : *lungimea* și *timpul.*

În *dinamică* sînt necesare trei mărimi fundamentale : *lungimea, timpul,* și *masa* sau *forța.*

În *electricitate* sînt necesare patru mărimi fundamentale, a căror alegere se poate face în următoarele două feluri :

— *lungimea, timpul, masa* și o *mărime electrică sau magnetică.*

— *lungimea, timpul* și celelalte *două electrice* sau *una electrică* și *una magnetică.*

În *căldură* sînt necesare la fel patru mărimi fundamentale, a patra fiind *temperatura.*

Unitățile de măsură ale mărimilor fundamentale se numesc *unități fundamentale* și se definesc în mod convențional însă independent unele de altele. Unitățile mărimilor derivate se numesc *unități derivate.* Ele nu sînt independente între ele și nici independente de unitățile fundamentale.

3. Dimensiunile mărimilor fizice

Definirea unităților derivate depinde numai de felul în care au fost alese unitățile fundamentale și se poate face cu ajutorul așa-numitelor ecuații sau formule de dimensiuni fizice.

În dinamică, dacă vom alege, de exemplu, ca mărimi fundamentale lungimea, timpul și masa pe care le vom nota cu L, T și M, unitatea unei mărimi derivate o vom putea scrie ca produsul unor puteri a unității de lungime, timp și masă. Simbolic, mărimea derivată, notînd-o cu D, vom putea scrie :

$$|D| = L^x T^y M^z$$

Produsul acesta de puteri se numește dimensiunea sau formula dimensiunilor mărimii derivate *D.* Această relație ne arată că mărimea *D* are dimensiunea *x* în lungime, *y* în timp și *z* în masă. Cu alte cuvinte dimensiunea unei mărimi oarecare ne arată modul în care aceasta depinde de mărimile fundamentale și deci în ce mod unitatea acestei mărimi derivă din unitățile fundamentale alese.

Pentru a obține formula dimensiunilor unei mărimi derivate, adică în fond valoarea exponenților *x, y,* și *z,* se explicitează relația de definiție a mărimii respective pînă se obțin în membrul al doilea numai mărimi fundamentale. De exemplu, considerînd mărimile fundamentale lungimea,

timpul și masa, pentru a obține formula dimensiunilor forței F, vom porni de la relația de definiție:

$$F = m \cdot a, \text{ dar: } a = \frac{v}{t} = \frac{l}{t^2},$$

deci putem scrie:

$$F = \frac{m \cdot l}{t^2},$$

formula dimensiunilor va fi:

$$|F|_{LTM} = LT^{-2}M.$$

În mod analog vom proceda la stabilirea formulei dimensiunilor oricărei mărimi derivate, folosind următoarele teoreme:

a) Dimensiunea mărimii D, egală cu produsul mărimilor A și B, este egală cu produsul dimensiunilor celor două mărimi

$$[D]_{LTM} = [A \cdot B] = [A] \cdot [B],$$

dacă

$$[A]_{LTM} = L^X T^Y M^Z \text{ și }]B[_{LTM} = L^{X'} T^{Y'} M^{Z'},$$

atunci:

$$[D]_{LTM} = L^{X+X'} T^{Y+Y'} M^{Z+Z'}.$$

b) Dimensiunea mărimii D, egală cu raportul mărimilor A și B, este egală cu raportul dimensiunilor celor două mărimi

$$[D]_{LTM} = \left[\frac{A}{B}\right] = \frac{[A]}{[B]}$$

sau, cu aceleași formule ale dimensiunilor mărimilor A și B rezultă:

$$[D]_{LTM} = L^{X-X'} T^{Y-Y'} M^{Z-Z'}.$$

c) Dimensiunea mărimii D egală cu mărimea A ridicată la puterea a n^{-a} este egală cu puterea a n^{-a} a dimensiunilor mărimii A:

$$[D]_{LTM} = [A^n] = [A]^n$$

sau, folosind dimensiunile mărimii A, rezultă:

$$[D]_{LTM} = L^{nx} T^{ny} M^{nz}.$$

Numerele x, y și z pot fi pozitive, nule sau negative, ele pot fi întregi sau fracționare. Dacă $x = y = z = 0$, atunci putem scrie:

$$[D]_{LTM} = L^0 T^0 M^0 = 1,$$

adică mărimea respectivă nu are dimensiuni, este o mărime numerică. O asemenea mărime nu depinde de mărimile fundamentale, iar unitatea sa nu depinde de unitățile fundamentale. Deci numerele abstracte ce apar în diferite relații cantitative, nu au semnificație fizică, nici unități de măsură și de aceea nu li se atribuie dimensiuni.

Formulele de dimensiuni au o deosebită importanță în fizică, deoarece:

a) Permit să verificăm omogenitatea formulelor fizice și ne dau astfel o primă indicație cu privire la eventualele greșeli pe care le-am făcut la stabilirea unei legi fizice. Dacă mărimile care intervin în cei doi membri ai unei relații, nu au aceleași dimensiuni înseamnă că nu pot fi exprimate în aceleași unități și prin urmare nu sînt comparabile, deci relația nu este omogenă în dimensiuni și cu siguranță greșită.

b) Arată în ce mod o unitate derivată depinde de unitățile fundamentale alese, deci putem stabili ecuațiile unităților derivate.

c) Permit după cum vom vedea să trecem de la un sistem de unități la altul.

4. Sisteme de dimensiuni

Dimensiunile de bază în raport cu care se exprimă dimensiunile tuturor mărimilor derivate dintr-un capitol al fizicii constituie un sistem de dimensiuni.

Deci un sistem de dimensiuni este caracterizat prin numărul și natura grupului de mărimi fundamentale cu ajutorul cărora se pot determina toate celelalte mărimi.

La stabilirea unui sistem de dimensiuni se pun două condiții:

a) Formulele fizicii să fie scrise cu un număr cît mai mic de constante universale.

b) Mărimile cu aceleași dimensiuni, să fie în număr cît mai mic.

Prima condiție conduce la un număr cît mai mic de mărimi fundamentale, iar a doua la un număr cît mai mare de mărimi fundamentale. S-a ajuns astăzi la o soluție care satisfac destul de bine ambele condiții, folosindu-se în diferitele capitole ale fizicii, unul sau mai multe sisteme de dimensiuni:

În *mecanică* se folosesc două sisteme de dimensiuni, cu cîte trei mărimi fundamentale:

— sistemul *LTM* avînd mărimile fundamentale — lungimea, timpul și masa.

— sistemul *LTF* avînd mărimile fundamentale — lungimea, timpul și forța.

Aceste sisteme de dimensiuni au același număr de mărimi fundamentale dar, diferă prin natura uneia din cele trei mărimi alese fundamentale.

În *acustică* se utilizează sistemul de dimensiuni *LTM*.

În *electricitate* și *magnetism* au fost propuse mai multe sisteme de dimensiuni. Dintre acestea, importanță teoretică prezintă următoarele:

— sistemul *LTM* ε (lungimea, timp, masă și permitivitate);

— sistemul *LTM* μ (lungimea, timp, masă și permeabilitate);

— sistemul *LTM* $\varepsilon\mu$ (sistemul Gauss);

— sistemul *LTMI* (lungime, timp, masă și curentul electric).

— sistemul *LTMQ* (lungimea, timp, masă și sarcina electrică);

— sistemul *LTEH* (propus de Maxwell) (lungime, timp, intensitatea cîmpului electric și intensitatea cîmpului magnetic);

— sistemul *LTQ* Φ — propus de Calantarov (lungime, timp, sarcină electrică și fluxul inducției magnetice);

— sistemul *LTUI* (lungime, timp, tensiune și curentul electric);

— sistemul *LTMR* — propus de A. Giorgi (lungime, timp, masă și rezistența electrică).

Din aceste sisteme de dimensiuni, importanță practică prezintă sistemul *LTMI*, deoarece este standardizat și legiferat aproape pretutindeni.

Mărimile care intervin în capitolul *căldură*, pot fi definite cu ajutorul a patru mărimi fundamentale: lungimea, timpul, masa și temperatura. Deci în acest capitol se utilizează sistemul de dimensiuni $LTM\theta$.

În *fotometrie* se folosește sistemul de dimensiuni *LTMJ*, avînd deci mărimile fundamentale: lungimea, timpul, masa și intensitatea luminoasă.

5. Unități fundamentale și unități derivate

După cum am arătat pentru a măsura o mărime fizică, este necesar să avem o unitate de măsură. Ar fi cu totul incomod să avem cîte o unitate particulară pentru fiecare mărime în parte, definită independent de celelalte unități. Deci exprimarea cantitativă a mărimilor fizice implică, de la început, alegerea unui sistem de unități, în care folosind anumite relații cantitative, unitățile diferitelor mărimi se exprimă cu ajutorul unui număr cît mai restrîns de unități alese convențional.

Am văzut că în fizică se întîlnesc două feluri de mărimi: fundamentale și derivate. Unitățile de măsură ale mărimilor fundamentale se aleg în mod convențional și se numesc *unități fundamentale*. Unitățile de măsură ale mărimilor derivate se exprimă cu ajutorul unităților fundamentale și poartă numele de *unități derivate*. Spre deosebire de unitățile fundamentale care se aleg independent unele de altele, unitățile derivate nu sînt independente între ele, nici independente de unitățile fundamentale.

Formarea unei unități derivate are loc după anumite reguli. Punctul de plecare îl constituie relația de definiție sau relația prin care se determină mărimea derivată respectivă, iar etapele sînt următoarele:

— Se stabilește formula dimensiunilor mărimii derivate din relația de definiție sau din relația prin care se determină această mărime;

— Se stabilește formula unității înlocuind mărimile fundamentale din formula dimensiunilor cu unitățile fundamentale respective (păstrînd aceeași exponenți);

— Se stabilește denumirea unității fie cu ajutorul formulei unității, fie direct din relația de definiție a mărimii;

— Se stabilește din relația de definiție, propoziția, din care reiese realizarea în concret a unității respective;

— Din formula unității se stabilesc formulele de transformare.

Exemplu: Pentru a stabili unitatea forței în sistemul *MKS* se folosește relația $F = m.a.$

Formula dimensiunilor va fi:

$$[F]_{LTM} = [m]\,[a] = MLT^{-2} = LT^{-2}M.$$

Formula unității este:

$$<F>_{MKS} = m\,s^{-2}\,kg \text{ sau } <F>_{MKS} = <m><a> = kg.\frac{m}{s^2}.$$

Această unitate a primit denumirea de newton (simbol N):

$$1\ m\cdot s^{-2}\cdot kg = 1\ N.$$

Conform relației de definiție obținem realizarea în concret a acestei unități. Newtonul este forța care imprimă masei de un kilogram, accelerația de un metru pe secundă la pătrat.

Relația de transformare:

$$1\ N = 1\ m \cdot s^{-2} \cdot kg = 10^2 \cdot 10^3\ cm\ s^{-2} \cdot g = 10^5\ dyn.$$

Unitățile stabilite prin operațiile de mai sus se numesc *unități coerente.*

Unitățile stabilite în alt mod, se numesc unități necoerente și sînt legate de unitățile coerente respective, prin relații cu coeficienți numerici. Unitățile necoerente se împart în două grupuri: *unități speciale* și *unități tolerate.*

Unitățile speciale au fost impuse de experiență și anume de specificul anumitor măsurători. De exemplu, presiunea se măsoară în milimetri coloană de mercur și de aici a rezultat unitatea specială pentru presiune „torrul". De asemenea în chimie și în fizica atomică este avantajos să se folosească unitatea specială de masă „molul" (simbol mol) — deoarece un mol, din orice substanță, are același număr de molecule.

Unitățile tolerate sau tranzitorii sînt unitățile unor mărimi fizice, care nu fac parte din sistemele de unități științifice constituite și care s-au păstrat datorită marei lor întrebuințări. Din categoria unităților tolerate fac parte:

— Caloria (unitate a energiei calorice) 1 cal = 4,182 j;

— Calul-putere (simbol CP) 1 CP = 75 kgm/s = 0,736 kW;

— Wattora și Kilowattora (unități ale energiei cu simbolul Wh, respectiv kWh). 1 Wh = 3,6 kj și 1 kWh = 3,6 MJ.

În afara unităților derivate ce se obțin, după cum am văzut, din ecuația de dimensiuni a mărimii respective, se mai folosesc multipli și submultipli zecimali ai acestora.

Principalii multipli și submultipli se formează cu ajutorul următoarelor prefixe:

deca	— simbol	da	— valoarea	10^1
hecto	„	h	„	10^2
kilo	„	k	„	10^3
mega	„	M	„	10^6
giga	„	G	„	10^9
Tera	„	T	„	10^{12}
deci	„	d	„	10^{-1}
centi	„	c	„	10^{-2}
mili	„	m	„	10^{-3}
micro	„	μ	„	10^{-6}
nano	„	n	„	10^{-9}
pico	„	p	„	10^{-12}

6. Sisteme de unități

Sistemele de unități reprezintă totalitatea unităților de măsură ale unui același grup de mărimi, deduse din unitățile fundamentale corespunzătoare, prin relațiile fizice de definiție.

Un sistem de unități trebuie să îndeplinească următoarele condiții: să fie practic, general, coerent, iar unitățile fundamentale să fie independente între ele.

Un sistem de unități este practic, dacă unitățile sale sînt astfel alese, încît, la măsurarea mărimilor uzuale, valorile acestora nu sînt nici foarte mari, nici foarte mici.

Un sistem de unități este general, dacă se aplică în toate capitolele din fizică. Sistemele de unități *CGS* și *MKS* sînt sisteme generale, iar sistemul *MKfS* se întrebuințează numai în mecanică.

Pentru ca sistemul de unități să fie coerent sau absolut, unitățile derivate trebuie să se formeze după regulile stabilite mai înainte. Între aceste unități nu există coeficienți numerici. Două sisteme de unități sînt coerente între ele, cînd ecuațiile fizice sînt scrise identic în ambele sisteme.

Unitățile fundamentale al unui sistem de unități trebuie să fie independente între ele. Deci definiția etalonului de masă trebuie să fie independentă de etalonul de lungime sau etalonul de timp. Sistemul *MKSA* folosit în electricitate și magnetism, nu satisface această condiție, deoarece în definiția amperului este folosit și metrul și kilogramul.

Fiecare sistem de unități este caracterizat prin grupul de unități fundamentale ale mărimilor fundamentale. Deoarece unitățile fundamentale se aleg convențional, unui sistem de dimensiuni îi poate corespunde unul sau mai multe sisteme de unități.

În mecanică, sistemului de dimensiuni *LTM* îi corespund două sisteme de unități de măsură, *MKS* și *CGS*. Sistemului de dimensiuni *LTF* îi corespunde sistemul de unități MKfS folosit numai pentru măsurarea mărimilor mecanice.

Sistemul *MKS* are ca unități fundamentale: metrul (simbol, m), kilogramul (simbol, kg) și secunda (simbol, s).

Sistemul *CGS* are ca unități fundamentale: centimetrul (simbol, cm), gramul (simbol, g) și secunda (simbol, s).

Sistemul *MKfS* are ca unități fundamentale: metrul, kilogramul-forță (simbol kgf) și secunda (simbol, s).

Definiția actuală a acestor unități fundamentale este următoarea:

Metrul este lungimea la temperatura 0°C, a prototipului internațional de platină iridiată, sancționat în 1889 de Conferința Generală de Măsuri și Greutăți și păstrată la Biroul Internațional de Măsuri și Greutăți din Sevres-Franța [1].

Kilogramul este masa prototipului internațional de platină iridiată, sancționată în anul 1889 de Conferința Generală de Măsuri și Greutăți și păstrat la Biroul Internațional de Măsuri și Greutăți din Sevres-Franța.

Kilogramul-forță este forța a cărei valoare este egală cu greutatea prototipului internațional de masă (kilogramul), măsurată în vid, la accelerația normală a gravitații de 9,80665 m/s^2.

Secunda reprezîntă a 86400 parte a zilei solare mijlocii.

---

1) În urma Conferinței a XI-a de măsuri și greutăți, de la Paris 1960 noua definiție a metrului etalon este: metrul este lungimea, în vid, egală cu 1 650 763,73 a radiației oranj a criptonului 86.

Între unitățile fundamentale ale acestor sisteme există următoarele relații fundamentale:

$$1 \text{ cm} = 10^{-2}\text{m},$$
$$1 \text{ g} = 10^{-3}\text{kg},$$
$$1 \text{ kgf} = 9{,}80665 \text{ N}.$$

Sistemul de unități *MKS* este un sistem general și practic. Este general, deoarece se aplică în toate domeniile fizicii și practic, deoarece unitățile sale sînt apropiate de valorile mărimilor uzuale de măsurat fiind folosit astfel în special în practică.

Sistemul de unități *CGS* este la fel un sistem general, dar spre deosebire de sistemul MKS nu are mare importanță practică (unitățile de lungime și masă, sînt prea mici) folosindu-se în special în lucrările științifice.

În căldură sistemul de dimensiuni, folosit este *LTM*, așa că în acest capitol vom utiliza două sisteme de unități *MKS* și *CGS* adăugînd celor trei unități fundamentale, gradul ca unitate fundamentală a temperaturii.

În acustică se utilizează sistemul de dimensiuni *LTM* și deci sistemele de unități *MKS* și *CGS*.

În optică se folosește sistemul de dimensiuni *LTMJ* și deci în acest capitol vom folosi două sisteme de unități *MKS* și *CGS* completînd unitățile fundamentale din mecanică cu unitatea fundamentală a intensității luminoase — *candela*.

În electricitate și magnetism se întîlnesc, după cum am văzut, mai multe sisteme de dimensiuni, fiecăruia corespunzîndu-i cîte un sistem de unități. O mai largă întrebuințare au sistemele $CGS\,\varepsilon_0$, care derivă din sistemul de dimensiuni *LTM* ε, sistemul $CGS\,\mu_0$, ce corespunde sistemului de dimensiuni $LTM\mu$ și sistemul *MKSA* corespunzător sistemului de dimensiuni *LTMI*.

Deoarece pentru studiul tuturor capitolelor fizicii sînt necesare șase mărimi fundamentale: lungimea, timpul, masa, curentul electric, gradul de temperatură și intensitatea luminoasă, s-a pus în ultimul timp, problema construirii unui *sistem internațional de unități* (*SI*). Acest sistem a fost adoptat de Conferința internațională de Măsuri și Greutăți din octombrie 1954, de la Paris. Unitățile fundamentale ale acestui sistem sînt: metrul, secunda, kilogramul, amperul, gradul Kelvin și candela.

7. Etaloane

Pentru folosirea practică a sistemelor de unități, este necesar ca unitățile fundamentale să fie concretizate și păstrate în condiții cu totul speciale. Concretizarea unităților fundamentale se face sub forma etaloanelor.

Etaloanele trebuie să îndeplinească următoarele condiții:

— să poată fi reconstituite;

— să fie cît mai invariabile față de oricare influență fizică (temperatură, presiune, umiditate etc.);

— să poată fi ușor folosite în tehnica operațiilor de măsurare;

— substanța din care sînt construite să nu sufere modificări de structură fizico-chimică în timp.

Pentru fiecare unitate fundamentală a sistemului principal de unități, sistemul practic *MKS*, se realizează etaloane. Unitățile fundamentale ale altor sisteme de unități, care diferă de acestea, sînt definite prin anumite relații în funcție de unitățile fundamentale ale sistemului principal de unități. Aceste relații se numesc relații de bază ale sistemului respectiv de unități. Nu se realizează etaloane pentru unitățile fundamentale ale sistemului *CGS*, acestea fiind definite cu ajutorul relațiilor de bază, în funcție de etaloanele sistemului *MKS* (1 cm = 10^{-2}m, 1g = 10^{-3} kg și 1 s = 1 s).

În sistemul de unități *MKfS* pentru unitatea de forță, nu se stabilește un etalon special de forță, dar unitatea de forță, kilogramul forță se definește cu ajutorul etalonului de masă. Deci celor trei unități fundamentale: metrul, kilogramul-forță și secunda, le corespund trei etaloane: etalonul de lungime, etalonul de masă și etalonul de timp. Rezultă că nu tuturor unităților fundamentale le corespund cîte un etalon, dar numărul etaloanelor este egal cu numărul unităților fundamentale.

În electricitate, în sistemul *MKSA*, a patra unitate fundamentală este amperul, care se definește cu ajutorul etalonului de permeabilitate care este permeabilitatea vidului.

La fel în optică, a patra unitate fundamentală este candela (unitatea de intensitate luminoasă) ea se definește cu ajutorul etalonului de strălucire care este strălucirea corpului negru la temperatura de solidificare a platinei.

Cu realizarea și conservarea etalonului se ocupă metrologia. Există etaloane de mai multe ordine:

— etalonul prototip;
— etalonul de prim ordin;
— etalonul de al doilea ordin;
— etalonul de al treilea ordin.

Etaloanele-prototip sînt depozitate în camerele speciale ale pavilionului Breteuil de la Sèvres-Franța și cu ele se lucrează foarte rar.

Etaloanele de primul ordin sînt depozitate cu etaloanele-prototip și sînt comparate din timp în timp cu acestea.

Etaloanele de al doilea ordin sînt copii după etaloanele de primul ordin, care sînt distribuite diferitelor țări.

Etaloanele de al treilea ordin sînt copii construite în țările respective ale etalonului de al doilea ordin. Aceste etaloane le folosesc institutele metrologice și institutele de cercetări.

După aceste etaloane de al treilea ordin, se construiesc „măsurile" folosite în practica zilnică în unitățile comerciale, în ateliere etc.

Din cauza arbitrarului care stă, după cum am văzut, la baza definirii unui sistem de unități, numărul acestora este astăzi foarte mare. Tendința actuală este ca numărul sistemelor de unități să fie redus la unul singur, cel adoptat în anul 1954. Dar, cum mai sînt încă țări care nu au adoptat nici acum sistemul metric, adoptat în anul 1889, va mai trece desigur, încă multă vreme pînă cînd lumea întreagă se va supune hotărîrii Conferinței internaționale de Măsuri și greutăți din octombrie 1954, de la Paris".

DESPRE GEOMETRIA LUI LOBACEVSKI

de *TARNOKY GHEORGHE*, profesor Oradea

Vom trata în acest articol despre problema formării geometriei neeuclidiene a lui Lobacevski și vom arăta în același timp unele aspecte ale acestei geometrii.

Filozofii idealiști susțin că orice descoperire de orice natură ar fi ea, este condiționată numai de nașterea unui geniu, al cărui spirit creator dă posibilitate descoperirii respective. Această concepție însă este cu totul greșită. Necondiționat, geniul descoperitorului este o condiție necesară, ea însă nu este și suficientă. Pentru descoperirea geometriei neeuclidiene la începutul secolului al XIX-lea în două țări diferite, de către doi savanți — Lobacevski și Bólyai — independent unul de celălalt, au trebuit să apară condiții obiective. Acestea au intervenit în urma marilor schimbări, care caracterizează viața economică și socială din timpurile acelea.

Dacă aruncăm o privire istorică asupra geometriei, observăm că aceasta a luat naștere încă din cele mai vechi timpuri. Egiptenii și Babilonienii au avut unele cunoștințe geometrice, ele avînd doar un caracter metric. Grecii au fost aceia, care au transformat această știință experimentală în una rațională, formînd din diferitele cunoștințe sporadice un tot. Rezultatele muncii depusă în acest domeniu de către geometri greci, au fost concretizate de Euclid în opera lui *„Elementele"* scrisă cu 300 ani î.e.n. Această lucrare, de o mare rigurozitate științifică, a avut o mare influență asupra matematicienilor din veacurile următoare, astfel încît a fost răspîndită și studiată timp de 2000 de ani în lumea întreagă.

Afirmațiile, teoremele cuprinse în opera lui Euclid, sînt bazate pe unele adevăruri evidente numite axiome. Dintre acestea, axioma a XI-a, cunoscută și sub denumirea de postulatul al V-lea a fost multă vreme discutată. Din marele număr de matematicieni, care s-au ocupat cu această problemă, amintim din secolul al XVIII-lea pe Saccheri, Lambert și Legendre, care au încercat în lucrările lor să deducă acest postulat din axiomele precedente, fără să ajungă însă la rezultatul dorit.

Începutul secolului al XIX-lea reprezintă o revoluție în modul de tratare al acestei probleme. În 1829 apar lucrările marelui matematician rus N. I. Lobacevski, iar în 1832 lucrarea lui János Bólyai. Acești savanți au pornit pe o cale cu totul deosebită față de aceea urmărită de predecesorii lor. Ei au renunțat la încercarea de a demonstra axioma a XI-a cu ajutorul celorlalte axiome și au înlocuit-o cu o altă axiomă, construind cu ajutorul acesteia o nouă geometrie, strict logică, necontradictorie. Rezultatele obținute de acești savanți nu au fost înțelese de majoritatea matematicienilor din timpurile acelea, și numai după mai multe decenii au fost apreciate la justa lor valoare.

Deoarece problema formării geometriei lui Lobacevski se învîrte în jurul axiomei a XI-a a lui Euclid, vom enunța această axiomă în întregime : *Cînd o secantă taie alte două drepte și formează cu ele unghiuri*

interne și azezate de aceeași parte a secantei, a căror sumă este mai mică decît două unghiuri drepte, dreptele se vor intersecta de aceea parte a secantei, unde această sumă este mai mică decît două unghiuri drepte.

Se pot stabili unele afirmații echivalente cu această axiomă. Aceasta înseamnă că ele pot fi demonstrate pe baza axiomei citate, iar la rîndul ei și aceasta poate fi demonstrată, considerînd una din afirmațiile echivalente ca punct de plecare. Asemenea adevăruri sînt:

1. *Prin orice punct exterior unei drepte trece numai o singură dreaptă paralelă cu dreapta dată.*

2. *Două drepte paralele fiind tăiate de o secantă, formează unghiuri corespondente egale.*

3. *Suma unghiurilor interne dintr-un triunghi este egală cu două unghiuri drepte.*

4. *Punctele situate de aceași parte a unei drepte date și la aceași distanță de aceasta descriu o dreaptă.*

5. *Există un triunghi asemenea cu un triunghi dat.*

7. *Toate perpendicularele ridicate pe una din laturile unui unghi, întîlnesc latura cealaltă.*

Dintre încercările care au avut loc în vederea demonstrării axiomei a XI-a menționez lucrarea lui Saccheri. El încercă demonstrarea prin

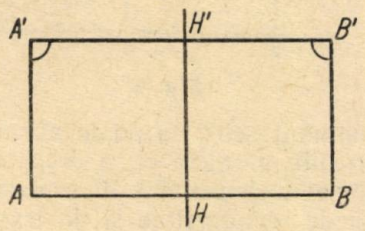


Fig. 1.

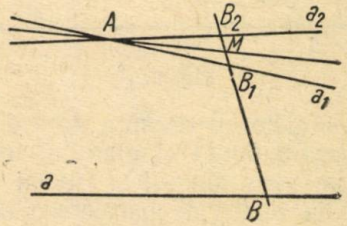


Fig. 2.

reducere la absurd. Saccheri a considerat un patrulater $ABB'A'$ (fig. 1) avînd unghiurile alăturate bazei AB drepte și $AA'=BB'$. Figura fiind simetrică față de perpendiculara HH' în mijlocul bazei, $\sphericalangle A' = \sphericalangle B'$. În legătură cu aceste unghiuri pot fi dezvoltate trei ipoteze: ipoteza unghiului drept, ipoteza unghiului obtuz și ipoteza unghiului ascuțit. Ca să demonstreze prima ipoteză, care ar atrage după sine adevărul axiomei lui Euclid, Saccheri reduce la absurd ipoteza unghiului obtuz și dezvoltă și ipoteza unghiului ascuțit spre a ajunge și aici la o contradicție. Aceasta o găsește însă numai afirmînd, că unul din rezultatele la care a ajuns „este împotriva naturii dreptei". Saccheri însuși a fost nemulțumit de acest rezultat și și-a refăcut calculele de mai multe ori.

Lobacevski a pornit pe baza axiomelor și primelor patru postulate ale lui Euclid, la care a mai adăugat axioma lui:

„Există o astfel de dreaptă a și un astfel de punct A nesituat pe această dreaptă, încît prin punctul A trec cel puțin două drepte care nu întîlnesc dreapta a. Se poate demonstra că prin punctul A trece o infinitate de drepte care nu întîlnesc dreapta a". Demonstrația se face relativ ușor. Să considerăm dreapta a, un punct A exterior acestei drepte și dreptele a_1 și a_2 care trec prin acest punct, și care conform axiomei

lui Lobacevski, nu întîlnesc dreapta a (fig. 2). Să alegem pe dreapta a_2 un punct B_2 situat de acea parte a dreptei a_1, de care nu se găsește dreapta a. Unind punctul B_2 cu un punct oarecare B al dreptei a, dreapta BB_2 va intersecta dreapta a_1 într-un punct B_1. Considerînd un punct M oarecare pe segmentul B_1B_2 și unind acest punct cu punctul A, dreapta AM nu, va întîlni dreapta a, lucru ce poate fi ușor demonstrat cu metoda reducerii la absurd. Cum M a fost ales arbitrar pe segmentul B_1B_2, rezultă că există o infinitate de drepte AM care nu întîlnesc dreapta a.

Din mulțimea de drepte care trec prin punctul A și care nu întîlnesc dreapta a, numai două sînt numite paralele cu dreapta dată. Ele sînt acele drepte care formează cu perpendiculara coborîtă din A pe dreapta a unghiurile „limită" α' și α''. Dreptele a' și a'' care se bucură de această proprietate se numesc drepte limită la dreapta și la stînga. Aceste drepte

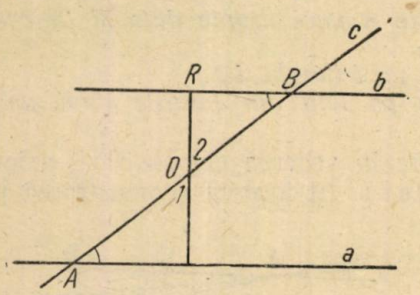


Fig. 3.

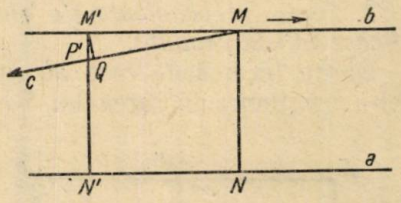


Fig. 4.

fiind paralele cu dreapta dată după un anumit sens, se poate afirma că: prin fiecare punct al planului trece o dreaptă paralelă cu o dreaptă dată după un sens anumit și numai una. Se poate demonstra în același timp că aceste relații de paralelism se bucură de reciprocitate și de transitivitate, ceea ce înseamnă că, dacă o dreaptă este paralelă cu o dreaptă dată, atunci și cea de a doua dreaptă este paralelă cu prima, și mai departe că, dacă două drepte sînt paralele cu a treia, ele sînt paralele și între ele.

Vom numi *divergente*, două drepte care nu sînt paralele și nici nu se întîlnesc. Din cele de mai sus știm că prin orice punct al planului trec două drepte paralele cu o dreaptă dată și o infinitate de divergente. Să enunțăm unele proprietăți ale acestor drepte.

1. *Două drepte perpendiculare pe a treia sînt divergente.* Această proprietate se demonstrează imediat. Într-adevăr, știm că două drepte perpendiculare pe a treia nu se întîlnesc. Dar acestea nu pot fi nici paralele, dat fiind că ele nu formează unghiul limită cu perpendiculara comună.

2. *Două drepte care, fiind tăiate cu a treia dreaptă formează cu ea unghiuri alterne interne egale, sînt divergente.* Să presupunem că avem dreptele a și b care cu dreapta ce formează unghiurile alterne interne A și B egale (fig. 3). Să notăm cu 0 mijlocul segmentului AB și să ducem perpendicularele OP și OR pe dreptele a și b. Triunghiurile AOP și OBR sînt egale, avînd unghiurile A și B egale prin ipoteză, $AO=OB$ și $\sphericalangle P=\sphericalangle R$ prin construcție. Rezultă că unghiurile O_1 și O_2 sînt egale, deci OP și OR sînt în prelungire. Dar atunci am redus teorema noastră la cea precedentă și am demonstrat propoziția dată.

3. *Două drepte divergente au o perpendiculară comună și numai una singură.* Unicitatea perpendicularei se demostrează ușor. Într-adevăr dacă am presupune că cele două drepte au două perpendiculare comune, aceasta ar însemna că în patrulaterul format de dreptele date și de cele două perpendiculare, suma unghiurilor ar fi egală cu 4 unghiuri drepte, ceea ce contrazice geometria lui Lobacevski.

Existența perpendicularei comune necesită o demonstrație mai lungă: Să presupunem că nu există o perpendiculară comună, adică o dreaptă $MN \perp a$ nu este perpendiculară pe b (fig. 4). Ea formează atunci în punctul M unghiul α, obtuz și dacă M se deplasează în sensul arătat de săgeată, considerat sens pozitiv, atunci MN crește monoton. Să ducem

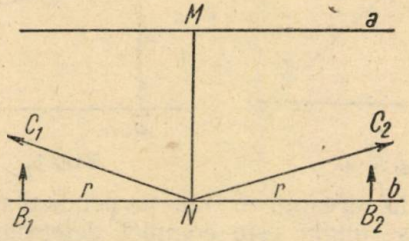


Fig. 5.

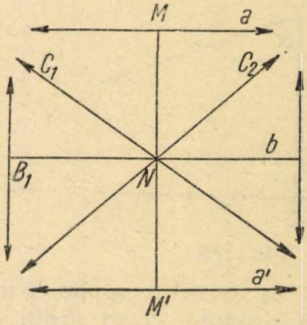


Fig. 6.

în M în sensul negativ, semidreapta c paralelă cu a, și să ducem $M'N'$ perpendicular pe a. Avem $M'N' = M'P' + P'N'$ și, dacă ducem $M'O' \perp c$ avem $M'N' > M'P' > M'O'$. Deoarece, deplasînd M' în direcția negativă, valoarea lui $M'O'$ crește, cu atît mai mult crește și $M'N'$. Dacă introducem acum dreapta b într-un sistem de coordonate rectangulare și notăm cu x abscisa unui punct variabil M, iar cu $f(x)$ distanța acestui punct față de dreapta a, vedem că mărind valoarea lui x în orice direcție, pozitivă sau negativă, valoarea lui $f(x)$ crește. Aceasta arată că există o valoare $x = x_0$ pentru care $f(x_0)$ este minimă, iar mai departe funcția capătă aceleași valori pentru cîte două valori ale lui x. Dacă notăm cu x_1 și x_2 aceste valori, iar cu M_1 și M_2 punctele respective de pe dreapta b atunci $M_1N_1N_2M_2$ este un patrulater Saccheri și deci simetric față de M_0N_0, care este în felul acesta perpendiculara comună.

Să considerăm acum dreptele divergente a și b și perpendiculara lor comună MN. Să arătăm, că proiecțiile dreptei a acoperă numai un segment pe dreapta b și nu dreapta întreagă. Pentru a demonstra acest lucru să ducem din punctul N paralele c_1 și c_2 cu dreapta a. (fig. 5). Să ridicăm în punctele dreptei b perpendiculare pe această dreaptă. Dacă toate perpendicularele ar întîlni dreptele c_1 și c_2, atunci conform propoziției echivalente nr. 7 cu axioma XI-a a lui Euclid, ne găsim în geometria euclidiană. Există prin urmare două puncte B_1 și B_2 pe dreapta b, care se află la o distanță r măsurată în ambele sensuri pe dreapta b pornind de la punctul N, începînd de la care puncte perpendicularele ridicate pe b nu vor mai întîlni dreptele c_1 și c_2. Rezultă de

aici că proiecțiile tuturor punctelor dreptei a vor cădea pe segmentul B_1B_2 de lungimea $2r$ al dreptei b.

Am văzut în cele de mai sus că cele două perpendiculare ridicate pe dreapta b în punctele B_1 și B_2, sînt paralele cu dreptele c_1 și c_2. Conform proprietății de transitivitate a paralelismului, aceste drepte vor fi paralele și cu dreapta a. Făcînd simetrica figurii de mai sus (fig. 6) observăm că avem de a face cu un patrulater cu totul particular, care se bucură de proprietatea de a avea toate laturile și toate diagonalele paralele între ele.

Să ne ocupăm acum de problema unghiului de paralelism. Se numește *unghi de paralelism* în punctul A relativ la dreapta a unghiul ascuțit

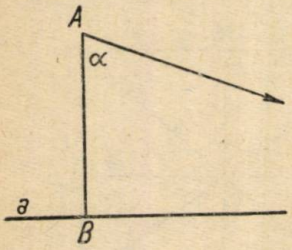


Fig. 7-a.

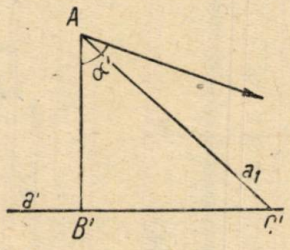


Fig. 7-b.

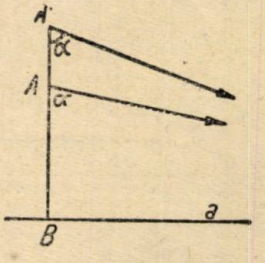


Fig. 8.

format în punctul a de paralele la dreapta a cu perpendiculara pe această dreaptă. Vom arăta că acest unghi este complet determinat de mărimea distanței dintre punctul A și dreapta a. Pentru a dovedi acest lucru, să arătăm prima dată că, dacă avem date dreptele a și a', precum și $AB = A'B'$ perpendiculare pe aceste drepte, atunci unghiurile de paralelism α și α' sînt egale între ele. Presupunem contrariul, adică de exemplu că $\alpha' > \alpha$. În acest caz să copiem unghiul α în punctul A'. Deoarece α' este unghiul de paralelism dreapta a_1 va intersecta dreapta a' într-un punct C' (fig. 7-b). Luînd pe dreapta a segmentul $BC = B'C'$ obținem triunghiurile ABC și $A'B'C'$ egale. Dar de aici rezultă că unghiul BAC este egal cu α despre care am presupus că este unghiul de paralelism. Contradicția la care am ajuns demonstrează afirmația noastră inițială.

În continuare să arătăm că, *dacă distanțele AB și $A'B'$ nu sînt egale atunci nici unghiurile de paralelism nu sînt egale.* Pentru aceasta să considerăm dreapta a și punctele A și A' la distanțe diferite de la aceasta (fig. 8). Fie α și α' unghiurile de paralelism în cele două puncte date. Dacă aceste două unghiuri ar fi egale, ar rezulta că dreptele a_1 și a_2 sînt divergente. Cum însă noi am presupus de la început că ele sînt paralele cu dreapta a ele trebuie să fie paralele și între ele. Unghiurile α și α' nu pot deci să fie egale.

Se vede prin urmare că, unghiul de paralelism este o funcție a distanței punctului A de la dreapta a, notată cu x și putem scrie cu notația lui Lobacevski $\alpha = \pi(x)$. Această funcție are un rol fundamental în geometria lui Lobacevski. Proprietățile ei cele mai importante sînt că ea este monoton descrescătoare, și că ia toate valorile cuprinse între 0 și $\frac{\pi}{2}$. Din aceste proprietăți rezultă imediat că, geometria lui

Euclid este în fond un caz particular al geometriei lui Lobacevski, corespunzînd cazului cînd $x \to 0$. Mai rezultă de aici și faptul că, în geometria lui Lobacevski nu există figuri asemenea.

Mișcarea este cunoscută și în geometria lui Euclid. După principiul lui D'Alembert, care se studiază în mecanică, știm că orice mișcare a geometriei euclidiene se poate descompune într-un șir de translații și rotații. Geometria lui Lobacevski mai cunoaște în afară de aceste mișcări și rotația în jurul punctului de la infinit.

Numim invarianta unei mișcări, o figură, care nu-și schimbă poziția în mișcarea respectivă. În geometria euclidiană dreapta paralelă cu baza translației este invariantă față de această mișcare, iar cercul este invariant față de rotații. Geometria lui Lobacevski păstrează cercul ca invariant al rotației, iar ca invariant al translației consideră o curbă numită echidistantă. Aceasta se bucură de proprietatea de a avea toate punctele depărtate de baza translației, proprietate, de care nu se bucură nici dreptele paralele și nici cele divergente.

A treia mișcare, specifică geometriei lui Lobacevski este rotația în jurul punctului de la infinit. Să considerăm un fascicul de drepte paralele într-un anumit sens și despre care presupunem că se întîlnesc la infinit într-un punct. Pe dreapta a din acest fascicul să determinăm un punct A. Să mișcăm acum dreapta a în așa fel, încît ea să se suprapună pe rînd dreptelor a_1, a_2 ș.a. ale fasciculului, iar punctul A să ocupe pozițiile A_1, A_2 ș.a. astfel, încît segmentul AA_1 să formeze unghiuri interne și de aceeași parte a secantei egale cu dreptele a și a_1 ș.a.m.d. Vom zice în acest caz că dreapta a a efectuat o rotație în jurul punctului de la infinit. Invarianta acestei mișcări este locul geometric al secantelor AA_1 definite mai sus, și care se numește *oriciclu*.

Am arătat în cele de mai sus unele aspecte — foarte sumar — ale geometriei lui Lobacevski. Scopul a fost de a trezi interesul cititorilor spre studierea acestei geometrii care găsește azi din ce în ce mai multe aplicații în astronomie, fizică, precum și în alte științe.

SĂ CUNOAȘTEM SEMICONDUCTORII

APLICAȚII PRACTICE ALE SEMICONDUCTORILOR

Mașinile simt lumina

Materialele semiconductoare sînt sensibile nu numai la încălzire, dar și la răcire. Ele simt foarte bine și lumina — radiațiile invizibile infraroșii, ultraviolete și Röntgen. Asemenea influențe exterioare sînt capabile să ridice destul de mult conductibilitatea electrică a smiconductorului provocînd apariția unui exces de purtători de curent — electroni și găuri.

De multă vreme au încetat de a mai fi o raritate „ochii" pe baza unei fotorezistențe în miniatură (fig. 1). Ele pătrund în tehnică pentru a înlocui fotoelementele cu vid, foarte casabile, și funcționează sigur în nenumărate instalații automate. De exemplu, se poate face ca pe o fotorezistență să cadă umbra unor detalii, care trec pe banda rulantă a

unei uzine și să se enumere în felul acesta cantitatea de obiecte produse. Fotorezistențele știu de asemenea să evalueze calitatea șlefuirii sau vopsirii unui obiect, păzesc viața și sănătatea oamenilor prin aparatele de protecție.

E de ajuns ca un muncitor să nimerească cu mîna într-o zonă periculoasă a mașinii pentru ca în același timp pe fotorezistență să cadă umbra respectvă, iar curentul care circulă prin fotorezistență încetează, comandîndu-se astfel oprirea imediată și automată a mașinii.

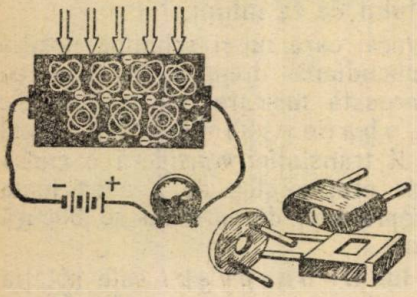


Fig. 1.
Lumina eliberează în semiconductor electroni. Pe acest fenomen se bazează aparatele, numite fotorezistențe. Solide și mici ele în multe cazuri înlocuiesc cu succes fotoelemente cu vid, casabile.

Pe baza fotorezistențelor în miniatură se bazează funcționarea unei interesante mașini de citit pentru orbi creată în U.R.S.S. Elementul său sensibil deplasîndu-se în lungul unui rînd al unei pagini de carte captează conturul literelor textului tipărit. Se obțin semnale electrice. Ele se transformă în mișcarea unor mici pîrghii pe care orbul le simte cu ajutorul degetelor. În felul acesta el capătă posibilitatea de a citi cărți obișnuite și nu numai pe acelea speciale de pînă acum.

Ochii cu semiconductori au o sensibilitate foarte înaltă de mii de ori mai mare decît a ochiului omenesc. Adăogați la aceasta stabilitatea și robustețea fotorezistențelor și veți înțelege cît de prețioase sînt pentru tehnică aceste aparate.

Reșouri și luminofoare

Am văzut că în semiconductori ca și în metale energia curentului electric se poate transforma în căldură.

Imaginați-vă un ceainic electric sub forma unui tub nu prea mare care se îmbracă direct pe robinet. Tubul este făcut din sticlă în interiorul căruia este depus un strat subțire de semiconductor. Prin peliculă circulă un curent, semiconductorul se încălzește puternic și jetul de apă din tub începe să fiarbă. Deschideți robinetul și după o secundă din tub curge apă fiartă.

Unii semiconductori sub acțiunea electricității dau naștere la o intensă strălucire. Fenomenul acesta se explică foarte simplu: într-un astfel de semiconductor cîmpul electric provoacă unirea electronilor cu găurile. Electronii parcă sar pe locurile lor libere din atomi și se prăvălesc în găuri. Căzînd ei eliberează energie care se manifestă sub formă de lumină.

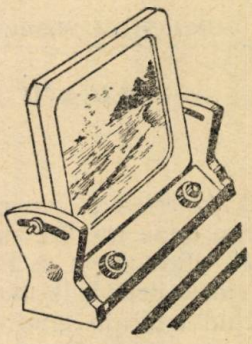


Fig. 2.
O formă posibilă de ecran de televiziune.

Pe această bază fizicienii construiesc luminofoare economice și comode, ecrane de televiziune (fig. 2) și multe altele.

Există semiconductori care se iluminează și sub acțiunea altor factori, cum sînt fluxurile de electroni, razele Röntgen și ultraviolete. Astfel de substanțe pot servi ca un excelent strat sensibil pentru acoperirea ecranelor aparatelor de televiziune, oscilografelor catodice, lămpilor cu lumină fluorescentă. Cu alte cuvinte, luminofoarele, adică materialele care luminează în condițiile mai sus arătate și care se aplică în zilele noastre din ce în ce mai mult în tehnică și în viață nu sînt altceva decît semiconductori.

Din semiconductori se fac acum contoare de particule radioactive, indicatoare de diferite tipuri care luminează continuu în decurs de zeci de ani folosind energia unei dezintegrări radioactive a unei substanțe oarecari.

În sfîrșit, se cunosc semiconductori care sînt capabili, parcă să se încarce cu lumină pe care apoi să o cedeze la o comandă electrică.

Toată această varietate de aplicații practice este legată de procesul de interacțiune dintre electroni și găuri din interiorul semiconductorului.

Stratul de baraj

Pînă acum am vorbit despre aplicațiile tehnice ale semiconductorilor de un anumit tip: electronici sau cu găuri.

Însă, probabil și mai interesante sînt instalațiile în care acționează împreună aceste două tipuri diferite de semiconductori.

Ce se întîmplă cu o bucată de semiconductor în care s-au lipit două straturi diferite, electronic și cu găuri?

Din stratul electronic către stratul cu găuri se deplasează electroni, iar din stratul cu găuri spre cel electronic, găurile. Dincolo de linia de separare, spre partea cu găuri, se obține un exces de electroni, iar de partea electronică un exces de găuri.

Pînă la urmă numărul acestor „uzurpatori de frontieră" devine atît de mare încît ei se transformă în niște „grăniceri" ciudați respingînd pe ori care altul care ar încerca să treacă frontiera. Paza electronică nu va lăsa pe confrații săi să treacă din regiunea electronică a semiconductorului, iar garda de găuri va bara drumul găurilor. Cu alte cuvinte la hotarul dintre cele două forme de semiconductori apare un *strat de baraj* pe care purtătorii de curent, fără ajutorul unui cîmp electric exterior, nu-l vor putea trece. Acest strat de baraj stă la baza construcției multor aparate prețioase din materiale semiconductoare.

Redresorii

Tehnica zilelor noastre folosește de nenumărate ori redresorii care sînt niște instalații pentru transformarea curentului alternativ în curent continuu. În cea mai mare parte acestea sînt diode sau kenotroane. Ele se află în orice aparat de radio. Redresoarele puternice pentru posturile de radio, cuptoarele electrice, locomotivele electrice pînă nu de mult se făceau pe baza descărcării în gaze, cum sînt de exemplu lămpile cu mercur, fie prin intermediul mașinilor electromecanice, motor-generator. De cele mai multe ori acest lucru este însă foarte incomod. Asemenea redresoare sînt greoaie (pentru un motor-generator puternic se construiește o clădire întreagă), neeconomice și se defectează ușor. Ne putem imagina

bucuria electrotehnicienilor cînd au aflat că stratul de baraj din semiconductori a deschis posibilitatea de a se construi redresoare robuste, sigure, mici și totodată cu un randament record.

Într-un semiconductor format dintr-o zonă cu găuri și o zonă electronică, stratul de baraj se prezintă ca un cîmp electric de frontieră cu un sens bine determinat. Dacă asupra acestui strat se suprapune din afară un cîmp în același sens, acesta va întări „paza" electronilor și găurilor. Un cîmp îndreptat în sens invers dimpotrivă va îndepărta această pază și va face să dispară stratul de baraj (fig. 3). Dar dacă se aduce un cîmp variabil, adică unul care își schimbă necontenit sensul ? În acest caz stratul de baraj va începe ba să se lărgească, ba să dispară. Ca rezultat, în timpul dilatării stratului de baraj prin semiconductor curentul nu va trece, iar în momentul dispariției va trece. Prin urmare semiconductorul cu două straturi va fi capabil să joace rolul unui redresor.

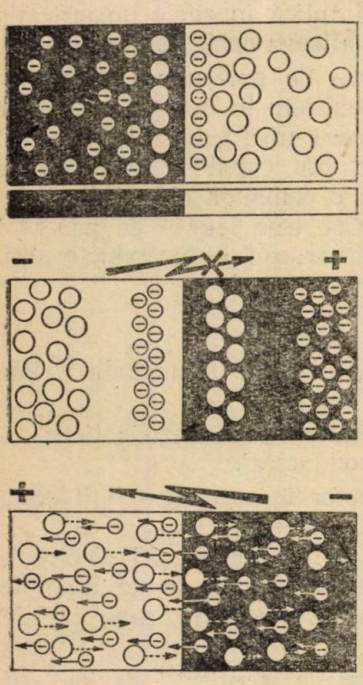


Fig. 3.
La hotarul dintre semiconductorii electronici și cei cu găuri apare un strat de baraj. El permite curentului electric să treacă numai în acea direcție în care eletronul și găurile se deplasează unii către alții.

Redresoarele cu cuproxid și cele cu seleniu și-au găsit de multă vreme aplicarea în tehnică. Acum pătrund în tehnică redresoare puternice din germaniu și siliciu. În anii următori în multe ramuri ale tehnicii acestea vor scoate kenotroanele, lămpile cu mercur, motor-generatoarele, scumpe și nesigure.

Cristalele și tuburile electronice

Trebuie să remarcăm că cel mai simplu redresor cu semiconductori a fost foarte răspîndit acum 30—35 ani, la începutul dezvoltării radiocomunicațiilor. Este vorba despre detector inima unui aparat de radio recepție cu galenă (fig. 4). Cristalul detectorului transformă oscilațiile electrice de înaltă frecvență captate de antenă în curenți continui pulsatorii care în căști făcea să apară sunetul.

Desigur pe atunci detectoarele nu lucrau destul de bine. Conectînd aparatul era nevoie să se găsească un punct sensibil pe cristal care se putea pierde foarte ușor. De îmbunătățirea detectorului s-au ocupat mulți inventatori. Printre aceștia a fost și fizicianul sovietic O. V. Losev. Combinînd într-o schemă doi detectori, el a reușit să amplifice întrucîtva semnalele radio și să provoace oscilații electrice. Receptoarele lui Losev — cristadinele — s-au bucurat multă vreme de popularitate. În momentul cînd detectorii au cedat locul tuburilor electronice cristadinele au fost uitate.

Cîteva decenii tuburile electronice au dominat categoric tehnica radio. Desăvîrșind și perfecționînd aceste aparate, tehnica radio a obținut succese

uriașe. Cu ajutorul lor s-au dezvoltat comunicațiile radio, televiziunea, radioalocația, automatica și telemecanica. A apărut o nouă ramură a științei — electronica. Treptat devenea însă clar că tuburile electronice nici pe departe nu sînt desăvîrșite; casabile, cu durată de funcționare scurtă, neeconomice, ele satisfăceau din ce în ce mai puțin pe constructori. Și

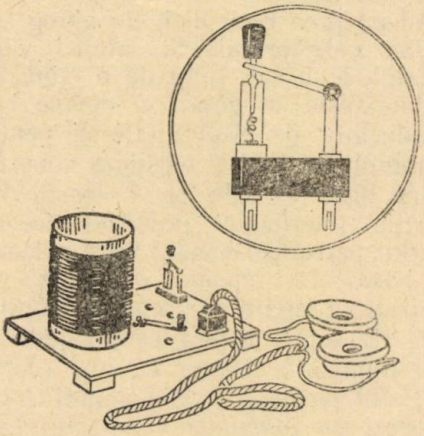


Fig. 4.
Astfel apare cel mai simplu aparat de radiorecepție cu detector-galenă.

Fig. 5.
Aparatele de radio cu semiconductori sînt incomparabili mai mici decît cele cu tuburi electronice.

atunci, ei și-au reamintit de detectorul cu semiconductori. A apărut ideia de a înlocui balonul de sticlă al unui tub electronic printr-o pietricică.

Știința a făcut multe eforturi pentru a „învăța" detectorul cu noile sale funcții. Trebuia creată o îmbinare între cristalele semiconductoare capabile nu numai de a redresa curenții, dar, în limite largi, să amplifice și să genereze oscilațiile electrice. În anul 1948 această problemă a fost rezolvată. Fizicienii americani Bardin și Brattein au construit primul aparat de amplificare — trioda, cu semiconductori. Teoria acestei triode a fost dezvoltată de compatriotul lor Shocly. Cum este făcut și cum funcționează înlocuitorul cu semiconductorul al triodei (fig. 5)?

Trioda cu semiconductori — Tranzistorul

Să ne imaginăm un grăunte de germaniu electronic. Pe marginea sa superioară, printr-o prelucrare specială, se realizează o zonă cu conductibilitate cu găuri. Între zona cu găuri și cea electronică se formează ca de obicei stratul de baraj.

Jos, cristalul este lipit de o placă metalică — *baza* — iar deasupra, la cristal, sînt lipite alături două sîrme subțiri — *emitorul* și *colectorul*.

Semnalele de amplificat se comunică emitorului și bazei în direcția permisă a stratului de baraj. Între bază și colector unde este conectată o tensiune constantă relativ mare în direcție interzisă, apar semnale amplificate (fig. 6).

De ce se întîmplă astfel ?

Cînd se transmite semnalul, prin sîrma emitorului în zona de găuri a semiconductorului pătrunde un impuls al cîmpului electric. Acesta, fără perturbații, rupe stratul de baraj atrăgînd după sine găurile. Cu alte cuvinte găurile sînt injectate în regiunea electronică a cristalului.. Rătăcind nu prea mult aici, ele ajung sub sîrma colectorului. Și atunci cînd stratul de baraj, timp de o clipă, se îmbogățește cu găuri, el devine bun conducător de electricitate și pentru curentul de înaltă tensiune conectat între bază și colector. Folosind dispariția interdicției impulsul acestui curent pătrunde imediat între colector și bază. În rețeaua exterioară a aparatului apare un semnal amplificat. Pe scurt, acesta este modul de funcționare al triodei cu semiconductori numită *tranzistor cu vîrf* (deoarece contactele emitorului și colectorului sînt puncte). Există amplificatori cristalini și alte sisteme numite *tranzistori cu joncțiune* (contactul este o regiune). Fără sîrme subțiri ele sînt capabile să amplifice curenții mari. Se fabrică de asemenea triode și pentode cristaline (aparate cu 4 și 5 contacte) destinate pentru oscilații de înaltă frecvență.

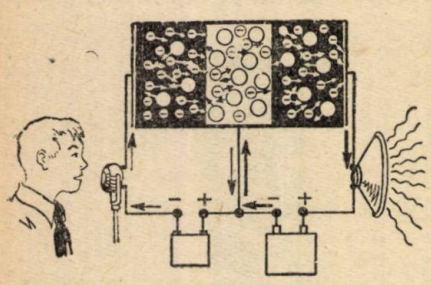


Fig. 6.
Schema simplificată de funcționare a triodei cu semiconductori.

Pătrunderea în practică a acestor admirabile aparate se face pe o scară din ce în ce mai largă, deoarece ele sînt sigure, robuste, compacte, excepțional de economice în consumul de energie. Cu pătrunderea semiconductorilor în radiotehnică are loc o revoluție.

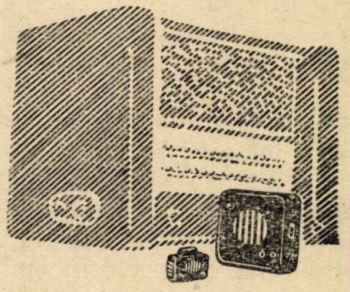


Fig. 7.
Odată cu apariția semiconductorilor, aparatele de radio devin din ce în ce mai mici și mai compacte. Aparatele de radio de mărimea unui portțigaret sau a unei cutii de chibrituri nu mai sînt o raritate.

Siguranța și compacitatea

Dacă nu se folosesc tuburile electrice, emițătoarele și receptoarele pot fi făcute foarte rezistente. Ele pot fi montate chiar într-un ciocan. Oricît am bate cu acest ciocan, aparatele radio nu se vor strica și nu vor înceta să funcționeze. O stație radio cu cristale se poate monta într-un obuz de artilerie, într-un satelit artificial sau o navă cosmică. Ele nu se tem nici de cele mai puternice zguduiri nici de șocurile cele mai tari.

Deosebit de prețioasă este micimea aparatelor radio cu semiconductori. A încetat de a mai fi o raritate receptorul de mărimea unui portțigaret sau unei cutii de chibrituri (fig. 7). Cititorul care cunoaște cît de cît radiotehnică își va construi un aparat cu semiconductori în miniatură. Imaginați-vă o radiosondă medicală pentru cercetarea organelor interioare ale omului — o pilulă mică în care este ascuns un emițător radio cu

cristale. Omul înghite pilula, care rătăcind prin intestine, emite periodic semnale radio privind starea organelor interioare, temperatura, presiunea și altele.

Un rol extrem de important, îl vor juca semiconductorii în dezvoltarea tehnicii mașinilor de calcul. La început în mașinile cibernetice era nevoie să se monteze sute și mii de tuburi electronice, deoarece aceste instalații „gîndeau" numai cu ajutorul lor. Se înțelege că aceste instalații ocupau un spațiu foarte mare, clădiri întregi, se stricau repede și consumau în timpul lucrului o cantitate enormă de energie. Cînd au apărut însă semiconductorii mașinile de calcul și de ghidare au fost rapid „reînvățate". Ele au început să „gîndească" cu ajutorul tranzistorilor și altor detalii cu semiconductori. Creierul cibernetic s-a micșorat de multe sute de ori. El are acum nevoie de foarte puțină energie.

O mie de triode cu semiconductori au putut fi plasate într-un volum egal cu acela al unei cutii de chibrituri. Un receptor cu o mie de lămpi se află în palma dv. !

Viitorul radiotehnicii

Pentru aparatele radio în miniatură au fost construite și surse de alimentare corespunzătoare, de exemplu, baterii de mărimea unei monede. Datorită modestiei „apetitului" semiconductorului o astfel de baterie le ajunge pentru cîteva luni.

Se construiesc aparate de transmisie radio în care ca sursă de energie este însuși sunetul transmis. Omul vorbește la microfon, oscilațiile acustice se transformă în impulsuri de curent. O parte merge la amplificare, o altă parte alimentează amplificatorul de energie. Întreg emițătorul încape în corpul microfonului. S-a propus să se folosească la alimentarea radioreceptoarelor și chiar a radioemițătoarelor cu semiconductori energia undelor radio. Cînd un receptor este acordat cu un post de emisie anumit, energia unui alt post de emisie care funcționează în același timp este de asemenea captat, dar nu este amplificat, ci folosit pentru alimentarea triodelor amplificatorului.

Fiecare zi aduce noi știri asupra perfecționării înlocuitorilor cristalini ai tuburilor electronice, îmbunătățirii complicatei tehnologii a producției lor, asupra schimbării însuși a principiilor lor de lucru. Fizicienii au propus, de exemplu, să se scufunde amplificatorii cu semiconductori în heliu lichid. Aici, la o temperatură suprajoasă, funcționarea aparatelor a căpătat o precizie și o puritate neobișnuită.

În radiotehnică revoluția nu este provocată numai de aparate cu germaniu și siliciu. Servicii excelente încep să aducă materialele semiconductoare magnetice ușoare — fertile din care se fac, de exemplu, antene de mărimea unui creion. Pătrund în practică titanații de bariu propuși de fizicianul sovietic B. M. Bul, care duc la o substanțială micșorare a dimensiunilor și la noi posibilități de aplicare ale unor astfel de accesorii cum sînt condensatorii. Există speranța ca din plăci de ferită „cîrpite" cu titanați de bariu în scurt timp se vor putea, oarecum, tipări aparate de radio ca niște cărți poștale sau timbre. Nu există cuvinte pentru a exprima realizările tehnicii radio bazată pe semiconductori. Ar fi însă greșit să

credem că aparatele cu cristal vor intra în conflict cu aparatele electronice cu vid. Atît unele cît și celelalte păstrează o serie de proprietăți care le rezervă căi de dezvoltare ulterioară diferite. Triodele cristaline, spre deosebire de tuburile electronice, se prepară foarte greu fără o „dispersie a parametrilor" astfel încît, proprietățile lor electrice caracteristice să fie toate riguros identice.

În afară de aceasta diodele și triodele cu germaniu nu sufăr variații bruște de temperatură (acest neajuns, adevărat, aproape că lipsește în cazul aparatelor cu siliciu). În sfîrșit puterea amplificatorilor cu cristal, deși crește în fiecare an, rămîne însă mult în urma puterii de amplificare a tuburilor electronice.

Desigur că semiconductorii aduc servicii însemnate electronicii de vid: din ele se fac surse efective de electroni pentru tuburile electronice, instalații care pornesc descărcarea în redresoarele cu mercur și altele. Cu alte cuvinte între tehnica semiconductorilor și tehnica electronică cu vid are loc acum, nu concurență, ci întrecere și colaborare.

NOTE MATEMATICE

1. O ALTĂ DEMONSTRAȚIE A FORMULEI CELOR TREI REVELMENTE

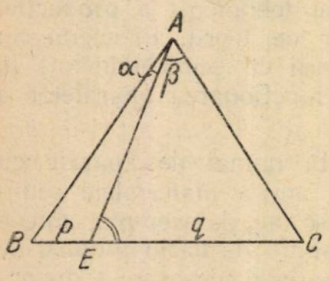
În G.M.F. nr. 3 din 1960 se dă o demonstrație formulei sus amintite. Dau mai jos o altă demonstrație bazată pe relațiile dintre elementele unui triunghi oarecare.

În triunghiul ABC ducem dreapta AE (E pe BC) și notăm $BE = p$, $EC = q$, $\sphericalangle BAE = \alpha$, $\sphericalangle EAC = \beta$, $\sphericalangle AEC = E$.

Trebuie demonstrată relația:

$$\operatorname{ctg} E = \frac{p \operatorname{ctg} \alpha - q \operatorname{ctg} \beta}{p + q}$$

Aplicînd teorema sinusurilor mai întîi în triunghiul BAE apoi în triunghiul AEC obținem, respectiv:



$$\frac{p}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin AEB} \; ;$$

$$\frac{q}{\sin \beta} = \frac{b}{\sin E} .$$

Expresiile mai pot fi scrise sub forma:

$$\frac{p \operatorname{ctg} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{c \operatorname{ctg} E}{\cos E} \; ; \quad \frac{q \operatorname{ctg} \beta}{\cos \beta} = \frac{b \operatorname{ctg} E}{\cos E} ,$$

$$\text{sau } p \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} E \cdot \frac{c \cos \alpha}{\cos E} \; ; \; q \operatorname{ctg} \beta = \operatorname{ctg} E \cdot \frac{b \cos \beta}{\cos E}$$

$$p \operatorname{ctg} \alpha - q \operatorname{ctg} \beta = \operatorname{ctg} E \left(\frac{c \cos \alpha}{\cos E} - \frac{b \cos \beta}{\cos E} \right).$$

Calculăm expresia $\dfrac{c \cos \alpha - b \cos \beta}{\cos E}$

În triunghiul ABC, avem $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

sau

$$\frac{p+q}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{b}{\sin(E-\alpha)} = \frac{c}{\sin(E+\beta)}$$

de unde avem $b = \dfrac{(p+q)\sin(E-\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)}$; $c = \dfrac{(p+q)\sin(E+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$

$$\frac{c \cos \alpha - b \cos \beta}{\cos E} =$$

$$= \frac{\dfrac{(p+q)\sin(E+\beta)\cos\alpha}{\sin(\alpha+b)} - \dfrac{(p+q)\sin(E-\alpha)\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}}{\cos E} =$$

$$= \frac{p+q}{\sin(\alpha+\beta)\cos E}\left[\sin(E+\beta)\cos\alpha - \sin(E-\alpha)\cos\beta\right] =$$

$$= \frac{p+g}{\sin(\alpha+\beta)\cos E}(\sin E \cos\beta\cos\alpha + \cos E \sin\beta\cos\alpha -$$

$$- \sin E \cos\alpha\cos\beta + \cos E \sin\alpha\cos\beta) =$$

$$= \frac{p+q}{\sin(\alpha+\beta)\cos E}[\cos E(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha)] = p+q$$

Deci, $p \operatorname{ctg} \alpha - q \operatorname{ctg} \beta = (p+q) \operatorname{ctg} E$ *c.t.d.*

Bejan Costel, elev, Galați

2. GENERALIZAREA PROBLEMEI 3264

Fie Δ_a, Δ_b, Δ_c dreptele lui Simson *ale punctelor A', B', C' unde cevienele* AA_1, BB_1, CC_1 *ale punctului M, taie cercul circumscris. Triunghiul A"B"C" format de dreptele lui Simson este ortologic cu triunghiul de referință ABC.*

Soluție: Conform teoremei: într-un triunghi *ABC*, dreapta lui Simson a unui punct *A'* este perpendiculară pe izogonala AP_a a dreptei *AA'*.

Deci avem:

$$(\Delta_a, AP_a) = (\Delta_b, BP_b) = (\Delta_c, CP_c) = 90^0$$

Dar, cum cevienele AA_1, BB_1, CC_1 sînt concurente în *M* și izogonalele lor vor fi concurente; fie M_1 punctul lor de concurență.

Dreptele AP_a, BP_b, CP_c fiind perpendiculare pe laturile triunghiului $A''B''C''$ și concurente într-un punct M_1 dovedesc că triunghiurile ABC și $A''B''C''$ sînt ortologice, centrul de ortologie fiind M_1.

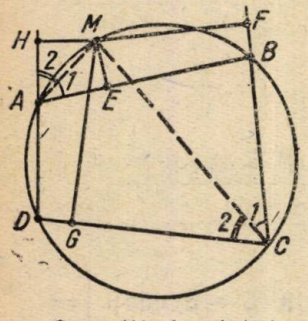
Cînd M se confundă cu ortocentrul, iar M_1 cu centrul cercului circumscris, obținem porblema 3264.

Iacob I. Voia, elev, cl. XI, Anina

3. DEMONSTRAȚII TRIGONOMETRICE A UNOR TEOREME DE GEOMETRIE

1. *Produsul distanțelor unui punct oarecare de pe cercul circumscris la două laturi opuse ale unui patrulater înscris, este egal cu produsul distanțelor la celelalte două laturi opuse.* (Pappus).

Unim punctul M cu vîrfurile A și C. Vom avea :



$$\sphericalangle A_1 = \sphericalangle C_1 = \frac{1}{2} \text{ arc } MB$$

$$\sphericalangle A_2 = \sphericalangle C_2 = \frac{1}{2} \text{ arc } MAD$$

Însă :

$$ME = AM \sin A_1 \; ; \; MG = CM \sin C_2$$

$$MF = CM \sin C_1 \; ; \; MH = AM \cdot \sin A_2$$

Înmulțind relațiile două cîte două avem :

$$ME \cdot MG = AM \cdot CM \cdot \sin A_1 \sin C_2$$

$$MP \cdot MH = AM \cdot CM \cdot \sin A_2 \cdot \sin C_1,$$

de unde rezultă :

$$ME \cdot MG = MF \cdot MH,$$

adică teorema lui *Pappus*.

(O altă demonstrație bazată pe considerente de arii, vezi G.M.F.-B, anul VIII, nr. 4, pag. 194).

2. *Într-un patrulater inscriptibil suma produselor laturilor opuse este egală cu produsul diagonalelor (Teorema lui Ptolomeu).*

Demonstrație. Construim coarda $AM = BC$ și fie N intersecția segmentelor AB și MC.

Patrulaterele $ABCD$ și $AMCD$ sînt echivalente deoarece triunghiurile AMN și BCN sînt egale. ($BC = AM$ și unghiurile egale). Fie φ unghiul dintre diagonalele patrulaterului $ABCD$. Avem :

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin \varphi.$$

iar :

$$S_{AMCD} = \frac{1}{2} AM \cdot AD \sin MAD + \frac{1}{2} DC \cdot CM \cdot \sin DCM =$$

$$= \frac{1}{2} \sin \varphi \, (BC \cdot AD + DC \cdot AB).$$

$(AM = CB,\ CM = AB,\ \sphericalangle MAD$ este suplementul lui $DCM =$

$$= \frac{1}{2}(\text{arc } BC + \text{arc } AD) = \varphi.$$

Avem : $S_{ABCD} = S_{AMCD}$. Simplificînd cu $\frac{1}{2}\sin\varphi$ rezultă :

$$AC \cdot BD = BC \cdot AD + AB \cdot CD.$$

Este cunoscută și altă demonstrație luînd cercul cu diametrul egal cu unitatea. (v. G.M.F.-B nr. 11/1957, pag. 562 în articolul prof. C. Ionescu-Țiu).

3. *Într-un triunghi oarecare suma distanțelor ortocentrului la cele trei vîrfuri ale triunghiului este egală cu suma diametrilor cercurilor înscris și circumscris.*

Avem : $AH = 2R\cos A$, $BH = 2R\cos B$, $CH = 2R\cos C$.

(v. Traian Lalescu „Geometria triunghiului, pag. 137), așa că putem scrie :

$$AH + BH + CH = 2R(\cos A + \cos B + \cos C).$$

Însă : $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

iar

$$r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},$$

de unde înlocuind obținem :

$$AH + BH + CH = 2(R + r).$$

4. *În orice triunghi există relația*

$$OI^2 = R(R - 2r),$$

O și I fiind respectiv centrele cercurilor înscris și circumscris (Euler).

Soluție. În triunghiul ABC mediatoarea OM intersectează arcul BC în punctul D. Rezultă că AD este bisectoarea unghiului A și deci trece prin centrul cercului înscris. Avem :

$$\sphericalangle DBI = \sphericalangle DBC + \sphericalangle CBI = \frac{1}{2}\sphericalangle(A + B)$$

dar :

$$\sphericalangle DIB = \frac{1}{2}\sphericalangle(A + B)$$

(exterior unghiului BIA).

Deci triunghiul BDI este isoscel și vom avea :

$$ID = BD = 2R\sin\frac{A}{2}, \text{ însă } AI = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}} \text{ și deci } DI \cdot AI = 2Rr$$

Fie M_1 și M_2 punctele în care dreapta OP intersectează cercul circumscris:

Avem:

$$ID \cdot AI = IM_1 \cdot IM_2 = (R + OI)(R - OI) = R^2 - OI^2$$

Deci $R^2 - OI^2 = 2Rr$, de unde $OI^2 = R(R - 2r)$.

5. *Într-un triunghi oarecare simediana unui vîrf împarte latura opusă în două segmente proporționale cu pătratele laturilor alăturate* (teorema lui Steiner).

Soluție. În triunghiul ABC fie E mijlocul laturii BC, D piciorul bisectoarei iar F piciorul simedianei.

Fie $\sphericalangle DAF = \sphericalangle EAD = \alpha$.

Avem:

$$FB = \frac{c \sin\left(\frac{A}{2} - \alpha\right)}{\sin AFB}, \quad FC = \frac{b \sin\left(\frac{A}{2} + \alpha\right)}{\sin AFB}$$

Rezultă:

$$\frac{FB}{FC} = \frac{c \sin\left(\frac{A}{2} - \alpha\right)}{b \sin\left(\frac{A}{2} + \alpha\right)}$$

Din triunghiurile ABE și AEC (1)

$$\frac{\sin\left(\frac{A}{2} + \alpha\right)}{\sin AED} = \frac{BE}{c} \quad \text{și} \quad \frac{\sin\left(\frac{A}{2} - \alpha\right)}{\sin AEC} = \frac{EC}{d}$$

Împărțind relațiile și ținînd seama că

$$EC = BE$$
$$\sphericalangle AED = \sphericalangle AEC$$

avem:

$$\frac{\sin\left(\frac{A}{2} - \alpha\right)}{\sin\left(\frac{A}{2} + \alpha\right)} = \frac{c}{b},$$

de unde înlocuind în (7) rezultă: $\frac{FB}{FC} = \frac{c^2}{b^2}$.

6. *Dacă împărțim laturile unui triunghi mergînd în același sens în același raport, atunci triunghiul format prin unirea celor trei puncte de diviziune de pe laturile triunghiului dat are același centru de greutate ca și triunghiul inițial* (v. G.M.F.-B nr. 7/1959, pag. 411, Reciproca teoremei lui Pappus).

Vom arăta în primul rînd cum se poate construi un astfel de triunghi.

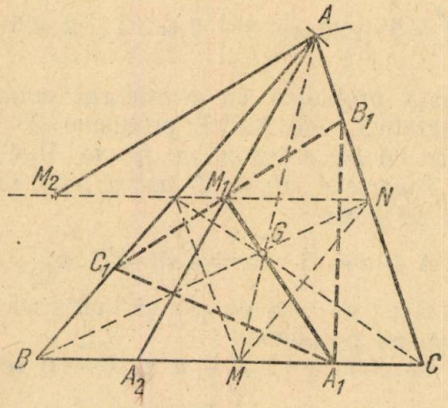
Fie deci ABC triunghiul inițial și $A_1B_1C_1$ triunghiul căutat; G, centrul de greutate comun; M, N, P mijloacele laturilor triunghiului ABC și M_1 mijlocul laturii B_1C_1. Avem:

$$\frac{GM_1}{GA_1} = \frac{GN}{GB},$$

deci dreapta M_1N care este paralelă cu BC va trece prin punctul P.

Poziția dreptei B_1C_1 se poate determina ușor dacă ținem seama de următoarea problemă de construcție:

Să se construiască o dreaptă Δ cu mijlocuul lui K, fiind dat un punct K' în interiorul unui unghi oarecare XOY.



Determinăm așa dar dreapta AM_2, conjugata armonică a dreptei AM_1 în raport cu unghiul A.

Dreapta căutată B_1C_1 va fi paralela dusă prin M_1 la AM_2.

Poziția punctului M_1 pe linia mijlocie PN se determină ducînd dreapta M_1G care taie pe BC în A_1 etc.

Acum, pentru demonstrarea reciprocei teoremei lui *Pappus*, vom ține seama că centrul de greutate este situat la $\frac{2}{3}$ din vîrf și $\frac{1}{3}$ de bază, adică împarte mediana într-un raport constant $k = \frac{2}{1}$.

Fie A_2 simetricul vîrfului A_1 în raport cu punctul M.

Triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$, avînd un centru de greutate comun rezultă că mediana A_1M_1 este împărțită în raportul $k = \frac{2}{1}$.

Însă AM este mediană și în triunghiul AA_1A_2, deci G este centrul de greutate și pentru acest triunghi.

Deci și AM, mediană comună a triunghiurilor ABC și AA_1A_2, este împărțită în raportul dat.

Patrulaterul $A_2B_1AC_1$ este paralelogram, deci:

$$\frac{BC_1}{AC_1} = \frac{BA_2}{CA_2} = \frac{AB_1}{CB_1}, \text{ însă } MA_2 = MA_1 \text{ și } \frac{BA_2}{CA_2} = \frac{CA_1}{BA_1}$$

și deci teorema este demonstrată.

Vodă G. Viorel, elev cl. X, ș. m. 12, București

CALEIDOSCOP MATEMATIC

1. *O problemă de aritmetică „recreativă"*. În numărul 11 din noiembrie 1959 al G.M.F. seria B s-a publicat la pag. 681 soluția problemei 3365 în care se pune în evidență proprietatea curioasă a numerelor 45 și 75 de a se descompune într-o sumă de 4 părți, astfel încît efectuînd cu aceste numere adunarea, scăderea, înmulțirea și împărțirea cu același număr, rezultatele să fie egale. De ex.

$$45 = 8 + 12 + 5 + 20 \text{ cu } 8 + 2 = 12 - 2 = 5 \cdot 2 = \frac{20}{2}.$$

Am propus această problemă cu următorul enunț mai general în 1921 în Gazeta Matematică, vol. XXVI, problema 2833:

Să se demonstreze că orice întreg de forma $M.N^2$ se poate descompune într-o sumă de 4 părți A, B, C, D astfel încît se găsesc totdeauna întregi n pentru care să avem:

$$A + n = B - n = C \cdot n = D : n. \tag{1}$$

Cred că interesează pe cititorii de azi să cunoască soluția dată acum aproape 40 de ani acestei probleme.

Din relațiile (1) se deduce că $A + n$ și $B - n$ se divid cu n, deci:

$$A = p \cdot n \text{ și } B = q \cdot n. \tag{2}$$

Pe de altă parte prima egalitate din (1) dă

$$B - A = 2n. \tag{3}$$

Din (2) și (3) se scoate: $q \cdot n - p \cdot n = 2 \cdot n$ sau $q = p + 2$ așa că (2) dă: $A = p \cdot n$ și $B = (p + 2) \cdot n$.

Ducînd aceste valori în (1) se găsește: $C = p + 1$ și $D = (p + 1) \cdot n^2$ Deci: $A + B + C + D = (p + 1)(n + 1)^2 = M \cdot N^2$.

Prin urmare $M \cdot N^2$ se descompune în 4 părți A, B, C, D care satisfac relațiile (1), cu condiția de a lua pe $n + 1$ egal cu un divizor pătrat perfect al lui $M \cdot N^2$.

Aplicație. Pentru $M \cdot N^2 = 1000 = 2^3 \cdot 5^3$ se găsesc soluțiile din tabelul

$N^2 = (n+1)^2$	n	p	A	B	C	D	MN^2
4	1	249	249	251	250	250	1000
25	4	39	156	164	40	640	1000
100	9	9	81	99	10	810	1000

Verificarea este ușor de făcut.

Gh. Buicliu

2. *Pătrat „magic" 1960.* Cu numerele consecutive de la 380 la 404 se poate forma un interesant pătrat magic, de 5 linii și 5 coloane, astfel ca suma numerelor de pe fiecare linie, coloană și diagonală să fie egală cu 1960.

Redăm mai jos acest pătrat:

400	382	383	391	404
394	396	385	398	387
389	403	392	381	395
397	386	399	388	390
380	393	401	402	384

El are următoarele 5 proprietăți exprimate din relațiile:

$$(400+x)^2+(382+x)^2+(383+x)^2+(391+x)^2+(404+x)^2= \quad \text{(I)}$$
(Linia 1).

$$=(380+x)^2+(393+x)^2+(401+x)^2+(402+x)^2+(384+x)^2;$$
(Linia 5-a)

$$(394+x)^2+(396+x)^2+(385+x)^2+(398+x)^2+(387+x)^2= \quad \text{(II)}$$
(Linia 2-a)

$$=(397+x)^2+(386+x)^2+(399+x)^2+(388+x)^2+(390+x)^2;$$
(Linia 4-a)

$$(400+x)^2+(394+x)^2+(389+x)^2+(397+x)^2+(380+x)^2= \quad \text{(III)}$$
(Coloana 1-a)

$$=(404+x)^2+(387+x)^2+(395+x)^2+(390+x)^2+(384+x)^2;$$
(Coloana 5-a)

$$(382+x)^2+(396+x)^2+(403+x)^2+(386+x)^2+(393+x)^2= \quad \text{(IV)}$$
(Coloana 2-a)

$$=(391+x)^2+(398+x)^2+(381+x)^2+(388+x)^2+(402+x)^2;$$
(Coloana 4-a)

$$(389+x)^2+(403+x)^2+(392+x)^2+(381+x)^2+(395+x)^2= \quad \text{(V)}$$
(Linia 3-a)

$$=(383+x)^2+(385+x)^2+(392+x)^2+(399+x)^2+(401+x)^2;$$
(Coloana 3-a)

oricare ar fi x.

Ilie N. Constantinescu

pus bazele electrodinamicii, baze atît de solide încît ele stau neclintite și astăzi.

Cine era acest Ampère, ignorat pînă atunci de lumea științifică deși era membru al Academiei? De unde o putere de creație atît de mare?

Strămoșii lui André-Marie Ampère erau obscuri. Originea lor era din Lyon. Documentele găsite arată că, prin secolul al XVII-lea trăia în acest oraș un cioplitor de piatră numit Claude Ampère; fiul său Jean-Joseph Ampère a fost meșter zidar; fiul acestuia, François Ampère, bunicul lui André-Marie, a fost fabricant de stofe de mătase; următorul, Jean-Jacques Ampère, tatăl lui André-Marie, l-a moștenit devenind negustor de mătăsuri. Așadar, strămoșii lui s-au ridicat încet, încet, din generație în generație, muncind greu, părînd că toate forțele s-au unit în secole pentru a produce această ființă excepțională care a fost André-Marie Ampère.

Jean-Jacques Ampère, tatăl lui André-Marie, s-a căsătorit, la 16 iulie 1771, cu Jeanne-Antoinette Sarcey de Suttières. Tinerii căsătoriți aveau o oarecare stare materială, bani, o casă la Lyon și Jean-Jacques Ampère își cumpărase înainte de căsătorie, la 30 iulie 1771, o mică proprietate în satul Poleymieux, situat în apropiere de Lyon. Poleymieux, leagănul copilăriei lui André-Marie Ampère, n-a fost timp de vre-o zece ani decît o casă de țară, unde familia lui Ampère își petrecea vacanțele, ei locuind în Lyon, oraș în care s-a născut André-Marie Ampère la 22 ianuarie 1775.

Tatăl său spirit foarte larg, foarte liberal și cult, hotărî să se ocupe singur atît de educație cît și de instruirea lui, luînd ca model pe Emile, creația marelui scriitor francez Jean Jacques Rousseau. Astfel micul André-Marie Ampère crescu în deplină libertate căpătînd lecții de la fapte și lucruri, mai mult decît dintr-o învățătură regulată. Care a fost viața lui în copilărie, Ampère și-o descrie singur într-o autobiografie pe care a lăsat-o, un fel de jurnal al vieții sale:

„Înainte de a putea citi, cea mai mare plăcere a micului Ampère*) era să asculte povestiri din cartea de științe ale naturii a lui Buffon. Cerea fără întrerupere să i se citească povestea animalelor sau a păsărilor, cărora le învățase de mult numele lor distrîndu-se privind figurile. Libertatea ce i se lăsase de a nu învăța decît atunci cînd avea chef să o facă, a făcut ca, deși știa să silabisească, el nu știa să citească; numai căutînd să înțeleagă singur viața păsărilor a învățat să citească în mod curent. Curînd găsi în biblioteca tatălui său cărți de istorie și de teatru, care îl pasionară tot așa de mult și pe care le citea cu aceeași aviditate ca și cartea lui Buffon de științe naturale".

El avea în acel timp numai 8 ani. Precocitatea sa se exercita de altfel în toate domeniile; se povestește că, fiind copil mic el aduna pietricele sau boabe de fasole pentru a face calcule matematice dificile și că, în timpul unei boli, le înlocuia cu bucățele de biscuit. La prima vedere aceasta ar părea copilărie; în realitate însă, Ampère era avid să învețe cît mai mult, iar memoria sa din copilărie era prodigioasă. Căzîndu-i în mînă Marea Enciclopedie a lui d'Alembert și Diderot, 20 de volume

*) André-Marie Ampère vorbește despre el însuși la persoana a treia.

în in-folio, își puse în minte nu să o răsfoiască, ci să-o studieze luînd cuvînt cu cuvînt în ordinea alfabetică.

În această perioadă de extremă activitate intelectuală, la vîrsta de treisprezece ani, îi căzu sub ochi primele elemente de algebră. Aceasta a fost o revoluție pentru o inteligență atît de profundă ca a sa. Singur, fără ajutorul nimănui, se puse să alcătuiască un tratat de secțiuni conice, cu materialele ce-i cădeau sub mînă și demonstrații pe care le credea noi. El trimite rezultatele cercetărilor sale Academiei din Lyon. Astfel, la 8 iulie 1788 procesul verbal al ședinței acestei Academii menționează „o scrisoare și un memoriu primit de la Domnul Ampère-fiul, în vîrstă de 13 ani, care roagă Academia să-și dea avizul său asupra acestui memoriu prin care el pretinde a fi rezolvat faimoasa problemă a cuadraturii cercului". În același proces-verbal se adaugă că, deși Academia a hotărît mai de mult să nu mai examineze lucrări privind această temă, totuși însărcinează pe D-l Roux să examineze această lucrare, *în particular*, ținînd seama de tinerețea autorului. În același an, același „tînăr autor" prezintă o altă lucrare „Asupra rectificării unui arc oarecare de cerc mai mic decît jumătatea de circomferință".

Un astfel de debut, cu toată îndrăzneala naivă a subiectelor tratate, putea da cele mai frumoase speranțe pentru viitor; însă, deîndată ce tînărul Ampère vru să înceapă studiul articolelor de matematici din Enciclopedie, fu repede oprit de utilizarea calculului infinetizimal despre care el nu avea nici o idee: în particular, utilizarea literei *d*, care este simbolul diferențialei, în aproape fiecare rînd, îi păru de-adreptul profund misterioasă; îl rugă atunci pe tatăl său să-l ducă la Lyon unde el avea ambiția să consulte tratatele lui Euler și Bernoulli. Un profesor de liceu Daburon, care avea oarecari cunoștințe de matematici, se oferi să-l ajute, însă tăie puțin elanul tînărului cercetător spunîndu-i că aceste tratate sînt redactate în latinește. Obstacolul nu i s-a părut prea mare lui Ampère, căci el se hotărăște să învețe limba latină. Acest lucru nu i-a fost greu, deoarece încă din copilărie fusese îndrumat de tatăl său, care cunoștea și vorbea foarte bine limba lui Virgiliu. Din această epocă datează cunoștințele profunde ale limbii latine care i-au procurat mai tîrziu numeroase bucurii. Tot în această epocă încolți în mintea lui Ampère ideia să creieze o limbă universală: se spune chiar că ar fi întocmit o gramatică a acestei limbi, un dicționar și că a scris chiar un poem.

Anii se scurgeau liniștiți la Poleymieux. Micul Ampère se dezvolta armonios în libertatea în care creștea și se instruia singur și ajutat de tatăl său.

Dar izbucni Marea Revoluție Franceză de la 1789. Familia Ampère, deși conservatoare, o primiră cu mult entuziasm. Ampère avea obiceiul să spună că două evenimente au avut o înrîurire decisivă asupra vieții lui: primul, citirea elogiului făcut lui Descartes de către Antoine-Léonard Thomas, lectură căreia îi datora primul său sentiment de entuziasm pentru științele fizice și filozofice și al doilea căderea Bastiliei, care i-a dezvoltat și exaltat sentimentul său liberal.

Revoluția franceză a fost condusă de numeroase curente și cei care azi erau conducătorii mîine erau dușmanii poporului; apoi veneau alții care exterminau pe predecesorii lor. Astfel girondinii au fost exterminați

de jacobini în timpul teroarei care a stăpînit Franța mai bine de un an, în care timp multe capete nevinovate au căzut sub cuțitul ghilotinii și în numele salvării publice.

În 1791 Jean-Jacques Ampère, tatăl, acceptase un post de judecător de pace la Lyon și a avut sarcina, în calitatea sa de magistrat, să mențină ordinea în aceste timpuri atît de dificile. Cînd au venit jacobinii la putere, Jean-Jacques Ampère a fost tradus în fața tribunalului revoluționar care, după o judecată sumară l-a condamnat la moarte.

La 23 noiembrie 1793, înainte de a păși treptele eșafodului, scrise soției sale o ultimă scrisoare, plină de duioșie și care conține următoarea frază celebră și profetică: „În ceea ce privește pe fiul meu, nu există nimic care n-aș putea să aștept de la el".

Ținînd seama de legătura sufletească ce exista între Ampère și tatăl său, tragica moarte a acestuia i-a fost ascunsă cît mai mult posibil. Dar aceasta nu putea ține la infinit și îngrozitoarea veste a fost ca o lovitură de trăsnet asupra lui. Mai bine de un an a trăit într-o stare de prostație, care atingea aproape imbecilitatea (după cum o spunea chiar el).

Perioadei de inițiere intelectuală, datorită veștii morții tatălui său, i-a urmat curînd o perioadă de activitate extremă. A fost perioada în care s-a cufundat cu aviditate în studiul limbii latine și începu să-i guste frumusețile; a făcut o pasiune pentru poeții latini, în special pentru Horațiu.

Ampère avea atunci douăzeci și unu de ani. Plimbîndu-se singur, cu poeziile sale de-a lungul pîrîului care trece pe lîngă Poleymieux întîlni într-o zi o fată cu părul de aur și ochi de azur, de care se îndrăgosti dintr-o dată: era duminică 10 aprilile 1796 și pe fată o chema Julie Carron; Ampère jură că aceasta este singura femee cu care se va căsători. Fata locuia la Saint-Germain-au Mont d'Or, la cîțiva kilometri de Poleymieux; aceasta n-a fost o piedică pentru Ampère și curînd relații de prietenie se stabiliră între cele două familii; erau însă alte piedici mai grave care stăteau în calea realizării visului tineresc și care trebuiau înlăturate: Ampère nu avea nici un fel de situație și modesta lui avere se risipise din cauza revoluției. Astfel se puse la un moment dat, foarte serios, chestiunea dacă Ampère nu trebuia să intre în comerț, fiind sfătuit mai ales de viitorul său cumnat Perisse, care era librar tipograf la Lyon. Însă gusturile tînărului îl duceau nemijlocit către știință și atunci, ce meserie se potrivea mai bine unui viitor savant decît aceea de profesor? Se hotărî atunci ca Ampère să se stabilească la Lyon și să dea lecții de matematică, de fizică și de chimie.

În acești ani activitatea intelectuală a lui Ampère a fost foarte intensă; dar tot atît de intensă era și viața sa sentimentală: piedicile care îi stăteau în calea căsătoriei sale cu Julie Caron au fost învinse și pînă la urmă Ampère și-a întemeiat căminul mult dorit.

La 12 august 1800 se născu Jean-Jacques Ampère; această naștere lăsă pe Julie slăbită și suferindă; o boală incurabilă, în fața căreia medicii se văzură neputincioși, se declară în curînd; a fost astfel sfîrșitul prea rapid al puținilor ani fericiți.

Constrîns de necesitățile vieții, Ampère a trebuit să ceară un post de profesor la Liceul de Stat din Bourg, un oraș situat la cca 60 km de Lyon; reputația tînărului matematician începuse să se stabilească și

grație intervențiilor făcute de prietenii săi, numirea veni destul de repede, în decembrie 1801. Sănătatea șubredă a Juliei nu-i permitea să se expună oboselilor unei schimbări de domiciliu; la 17 februarie 1802, Ampère se hotărî să plece singur pentru a-și lua în primire noul său post, cu un salariu anual de 2018 livre și 8 soli (vre-o 2000 lei).

De îndată ce sosi, Ampère își deschise cursul pe care îl inaugură cu un discurs în care a spus printre altele: „Ce glorie așteaptă pe cel care va pune ultima piatră la edificiul fizicii moderne; cîte foloase nu așteaptă omenirea de la ea!" Tînărul profesor trebuia să predea nu numai matematicile pentru care a fost numit, dar și fizica și chimia, astfel că se avîntă deîndată și cu toată ardoarea la instalarea unui laborator și la pregătirea experiențelor. Munca pe care o ducea rezultă din corespondența, aproape zilnică, care se schimba între cei doi soți nevoiți de greutățile vieții să se despartă și să trăiască departe unul de altul.

Într-una dintre aceste scrisori Julie îi scria din Lyon: „Nu poți avea totul, tu o știi, sărmanul meu prieten, tu care ești departe de ai tăi și care n-ai decît fizica și chimia ca să te consolezi. Tot mai fabrici uricioasele droguri? Sufli toată ziua în jăratic, în pile; ai mai puțin timp decît aveai aici, iar sărmana ta carte a rămas atîrnată în cui; dar tu iubești fizica ta de la Bourg, tu ai dreptate și eu nu te dezaprob"; apoi cîteva zile mai tîrziu: „Ia seama la chimia ta, ciorapii tăi albaștri sînt pierduți cu acel blestemat acid care arde totul"; și în altă scrisoare: „...lucrează cu răbdare și nu-ți omorî capul așa cum faci cu calculele tale".

La acea epocă Bonaparte, care era prim consul, înființă un premiu de 60 000 franci și care urma să se atribuie aceluia care prin experiențele și descoperirile sale va face ca electricitatea și galvanismul să facă un pas comparabil cu acel pe care l-au făcut aceste științe cu cercetările lui Franklin și Volta.

Ampère se înflăcărează la această perspectivă și scrie soției sale: „...acest premiu propus de Bonaparte voi încerca să-l cîștig cînd voi avea timp. Este tocmai subiectul pe care îl tratez în cartea despre fizică pe care am început să o tipăresc; însă trebuie perfecționată și confirmată teoria mea prin noi experiențe". De sigur, timpul nu i-a permis să se ocupe de această chestiune căci premiul a fost luat de altul. Abia 10 ani mai tîrziu Ampère revine la electricitate. Pînă atunci trebuia să trăiască și, pentru a-și mări veniturile sale modeste, își luă doi elevi particulari să-i mediteze la matematici pe unul și la chimie pe celălalt, fiecare plătindu-i cîte 18 franci pe lună.

În răgazul pe care i-l dădeau experiențele sale de chimie, cînd trebuia să facă și pe laborantul, se ocupa intens de matematici și la 27 aprilie 1802 îi scrie Juliei: „Sînt șapte ani de cînd mi-am propus o problemă pe care însă n-am putut s-o rezolv direct și căreia îi găsisem din întîmplare o soluție a cărei exactitate o știam, dar nu puteam să o demonstrez. Problema îmi revenea mereu în minte; am încercat douăzeci de soluții directe fără nici un succes. De cîteva zile gîndul acesta mă urmărea pretutindeni; în sfîrșit, nu știu cum, am găsit soluția împreună cu numeroase alte considerații curioase și noi asupra teoriei probabilităților". Este vorba de primul mare memoriu al lui Ampère, intitulat *Considerații asupra teoriei matematice a jocului* și publicat la Lyon în

1802. Concluziile acestei lucrări ar trebui să fie cunoscute de toți cei care își încearcă norocul la joc: „Mulțimea faptelor este suficientă pentru a convinge orice om imparțial că pasiunea jocului conduce pe cel care îl practică la o ruină sigură".

De la acest memoriu datează primul renume a lui Ampère printre matematicieni. Atunci cînd, în 1803, a fost vorba să se înființeze un liceu la Lyon, astronomul Delambre, însoțit de botanistul Villard, au fost trimiși în inspecție la Bourg pentru a examina pe candidați. Rezultatul a fost favorabil și la 4 aprilie 1803, cetățeanul Ampère este numit profesor al claselor 3 și 4 de matematici la liceul din Lyon.

Ziua cea mult așteptată de reunire a familiei sosise; dar fericirea a fost de scurtă durată: boala Juliei se agravase mult și forțele sale scădeau repede; ultimele pagini ale jurnalului lui Ampère sînt pline de îngrijorare crescîndă: cele cîteva linii care, la 13 iulie 1803, ziua morții Juliei, mîzgălesc hîrtia, sînt mai impresionante decît orice strigăt de desperare. Zdrobit de marea durere pe care a suferit-o, Ampère nu are decît un sigur gînd: să fugă cît mai repede și cît mai departe de acest oraș al Lyon-ului în care a dorit atît de mult să se întoarcă. Cele mai bizare gînduri îl cuprind: să se facă negustor de produse chimice sau să deschidă un pensionat.

Acest sbucium sufletesc a durat pînă în noiembrie 1804 cînd Ampère a fost numit repetitor — un fel de asistent — la Școala Politehnică din Paris și astfel a putut să părăsească Lyon-ul.

În tot acest răstimp de aproape un an și jumătate cît a durat sbucimul său în căutarea mijloacelor de evadare din Lyon-ul acesta care reprezenta visul și totodată cea mai mare decepție a vieții sale, el își împărțea viața între fiul său, mama sa, sora sa și lucrările sale.

La Paris, în 1807, Ampère caută să-și refacă viața căsătorindu-se din nou, dar de astădată căsătoria a fost nenorocită și Ampère se despărți curînd, imediat după nașterea fiicei sale Albine.

După această decepție și pînă în 1820, Ampère s-a consacrat cu totul matematicilor și chimiei, și chiar științelor naturale. Lucrările sale asupra ecuațiilor cu derivate parțiale, asupra structurii moleculare a gazelor, asupra unității compoziției ființelor organizate, ar fi fost suficiente să-l facă fără pereche. Reflexiile sale asupra diverselor probleme pe care le studia l-au făcut să aibe o concepție materialistă asupra lumii care era de multe ori în contradicție cu aceea a gînditorilor idealiști ai acelor timpuri. Concepțiile sale filozofice și argumentele puternice cu care le susținea l-au făcut să fie apreciat și pe acest tărîm.

Astăzi, cînd se merge pe o specializare împinsă la extrem, ne este greu să înțelegem aceste minți universale capabile să abordeze toate ramurile cunoștințelor umane, să le aprofundeze pe toate și să lase în toate urme adînci și nesterse. Din toate științele pe care le-a abordat Ampère pînă la acea dată, numai fizica a fost aceea care l-a preocupat cel mai puțin, fizica, aceea care trebuia să-l facă nemuritor.

Cariera sa rapidă în învățămînt a fost o consacrare a operelor sale. În 1808, la 33 ani, Ampère este numit inspector general al Universității *); în 1809, la 34 ani este numit profesor de Analiză Mate-

*) Inspector General Școlar.

matică și Mecanică la Școala Politehnică din Paris: la 39 ani, în 1814 Academia de Științe îl chemă în sînul ei, în secția de Geometrie, alături de Laplace și Legendre.

În 1819, la vîrsta de 44 ani Ampère este numit și profesor de filozofie la Facultatea de Litere a Universității din Paris.

În vara anului 1820, cînd memoriul lui Oersted sosea la Paris, era vacanță. Nimeni nu-l luă în seamă. Ampère era în acel moment în inspecție în nordul Franței; în luna august, era membru la Curtea cu Juri din departametul Senei. Este evident că în aceste condiții el nu avea timp să se ocupe de fizică și mai mult ca sigur că încă nu aflase de noua descoperire care avea să răscolească știința.

Experiențele lui Arago, noutatea problemei, au stîrnit imediat curiozitatea spiritul atît de viu al lui Ampère: întors acasă în modesta căsuță din strada Fossé-Saint-Victor, foarte aproape de Școala Politehnică, casă pe care și-a cumpărat-o cu doi mai înainte, împreună cu sora sa, vînzînd-o pe cea de la Poleymieux, s-a pus pe lucru. Chiar lunea următoare, la 18 septembrie, Ampère citește un memoriu „relativ la noile fenomene galvano-magnetice", apoi la ședințele următoare săptămînă de săptămînă, comunicările se succed, tari, convingătoare, imposibil de contrazis.

În căsuța sa, în care își constituise un mic laborator, pe o masă de experiențe pe care și-a construit-o singur, Ampère continuă cercetările sale, care urmau să-l imortalizeze, și ajunge prin deducțiile sale să dovedească identitatea dintre magnetism și electricitate.

Din acest moment, experiențele și teoriile se succed zi de zi. Căsuța lui modestă servea de laborator, unde cu aparate construite de Ampère din modestele sale resurse — căci în acea vreme nu era nici pomeneală de subvenții acordate de Stat pentru cercetări științifice — se verificau cele mai noi și mai îndrăznețe teorii, ce aveau să schimbe curînd fața științei și tehnicii.

În cîteva luni, Ampère a reușit să stabilească prin deducție — cum spunea el singur — și să verifice experimental — cu mijloace rudimentare — indentitatea dintre magnetism și electricitate. În cîteva luni au fost stabilite bazele teoriei electromagnetismului — a acțiunii produse de un curent electric asupra unui magnet — și a electrodinamicii — a acțiunii reciproce a curenților.

Ampère deveni curînd un om cunoscut de toți. Cei mai mari savanți din Franța și din străinătate urcau neîncrezători modesta scară a sărăcăcioasei locuințe a savantului și plecau convinși de exactitatea faptelor anunțate.

Cu toată celebritatea, necazurile nu-l părăsiseră. În 1824 a fost numit profesor de fizică generală și experimentală la Collège de France, cea mai înaltă instituție de învățămînt din Franța; a fost însă scos din postul de Inspector de Universitate, în care funcționase timp de 16 ani, Subvenții nu primea de nicăieri și el cheltuia fără nici o socoteală pentru experiențele sale. Și într-o zi, în 1824, sora lui nu i-a mai putut ascunde adevărul: aveau datorii. Astfel, grijile materiale și necazurile ce le însoțeau răpeau lui Ampère prețioase clipe de gîndire din care ar fi putut rezulta încă multe. Totuși, cu toate mizeriile vieții de toate zilele, munca de creație a lui Ampère era neîntreruptă. Această operă se realiza în timpul liber, de răgaz, pe care i le lăsau cele două cursuri pe

care le păstrase, cel de la Școala Politehnică din Paris și cel de la Collège de France. În ultimii ani ai vieții i se dădu din nou sarcina de Inspector General al Universităților și moartea îl prinse la 10 ianuarie 1836, în cancelaria unui liceu din Marsilia, unde era în inspecție. Avea 61 de ani.

Opera sa era însă completă, terminată, temelie nezdruncinată a unei științe noi, gata pentru a primi întreg edificiul științei electricității și aplicațiilor ei atît de multiple realizate de electrotehnică.

Cu o claritate desăvîrșită și fără nici o eroare el a trasat drumul progresului și, cincizeci de ani mai tîrziu, Maxwell putea să spună că opera lui Ampère, pe care el îl numea Newton-ul electricității, este una din cele mai mari realizări ale științei.

Grație teoriilor lui Ampère, legile care guvernează toate transformările energiei electrice în energie mecanică erau cunoscute din 1822. Zece ani mai tîrziu, Faraday găsi legile experimentale care fixează transformarea inversă. Apoi veniră Maxwell, Ohm, Joule, care prin lucrările lor, dădură posibilitatea punerii în practică a transmiterii energiei la distanță.

Ampère n-a fost numai un matematician, care — de altfel — considera matematicile numai ca un instrument și nu ca un scop: el n-a fost numai un fizician genial; Ampère a fost și un filozof. El a lăsat o foarte interesantă lucrare de filozofie a Științelor pe care a numit-o „Expunerea analitică a cunoștințelor omenești". Ideile pe care le expune, arată că spiritul său se ridică la cele mai înalte concepții și teoria sa asupra construcției materiei este foarte apropiată de cea admisă astăzi.

Ampère a fost poet, așa cum s-a arătat; un poet delicat și cu mult conținut și de la care au rămas epopee, cîntece, madrigale etc.

El n-a neglijat — din preocupările sale — nici problemele sociale. Idealul său social se rezumă în următoarea frază. „Trebuie căutat ca într-un anumit spațiu să poată trăi cel mai mare număr de oameni cu maximum de bunuri posibile".

Ampère, acest om care n-a învățat niciodată la nici un fel de școală, care n-a avut nici un alt profesor decît natura, care n-a avut nici un titlul universitar, dar care a ocupat totuși cele mai înalte funcții intelectuale — Profesor Universitar și Membru al Academiei— a fost un spirit eminamente enciclopedic. N-a fost știință pe care n-a abordat-o și în care să nu lase urme adînci de o originalitate profundă și de o admirabilă putere creatoare: Matematici, Chimie, Științe Naturale, în special Fizica — unde geniul său a izbucnit brusc — el le-a străbătut pe toate, în mijlocul celor mai aprige dureri sufletești, cu un elan, cu o pasiune și cu un entuziasm mereu tineresc și mereu reînoite; această universalitate a investigațiilor sale l-au condus în mod necesar la căutarea unei sinteze a lor, făcînd din el un filozof cu reputație crescîndă în timpul său.

Astăzi numele lui Ampère este pe buzele tuturor; mulți îl pronunță, dar nu știu nici măcar că a fost numele unui om; este cea mai mare prețuire ce se poate da unui om și operii sale: perpetuarea la nesfîrșit a numelui său.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 4355

Să se arate că dacă laturile triunghiului ortic al triunghiului ABC sînt în progresie aritmetică, atunci și tgA, tgB, tgC, sînt în progresie aritmetică, și reciproc.

Elena Nicolae, asistentă, Craiova

Soluție. Laturile triunghiului ortic sînt

$$a\cos A,\ b\cos B,\ c\cos C.$$

Fiind în progresie aritmetică, satisfac condiția:

$$\sin A\cos A+\sin C\cos C=2\sin B\cos B,$$

Această relație se mai scrie sub formele:

$$\sin A\cos A+\sin C\cos C=2\sin B\cos B,$$

adică $\sin 2A+\sin 2C=2\sin 2B$

Transformînd în produs:

$$\sin(A+C)\cdot\cos(A-C)=2\sin B\cos B,$$

adică $\cos(A-C)=2\cos B=-2\cos(A+C)$.

Desfăcînd parantezele, obținem

$$3\cos A\cos C=\sin A\sin C,$$

adică $\operatorname{tg}A\cdot\operatorname{tg}C=3$.

Folosind relația

$$\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C=\operatorname{tg}A\cdot\operatorname{tg}B\cdot\operatorname{tg}C,$$

rezultă

$$\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}C=2\operatorname{tg}B,$$

adică tangentele formează o progresie aritmetică.

Problema reciprocă. Dacă $\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}C=2\operatorname{tg}B$, atunci laturile triunghiului ortic sînt în progresie aritmetică.

În adevăr din condiția de mai sus, rezultă:

$$\frac{\sin(A+C)}{\cos A\cdot\cos C}=2\frac{\sin B}{\cos B}$$

deci $2\cos A\cos C=\cos B$, adică $\cos(A+C)+\cos(A-C)=\cos B$, sau

$$2\cos B=\cos(A-C)$$

Amplificînd cu $\sin B$ și transformînd în sumă, obținem

$$2\sin 2B=\sin 2A+\sin 2C,$$

adică $2\sin B\cos B=\sin A\cos A+\sin C\cos C$,
care dă $2b\cos B=a\cos A+c\cos C$,
adică laturile triunghiului ortic sînt în progresie aritmetică.

Problema 4356

Un circuit electric cuprinde: o inductanță de 2 H, o rezistență de 5 Ω și o capacitate de 823,28.10^{-2} μF. Dacă frecvența este 39,8 Hz și intensitatea efectivă a curentului este de 12 A, să se calculeze:

a) *tensiunea electromotoare (efectivă);*
b) *defazajul între tensiunea electromotoare și intensitate;*
c) *puterea efectivă în circuit.*

Sabin Vîlceanu, elev. Tg. Jiu

Soluție: Frecvența de 39,8 Hz corespunde cu: $\omega = 2\pi\nu = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 39{,}8 = 250$ rad/s. Avem relația:

$$I_{ef} = \frac{E_{ef}}{Z} = \frac{E_{ef}}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}, \text{ de unde:}$$

$$E_{ef} = I_{ef} \cdot \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}. \text{ Avem: } I_{ef} = 12A;\ R = 5\ \Omega;$$

$L = 2H$; $\omega = 250$ rad/s; $C = 823{,}28 \cdot 10^{-2}\ \mu F = 823{,}28 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-6}\ F = 823{,}28 \cdot 10^{-8}\ F$. Înlocuind avem:

$$E_{ef} = 12\sqrt{25 + \left(2 \cdot 250 - \frac{1}{823{,}28 \cdot 10^{-8} \cdot 250}\right)^2} = 12\sqrt{25 + 200} =$$

$$= 12 \cdot 15 = 180\ \text{V}.$$

Cu alte cuvinte, tensiunea electromotoare efectivă este: $E_{ef} = 180$ V.

b) Pentru a afla defazajul folosim formula:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}; \text{ sau înlocuind } \text{tg}\,\alpha = \frac{14{,}14}{5} = 2{,}828,$$

de unde $\alpha \simeq 70°30'$, adică defazajul este $\alpha = 70°30'$.

c) Puterea efectivă este dată de relația:
$P_{ef} = E_{ef} \cdot I_{ef} \cdot \cos\alpha$. Înlocuind avem:
$P_{ef} = 180 \cdot 12 \cdot 0{,}33 = 712{,}8$ M, adică puterea efectivă este:

$$P_{ef} = 712{,}8\ \text{W}.$$

Problema 4358

Doi electrozi sînt așezați în aer ionizat la o distanță d = 1 cm. Curentul de saturație între ei este $I = 3{,}18.10^{-7}$ mA. Suprafața fiecărui electrod este de 100 cm^2. Să se afle numărul de perechi de ioni care se produc într-o secundă în 1 cm^3 de aer.

* * *

Soluție dată de *Sabin Vilceanu*, elev Tg. Jiu.

Numărul perechilor de ioni este dat de formula $n = \frac{\sigma}{e \cdot d}$, unde σ — densitatea curentului de saturație, e — sarcina ionului, d — distanța dintre electrozi.

Avem $\sigma = \frac{I}{S}$, unde I este curentul de saturație și S — suprafața unui electrod. Deci:

$$n = \frac{\sigma}{e \cdot d} = \frac{\frac{I}{S}}{e \cdot d} = \frac{I}{S \cdot e \cdot d} = \frac{3{,}18 \cdot 10^{-7}\, mA}{100 \cdot 1{,}59 \cdot 10^{-19}\, A \cdot s \cdot 1} =$$

$$\frac{3{,}18 \cdot 10^{-10}\, A}{100\ cm^2 \cdot 1{,}59 \cdot 10^{-19}\, A \cdot s \cdot 1} = 2 \cdot 10^7 \text{ ioni într-un centimetru cub pe secundă.}$$

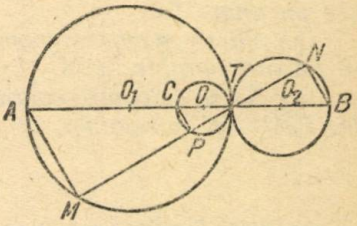
Problema 4359

Fie O_1 și O_2 centrele a două cercuri tangente, T punctul de tangență și o secantă variabilă ce trece prin T, care intersectează cercurile O_1 și O_2 respectiv în punctele M și N. Să se afle locul punctului P, mijlocul segmentului MN.

Mircea Pavelescu, profesor Tg. Jiu

Soluție: Se consideră întîi cazul cercurilor tangente exterioare — evident de raze diferite — deoarece altfel locul se reduce la punctul T.

Însemnăm cu A și B punctele de intersecție dintre cele două cercuri și dreapta centrelor O_1O_2 și cu C mijlocul segmentului AB, care este un punct al locului.



Unghiurile AMT și BNT fiind drepte, înseamnă că dreptele AM și BN sînt paralele, ca perpendiculare pe aceeași dreaptă MN.

Punctele P și C împărțind segmentele MN și AB în rapoarte egale $\left(\frac{MP}{PN} = \frac{AC}{CB} = 1\right)$, iar dreptele AM și BN fiind paralele, înseamnă că și dreapta CP este paralelă cu ele, adică este perpendiculară pe MN. Triunghiul TPC este astfel dreptunghic și deci punctul P se află pe cercul de diametru TC.

Orice punct al acestui cerc aparține locului, deoarece este mijlocul unui segment MTN, acela dus prin punctul luat pe cerc.

Observare: Textul de mai sus se reproduce întocmai în demonstrație pentru cazul cercurilor tangente interioare, cu aceeași concluzie. De remarcat că în primul caz locul geometric căutat este un cerc tangent exterior pentru cercul cel mic și tangent interior pentru cercul cel mare, iar în cazul al 2-lea locul este un cerc tangent interior ambelor cercuri date.

Problema 4360

Să se rezolve ecuația

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x+2} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{6x+1} = \frac{\pi}{4}$$

E. Pătrună, student Craiova

Soluție: Se notează: arc tg $\frac{1}{x} = a$, arc tg $\frac{1}{x+2} = b$ și arc tg $\frac{1}{6x+1} = c$.

Avem: tg $a = \frac{1}{x}$, tg $b = \frac{1}{x+2}$, tg $c = \frac{1}{6x+1}$.

Ecuația dată ia forma $a + b + c = \frac{\pi}{4}$, și deoarece tg $(a + b + c) = 1$, obținem ecuația:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{6x+1} - \frac{1}{x(x+2)(6x+1)} = 1 - \frac{1}{x(x+2)} - \frac{1}{x(6x+1)} - \frac{1}{(x+2)(6x+1)}.$$

Prin eliminarea numitorilor se obține: $3x^2 - 11x - 2 = 0$ care dă $x_1 = 2$ și $x_{2,3} = \frac{-3 \pm \sqrt{6}}{3}$

Problema 4361

Pe dreapta $x + y = 0$ alunecă un punct luminos P. Raza emisă de acest punct ce trece prin $A(1, 1)$ se reflectă pe dreapta $x + y - 4 = 0$ în punctul N. Raza reflectată taie dreapta $x + y - 2 = 0$ în M.

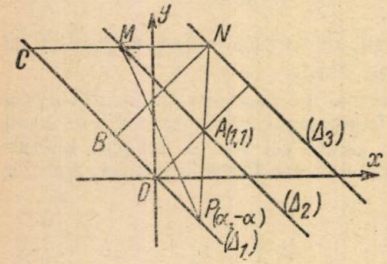
a) *Să se demonstreze că raza luminoasă emisă de P ce trece prin M are un punct fix.*

b) *Să se calculeze coordonatele punctului P, astfel ca triunghiul PMN să fie dreptunghic în M.*

c) *Să se calculeze coordonatele punctului P, astfel încît aria triunghiului PMN să fie minimă.*

V. Gh. Ghițulescu, elev Tîrgu Jiu

Soluție: Notăm: $(\triangle_1)$ dreapta $x + y = 0$; $(\triangle_2)$ dreapta $x + y - 2 = 0$; $(\triangle_3)$ dreapta $x + y - 4 = 0$. Fie $P(\alpha_1 - \alpha)$. Scriem ecuația dreptei AP:



$$\frac{x-\alpha}{1-\alpha} = \frac{y+\alpha}{1+\alpha}.$$

Calculăm coordonatele punctului N:

$$\frac{x-\alpha}{1-\alpha} = \frac{y+\alpha}{1+\alpha},\ x + y - 4 = 0,$$

$$N[(2-\alpha), (2+\alpha)]$$

Scriem ecuația normalei, dreapta perpendiculară pe $(\triangle_3)$ în N fiind $x - y + 2\alpha = 0$.

Calculăm coordonatele punctului B, intersecția normalei cu $(\triangle_1)$ fiind $x - y + 2\alpha = 0$, $x + y = 0$, $B(-\alpha, \alpha)$.

Pentru a scrie ecuația razei reflectate ne folosim de două puncte: $N[(2-\alpha), (2+\alpha)]$ și C intersecția acestei raze cu $(\triangle_1)$.

Pentru a calcula coordonatele punctului C, ne folosim de următoarea proprietate:

Laturile unui triunghi determină pe o dreaptă perpendiculară pe bisectoarea unghiului format de raza incidentă PA și raza reflectată NC, deci, $PB = -CB$; $PB = 2\alpha\sqrt{2}$; $CB = (\alpha - x)\sqrt{2}$, cînd $C(-x, x)$; $2\alpha\sqrt{2} = -(\alpha - x)\sqrt{2}$; $x = 3\alpha$; $C(-3\alpha, 3\alpha)$.

Scriem ecuația razei reflectate: $x(1-\alpha) - y(1+\alpha) + 6\alpha = 0$.

Calculăm coordonatele punctului M: $x(1-\alpha) - y(1+\alpha) + 6\alpha = 0$; $x + y - 2 = 0$.

$$M[(1-2\alpha), (1+2\alpha)].$$

Scriem ecuația razei luminoase PM: $x - y + \alpha(3x + 3y - 2) = 0$.

Calculăm coordonatele punctului fix: $x - y = 0$; $3x + 3y - 2 = 0$;

$$x = \frac{1}{3}; \quad y = \frac{1}{3}.$$

2° Este necesar ca raza MN să fie perpendiculară pe raza PM: avem:

$$\frac{1-\alpha}{1+\alpha} = -\frac{1-3\alpha}{1+3\alpha}.$$

Există două soluții: $P_1\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{-\sqrt{6}}{3}\right)$; $P_2\left(\frac{-\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

3° Este necesar ca cele trei puncte M, N, P să fie coliniare:

$$\frac{\alpha - 2 + \alpha}{1 - 2\alpha - 2 + \alpha} = \frac{-2\alpha - 2}{1 + 2\alpha - 2 - \alpha}; \quad 4\alpha = 0; \quad \alpha = 0; \quad P(0, 0).$$

Problema 4362

Să se rezolve ecuația:

$$16\ (\sin^6 x + \cos^6 x) = 10 + 3\sqrt{3}$$

V. Vlădeanu, student Craiova

Soluție: Ridicînd la cub identitatea: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, rezultă:

$$\cos^6 x + \sin^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x.$$

Ecuația devine $16 - 48\sin^2 x \cdot \cos^2 x = 10 + 3\sqrt{3}$; adică $4\sin^2 2x = 2 - \sqrt{3}$, care dă:

$$\sin 2x = \pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \pm\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \pm\sin 15°$$

Avem deci arcele $2x = \pm 15° + 360k$ și $2x = \pm 165° + 360k$, adică

$$x = \pm 70°30' + 180k \text{ și } x = \pm 82°30' + 180k.$$

Problema 4364

Să se afle limita expresiei

$$E = [\sin x\,(1 + 2\sin x)]^{\sec 3x}$$

pentru $x \to \frac{\pi}{6}$

E. Isac, profesor Tg. Jiu

Soluție: Expresia capătă pentru $x \to \frac{\pi}{6}$ forma fără sens 1^{∞}.

Pentru a-i afla limita, o mai putem scrie:

$$E = \left\{[1 + \sin x - \cos 2x]^{\frac{1}{\sin x - \cos 2x}}\right\}^{\frac{\sin x - \cos 2x}{\cos 3x}}$$

Notînd: $\alpha = \sin x - \cos 2x$ și $\beta = \dfrac{\sin x - \cos 2x}{\cos 3x}$

și trecînd la limită pentru $x \to \frac{\pi}{6}$, obținem

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} E = \left[\lim_{\alpha \to 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \beta} = e^{\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{\beta}{\alpha}}$$

$$\text{dar } \lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \left[\frac{\sin x - \cos 2x}{\cos 3x}\right] = \lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{\cos x\,(1 - 4\sin^2 x)} =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{(2\sin x - 1)(\sin x + 1)}{\cos x\,(1 - 4\sin^2 x)} =$$

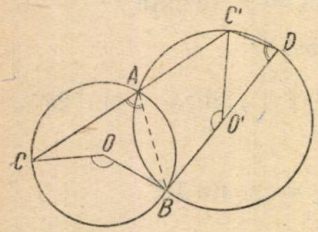
$$= -\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{1 + \sin x}{\cos x\,(1 + 2\sin x)} = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \text{deci } \lim E = e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Problema 4365

Două cercuri cu centrele O și O' se taie în A și B. O secantă dusă prin A taie cercurile în C și C'. Să se arate că unghiurile BOC și BO'C' sînt egale.

Elena Nicolae, asistentă, Craiova

Soluție: Se duce diametrul $BO'D$. Se observă că



$$\sphericalangle BOC = 2\,\sphericalangle BAC$$

și

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle BDC',$$

deci

$$\sphericalangle BO'C' = 2\,\sphericalangle BDC'$$

Rezultă

$$\sphericalangle BOC = \sphericalangle BO'C'.$$

Cazuri particulare. a) Cînd secanta CAC' trec prin centrul O, patrulaterul $OBO'C'$ este inscriptibil. b) Cînd secanta CAC' este perpendiculară pe coarda comună AB, dreptele BC și BC' sînt diametri.

Problema 4367

Un observator aflat într-un aerostat la înălțimea de 1470 m observă că pe sol este aruncat vertical un corp în sus. Corpul trece prin dreptul observatorului după 10 secunde de la lansare. Să se afle:

a) *viteza inițială a corpului;* b) *înălțimea maximă până la care ajunge corpul;* c) *intervalul de timp de la lansarea corpului și până la întoarcerea lui pe pământ. Se va neglija rezistența aerului.*

Cancer Anca, elevă Tg. Jiu

Soluție: a) Din $h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$ rezultă $v_0 = \frac{2h + gt^2}{2t}$.

Înlocuind cu datele problemei, avem:

$$v_0 = \frac{1470 + 490}{10} = 196 \frac{km}{s}; \quad v_0 = 196 \frac{km}{s}$$

b) Se știe că $h_{max} = \frac{v_0}{2g}$, iar de la punctul (a): $v_0 = \frac{h}{t} + \frac{gt^2}{2t} =$

$$= \frac{h}{t} + \frac{gt}{2}, \text{ deci } h_{max} = \frac{1}{2g}\left(\frac{h}{t} + \frac{gt}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{19{,}6}\left(\frac{1470}{10} + \frac{98}{2}\right)^2, \quad h_{max} = \frac{196^2}{19{,}6} = 1960 \text{ m};$$

c) Se știe că timpul urcării (t_u) și timpul coborîrii (t_c) sînt egale; intervalul de timp dintre lansarea și întoarcerea pe pământ a corpului (t) va fi:

$$t = t_u + t_c = \frac{v_0}{g} + \frac{v_0}{g} = \frac{2}{g}\left(\frac{h}{t} + \frac{gt}{2}\right);$$

$$t = \frac{2}{9{,}8}(147 + 49) = \frac{2 \cdot 196}{98} = 40 \text{ secunde}.$$

Problema 4368

Pe laturile unui unghi xoy, se iau două segmente $AA' = BB'$ oarecare, variabile ca mărime și poziție. Să se afle locul geometric al punctului de intersecție al cercurilor $OA'B$ și OAB', precum și al cercurilor OAB și OAB'.

C. Menciu, Craiova

Soluție: a) Fie P punctul de intersecție al cercurilor $OA'B$ și OAB'. Triunghiurile PAA' și PBB' sînt egale, căci au $AA' = BB'$.

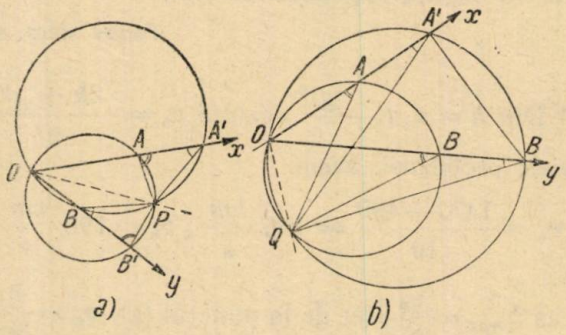
$$\sphericalangle PAA' = \sphericalangle PB'B \text{ și } \sphericalangle PA'A = \sphericalangle PBB'.$$

Rezultă $AP = PB'$, deci P se află pe bisectoarea unghiului xoy.

b) Fie Q punctul de intersecție al cercurilor OAB și $OA'B'$. Triunghiurile QAA' și QBB' sînt egale, căci $AA' = BB'$ $\measuredangle OAQ = \measuredangle OBQ$ și $\measuredangle OAQ = \measuredangle OB'Q$.

Rezultă $QA' = QB'$, deci $\sphericalangle QB'A' = \sphericalangle QA'B' = \measuredangle QOB'$.

Însă $\sphericalangle QB'A' = \sphericalangle Qox'$, ox' fiind prelungirea dincolo de vîrf a laturii ox. Deci $\sphericalangle QOB' = \sphericalangle Qox'$.



Punctul Q se află pe bisectoarea unghiului suplementar unghiului dat xoy.

Observație. Dacă pe laturile unghiului xoy se stabilesc sensurile ox și oy și ox' și oy' (ale unghiului opus la vîrf), segmentele $AA' = BB'$ se pot lua într-un sens sau în altul. Locul geometric al intersecției celor două cercuri este una din bisectoarele unghiului xoy.

Problema 4369

Să se rezolve ecuația:

$$(\sqrt{a}-2)(2\sqrt{a}+1)x^2-4(a+1)x+(\sqrt{a}+2)(2\sqrt{a}-1)=0$$

exprimîndu-se rădăcinile sub forma cea mai simplă.

Ion Antonie, student, Craiova

Soluție: Aplicînd formula de rezolvare se obțin rădăcinile:

$$x_1=\frac{2a+2+5\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-2)(2\sqrt{a}+1)} \text{ și } x_2=\frac{2a+2-5\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-2)(2\sqrt{a}+1)}$$

Se observă că $2a+5\sqrt{a}+2=(2\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}+2)$

și

$$2a-5\sqrt{a}+2=(2\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}-2).$$

Deci rădăcinile sînt:

$$x_1=\frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}-2} \text{ și } x_2=\frac{2\sqrt{a}-1}{2\sqrt{a}+1}$$

Problema 4370

Ce relație există între unghiurile α, β, γ *știind că*

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\gamma}=\frac{\sin 2\gamma}{\sin 2\beta}$$

Ivanenco Nicolae, elev, Craiova

Soluție: Transformînd în produs avem

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)\cos\beta}=\frac{\sin 2\gamma}{\sin 2\beta}$$

Simplificînd prin $\cos\gamma$ și $\cos\beta$ avem $\sin\beta\sin(\alpha+\beta)=\sin\gamma\sin(\alpha+\beta)$ transformînd în sumă avem:

$$\cos\alpha-\cos(\alpha+2\beta)=\cos\alpha-\cos(\alpha+2\gamma),\text{ sau}$$
$$\cos(\alpha+2\beta)=\cos(\alpha+2\gamma)$$

Deci $\alpha+2\beta=\alpha+2\gamma+360\,k$, sau $\beta-\gamma=180\,k$ și $\alpha+2\beta=-\alpha-2\gamma+360\,k$, sau $\alpha+\beta+\gamma=180\,k$.

Problema 4372

Să se afle paralelele la axa yy' pe care curba reprezentată de funcția

$$f(x)=l_n\frac{\sqrt[12]{x^4-x^2+1}}{\sqrt[6]{x^2+1}}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{3}}{2x^2-1}$$

le taie sub un unghi φ *astfel încît* $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

E. Isac, profesor Tg. Jiu

Soluție: Luînd derivata lui $f(x)$ în punctul x obținem $\operatorname{tg}\alpha$ unde $\alpha+\varphi=\frac{\pi}{2}$. Avem:

$$f'(x)=\frac{1}{12}\left(\frac{4x^3-2x}{x^4-x^2+1}-2\cdot\frac{2x}{x^2+1}\right)-\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{1+\frac{3}{(2x^2-1)^2}}\cdot$$
$$\cdot\frac{-4x\sqrt{3}}{(2x^2-1)^2}=\frac{1}{12}\cdot\frac{(4x^3-2x)(x^2+1)-4x(x^4-x^2+1)}{x^6+1}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot$$
$$\cdot\frac{-4\sqrt{3}x}{(2x^2-1)^2+3}=\frac{x}{6}\cdot\frac{3x^2-3}{x^6+1}+\frac{3x^2+3x}{6(x^6+1)}=\frac{x^3}{x^6+1}=\operatorname{tg}\alpha$$

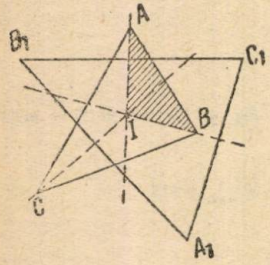
Dar $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{ctg}\varphi=\pm\frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-\cos^2\varphi}}$. Deci, $\frac{x^3}{x^6+1}=\pm\frac{1}{2}$ care ne dă pentru x valorile reale $x=\pm 1$.

Problema 4373

Să se construiască triunghiul cu bisectoarele perpendiculare pe laturile unui triunghi dat, cunoscîndu-i un vîrf și centrul cercului înscris.

Sorin Piscati, student, Craiova

Soluție: Să considerăm că problema rezolvată, avînd construcția ca în figura alăturată. Triunghiul cunoscut este $A_1B_1C_1$, iar cel necunoscut este ABC. Din datele problemei se cunoaște punctul I și vîrful A aparținînd triunghiului ABC.



Se pot calcula unghiurile triunghiului AIB.

Avem $\sphericalangle CIB = 180° - A_1 = 90° + \frac{A}{2}$.

Deci $\frac{A}{2} = 90° - A_1$, apoi $\sphericalangle AIB = 180° - C_1$

Deci se poate construi triunghiul AIB.

Construind apoi $\sphericalangle IAC = \sphericalangle IAB$, $\sphericalangle IBC = IBA$, se obține triunghiul ABC.

Problema 4375

Să se rezolve ecuația:

$$\sqrt[5]{171 - x} + \sqrt[5]{104 + x} = 5$$

Alex. Păunescu, Craiova

Soluție: Notăm $171 - x = u^5$ și $104 + x = v^5$.

Rezolvarea ecuației duce la rezolvarea sistemului:

$$u + v = 5$$

$$u^5 + v^5 = 275.$$

Ridicînd prima ecuație la puterea 5 și scăzînd ecuația a doua se obține: $(u+v)^5 - u^5 - v^5 = 5^5 - 275$, sau $5u^4v + 10u^3v^2 + 10u^2v^3 + 5uv^4 = 25 \cdot 114$; $uv(u^3 + 2u^2v + 2uv^2 + v^3) = 5 \cdot 114$; $uv(u+v)(u^2 + uv + v^2) = 5 \cdot 114$, sau $uv(u^2 + uv + v^2) = 114$. Mai putem scrie $uv[(u+v)^2 - uv] = 114$.

Înlocuind pe $u+v$, avem $uv(25 - uv) = 114$, sau $(uv)^2 - 25(uv) + 114 = 0$, de unde $uv = 6$ și $uv = 19$

Se formează sistemele:

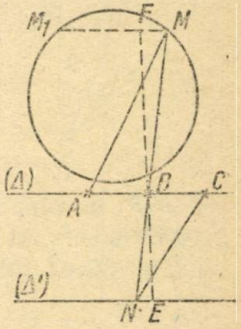
$$u + v = 5;\ uv = 6 \text{ și } u + v = 5;\ uv = 19.$$

Primul are rădăcini reale și al doilea rădăcini imaginare. Rădăcinile reale sînt $x_1 = 139$ și $x_2 = -72$ care verifică ecuația dată.

Problema 4385

Se dau două drepte paralele Δ, Δ' și trei puncte fixe A, B, C, pe dreapta Δ, apoi un cerc cu centrul O situat în partea opusă dreptei Δ' față de Δ. Se consideră un punct M pe cercul O, iar dreapta MB taie pe Δ' în N. Să se determine punctul M pe cerc, astfel ca dreptele AM și NC să fie paralele. Discuție.

Gh. D. Simionescu



Soluție: Trebuie să avem $\frac{MB}{NB} = \frac{AB}{BC} = \text{const.}$

Construcție. Ducem prin B o dreaptă oarecare care taie pe Δ' în N' și luăm un punct M' pe această dreaptă, astfel că $\frac{M'B}{BN'} = \frac{AB}{BC}$. Prin M' ducem o dreaptă oarecare paralelă la Δ sau Δ' care va tăia cercul în punctele M și M_1, punctele căutate.

Discuție. Fie BE perpendicular pe Δ' și F astfel ca $\frac{BF}{BE} = \frac{AB}{BC}$.

Putem avea două soluții, dacă F se află în interiorul cercului, o soluție dacă F se află pe cerc și BE trece prin centrul cercului; iar nici o soluție, dacă F se află în exteriorul cercului.

Problema 4390

Să se arate că expresia $E = 42^n\,[2^n(42^n - 1) - 1] + 1$ este divizibilă cu 3403 pentru orice n întreg.

V. Jipa, profesor Ghirdoveni

Soluție. Expresia se mai poate scrie:

$$E = (42 \cdot 2 \cdot 42)^n - (42 \cdot 2)^n - 42^n + 1 = (42 \cdot 2)^n (42^n - 1) - (42^n - 1) =$$

$$= (42^n - 1)(84^n - 1)$$

și cum $a^n - b^n = M(a - b)$, avem:

$$E = M(42 - 1)(84 - 1) = M(41 \cdot 83) = M\ 3403.$$

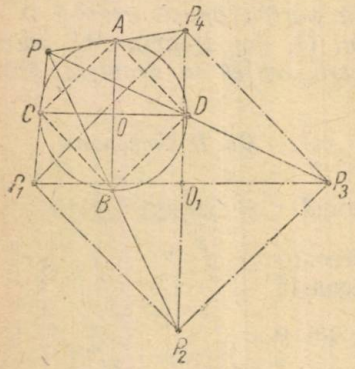
Problema 4391

a) *Să se arate că simetricele punctului P din planul cercului O față de extremitatea a doi diametri perpendiculari formează un patrat.*

b) *Să se afle locul geometric al centrului patratului astfel obținut cînd punctul P se mișcă pe circumferința cercului O.*

V. Jipa, profesor Ghirdoveni

Soluție. a) Dîndu-se cei doi diametri perpendiculari AB și CD s-a format patratul $ACBD$. În triunghiul PP_1P_4, AC este linie mijlocie, deci este paralelă cu P_1P_4. În triunghiul PP_2P_3, BD este linie mijlocie, deci paralelă cu P_2P_3. Dacă P_1P_4 este paralelă cu AC și P_2P_3 e paralelă cu BD, iar AC este paralelă cu BD rezultă că P_2P_3 este paralelă cu P_1P_4. De asemenea, avem: $P_1P_4 = 2\,AC$ și $P_2P_3 = 2\,BD$, dar, $BD = AC$, deci P_1P_4 este egal și paralel cu P_2P_3. La fel, se arată că și celelalte două laturi P_1P_2 și P_3P_4 sînt egale și paralele, $ABCD$ fiind un pătrat, rezult că și patrulaterul $P_1P_2P_3P_4$ este un pătrat.



b) În cazul cînd punctul P se află pe cercul O, centrul patrulaterului (patratului) $P_1P_2P_3P_4$ se află tot pe cerc, în punctul diametral opus lui P. Deci, locul geometric este tot cercul O. Cînd punctul P se mișcă pe cerc, centrul patratului se mișcă tot pe cerc.

Problema 4393

Se dă un triunghi oarecare ABC și o transversală ce taie laturile AB, BC, CA respectiv în M, N, P. Prin N se duce o paralelă la AB care taie pe AC în Q. Dreapta MQ taie pe BC în R. Să se arate că atunci cînd M rămîne fix, iar transversala este mobilă în jurul lui M, dreapta RP trece printr-un punct fix.

Tudor Gheorghe, elev Moreni

Soluție. Notăm cu S intersecția dreptelor AB și PR. Aplicînd teorema lui Menelaus triunghiului ABC tăiat de transversala MNP obținem:

$$\frac{MA}{MB}\cdot\frac{NB}{NB}\cdot\frac{PC}{PA}=1 \qquad (1)$$

iar în triunghiul ABC tăiat de transversala la MRQ, aceeași teoremă ne dă: $\frac{MA}{MB}\cdot\frac{RB}{RC}\cdot\frac{QC}{QA}=1$, și ținînd seamă că $\frac{QC}{QA}=\frac{NC}{NB}$, relația devine:

$$\frac{MA}{MB}\cdot\frac{RB}{RC}\cdot\frac{NC}{NB}=1 \qquad (2)$$

Înmulțind acum relațiile (1) și (2) obținem: $\frac{MA^2}{MB^2}\cdot\frac{PC}{PA}\cdot\frac{RB}{RC}=1$ sau $\frac{MA^2}{MB^2}=\frac{PA}{PC}\cdot\frac{RC}{RB}$.

Teorema lui Menelaus aplicată triunghiului ABC tăiat de transversala SRP ne dă: $\frac{RC}{RB}\cdot\frac{SB}{SA}\cdot\frac{PA}{PC}. = 1$ și ținînd seama de rezultatul anterior obținem:

$$\frac{MA^2}{MB^2}=\frac{SA}{SB} \text{ sau } \frac{SA-SB}{SB}=\frac{MA^2-MB^2}{MB^2}$$

$$SB=\frac{AB\cdot MB^2}{MA^2-MB^2}$$

deci, segmentul SB este constant deoarece și punctul M este fix.

Rezultă că dreapta RP trece prin punctul fix S, intersecția ei cu latura AB.

Problema 4394

Să se arate că între elementele unui triunghi oarecare avem relațiile:

$$a^2+b^2-2ab\cos(C+60^\circ)=b^2+c^2-2bc\cos(A+60^\circ)=$$
$$=c^2+a^2-2ac\cos(B+60^\circ)$$

notațiile fiind cele obișnuite.

Cezar Coșniță

Soluție. Pornim de la relația cunoscută:

$$S=\frac{ab\sin C}{2}=\frac{bc\sin A}{2}=\frac{ac\sin B}{2}$$

de unde, prin înmulțire cu $\sqrt{3}$ obținem:

$$\sqrt{3}ab\sin C=\sqrt{3}bc\sin A=\sqrt{3}ac\sin B$$

Adăugînd la fiecare membru $a^2+b^2+c^2$, obținem:

$$a^2+b^2+c^2+\sqrt{3}ab\sin C=a^2+b^2+c^2+\sqrt{3}\ bc\sin A=$$
$$=a^2+b^2+c^2\sqrt{3}\cdot c\sin B$$

și ținînd seama de teorema cosinusului:

$$a^2+b^2+a^2+b^2-2ab\cos C+\sqrt{3}ab\sin C=b^2+c^2+b^2+c^2-$$
$$-2bc\cos A+\sqrt{3}bc\sin A=c^2+a^2+c^2+a^2-2ac\cos B+$$
$$+\sqrt{3}ac\sin B,$$

sau:

$$2(a^2+b^2)-2ab(\cos C-\sqrt{3}\sin C)=2(b^2+c^2)-2bc(\cos A-$$
$$-\sqrt{3}\sin A)=2(c^2+a^2)-2ac(\cos B-\sqrt{3}\sin B)$$

și împărțind cu 2, rezultă:

$$a^2+b^2-2ab\left(\frac{1}{2}\cos C-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin C\right)=b^2+c^2-2bc\left(\frac{1}{2}\cos A-\right.$$

$$\left.-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A\right)=c^2+a^2-2ac\left(\frac{1}{2}\cos B-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin B\right)$$

adică:

$$a^2+b^2-2ab\cos(C+60^\circ)=b^2+c^2-2bc\cos(A+60^\circ)=$$

$$=c^2+a^2-2ac\cos(B+60^\circ).$$

Interpretarea geometrică a problemei este următoarea:

Dacă pe laturile AB, BC, CA ale unui triunghi oarecare ABC construim în exterior triunghiurile echilaterale ABC', BCA', CAB' atunci segmentele AA', BB' și CC' sînt egale.

Acest lucru rezultă imediat din egalitățile triunghiurilor $BAB' = CAC'$ și $ABA' = CBC'$.

Se poate demonstra de asemenea că AA', BB' și CC' sînt concurente.

Relația cerută se poate demonstra astfel și invers, plecînd de la proprietatea geometrică a figurii de mai sus.

— Soluții bune am primit de la *M. Stan*, elev București.

CHESTIUNI DE EXAMEN

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ 1931, — Etapa finală, București

Clasa a VIII-a școli medii

4823. Dacă primele două cifre de la stînga ale unui număr de 4 cifre sînt respectiv, dublul celorlalte două cifre, acel număr este divizibil cu 3 și cu 67. Care sînt divizorii unui număr de 6 cifre cu proprietatea de mai sus? (Primele 3 cifre să fie respectiv, dublul celorlalte).

Corneliu Georgescu, Craiova

4824. a) Să se rezolve sistemul:

$$xy+yz+zx=0$$

$$\frac{b+c}{x}+\frac{c+a}{y}+\frac{a+b}{z}=0$$

$$\frac{bc}{x}+\frac{ca}{y}+\frac{ab}{z}=1$$

b) Dacă a,b,c sînt laturile unui triunghi, să se arate că:

$$x+y+z<ab+bc+ca.$$

Lucia Țene. București

4825. Un triunghi ABC este înscris într-un cerc. Fie P mijlocul arcului AB. Se duce coarda PQ perpendiculară pe bisectoarea unghiului A, precum și coarda PR paralelă cu această bisectoare. Se cere:

a) Să se arate că BQ este bisectoare a triunghiului ABC, b) Să se arate că triunghiul format de dreptele AB, AC și PR este isoscel, c) Să se afle locurile geometrice ale mijloacelor coardelor PQ și PR cînd A descrie cercul, vîrfurile B și C rămînînd fixe.

C. Menciu, Craiova

Clasa a IX-a școli medii

4826. Se dă un trapez dreptunghic $ABCD$ ($\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90°$) cu baza mare $AB = a$, baza mică $CD = b$ și $AD = h$. Prin vîrful A se duce o dreaptă variabilă (L) care nu traversează trapezul și se notează cu B',C',D' respectiv proiecțiile punctelor B, C, D pe (L). Fie $BB' = x$, $CC' = y$, $DD' = z$.

a) Să se arate că $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{h^2} = 1$. Să se exprime apoi y în funcție de x și z. b) Să se construiască dreapta (L) astfel ca y să fie media aritmetică a lui x și z. Discuție. c) Fie E simetricul lui D față de C. Să se arate că pentru poziția dreptei (L) construită la (b), BB' este egal cu distanța de la vîrful A la BE.

G. D. Simionescu

4827. a) Să se arate că parabolele $y = -x^2 + 2(m+1)x + 3m - 1$, unde m este un parametru, trec prin punctul fix $A\left(-\frac{3}{2}, -\frac{25}{4}\right)$, oricare ar fi m. Să se arate că există o parabolă din cele de mai sus al cărei vîrf este în A și să se scrie ecuația ei.

b) Să se arate că vîrfurile tuturor parabolelor date se află pe parabola $y = x^2 + 3x - 4$.

C. Ionescu-Țiu

4828. Se definește un șir numeric astfel:

$$u_0 = a\,; \quad u_n = bu_{n-1} + c$$

a) Să se determine coeficienții b și c pentru ca acest șir să fie o progresie aritmetică și să se calculeze în acest caz

$$s_1 = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

b) Considerînd șirul numeric dat inițial, să se determine un număr d în funcție de b și c, așa ca șirul cu termen general $(u_n - d)$ să fie o progresie geometrică. În acest caz, să se exprime u_n în funcție de n și de coeficienții a,b,c și să se calculeze suma

$$s_2 = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

T. Roman

Clasa a X-a școli medii

4829. Se secționează tetraedrul regulat $ABCD$ de muchie a, cu un plan paralel cu muchiile opuse AB și CD. Fie k raportul în care acest plan împarte muchia AD și M,N,P,Q punctele de intersecție cu muchiile AD, BD, BC, AC respectiv. Notăm de asemenea cu E și F mijloacele muchiilor AD și CD. Se cere:

a) Să se arate că patrulaterul MNPQ este dreptunghi; *b)* dreptele MP, NQ, EF sînt concurente; *c)* să se determine raportul k astfel ca solidele obținute prin secționare să fie echivalente; *d)* să se arate că pentru valoarea lui k găsită la punctul (*c*) aria dreptunghiului $MNPQ$ este maximă.

Gh. Popescu, Lugoj

4830. Dacă ecuația de gradul al treilea $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ are numai rădăcini reale și pozitive, să se demonstreze că există relația

$$\frac{a_1a_2}{a_0a_3} \geqslant 9$$

O. Sacter

4831. Pe o foaie de tablă se trasează două cercuri concentrice avînd razele r și R, $(r<R)$. În cercul mic se înscrie patratul $ABCD$, iar pe cercul mare se marchează cu punctele K,L,M,N,P,Q,R,S vîrfurile unui octogon neregulat avînd $KL = MN = PQ = RS$ și totodată, $KL \parallel AB$; $MN \parallel BC$; $PQ \parallel CD$ și $RS \parallel DA$. Croim tabla după conturul $AKLBMNCPQDRSA$ și apoi îndoim fețele $AKLB$, $BMNC$, $CPQD$, $DRSA$ respectiv după laturile AB, BC, CD, DA. Prin alipirea muchiilor $(AS; AK)$, $(BL; BM)$, $(CN; CP)$, $(DQ; DR)$ se formează o piesă avînd forma unui trunchi de piramidă. a) Se notează unghiul $SAK = u$. Să se arate că pentru orice valoare a lui r și a lui R, u nu depinde decît de unghiul diedru a pe care trebuie să-l formeze fețele laterale ale trunchiului cu baza mare.

Să se demonstreze că între unghiurile u și a există relația:

$$\operatorname{tg}\frac{u}{2} \cdot \operatorname{tg}^2\frac{a}{2} = 1$$

b) Să se determine tg u, astfel ca unghiul a să fie de 60°.

O. Sacter

Clasa a XI-a școli medii

4832. Fie A, A' vîrfurile hiperbolei $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = O$ și M un punct variabil pe curbă. *a)* Dreptele MA, MA' taie paralela dusă la Oy' prin A' și A respectiv în P și Q, iar dreapta PQ taie axa AA' a hiperbolei în R. Să se demonstreze că dreapta MR este tangentă în M la hiperbolă. b) Ce condiție trebuie să îndeplinească hiperbola dată pentru ca ortocentrul H al triunghiului MAA' să se afle pe ea? c) Să se afle locul geometric al ortocentrului H cînd M descrie hiperbola dată și să se regăsească condiția de la punctul (b). d) Să se afle locul geometric al intersecției N a cercului MAA' cu paralela la Oy dusă prin M. Să se explice geometric rezultatul găsit.

Gh. D. Simionescu

4833. a) Un vas de tablă are volumul $V = 30\pi dm^3$ și este alcătuit din doi cilindri cu același ax, cel de rază mai mică așezat deasupra celuilalt. Cei doi cilindri au fiecare înălțimea de 6 dm, iar vasul (din cilindrul superior) este fără capac. a) Se cer dimensiunile vasului, știind că a fost construit pentru răcirea cît mai rapidă a lichidului conținut, cu aria totală maximă. b) Notînd cu x raza cilindrului inferior, să se arate că aria vasului este dată de o constantă înmulțită cu funcția

$$f(x) = 3x^2 + 12x - 5 + 12\sqrt{5 - x^2}.$$

c) Să se reprezinte grafic această funcție pe domeniu ei maxim de definiție și să se specifice care porțiune corespunde cazului cînd x are semnificația de la (b).

Gh. D. Simionescu

4834. a și b fiind două numere reale nenule se definește între ele operația $*$ astfel:

$$a * b = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$$

a) Să se arate că operația este comutativă: $a * b = b * a$.
b) Să se arate că în general operația nu este asociativă

$$(a * b) * c \neq a * (b * c)$$

c) Ce condiții trebuie să îndeplinească numerele a,b,c pentru ca operația să fie asociativă?

T. Roman

PROBLEME PROPUSE *)

4835. Să se stabilească mulțimea soluțiilor care au sens pentru ecuația trigonometrică

$$\operatorname{tg} 5x \operatorname{tg} 8x = 1.$$

O. Sacter

4836. Fie $ABCD$ un patrulater oarecare și E un punct pe latura CD. Prin E se duc două drepte oarecare; prima dreaptă întîlnește pe BD în G și pe BC în M, iar a doua dreaptă întîlnește pe AC în H și pe AD în N. Să se demonstreze că MH și NG sînt concurente pe latura AB.

C. Ionescu-Țiu

---

*) VIII (4841, 4850, 4854); IX (4839, 4840, 4842, 4843, 4848, 4852, 4856, 4865, 4866); X (4835, 4837, 4846, 4847, 4855, 4857, 4858, 4860, 4862, 4864, 4867); XI (4836, 4838, 4844, 4845, 4849, 4851, 4859, 4861, 4863).

4837. Să se rezolve în numere întregi ecuația

$$a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2zt$$

unde a și b sînt numere întregi.

C. Ionescu-Țiu

4838. În ziua de 21 iunie (ziua solstițiului de vară), în momentul culminației superioare a Soarelui, un băț lung de 2,320 m înfipt vertical în pămînt are o umbră de 1,000 m.

a) Să se determine latitudinea locului de observație; b) La ce latitudine nordică trebuie să se efectueze această observație pentru ca lungimea umbrei să fie egală cu lungimea bățului?

Ioan Tudoran, Cluj

4839. În patrulaterul inscriptibil $ABCD$ notăm cu I intersecția diagonalelor și cu E, F intersecția laturilor opuse AB, CD, respectiv AB, BC. Să se arate că cercurile Miquel ale patrulaterelor $ABCD$, $EBIC$, $FDIC$ trec prin centrul O al cercului circumscris patrulaterului $ABCD$ și că aceste cercuri au centrele colineare.

(Cele patru cercuri circumscrise celor patru triunghiuri formate de laturile unui patrulater complet se zic cercurile lui Miquel. Vezi C.d.p. de geometrie de G. Țițeica, nr. 218—221).

Anghel Raicu, student I.P.G.G. București

4840. Se dau trinoamele:

$$T_1(x) = ax^2 + bx + c$$

$$T_2(x) = bx^2 + cx + a$$

$$T_3(x) = cx^2 + ax + b$$

și fie $E(x) = \dfrac{T_1(x)}{T_2(x)}$. Dacă x_{31} și x_{32} sînt rădăcinile ecuației $T_3(x) = 0$ să se arate că sînt verificate următoarele relații:

$$E(x_{31}) + E(x_{32}) = \frac{a}{b} \text{ și } E(x_{31}) \cdot E(x_{32}) = \frac{c}{b}.$$

Anton Vargă

4841. Pe un plan orizontal se află un corp de masă $m_1 = 50$ kg, legat de o sfoară, care trece peste un scripete și are suspendat la celălalt capăt un corp de masă $m_2 = 30$ kg. Corpul m_2 este suspendat printr-un mijloc oarecare la înălțimea $h = 11{,}025$ m deasupra solului. La un moment dat corpul m_2 este lăsat liber. Să se determine: a) Ce mișcare va avea sistemul celor două corpuri, dacă se neglijează toate frecările afară de frecarea dintre plan și corpul m_1? Coeficientul de frecare de alunecare este $\mu = 0{,}2$; să se justifice răspunsul. b) În cît timp corpul m_2 atinge solul? Se vor da mai multe soluții. c) Ce valoare trebuie să aibă m_2 pentru ca sistemul să se miște rectiliniu și uniform?

(Clasa a VIII-a, Olimpiada 1961, București) I. Ialiu

4842. Un tren de 750 t urcă uniform o pantă de 0,007, coeficientul de frecare fiind $\mu = 0{,}003$. Locomotiva are randamentul de 10% și dezvoltă pe tot traseul pantei o putere medie de 1000 CP, consumînd 0,15 t de cărbuni cu puterea calorică de 5000 kcal/kg. Să se determine:

1. Cantitatea de căldură utilă transformată în lucru mecanic pe tot traseul pantei;
2. Viteza medie a trenului pe traseul pantei în km/h;
3. Lungimea pantei respective.

(Cl. IX-a, Olimpiada 1961, București) P. Țeahă

4843. La o bicicletă Csepel distanțele centrelor roților mari la axul ghidonului sînt respectiv de 100 cm și 8 cm și axul ghidonului face cu verticala un unghi de 25°.

a) Să se calculeze unghiul cu care trebuie rotit ghidonul pentru ca bicicleta să se deplaseze după o circumferință, care pentru roata din față are raza de 5 m și să se găsească diferența drumurilor parcurse de cele două roți ale bicicletei pentru o rotație completă.

b) Să se arate că oricare ar fi cercul după care se deplasează roata din față, aria coroanei circulare cuprinsă între cercurile descrise de cele două roți este constantă.

I. I. Tomescu, student București

4844. Să se determine numerele complexe z, a căror imagini sînt puncte care au coordonate raționale și care satisfac relația:

$$\frac{z^2 + \bar{z}^2}{z\bar{z} - 2} = 5,$$

unde s-a notat cu $\bar{z}$, conjugatul lui z.

O. Sacter

4845. Să se reprezinte grafic funcțiile:

$$y = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} \text{ și } y = \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}\,;\ (y-1)^2 = (x-1).$$

Să se scrie ecuațiile tangentelor la aceste curbe, duse în punctele de abscise $x = 1$ și $x = 2$.

C. Ionescu-Țiu

4846. Se dă trunchiul de piramidă patrulateră regulată avînd ca baze patratele $ABCD$ și $A'B'C'D'$ iar M un punct oarecare în spațiu. Notăm: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DA}{D'A'} = k$, să se demonstreze că:

$$MA^2 + k \cdot MC'^2 = MB^2 + k \cdot MD'^2 = MC^2 + k \cdot MA'^2 = MD^2 + k \cdot MB'^2$$

D. M. Bătinețu, student București

4847. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ în care O este centrul bazei $ABCD$ iar E; F; G; H mijloacele laturilor $A'B'$; $B'C'$; $C'D'$; $D'A'$.

a. Să se arate că volumele $OEFGH$ și $ABDA'$ sînt echivalente.

b. Să se afle unghiul pe care-l face dreapta AA' cu planul $BA'D$.

Georgescu Stelian, elev București

4848. Într-un triunghi ABC cevienele AA_1, BB_1,CC_1 sînt concurente. Din B_1 și C_1 se duc paralele la AA_1, care întîlnesc latura BC respectiv în B_2 și C_2. Să se arate că B_1C_2 și B_2C_1 concură pe AA_1.

* * *

4849. Dintr-un punct M de pe diagonala AC a unui patrulater oarecare se duc MP, MQ, MR, MS paralele respectiv cu AB, CD, BC, AD; punctele P, Q, R, S fiind respectiv pe BC, AD, AB, CD. Punctul M deplasîndu-se pe diagonala AC, să se afle: a) locul geometric al intersecției dreptelor PR și QS; b) locul geometric al intersecției dreptelor RQ și PS.

C. Ionescu-Țiu

4850. Să se determine cel mai mic număr de forma $N = \overline{aa \ldots a}$ cu un număr par de cifre, divizibil cu 71.

V. V. Pravăț, student Iași

4851. Fie $k > 7$. Să se demonstreze că ecuația $5x + 3y = k$ admite o soluție formată de numere întregi nenegative. Să se afle numărul întreg superior lui k pentru care ecuația să admită ca soluție numere întregi mai mari ca zero.

S. Domokos (674, Matematikai Lapok, Budapesta)

4852. Pe ipotenuza AC a triunghiului dreptunghic isoscel ABC se construiește în afară, un patrat $ACDE$. Se duc diagonalele AD, CE, BE, BD și perpendiculara BF din B pe DE. Să se demonstreze că pentagonul $ABCDE$ este astfel împărțit în 10 părți de arii egale.

(677, Matematikai Lapok, Budapesta)

4853. Într-un plan se dă un cerc și o dreaptă. Se cere locul centrelor cercurilor tangente la dreaptă și la cercul dat.

(1084, Matematikai Lapok, Budapesta)

4854. Un avion cu reacție de 5 tone zboară cu viteza de 720 km/h. a) Ce forță centrifugă crează avionul asupra straturilor de aer, cînd face un viraj pe un arc de cerc cu raza de 4 km? b) Cu ce forță apasă pilotul pe scaun în timpul virajului, dacă el cîntărește 75 kg? Se va considera accelerația gravității egală cu 10 m/s^2.

N. Hangea

4855. Două sfere identice, nedeformabile sînt scoase din poziția de echilibru, astfel încît firele de suspensie să fie simetrice față de poziția de echilibru și să formeze un unghi de 90°. a) Care este energia potențială a sferei în acest caz, dacă lungimea firului este egală cu a, știind că masa sferei este m. b) Se dă drumul celor două sfere în același timp. Care este energia cinetică în punctul în care se ciocnesc și care ar fi temperatura sferelor, dacă toată energia s-ar transforma în căldură. (Căldura specifică a sferelor fiind c și temperatura inițială a sferelor fiind 0°C). c) Sferele sînt menținute în poziția de la punctul (a) de cîte un scripete. La ce depăr-

tare de locul unde sînt suspendate sferele trebuie așezat scripetele, astfel ca forța cu care acționăm asupra sferei să fie egală cu $\frac{\sqrt{2}}{2}$ din greutatea sferei ? d) Dacă sferele se încarcă cu sarcini egale și de același semn, cît de mare trebuie să fie sarcina fiecăreia sfere, astfel încît prin respingere, sferele să rămînă în poziția în care firele de suspensie să fie perpendiculare.

Farcaș Irina, elevă Oradea

4856. Considerăm triunghil ABC. Fie T un punct situat pe baza BC. Dreapta AT retaie cercul circumscris în A'. Să se arate că :

$$\frac{TB}{TC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{A'B}{A'C}$$

N. Mihăileanu

4857. Să se arate pentru care valori întregi ale lui n expresia

$$E = 1 + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$$

este divizibilă cu 7.

C. Menciu, Craiova

4858. Considerăm o piramidă exagonală regulată și notăm cu α unghiul diedru a două fețe opuse, cu β unghiul diedru a două fețe alăturate și cu γ unghiul de bază a unei fețe laterale. Să se demonstreze relația

$$\frac{1 - \cos \alpha}{1 - \cos \beta} = 4 \cos^2 \gamma$$

Rădulescu Mircea, elev Constanța

4859. Considerăm o parabolă. Dacă un punct M este mobil pe perpendiculara pe axă în focarul F să se arate că polara lui M face cu directoarea unghiul u dat de

$$\operatorname{tg} u = \frac{d}{p}$$

unde p este parametrul, iar d distanța lui M la axă.

N. Mihăileanu

4860. Să se arate că între elementele unui triunghi oarecare există relația

$$\frac{a^2 \cos^2 A + b^2 \cos^2 B + c^2 \cos^2 C}{\operatorname{cotg} 2A + \operatorname{cotg} 2B + \operatorname{cotg} 2C} + 8 S \cos A \cos B \cos C = 0.$$

Cezar Ivănescu, profesor Tîrgoviște

4861. Un pendul simplu din fier are masa de 1 kg și lungimea de 1 m. La fiecare trecere prin poziția de echilibru străbate cu extremitatea sa inferioară printr-o picătură de Hg de 5 g, izolată termic de exterior. Aplitudinea unghiulară inițială este de 4°, iar după un număr oarecare de oscilații ea devine 1°.

Se cere: a) cu ce forță trebuie să acționeze un magnet așezat sub pendul pentru ca el să bată secunda? b) care este viteza maximă a pendulului la început? c) Cu cîte grade se încălzește Hg pînă ce amplitudinea unghiulară se reduce la 1°?

Se dă: $g = 9{,}8$ m/s^2; $c = 0{,}033 \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot \text{grad}}$; $\pi = 3{,}14$; se ține seama că amplitudinea unghiulară este foarte mică în raport cu lungimea pendulului.

(Clasa XI, Olimpiada 1961, București) N. Stănescu

4862. Două oglinzi concave avînd distanțele focale $f_1 = 6$ cm și $f_2 = 9$ cm, sînt așezate față în față la distanța de 0,5 m, astfel încît axele lor coincid. Să se calculeze unde trebuie așezat, pe axa comună a oglinzilor, un punct luminos, pentru ca imaginile reale produse prin reflexie, să se facă în același punct al axei.

(Anul I, școli maiștri, Olimpiada 1961, București)

4863. Un punct oscilează în condiții normale, cu perioada completă de o secundă. Montat la scaunul unui vîrtej de cric, care se rotește cu o viteză unghiulară ω la o distanță R de axa de rotație, pendulul își micșorează perioada cu t secunde. Se cere viteza unghiulară de rotație și unghiul făcut de planul instantaneu de oscilație al pendulului cu verticala locului.

I. Bobolea, profesor Cugir

4864. Să se arate că dacă există relația: $(A + B)^n + B = \text{mult. } A$ pentru valoarea întreagă a lui B cuprinsă între O și A, atunci pentru orice număr N există relația: $N^n + (A - 1)N = \text{mult. } A$, unde A,B,N,n sînt numere întregi și pozitive.

Octavian Persache, elev București

4865. Fie O_1 și O_2 două cercuri tangente exterior în P, ω centrul lor de omotetie, O cercul tangent lor cu centrul pe O_1O_2 și ωT lungimea tangentei din ω la cercul O. Să se arate că cercul de centru ω și rază ωT trece prin P.

Belcea Marin, student București

4866. Pe un cerc fix se iau punctele mobile A,B,C. Știind că suma razelor exînscrise triunghiului ABC este constantă să se găsească locul geometric al centrului cercului înscris.

Lucian Bădescu, elev C-lung Muscel

4867. Un circuit format dintr-o bobină și un condensator, este alimentat de un generator de curent alternativ cu frecvența $\nu = 50$ Hz și tensiunea la borne $U_{ef} = 12$ V. Bobina are un miez de fier de formă cilindrică avînd lungimea $l = \pi^2$ cm și permeabilitatea $\mu = 3000\ \mu_0$, pe care se găsește înfășurat, de la un capăt la celălalt, un conductor de cupru izolat, formînd 200 spire, cu un diametru mediu $d = 4$ cm. Lun-

gimea conductorului este $l_1 = 25$ m, suprafața secțiunii conductorului $S_1 = 0{,}43$ mm^2, iar rezistivitatea $\varrho = 0{,}0172 \frac{\Omega \cdot mm^2}{m}$. Se neglijează rezistența firelor de legătură. Să se calculeze: a) Ce capacitate are condensatorul, dacă defazajul dintre tensiune și intensitate este $\varphi = 45^0$. b) Ce masă de apă poate fi încălzită de la 10°C la 80°C în timp de 10 minute cu ajutorul unei rezistențe de 20 Ω, dacă am trece prin ea un curent cu o intensitate egală cu a curentului din circuitul de mai sus? c) Ce capacitate ar trebui să aibă condensatorul ca defazajul să fie nul?

(Clasa X-a, Olimpiada 1961, București) *Achim Marinescu*

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PROPUSE PENTRU ȘCOALA DE 7 ANI *

E: **1714.** Să se arate că dacă A, B, C, D, E sînt numere întregi astfel că expresiile:

$$E_1 = 1960A - 1961B + 1962C + 1963D + 1964E \text{ și}$$
$$E_2 = 1737A - 2407B + 1293C - 2855D + 849E$$

sînt multipli de 1965, atunci și expresia:

$$A + 2B + 3C + 4D + 5E,$$

este divizibilă prin 1965.

D. M. Bătineț

E: **1715.** Pentru o cantină s-au cumpărat 5 găini, 3 curci și 2 curcani și s-au plătit în total 436 lei. Prețul unei găini este cu 2 lei mai mult decît 1/3 din prețul unei curci, iar prețul unei curci este cu 3 lei mai puțin decît 3/4 din prețul unui curcan.

Să se calculeze prețul fiecărei păsări.

Victor Florescu, R. Vîlcea

E: **1716.** La un magazin de stat sînt, trei bucăți de stofă. În prima bucată sînt cu 12 metri mai puțin decît în a doua și cu 4 metri mai mult decît în a treia. În total sînt 89 metri. Să se afle cîți metri sînt în fiecare bucată.

* * *

E: **1717.** Patru tractoare au arat împreună 125 de hectare. Partea arată de primul tractor, față de partea arată de tractorul al doilea, se află în raportul de 2/3, partea arată de tractorul al doilea, față de partea

---

*) V (E: 1714, 1715, 1716, 1717); VI (E: 1720, 1724, 1726); VII (E: 1718, 1719, 1721, 1722, 1723).

arată de tractorul al treilea se află în raportul de 4/5, iar partea arată de tractorul al treilea, față de partea arată de tractorul al patrulea, se află în raportul de 6/11.

Să se arate cîte hectare a arat fiecare tractor.

Mocanu Augustin, prof. Zalău

E : 1718. Să se arate că

$$4(2x^3 - 5x^2y + xy^2 + 3y^3) = (3y - 2x)(2y + x + x\sqrt{5})(2x + x - x\sqrt{5})$$

C. I. Ț.

E : 1719. Să se rezolve ecuația :

$$\left[\frac{a(b+1)}{a+b} + \frac{2b}{a-b} + 2x\right] : \left(\frac{b}{a-b} + x\right) = \left(\frac{b}{a+b} + 2x\right) : x.$$

Victor Florescu, Rm. Vîlcea

E : 1720. O brigadă de 12 lucrători poate termina săpatul unui canal în 25 zile. După ce brigada lucrează 5 zile, 6 lucrători pleacă în altă misiune. În cîte zile se va termina săpatul acelui canal ?

B. Baieră, profesor Păunești

E : 1721. Să se arate că dacă $a + \frac{b+c}{1+bc} = 0$, atunci există și relațiile :

$$b + \frac{a+c}{1+ac} = 0 \text{ și } c + \frac{a+b}{1+ab} = 0$$

C. Ionescu-Țiu

E : 1722. Să se arate că dacă $\frac{1}{a} + \frac{1}{1+b+c} = 0$, atunci există și relațiile :

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{1+c+a} = 0 \text{ și } \frac{1}{c} + \frac{1}{1+a+b} = 0.$$

C. Ionescu-Țiu

E : 1723. Se dă un patrulater oarecare $ABCD$. Paralela la BC care trece prin A taie diagonala BD în E, iar paralela la AD care trece prin B taie diagonala AC și F. Să se demonstreze că dreptele CD și EF sînt paralele între ele.

Stelian Lambă, profesor Tuzla

E : 1724. Distanța dintre două orașe este de 600 km. in același oraș pleacă spre celălalt două trenuri la intervale diferite. Primul merge cu 50 km pe oră. Ce viteză are al doilea tren, dacă primul pleacă cu o oră mai devreme și ajunge cu o oră mai tîrziu ?

E. Titilici, profesor Focșani

E : 1725. Se dă patrulaterul convex $ABCD$. Prelungim latura AB dincolo de B pînă în A_1, astfel ca $AA_1 = BC + CD + DA$, prelungim latura BC dincolo de C pînă în B_1 astfel ca $BB_1 = CD + DA + AB$ și fie C_1 și D_1 puncte analoge. Notăm cu P și P_1 perimetrele patrulaterelor $ABCD$ și $A_1B_1C_1D_1$. Să se arate că :

$$\frac{5}{3} < \frac{P}{P_1} < 5$$

D. M. Bătineţu, student Bucureşti

E : 1726. Într-una din povestirile scriitorului englez A. Conan-Doyle „Aventurile lui Sherlock Holmes" se află și următoarea problemă : Doctorul Watson și musafirul său Holmes stau la o fereastră deschisă. Din grădină ajung la urechile lor glasurile vesele ale unui grup mare de copii.

Holmes : Spuneți-mi va rog, cîți copii aveți ? — Watson : Aici sînt copiii a patru familii : echipa mea este cea mai numeroasă, a fratelui meu mai puțin, a surorii și mai puțin, iar copii unchiului sînt grupul cel mai puțin numeros. Ei fac acest tărăboi deoarece nu le ajung pentru două echipe cîte 9 oameni de fiecare. O coincidență amuzantă : dacă se înmulțesc cele 4 numere care exprimă numărul de copii din familiile noastre vom obține numărul casei noastre, pe care dv. îl cunoașteți. — Holmes : Eu am învățat la școală matematică ! Voi încerca să calculez numărul de copii din fiecare familie.

După cîteva calcule Holmes a spus : Pentru rezolvarea problemei se dă prea puțin. Spuneți-mi vă rog, unchiul are un copil sau mai mulți ? — Watson a dat răspunsul cerut. — Holmes : Acum pot să dau răspunsul exact asupra numărului copiilor ! Și într-adevăr a dat răspunsul corect. Care a fost numărul casei și cîți copii avea fiecare familie ?

DESPRE ACTIVITATEA EXTRAȘCOLARĂ LA MATEMATICI A CERCULUI „DIMITRIE POMPEIU" DE LA ȘCOALA MEDIE Nr. 12 „SPIRU HARET" DIN BUCUREȘTI

La 24 decembrie 1960, din inițiativa unor elevi ai clasei a X-a A reală a școlii medii nr. 12 „Spiru Haret" din București și cu sprijinul tov. prof. N. Manolescu și al direcției școlii, a luat ființă cercul de matematici „Dimitrie Pompeiu".

Ședințele au loc lunar și participă aproximativ 30 de elevi din clasa a X-a și invitați din alte clase. Cercul este condus de un colectiv de elevi format din : Badea Gh. Mihaiu, Ciocan I. C. și Vodă Gh. V. Scopul cercului este adîncirea cunoștințelor predate în clasă, lărgirea orizontului matematic al elevilor și antrenarea lor în munca de colaborare la G.M.F.-B.

În ședința de deschidere, elevul Ciocan I. C. a prezentat referatul „Teoria numerelor" (cu noțiuni de teoria mulțimilor și algebră propozițională). Expunerea a reușit să scoată în evidență faptul că matematica nu este o știință ruptă de viață, ci o știință legată de viață, care evoluează odată cu dezvoltarea cunoștințelor omului asupra lumii fizice înconjurătoare.

Elevul Vodă Gh. V. a prezentat o notă matematică asupra unei cunoscute teoreme a lui Pompeiu : „Dacă M este un punct oarecare în planul unui triunghi echilateral ABC, atunci cu segmentele MA, MB, MC putem construi totdeauna un triunghi". (Triunghiul lui Pompeiu, Algebra cl. VIII pag. 312).

Fie O cercul circumscris triunghiului ABC, iar punctul M pe arcul BC. Pe AM luăm $MN = MC$ și obținem triunghiul echilateral CMN, deoarece unghiurile GMN și CBA subîntind același arc $AC = 60°$. De asemenea unghiurile ACN și BCM sînt egale, deoarece sînt simultan egale cu unghiul $ACM - 60°$.

Așadar, triunghiurile ACN și BCM sînt egale, deci $BM = AN$.

Atunci putem scrie $MA = MN + NA = MC + MB$.

Dacă M e situat pe arcul CA obținem: $MB = MC + MA$, iar dacă aparține arcului AB, *avem:* $MC = MA + MB$.

Putem deci enunța: „Cercul circumscris unui triunghi echilateral este locul geometric al punctelor pentru care triunghiul lui Pompeiu se reduce la o dreaptă".

A mai fost prezentat referatul „Expresii iraționale" studiindu-se și unele exemple din G.M.F.—B.

În cadrul cercului se activează și la Gazeta Matematică a clasei unde se publică articole despre activitatea marilor matematicieni romîni și străini, și probleme propuse de către elevi.

Astfel în cadrul unei ședințe s-a propus problema: Să se calculeze raportul $\frac{p_0}{p}$ în funcție de r_a, r_b, r_c, unde p_0 reprezintă semiperimetrul triunghiului ortic al triunghiului dat, restul notațiilor fiind obișnuite.

Soluția întîia, dată de elevul Bubu Andreiu. Suprafața unui triunghi oarecare se poate scrie:

$S = p_0 R$ *sau* $S = p.r$ (v. Geometria cl. IX pag. 263 problema 226), de unde $p_0 R = p.r$.

Din relația cunoscută $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$ avem: $r = \frac{r_a r_b r_c}{\Sigma r_a r_b}$.

Dacă în egalitățile $(p-a)(p-b) = r \cdot r_c$; $(p-b)(p-c) = r \cdot r_a$; $(p-c)(p-a) = r \cdot r_b$. Notăm: $p-a = x$ $p-b = y$ $p-c = z$ și obținem sistemul: $xy = r \cdot r_c$; $yx = r \cdot r_a$; $zx = r \cdot r_b$, care rezolvat ne dă:

$$x = p-a = \frac{r_b r_c}{\sqrt{\Sigma r_a r_b}}; \quad y = p-b = \frac{r_c r_a}{\sqrt{\Sigma r_a r_b}}; \quad z = p-c = \frac{r_a r_b}{\sqrt{\Sigma r_a r_b}},$$

de unde: $a = \frac{r_a(r_b + r_c)}{\sqrt{\Sigma r_a r_b}}$; $b = \frac{r_b(r_c + r_a)}{\sqrt{\Sigma r_a r_b}}$; $c = \frac{r_c(r_b + r_a)}{\sqrt{\Sigma r_a r_b}}$

Dar $R = \frac{abc}{4 \cdot p \cdot r} = \frac{\Pi(r_a + r_b)}{4 \Sigma r_a r_b}$ și deci $\frac{p_0}{p} = \frac{4 r_a r_b r_c}{\Pi(r_a + r_b)}$.

Soluția a doua, dată de elevii N. Gh. Tătulescu și Badea Gh. M.:

Folosind relațiile: $2p_0 = a \cos A + b \cos B + c \cos C$, $r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a = p^2$ (v. T. Lalescu „Geometria Triunghiului" pag. 138), avem:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{\Sigma r_a r_b - r_a^2}{(r_a + r_b)(r_c + r_a)} \text{ etc.}$$

După ce efectuăm și celelalte înlocuiri, din compararea primelor relații rezultă imediat formula (1).

Soluția a treia, dată de Vodă Gh. Viorel:

Dacă împărțim relațiile cunoscute $r_a r_b r_c = p^2 r$ și $(r_a + r_b)(r_b + r_c)(r_c + r_a) = 4Rp^2$ (idem op. cit. pag. 146, 148) și ținem seama de relația $p_0 R = pr$, avem:

$$\frac{r}{R} = \frac{p_0}{p} = \frac{4 r_a r_b r_c}{\Pi(r_a + r_b)}.$$

Soluția a patra. Știm că:

$$\frac{r}{R} = 4 \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}, \text{ (GMF-B 2/1961 pag. 89),}$$

$$\text{dar } \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{r_a - r}{4R}} = \frac{r_a}{\sqrt{(r_a + r_b)(r_c + r_a)}} \text{ etc.}$$

Înlocuind și ținînd seama de relația $p_0 R = pr$, obținem imediat relația cerută.

Observare: Din relația Euler $OI^2 = R(R - 2r)$ deducem $R \geqslant 2r$ (v. GMF-B 2/1961 pag. 89). Știind că $\frac{p_0}{p} = \frac{r}{R}$ avem și $p \geqslant 2p_0$, adică în orice triunghi, perimetrul triunghiului ortic este mai mic sau cel mult egal cu semiperimetrul triunghiului inițial.

S-au mai distins ca rezolvitori: Bubu Andreiu, Brill Erni, Constantin Dumitru, Szel Petru, Zărnescu Sorin, Diaconescu Radu.

Sperăm că activitatea cercului „Dimitrie Pompeiu" va apropia mai mulți elevi care vor deveni noi și harnici rezolvitori de probleme la G.M.F.—B, publicație pentru tineret.

O muncă susținută trebuie dusă la toate clasele medii ale acestei școli pentru a obține rezultate bune în întrecerea pe țară între școlile medii la toate punctele din regulamentul întrecerii, publicat în G.M.F.—B nr. 2, pag. 97.

Corespondenții rezolvitori de probleme din G.M.F.—B, sînt invitați ca prin școala medie pe care o urmează în anul școlar 1961—1962, să înscrie școala, chiar de la începutul anului școlar ce urmează, la întrecerea pe țară pe anul 1962.

CĂRȚI NOI (FIZICĂ)

A. I. Iofe: *Aplicațiile înregistrării magnetice* (traducere din limba rusă). Edit. Tehnică 1961, Colecția „Radio și Televiziune". — În carte se studiază probleme privitoare la utilizarea înregistrării magnetice în diferite domenii ale științei și tehnicii, se scot în evidență elementele caracteristice procesului de înregistrare în fiecare caz concret și se dau scheme de principiu. În expunere au fost folosite cele mai recente realizări ale tehnicii. (115 pag., prețul 3,20 lei).

J. L. Jakubowski: *Trăsnetul îngenunchiat* (traducere din limba polonă). Edit Științifică 1961. În partea I-a se vorbește despre trăsnetele naturale, efectele lor, apărarea împotriva lor, trăsnetul în apă, avioanele și trăsnetul. În partea a II-a sînt expuse cunoștințele referitoare la tensiunea înaltă în tehnică, despre protecția împotriva supratensiunilor. În partea a III-a se vorbește despre tensiunea înaltă în laborator, trăsnetul provocat de om, despre munca montorilor sub tensiune înaltă și despre perspectivele de viitor. (277 pag., prețul 11,70 lei).

Sergiu Călin: *Automatica și telemecanica.* Edit. Tineretului 1961, colecția „Știința învinge". — În carte se dau noțiuni de automatică, de automatizare în tehnica modernă, noțiuni de telecomunicații. Se descriu diferitele elemente ale dispozitivelor automate, telemecanice și de conducere de la distanță. Se dau de asemenea, noțiuni despre cibernetică și aplicațiile ei în tehnică. (270 pag., prețul 5,80 lei).

E. T. Fadeev: *Știința în ajutorul omului*. Edit. Tineretului 1961. Colecția „Știința învinge" (traducere din limba rusă). — În carte se vorbește despre căile deschise de către știință și tehnică, despre transformările din natură și posibilitățile omului în lupta cu forțele naturii. (167 pag., prețul 3,35 lei).

Hadzima Maţuda, Kasiva Haiasi: *Arma nucleară și omul*. Edit. Științifică 1961 (traducere din limba rusă). — Lucrarea elaborată de doi medici japonezi, prezintă un tablou al efectelor lansării bombelor atomice asupra celor două orașe japoneze: Hiroshima și Nagasaki. Autorii arată cum s-a manifestat acțiunea nocivă a radiațiilor radioactive asupra oamenilor. În ultima parte a lucrării se ocupă de efectele depunerilor radioactive de pe urma exploziei bombei cu hidrogen de pe insula Bikini.

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

Pînă la 1 mai 1961 s-au mai primit soluții bune la problemele de matematică propuse în ultimele 3 numere ale „Gazetei matematice și fizice", seria B, după cum urmează: BUCUREȘTI (urmare):

Ş.m. 13 Mihai Viteazu. Cl. IX. Aldea N. Ion (4475, 80, 81, 90, 509, 19, 22, 37, 42, 43), Berceanu Ștefan (4500, 09, 33, 36—39, 42, 43, 46, 83, 91, 99, 610). Cl. X. Dogaru Anton (4469, 70, 87, 503, 04, 27, 28, 55, 66, 85, 96, 600).

Ş.m. 14 elină. Cl. X. Dimitriu Filomela (4481, 96, 509, 17—19, 33, 36, 39, 43).

Ş.m. 15 Elena Sîrbu. Cl. IX. Paidiu V. Ion (4420, 30, 31, 38, 41—44, 53, 55, 56, 81, 84, 85, 90, 95, 503, 04, 33, 36, 38, 39, 46, 52, 66, 70, 75, 81, 85, 600). Cl. X. Popescu V. Ruxandra (4381, 82, 84, 90, 96, 412, 15, 16, 18, 31).

Ş.m. 16 George Coşbuc. Cl. VIII. Anghel Mioara (4475, 80, E: 1599, 600, 01, 03—16). Cl. IX. Moscovici Corneliu (4481, 83, 87, 503, 09, 16, 17, 19, 33, 39, 43), Siegler Goldița (4442, 87, 503, 09, 19, 39, 52, 81, 83). Cl. XI. XI. Deleanu Denise (4429, 31, 32, 34, 37, 39, 41—45, 47, 51, 2, 56, 63, 67, 69, 70, 72, 73, 75, 76, 81, 83, 84, 86—88, 91, 95, 96, 99, 503—06, 10, 17, 22, 26—28, 31, 33, 35, 36, 42, 43).

Ş.m. 17 Matei Basarab. Cl. IX. Crainic Emanule (4367, 69, 81, 82, 409, 12, 20, 75, 81, 83, 84, 509, 19, 33, 37—39, 43), Dimitriu Cornelia (4481, 83, 96, 509, 17—19, 33, 36, 38, 39, 43), Ștefănescu Alex. (4444, 53, 73, 96, 99, 509, 17, 22, 35, 43).

Ş.m. 18 Mihail Eminescu. Cl. IX. Țuțea Mircea (4506, 09, 19, 43, 75, 77, 79, 80, 85, 604). Cl. X. Crăciunoiu George (4575, 77, 81, 84, 91, 99, 604, 07, 14, 25, 62, 63). Cl. XI. Măreulescu Rodrig (4421, 22, 31, 32, 34, 37, 39, 41, 43, 45, 57, 67, 69, 70, 77, 78, 86, 88, 93—95, 503, 04, 16, 25—28), Pîrşan Liviu (4427, 35, 63, 89, 97, 96, 504, 07, 09, 10, 17, 19, 20, 27, 31—33, 36, 37, 39—44, 46, 61, 62, 70, 75, 80, 81, 84, 86, 88, 91, 95, 99, 600).

Ş.m. 19 Ion Creangă. Cl. IX. Feran M. Monica (4420, 44, 52, 75, 83, 509, 39, 43). Cl. XI. Anghel Adrian (4499, 509, 33, 36, 75, 77, 80, 81, 91, 602), Olteanu S. Victor (4499—509, 13, 17, 19, 27, 31, 33, 35—40, 42, 43).

Ş.m. 20 Gheorghe Şincai. Cl. V. Popa T. Ioana (E: 1600, 04, 08—11, 14, 17, 26, 27, 31). Cl. XI. Calțaru Ovidius (4419, 20, 22, 31, 34, 37, 41, 43, 54, 57, 67, 70, 72, 83, 500, 03—05, 09, 12, 17, 20, 33, 42, 43), Elefterescu Olimpia (4462, 63, 72, 500, 05, 09, 10, 40), Hîrşan Dan (4463, 75, 81, 96, 97, 99,, 505, 09, 10, 19, 22, 33, 35, 39, 40), Ilie Mihai (4463, 65, 68, 71—75, 79—84, 89, 90, 92, 97, 99—501, 05—10, 19, 30, 31—33, 35—40, 43, 44, 46, 52, 57, 59, 61, 62, 64, 65, 70, 79).

Ş.m. 22 Gheorghe Lazăr. Cl. IX. Manolache Nicu (4423, 44, 52, 81, 83, 509, 19, 33, 39, 42), Moraru Vasile (4419, 23, 44, 52, 81, 83, 96, 509, 19, 33, 39, 42). Cl. X. Antoniu Gheorghe (4420, 23, 25, 35, 40, 44, 47, 50, 53, 68, 73—75, 80, 81, 83, 84, 99). Cl. XI. Ceicu Mirela (4463, 72, 75, 81, 83, 84, 90, 99—501, 05—07, 09, 10, 19, 35—38, 43), Florescu Dan (4423, 44, 47, 72, 75, 80, 82—84, 89, 96, 509, 19, 33, 38, 43, 75, 80, 91, 610), Solomon Eugenia (4463, 72, 81, 83, 84, 99, 500, 05—07, 09, 10, 17, 19, 35, 37, 38, 42, 43), Zamfirescu I. Tudor (4462, 70, 72, 75, 79—84, 99—508, P).

Ş.m. 23 Dimitrie Bolintineanu. Cl. IX. Cleanoveanu Eugen (4420, 44, 47, 52, 53,

67, 72, 75, 80, 81, 83, 84, 86, 87, 506, 09, 16, 17, 19, 28, 33, 36, 39, 43).

Ş.m. 24 Vasile Alecsandri. Cl. VII. Niţă I. Sorin (E: 1600, 10, 16—18, 20, 21, 23, 26—29, 31, 38, 44, 52, 56, 59). Cl. X. Popescu Domiţian (4419, 20, 22, 27, 29, 31, 34, 35, 40, 41, 43, 44, 47, 52, 53). Cl. XI. Popescu Natalia (4342, 45, 48, 54, 62, 64, 65, 69).

Ş.m. 26 Alexandru Ion Cuza. Cl. X. Boţocan C. Gabriel (4499—501, 06—09, 17—19, 29, 31—33, 35—40, 43, 44, 46, 52, 59, 61, 64, 65, 68, 70, 75, 77, 81, 82, 84, 88, 91, 96, 99, 603, 04, 07, 09, 10), Popp L. Liviu (4420, 23, 44, 47, 51, 73, 75, 80, 82, 84).

Ş.m. 28 Dr. Petru Groza. Cl. VIII. Alăman Andra (E: 1584, 87, 89, 91, 93, 96, 97, 601, 05, 10), Brănescu Maria (4543, E: 1599, 600, 05, 08, 09, 10, 13, 15, 17, 18, 20, 21, 23, 26, 31), Cuciureanu Mircea (E: 1618, 20, 21, 27, 37, 42—44, 47, 52, 56, 57, 59), Măicănescu Alexandru (E: 1599, 600, 04—06, 08, 10, 13—18, 20—26, 29, 31), Pană Mihai (E: 1599, 600, 05, 10, 18, 21, 23, 31, 37, 43, 44, 46, 47). Cl. XI. Anghel Marius (4463, 64, 67, 69, 70, 72, 75, 81, 83, 84, 86, 88, 95, 96, 97, 99, 503—06, 09, 10, 17, 31, 33, 35, 36, 38, 40, 43), Bucurescu Dorel (4463, 67, 69—72, 83, 84, 86, 88, 95, 99, 503—05, 09, 14, 26, 27, 33, 35, 37).

Ş.m. 32. Filimon Sîrbu. Cl. VII. Florea George (E: 1599—605, 07, 09—11, 13, 14, 16). Cl. VIII. Petrea Eugen (E: 1510, 19, 20, 27, 43, 617, 18, 20, 21, 23, 29), Şerbănescu Andrei (4480, 509, 10, 19, 20, 37, 43, 605; 10, 16), Vinea Alexandru (4480, 509, 19, 20, 43, 44, 75, E: 1582—84, 87—89, 91, 93, 96, 99—601, 03—05 07—11, 13—18, 20, 21, 23, 24, 26, 28, 30, 31), Cl. X. Dumbravă Mircea (4420, 32, 37, 39, 41, 42, 44, 53, 67, 70, 72, 73, 78, 80, 83, 84, 88, 95, 502—05, 09, 10, 17, 43).

Ş.m. 34 C. A. Rosetti. Cl. VIII. Cernicica Petre (4475, E: 1599—601, 03—05, 07—10, 13—16), Leibovici Valeriu (E: 1599, 600, 04, 06—11, 13—15).

Ş.m. 36. Cl. VIII. Gruia I. Sorin (E: 1505, 43, 618, 20, 30—32, 43, 44, 47, 505, 43).

Ş.m. 38 „23 August". Cl. VII. Stănescu Viorel (E: 1582, 91, 93, 96, 605, 18—21, 29, 31).

Şc. de 7 ani nr. 3. Cl. VI. Becea Surel (E: 1584, 92, 97, 600, 04, 10, 13, 17, 20, 21, 28, 31, 37, 42, 43, 47, 51, 55—57, 60).

Şc. de 7 ani nr. 19. Serghie Stela, profesoară şi Grigorcea Ion, elev: Descrierea unei uzine vizitată în anul acesta şi învăţămintele trase.

Şc. de 7 ani nr. 20. Cl. IV. Petrescu A. Corneliu (E: 1601, 04, 08, 09, 11—15, 27, 31).

Şc. de 7 ani nr. 23. Cl. VII. Georgescu Cosmin (E: 1617, 18, 20, 21, 23, 24, 26—28, 32).

Şc. de 7 ani nr. 56. Cl. VI. Enăceanu Florin (E: 1573, 80, 83, 87, 99—601, 04, 06—08. 10. 11. 13. 14. 17. 21. 26—28, 31).

Şc. de 7 ani nr. 82. Cl. VII. Ludwig Alexandru (E: 1599—601, 04, 05, 07—10, 15, 17, 19—23, 25, 31, 46, 47).

Şc. de 7 ani nr. 103. Cl. VII. Popovici Elena (E: 1620, 23, 27, 38, 39, 50, 52, 57, 59).

Şc. de 7 ani nr. 119. Cl. VII. Beca M. Florin (E: 1584, 89, 91, 95—600, 09—11, 15).

Şc. de 7 ani nr. 123. Cl. VII. Ciuceanu N. Mircea (E: 1600, 15, 27, 31, 43, 45, 53, 56—58, 60).

Şc. de 7 ani nr. 124. Cl. V. Barbu M. Dorin (E: 1583, 84, 94, 97, 600, 01, 04, 10, 14, 31).

Şc. de 7 ani nr. 135. Cl. VI. Moţoi V. Marin (E: 1620—22, 28, 30, 33—36, 38, 44, 47, 51, 54—57, 59, 60).

Şc. de 7 ani nr. 143 I. C. Frimu. Cl. VII. Ignea Silviu (E: 1583, 87, 91, 96, 97, 99, 600, 03—05, 09—11, 14—16, 18—21, 23, 25, 26, 31).

Şc. de 7 ani nr. 145 Ghencea. Cl. VI. Matei Mariana (E: 1586, 88, 97, 600, 01, 04, 07, 08, 10, 15). Cl. VII. Grigore Mugurel) (E: 1582, 86, 91, 92, 95, 603, 08—11, 18, 29), Mănică Ilie (E: 1583, 85, 605, 08—11, 17—21, 31)

Şc. de 7 ani nr. 172. Cl. VII. Ghiţescu Lucian (E: 1583, 88, 89, 97, 98, 602, 03, 08, 09, 13, 16, 17, 19—21, 23, 25, 27, 31, 37, 42, 48, 56, 60).

Fără indicaţie de şcoală. Cl. VIII. Dronda I. Eugen (4467, 70, 78, 503, 16, E: 1601, 02, 22, 25, 28), Radu Dan elev: Asupra teoremei bisectoarei.

BUHUŞI (Bacău). Cl. X. Andrei Vasile (4499, 503, 04, 09, 10, 16, 17, 18, 22, 29, 33, 36, 39, 40, 43, 61), Pop N. Eugen (P).

BUZĂU (Ploieşti). Cl. VI. Şuteu C. Dumitru (E: 1636, 38, 42, 44, 46). Cl. VIII. Popescu Dorin (4433, 41, 67, 75, E: 1589, 91, 95, 96, 99, 603, 05, 09).

BUZIAŞ (Banat). Cl. V. Klöcker Thea (E: 1600, 04, 08, 10, 11, 14, 17, 26, 27, 31), Telibaşa Lucreţia (E: 1600, 04, 08, 10, 14, 17, 26, 27, 31, 37). Cl. VI. Andraş Aurelia (E: 1597, 600, 04, 08, 10, 13, 17, 22, 26, 31), Bula Maria (E: 1597, 600, 08, 10—13, 17, 21, 22, 26, 31), Chişiţă Maria (E: 1597, 600, 04, 10, 11, 13, 17, 22, 26, 31), Lăieţu Ion (E: 1600, 04, 08, 10, 13, 17, 22, 25, 28, 31, 33, 38). Marcu Aurelia (E: 1600, 04, 10, 26, 37, 97), Marta Marioara (E: 1600, 08, 10—13, 17, 20, 22, 31), Ogneanu Nicolae (E: 1604, 10, 13, 17, 21, 22, 26, 31, 38), Petroi Ion (E: 1600, 04, 10, 13, 17, 21, 26, 31, 38), Prodan Aurelian (E: 1587,

600, 04, 08, 10, 13, 17, 20, 26, 27, 31), Cl. VII. Adamescu Cornel (E: 1617, 20, 22, 25—28, 31, 43, 44), Cotuc Ileana (E: 1957, 610, 11, 17, 19, 20, 22, 26, 31, 35), Drăgănescu Maria (E: 1583, 97, 600, 10, 11, 17, 18, 22, 25, 31), Druţul Florica (E: 1617, 20, 22, 25—28, 31, 43, 44), Lepădat Eugenia (E: 1610, 11, 17, 19, 22, 23, 26, 27, 31, 44), Ştefănescu Rodica (E: 1600, 08, 17, 22, 25, 27, 31, 44), Telibaşa Maria (E: 1600 08, 10, 14, 17, 20, 22, 25, 27, 31, 43). Cl. VIII. Faure Ion (E: 1600, 04, 08, 09, 14, 17, 23, 27, 31), Foale Titi (4475, 541, E: 1583—86, 88—91, 94, 96, 600—02, 04, 05, 07—14, 16—23. 31, 32), Gagea Dorica (E: 1617, 20, 23. 25—27, 31, 37, 43, 44), Jurjuţ Ionel (E: 1600, 02, 04, 07—09, 11—14, 16, 17, 19, 22, 23, 25—28), Rotariu Ileana (E: 1617, 20, 23, 25—27, 31, 37, 43, 44), Sămanţ Emilia (E: 1617, 18, 20, 23, 25—27, 31, 37, 43, 44, 47), Sîrbu Nicolae (E: 1600, 04, 08, 14. 17, 23, 25, 27, 31). Cl. X. Doboşan Aurel (4423, 31, 34, 35, 40, 43, 47, 75, 504, 27, 43), Imbroane Simion (4423, 31, 34, 35, 40, 47, 75, 504, 17, 20, 27).

CALAFAT (Oltenia). Cl. VIII. Popa N. Gheorghe (4481, E: 1589, 91, 93, 96, 99, 605, 09, 16, 18, 32), Cl. X. Dorobanţu Vasile (4577. 80, 605, 06, 09, 19, 27).

CĂLĂRAŞI (Bucureşti). Ş.m. 1. Cl. VIII. Apostol Dan (E: 1617, 18, 20—24, 27, 29, 31, 33, 37, 38, 43, 45—47, 49, 50, 52—58), Constantin I. Dan (E: 1587, 88, 97, 600, 08, 10, 17, 27, 28). Cl. IX. Bazac V. Dumitru (4415, 44, 52, 81, 83, 96, 505, 06, 09, 36).

CARACAL (Oltenia). Cl. VI. Rădulescu Sever (E: 1617, 20—22, 26—28, 30, 31, 37, 42). Cl. VII. Ignat Paul (E: 1590, 98, 617, 20, 23, 27). Cl. IX. Popa C. Emil (4475, 81, 83, 84, 90, 96, 500, 09, 17—19, 33, 36, 37, 39, 43), Suşaru Dan (4452, 53, 75, 84, 509, 19, 33, 39).

CARANSEBEŞ (Banat). Ş.m. 2. Cl. VIII. Popescu Adrian (4543, E: 1617, 18, 20—24, 27, 31).

CÎMPIA TURZII (Cluj). Cl. VII. Popescu Liliana (4475. E: 1599—601, 03—05. 09—11). Cl. X. Nemeş Mihai (4452, 53, 69, 84, 509, 19, 26, 31, 33, 37, 39, 43, 46, 52, 61, 75, 91).

CÎMPINA (Ploieşti). Ş.m. 1 „N. Grigorescu". Cl. VIII A. Apostolescu Maria (E: 1617, 20, 27, 33, 37, 38, 41—43, 47), Bîjca Ileana (E: 1571, 74, 75, 610, 16, 23, 43, 44, 47), Brezeanu Semerad (E: 1594, 605, 13, 14, 16, 17, 20—23, 26, 27, 31, 37, 38, 41—43, 46, 47), Bobîlţea Florica (E: 1591, 600, 04, 07, 10, 11, 13, 17, 20, 21, 23, 27, 29, 33, 37, 38, 41—44, 47), Călugărescu Georgeta (E: 1617, 20, 27, 37, 38, 41, 47), Dima Constantin (E: 1617, 20, 21, 23, 33, 38, 42, 43), Dragu P. Angela (E: 1620, 27, 37, 38, 41, 42, 43, 47), Joiţa Eleonora (E: 1617, 20. 27, 31, 33, 37, 38, 41—43), Măiţă D. Dănilă (4547, E: 1600, 03, 10, 11, 23, 43, 44, 47), Moraru V. Nicolae (E: 1587, 89, 90, 93, 95, 96, 601, 03, 04, 07, 09, 10, 20, 23, 36, 37, 43, 45), Mutu Ana (E: 1600, 04, 07, 08, 10, 11, 15, 17, 18, 20, 21, 23, 27, 30, 34, 36—38, 41—43, 47), Nanu Mioara (E: 1591, 600, 04, 07, 10, 11, 17, 20, 27, 29), Nedelcu Ion (E: 1620, 21, 37, 38, 41—43, 46, 47), Popescu Maria (E: 1600, 03, 10, 23, 34, 37, 43, 44, 47), Predescu Ion (E: 1605, 13, 14, 37, 38, 41—43, 47), Schwartzman Rodica (E: 1600, 03, 10, 23, 34, 37, 43, 47), Cl. VIII B. Alexe Nicolae (E: 1600, 04, 10, 20, 33, 37, 38, 43, 47), Bebu A. Nicolae (E: 1620, 33, 37, 38, 41—44, 46, 47), Ceachîr Octavian (E: 1591, 94, 600, 04, 05, 10, 13, 17, 18, 20, 21, 23, 26, 27, 30, 31, 37, 42, 44, 46), Constantin Traian (E: 1605, 13, 14, 20, 37, 38, 41—44, 47), Dorobanţu Dorin (E: 1591, 94, 600, 04, 05, 07, 10, 13, 15, 17, 18, 20, 21, 23, 26, 27, 30, 31, 37, 41, 43, 46), Dumitrescu Constanţa (E: 1600, 04, 05, 07, 08, 10, 13, 14, 17, 20, 27, 30), Dumitrescu Cristina (E: 1600, 03, 10, 18, 23, 37, 44), Ganea Mihai (E: 1600, 05, 10, 11, 17, 18, 20, 21, 23, 26—28, 31, 37, 38, 42—44, 47), Gruia Constantin (E: 1591, 600, 04, 07, 08, 10, 17, 18, 20, 21, 23, 27, 31, 37, 38, 42, 46, 47, 49), Ilina Stelian (4543, E: 1591, 617—23, 25—27, 29, 33, 37, 38, 40—44, 46—59), Moraru Gheorghe (E: 1591, 605, 15, 17, 20, 21, 23, 26, 27, 37, 38, 41, 42, 44, 47), Moldoveanu Grigore (E: 1583, 604, 07, 11, 17, 20, 23, 27, 30, 31), Mircea Gh. Alexandru (E: 1600, 04, 05, 07, 10, 11, 15, 18, 20, 21, 23, 29, 33, 37, 38, 41—43, 46, 47), Nistor Viorel (E: 1600, 04, 05, 10. 11, 17, 20, 21, 23, 26—28, 31, 33, 37, 38, 43, 44, 47), Nichifor Mihai (E: 1590, 600, 04, 05, 07, 10—11, 13, 17, 20, 21, 23, 26, 27, 29, 37, 38, 41—43, 46, 47), Panaitescu Marin (E: 1573, 94, 95, 600, 11, 17, 21, 23, 26, 27), Popescu Cristinel (E: 1618, 23, 26, 30, 37, 41—43, 46), Popescu Florian (E: 1600, 04, 07, 10, 16, 17, 21, 26, 37 42—44), Rusu Marian (E: 1573, 91, 94, 99, 603—05, 07, 10, 13, 14, 17, 18, 20, 21, 27, 30, 37, 38, 41—43), Seciu Gh. (E: 1600, 04, 05, 10—17, 20, 21, 23, 26, 27, 36—38, 41—43, 47), Sverjinski Eugen (E: 1583, 91, 604, 05 07, 11, 14, 17, 20, 21, 23, 26, 27, 30, 31, 37, 38, 41—44, 47), Toader Stelian (E: 1617, 20, 21, 35, 37, 38, 42, 47), Vînătoru Costel (E: 1600, 05, 07, 10, 17, 21, 23, 26, 30, 43), Zevedei I. Nicolae (E: 1584, 87, 89, 91, 93, 97, 600, 03, 08—11, 14, 16—18, 21, 27, 37, 38, 43, 45). Cl. VIII C. Plopeanu Maria (E: 1591, 607, 11, 17, 20, 21, 23, 27, 29). Cl. X. Cara Venera (4419, 20, 23, 33, 44, 52, 53, 81, 83, 84, 89, 96, 99, 509, 39, 40, 43), Petrescu Ruxandra

(4419, 20, 23, 33, 44, 52, 53, 74, 81, 83, 84, 509, 39, 40, 43), Popa Olimpia (4419, 20, 23, 33, 44, 52, 53, 74, 81, 83, 84, 89), Săvulescu Lucia (4419, 20, 23, 33, 44, 52, 53, 74, 81, 83, 84, 509, 39, 40, 43), Sîrbu Doina (4419, 20, 23, 33, 44, 52, 74, 81, 84, 509, 39, 40, 43).

Ş.m. 2 Ilie Pintilie. Cl. VIII. Nistor Florica (1617, 20, 21, 31, 48, 52—57, 59, 60), Dinu Gh. (4473, 83, 96, 99, 505, 06, 09, 10, 17, 19, 31, 39, 40), Teodorescu Viorel (4419, 20, 22, 23, 29, 31, 33, 34, 42, 43, 53, 60).

Şcoala tehnică de energie electrică. An. II. Nicorescu Dumitru (4499, 503, 04, 06, 09, 10, 16, 17, 19, 27, 28, 31, 33, 36, 43).

Şc. de 7 ani nr. 1. Cl. V. Ivaşcu Florin (E: 1600, 04, 08, 10, 11, 13, 23, 26, 27, 33).

CÎMPULUNG MUSCEL (Argeş). **Ş.m. Dinicu Golescu.** Cl. VI. Bănică Gh. Mihai (E: 1583, 84, 86—88, 95, 97, 600, 04, 10), Bădescu N. Lucian (P).

Şcoala pedagogică. An. III. Ivaşcu Gheorghe (4483, 84, 519, P).

CÎMPULUNG MOLD. (Suceava). **Liceul Dragoş Vodă.** Cl. VI. Hrab Rodica (E: 1583, 84, 94, 97, 98, 600, 04, 08—11). Cl. VIII. Babici Ioan (4486, E: 1601, 02, 09. 13, 14, 19, 22, 24, 25), Cornescu Cinthia (E: 1583, 84, 87, 89—93, 95, 97), Hazenfratz Beno (4486, E: 1601, 02 09, 13, 14, 19, 22, 25, 28), Iacoban Ioana (4486, E: 1601, 02, 09, 13, 14, 19, 22. 24, 25), Ionescu Ştefan (idem). Latiş Mihai (idem), Leontiş Ioan (idem), Tebreanu Dumitru (idem), Ţiganea Rozalia (idem). Cl. X. Bruja Aurora (4467, 69, 72, 73, 75, 78, 80, 81, 83, 84, 88—90, 94, 96), Paraschiv Dragos (4473, 75, 83—84, 97), Platon Mihaela (4419, 22, 27, 29, 31, 33, 34, 41, 44, 47, 52, 67—69, 72, 73, 75, 80, 81, 83, 84, 87, 88, 90, 91, 96, 97), Procopiu Gheorghe (4423, 29, 33, 38, 44, 47, 52, 60, 72, 73, 75, 80, 82—84, 90, 96, 97), Teodorescu Dan (4473, 75, 82—84, 97).

Liceul militar Ştefan-cel-Mare. Cl. X. Apostol Aurel (4473, 75, 81, 83, 87, 507, 09, 10, 17, 19, 31, 35—37, 39, 40, 42, 43, 61), Badea Vasile (idem), Barcă Mihai (4472, 73, 75, 81, 83, 84, 99, 500, 10, 22, 30, 37, 39, 44), Băluţă Radu (4475, 81, 83, 84, 509, 10, 17, 19, 31, 33, 35, 39, 43, 44), Ciurez Nicolae (4473, 75, 81, 83, 84, 99—501, 09, 10, 17, 19, 22, 31, 33, 35—37, 39, 40, 42—44, 46, 52, 61), Ciobota Gheorghe (idem Băluţă R.), Crîmpiţă Cristian (idem), Drăfoi Gheorghe (idem), Dima Ion (idem), Gogă Constantin (idem), Gogulenco Nicolae (4475, 81, 83, 84, 87, 500, 07, 09, 10, 17, 19, 31, 33, 35, 39, 40, 42, 43, 61). Necula Gabriel (idem Băluţă R.), Onişor Emil (4475, 81, 83, 504, 08, 11, 17, 19, 31, 33, 35, 42, 43, 61, 75, 81, 83, 84), Poenaru Constantin (4475, 81, 83, 84, 99, 509, 10, 19, 31, 33, 37, 40, 46, 61), Popa Florentin (4473, 75, 81, 83, 84, 99, 507, 09, 10, 17, 19, 31, 33, 37, 39, 40, 42, 43, 61), Popa Ionel (id. Băluţă R.), Popa Traian (id. Apostol A.), Radu Gh. Nicolae (4473, 75, 81, 83, 84, 500, 07, 09, 10, 17, 19, 31, 33, 35, 36, 39, 40, 42, 43, 61), Toader Vasile (id. Băluţă R.).

CLUJ. **Studenţi:** Bîrzan Romanel (Inst. Politehnic) (4499—501, 05, 06, 09, 12, 19, 29, 36, 39, 46, 51, 607, 13, 17, 18, 22, 75—77, 81, 87, 91, 93, 99). **Cimoca Gheorghe** (Fac. matm.) (4390, 96, 416, 19, 20, 23. 27, 29. 44, 47. 48, 52, 53. 63, 68, 71—73. 75, 80, 82—83, 90, 99 500, 05, 06, 09, 10, 17, 19, 38, 40, 41, 43, 53, P,N).

Ş.m. 2 George Coşbuc. Cl. V. Vişan Marius (E: 1579, 83, 84, 94, 97, 600, 08, 10—12, 14, 17, 27, 31, 34, 37, 41, 48, 53, 58, 59), Cl. VI. Liteanu Victor (E: 1585, 87, 88, 90, 607, 11, 14, 20—22). Cl. VII. Ronai Petru (E: 1617, 18, 21, 23, 57), Cl. VIII. Cîndea Dan (4543, E: 1592, 93, 601, 04, 14, 17, 20, 21, 23, 26, 27, 31, 36—38, 42, 43, 46, 47), Cosma Ecaterina (E: 1593, 94, 96, 604, 07, 12, 17, 20, 21, 23, 27, 31, 33, 37, 38, 42, 43, 46, 47), Feneşan Monica (E: 1594, 95, 600, 09—14, 16, 17, 20, 21, 33, 37, 38, 42, 43, 46, 47), Henţ Silviu (E: 1607, 09, 16, 18, 20, 23, 37, 38, 42, 43), Lupşa Ileana (E: 1590, 95, 604, 07, 17, 18, 20, 21, 27, 31, 34, 37, 38, 42—47), Mocanu Rodica (E: 1543, 93, 94, 604, 11, 12, 14, 17, 20, 21, 23, 27, 31, 33, 37, 38, 42, 46, 47), Moraru Liviu (4470, 75, E: 1584, 86—96, 99, 601, 05, 07, 08, 10, 15, 16, 19, 21, 22, 25, 27, 31), Petran Rozalia (E: 1584, 95, 604, 10, 11, 13, 14, 17, 20, 23, 33, 37, 38, 42, 43, 46, 47), Petruţa Viorica (E: 1593, 94, 604, 07, 12, 16, 17, 20, 21, 23, 27, 31, 33, 37, 38, 42, 43, 46, 47), Petraşcu Ligia (E: 1604, 07, 11, 33, 37, 38, 42, 43, 46, 47), Tămaş Mariana (E: 1584, 95, 96, 604, 10—14, 16, 17, 20, 23, 31, 37, 38, 42, 43, 46, 47), Tessler Editha (4543, E: 1593—95, 604, 07, 11, 12, 17, 20, 21, 23, 27, 31, 33, 37, 38, 43, 46, 47).

Ş.m. 4 **Emil Racoviţă.** Cl. VI. Lascu Nicolae (E: 1584, 87. 90, 95, 97, 600, 04, 10, 15), Marfievici Andrei (E: 1617, 31, 37). Cl. VII. Gross Adalbert (E: 1604, 05, 08, 14, 18, 20, 21, 23, 31), Hodnagy Vasile (E: 1599—601, 03, 05, 08—11, 14, P), Pagu Florian (4543, E: 1584, 87, 97, 600, 05, 09—11, 20, 21, 23, 26, 31, 37, 42, 43, 45—47, 53), Petroniu Doina (4447, 80—84, 99, 509, 17, 19, 36, 37, 43), Zidveanu M. S. (E: 1584, 87, 89—94, 96, 600). Cl. X. Georgescu Mihai (4480, 83, 504, 06, 09, 19, 27, 35, 43), Neagoe Dumitru (444).

Ş.m. 5 Gheorghe Barițiu. Cl. VIII. Călugăreanu Grigore (4470, 519, 43, E: 1584, 85, 87, 94, 97, 600, 04, 07, 11, 18—22, 25—29, 31), Man I. Eugeniu (E: 1583, 603, 04, 06—

08, 11, 16, 17, 20, 21, 26, 29, 31). **Marian Iuliu** (4433, 53, 75, 81, 96, 519, 43, E: 1582—601, 17—32), Cl. X. Tomuţa Liviu (4420, 23, 27, 33, 37, 52, 53, 67, 69, 75, 81, 83, 84, 86—88, 90, 97).

Ş.m. 6 Ady Şincai. Cl. IX. Moscovici Ioan (4440, 52, 53, 75, 81, 83, 508, 09, 17, 33, 43), Pop Marius (4440, 48, 52, 81, 83, 90, 96, 508, 09, 17, 33, 39). Cl. XI. Stoica Aurel (4449, 500, 03, 09, 10, 17, 33, 37, 39, 43).

Ş.m. 8 Nicolae Bălcescu. Cl. V. Weisz Petru (E: 1583, 84, 94, 97, 600, 04, 08—10, 13, 17, 31). Ianovitz Hedviga (E: 1583, 97, 600, 01, 04, 08, 10, 11, 14, 17), Mărcuş Cornelia (E: 1617, 20, 21, 26, 27, 34, 36—38, 47), Vasiliu Rodica (E: 1617, 20, 21, 26, 27, 34, 36—38, 47), Cl. VII. Covaci Petru (E: 1583, 84, 92, 96, 97, 600, 04, 05, 08, 10, 29), Palade Constantin (E: 1590, 95, 97, 600, 04, 10, 17, 20, 28, 31), Perl Toma (E: 1604, 07, 13, 15, 17, 20, 21, 27—29, 31), Weisz Gheorghe (E: 1582—84, 86, 87, 90, 94, 95, 97, 600, 04). Cl. VIII. Cristian Voichiţa (E: 1618, 20, 21, 23, 24, 27—29, 32), Schonhaus Adam (E: 1600, 01, 04, 10, 11, 13, 14, 20, 21, 26, 28, 31, 37, 38), Mureşan Sidonia (idem).

Ş.m. 13. Cl. VIII. Indoleanu Nicolae (E: 1583, 84, 89, 91, 94, 96, 97, 99, 600, 04, 09, 10, 14, 17, 29, 31).

Institutul Pedagogic de Învăţători. An. III. Fărcaş Viorica (E: 1600, 03, 05, 10, 13, 18, 20, 21, 23, 26, 27, 37, 43, 47).

Ş.m. de muzică. Cl. VI. Farkaş Petru (E: 1586, 88, 600, 01, 04, 07—11, 13, 14, 20—23, 31, 37, 38, 42).

Şc. de 7 ani nr. 13. Cl. VII. Burz Nicolae (E: 1620, 21, 23, 27, 31), Oprişoiu Nicolae (E: 1591, 93, 96, 99, 603, 05, 16, 18, 21, 23, 26, 27, 29, 31, 32, 43, 45, 53—55, 57, 59).

CODLEA (Braşov). **Absolvent** Pascu N. (4419—25, 47, 62—64, 67, 71, 72, 80, 84, 89, 96, 507, 09, 10, 17, 37—39, P).

CONSTANŢA. **Ş.m. 1 Mircea cel Bătrîn.** Cl. VII. Mărunţelu Nicolae (E: 1600, 10, 17, 18, 20, 21, 23, 24, 27, 31, 32), Brînzănescu Vasile (4421, 31, 41, 67, 87, 503, 09, 19, 28, 33, 38, 39, 43).

Ş.m. 2. Cl. X. Fătu Constantin (4505, 06, 09, 10, 37, 43, 80, 81, 83, 84, P), Mihăescu Elena (4505, 06, 09, 10, 19, 33, 35, 40, 43, 46, 52, 61).

Ş.m. 3. Cl. VII. Dinescu Gabriela (E: 1599, 600, 03, 05, 09, 10, 16, 23, 29, 31). Cl. IX. Sutău Mihai (4480, 81, 84, 503, 06, 19, 33, 35, 36).

Şc. de 7 ani nr. 11. Cl. VI. Cosmiceanu Valentin (E: 1617, 20, 21, 26, 27, 30, 31, 37, 42, 43).

CORABIA (Oltenia). **Ş.m.** Cl. VI. Alexandru Dan (E: 1584, 86, 95, 97, 600, 21, 22, 27, 31), Belu Constanţa (E: 1543, 82, 87, 90, 600, 07, 17, 20—22, 27, 28, 31), Bălteanu Nicolae (E: 1633—37, 41—43, 47), Ene Gheorghe (E: 1617, 20, 22, 30, 31, 44), Enescu Alexandra (E: 1540, 43, 87, 90, 94, 95, 600, 04, 07, 10, 17, 20, 27, 28), Gheorghiu Leliana (E: 1617, 20—23, 27, 31, 33, 42, 44), Roşca Viorica (E: 1543, 87, 94, 600, 04, 07, 10 20, 27, 28), Şegărceanu Florica (E: 1582, 86, 94, 620—23, 27, 31, 37), Cl. VII. Voinea Marcel (E: 1617, 20—22, 27, 31, 37). Cl. VIII. Alexandru Nicolae (E: 1586, 91, 94, 95, 99, 621, 27, 29, 31), Balbarea Gh. Petre (4503, E: 1587, 93, 98, 612, 17—21, 23, 24, 27, 30, 31), Dimineaţă Elena (E: 1707—09, 12, 17, 18, 20, 21, 23, 24, 26, 27), Dinulescu Aniela (E: 1618, 20, 21, 27, 28, 31, 37, 42), Diaconu Tudorel (4486, E: 1601, 18, 20, 21, 23, 28, 31, 37, 38, 42), Florica Ion (E: 1617 18, 20, 21, 27, 28, 33, 37, 38, 42), Fota I. Ion (4503, 04, E: 1587, 98, 617, 18, 20—23, 25, 27, 28, 31, 37, 38, 44), Naftali Gh. (E: 1601, 17, 20, 21, 23, 27, 28, 31, 37, 38, 42), Nină Sonia (E: 1617, 18, 20, 21, 28, 31, 34, 42), Papandonatas Mariana (E: 1617, 18, 20, 21, 31, 37, 42), Stoica Marina (E: 1617, 18, 20, 21, 28, 31, 37, 42), Virdol Viorica (E: 1606, 17, 18, 20, 21, 27, 28, 31, 37, 42). Cl. XI. Tătaru Alexandru (4463, 82, 507, 09, 10, 17, 19, 33, 34, 37, 39, 40, 43).

CRAIOVA (Oltenia). **Ş.m. 1 Nicolae Bălcescu.** Cl. VII. Iordăchescu Anca (E: 1588, 93, 95, 97, 99, 600, 04, 05, 08, 10). Cl. VIII. Aniţescu N. Maria (4419, 20, 44, 52, 53, 72, 80, 81, 83, 84, 90, E: 1582—600). Cl. X. Mărculescu Gina (4433, 44, 48, 52, 72, 74, 75, 80, 81, 83, 84, 89, 96, 98), Potcoavă Gheorghel (4423, 29, 33, 37, 75, 80, 99, 509, 33, 43).

Ş.m. 2 Fraţii Buzeşti. Cl. VIII. Paulon Constantin (E: 1600, 04, 09, 10, 20, 21, 27, 31, 37, 43).

Ş.m. 3. Cl. VIII. Cazacu Speranţa (E: 1618, 20, 21, 23, 26, 27, 29, 31, 37, 46). Cl. X. Mogoş Marina (4419, 34, 43, 44, 81, 83, 84, 503, 04, 07, 09, 17, 31, 32, 43), Ţurcanu Gabriela (4469, 72, 81, 88, 96, 99, 503, 06, 09, 16, 17, 22, 23, 27, 29, 57, 72, 75, 77, 81, 85, 607). Cl. XI. Pavel N. Radu (4413, 25—27, 38, 60, 61, 72—75, P).

Ş.m. 4. Cl. VII. Danciu Veronica (E: 1584, 96, 600, 04, 07, 08, 10, 11, 18, 20, 23, 42), Florescu Dan (E: 1610, 17, 21, 23, 27, 29, 31, 34, 37, 43, 47). Cl. VIII. Calangiu Nicolae (E: 1585, 88, 89, 91, 99, 601, 02, 05, 15), Ciurel Gheorghiţă (E: 1605, 13, 16—18, 20, 21, 23, 27, 29, 34, 42), Cristescu Mărgărit (E: 1600, 04, 08—11, 16, 17, 27, 37, 38, 42), Lazăr Traian (E: 1589, 609, 17, 18, 20, 21, 23, 29, 31, 34, 37, 38), Muga Ionelia (E: 1600, 01,

04, 09—11, 20, 21, 23, 27, 37, 38), Munteanu Ion (E: 1600, 01, 04, 10, 11, 17, 20, 21, 27, 37, 38), Nicolicioiu Veronica (E: 1596, 600, 04, 07—11, 18, 20, 23, 27), Popescu Marinela (E: 1585, 95, 97, 601, 03—06, 08, 09, 15, 17, 20—23, 27, 29, 34, 38, 42, 47), Roşu Georgeta (E: 1600, 01, 04, 10, 11, 20, 23, 27, 37, 38), Tomici Dumitru (E: 1591, 600, 04, 05, 09—11, 16, 21, 23, 29, 34, 38, 42), Zamfirescu Costinel (E: 1600, 04, 05, 08, 10, 11, 18, 23, 31, 37, 42, 44). Cl. IX. Corîci Antonie (4420, 31, 32, 34, 41, 42, 44, 53).

Şc. pedagogică de învăţători. An I. Georgescu Gheorghe (E: 1600, 01, 04, 05, 07, 09, 10, 14, 17, 18, 20, 21, 29—31), Ionescu Ion (E: 1600, 04, 07—10, 13, 17, 20, 21, 23, 27).

Şc. de 7 ani nr. 1. Cl. VI Petrescu A. Ionel (E: 1617, 20, 21, 23, 26, 27, 31, 36, 38, 47).

Şc. de 7 ani nr. 7. Cl. VII. Ghiţuleasa Dan (E: 1584, 85, 88, 90, 97, 600, 09, 20, 22, 26).

Şc. de 7 ani nr. 9. Cl. VI. Andrei Janeta (E: 1587, 95, 600, 04, 07, 10, 20, 21, 27, 31), Boian Angela (E: 1587, 95, 600, 04, 07, 10, 15, 20, 21, 27, 31), Corbescu Ecaterina (id. Andrei J.), Hadîrcă Daniela (id.), Lungu Constantin (E: 1583, 84, 87, 92, 94, 95, 97, 600, 07), Lăzărescu Rodica (E: 1583, 84, 87, 95, 97, 600, 04, 07, 10, 20, 21), Privatu M. (id. Andrei J.), Perianu Elisabeta (E: 1587, 95, 600, 04, 07, 10, 15, 20, 21, 26), Stancu Gheorghiţa (E: 1583, 84, 87, 97, 600, 04, 07, 10, 20, 31), Stancu Mariana (E: 1587, 95, 600, 04, 07, 10, 15, 20, 21, 27, 31), Tîrcă Aurelia (id. Andrei J.). Cl. VII. Cincheza Ecaterina (E: 1583, 85, 87, 89, 90, 95, 600, 04, 07, 10, 20).

Şc. de 7 ani nr. 10. Cl. VII. Diaconescu P. Mihaela (E: 1552, 59, 85, 604, 15, 19, 20, 23, 27, 31, 42, 94), Mutu Mariana (E: 1584, 90, 600, 04, 07, 08, 10, 17, 20, 23, 27), Nicolaescu Vasile (E: 1583, 87—91, 94—601), Roşu P. Anca (E: 1583, 87, 600, 04, 08, 10, 11, 17, 20, 21, 23, 27), Vilaia Mihaela (E: 1584, 87, 90, 94, 96, 97, 600, 08, 10, 20, 27, 29).

CUGIR (Hunedoara). Ş.m. serală. Cl. IX. Modoran Niţă (4439, 67, 70, 75, 76, 86, 87, 99).

CURTEA DE ARGEŞ. Cl. VIII. Miu Constantin (E: 1604, 05, 07—09, 11, 13—16, 20, 21, 23, 31), Popescu I. Alexandru (E: 1577, 91, 93—95, 97, 98, 600, 09, 10, 13), Hondor Gheorghe (4509, 16, 17, 19, 33, 36—39, 43). Cl. XI. Popescu I. Petre (4472, 75, 81, 83, 99, 503, 05, 06, 09, 10, 19, 37, 43).

DEJ (Cluj). Cl. VI. Suciu Octavian (E: 1608—11, 13—15, 17, 20, 26), Sansa Nicolae (E: 1600, 05, 07, 08, 10, 11, 13, 15, 16, 19, 20, 23, 27), Zăhan Elena (E: 1600, 05, 10, 12, 14, 16, 17, 21, 31, 36), Pop Emil (4474, 82, 97, 99, 505, 09, 10, 17, 19, 38, 39).

DEVA (Hunedoara). Cl. VI. Gîrboveanu Gina (E: 1601, 07, 13, 15, 20, 21, 28, 30, 38, 47), Vasiliu Rodica (E: 1601, 07, 13, 15, 20, 21, 28, 30, 38, 47), Vizireanu Eugenia (E: 1620, 21, 31, 42, 44, 48, 54—56, 58). Cl. VII. Răgălie Ştefan (E: 1571—77, 83). Cl. VIII. Voicu Lucia (E: 1621, 23, 31, 37, 44, 53—55—57, 59). Cl. IX. Bunea Bănică (4381, 82, 400, 05, 12, 20, 33, 44, 53, 75, 81, 83, 95, 509, 19, 33, 36—39, 51, 52, 61). Cl. XI. Clipii T. Tudor (4419—21, 29, 31, 33, 41, 43, 51—53, 55, 88, 99, 505, 06, 09, 10, 18, 22, 33).

Şcoala pedagogică J. A. Kamenski. An I. Arsenie Elena (E: 1586, 87, 89, 91, 605).

DEVESEL (Oltenia). Şc. de 7 ani. Cl. V. Bărbuţ D. Gheorghiţa (E: 1617, 23, 25, 27, 31, 33, 34, 37 53, 60), Bălăceanu Ion (E: 1623, 26, 27, 33, 34, 37, 58—60), Bîrboricâ Mioara (E: 1617, 23, 27, 31, 33, 34, 37, 53, 59, 60), Borugă Angela (E: 1617, 23, 26, 27, 34, 53, 58—60), Buligă A. Delia (E: 1617, 23, 25, 27, 31, 33, 34, 37, 53, 58—60). Bumbea Dumitru (E: 1617, 23, 26, 31, 33, 34, 37, 53, 58, 60), Cirga Cristina (E: 1617, 23, 27, 31, 33, 53, 58—60), Dediu Teodora (E: 1617, 23, 25, 27, 31, 33, 34, 37, 53, 58—60), Doran Constantin (E: 1623, 27, 31, 33, 34, 37, 53, 58, 60), Drocan Cristian (E: 1617, 23, 25, 27, 31, 33, 34, 37, 53, 58, 60), Ghiciu I. Dumitru (E: 1600, 05, 08—11. 12, 15, 20, 26, 27), Ilea St. Ileana (E: 1623, 26, 27, 31, 33, 34, 37, 53, 58—60), Mimiş Justinian (E: 1617, 23, 26, 27, 31, 33, 37, 53, 58, 59), Neagoe Ştefan (E: 1617, 27, 33, 34, 37, 53, 57—60), Stoica I. Gheorghiţa (E: 1617, 23, 26, 31, 33, 34, 37, 53, 58—60), Vîlcu Silvia (E: 1623, 26, 27, 31, 33, 34, 37, 53, 58—60). Cl. VI. Alfirii Cristina (E: 1617, 20, 21, 23, 26, 27, 31, 33, 37, 48, 65), Căpăţînă Teodor (E: 1620, 21, 26, 27, 31, 33, 37, 42, 48, 55), Cotarcea C. Angela (E: 1617, 20, 21, 23, 25, 27, 31, 33, 37, 42, 48, 55), Cuţitoiu Margareta (E: 1617, 20, 21, 23, 31, 33, 42, 55), Giurcă Elisabeta (E: 1617, 20, 21, 25, 27, 31, 33, 42, 48, 55), Ică P. Ana (E: 1617, 20, 21, 23, 27, 31, 33, 37, 42, 48), Vladimirescu C. Ion (E: 1617, 20, 21, 23, 27, 31, 33, 37, 42, 48, 55). Cl. VIII. Alca Dumitru (E: 1531, 83, 84, 86, 87, 89, 90, 94, 96, 99, 600, 04—11, 13—16, 20, 31), Caraiman C. Ion (E: 1583, 84, 86, 87, 90, 97, 99, 600, 04, 05, 07—09, 11, 13—15, 20), Cotarcea Petre (E: 1583, 84, 85, 87, 90, 96, 97, 99, 600, 04, 05, 07—11, 13—15, 20), Dobrin Traian (E: 1600, 04, 07, 09—11,

13—15, 20), Gică Ion (E: 1583, 84, 86, 87, 90, 94, 96, 97, 99, 600, 04, 05, 07—11, 13—16, 20). Hogea Gheorghe (E: 1600, 04, 07, 09—11, 13—16, 20), Iacobescu Dumitru (E: 1583, 84, 86, 90, 94, 96, 97, 99, 604, 05, 07—11, 13, 15, 16, 20, 65), Jugescu Vasile (E: 1599, 600, 04, 08—11, 15, 16, 20), Marincu Elena (E: 1599, 600, 04—11, 13—16), Perianu Ștefan (E: 1583, 84, 86, 90, 96, 97, 99, 600, 04, 05, 07—11, 13—15, 20), Spulbat Dumitru (E: 1583, 84, 86, 87, 90, 96, 97, 600, 04—11, 13—16, 20), Vila Ion (E: 1599, 600, 04, 07, 09, 10, 14, 15, 20).

DIȚEȘTI (Cîmpina, Ploiești). Cl. VII. Toader Gheorghe (E: 1599, 600, 03—27, 31).

DOROHOI (Suceava). Ș.m. 1. Cl. VIII. Ciornea Elena (E: 1618, 27, 31, 37, 47). Cl. X. Ciornea Dumitru (4421, 22, 31, 34, 62, 86, 88, 504, 21, 27).

DRĂGĂNEȘTI-OLT (Argeș). Cl. XI. Nicula Năstase (4474, 83, 96, 97, 505, 06, 09, 10, 19, 33, 36, 39, 40, 42, 51), **Raicu Viorel** (4449, 63—66, 68, 71—75, 79—84, 90, 96, 99—501, 05—07, 09—011, 19, 22, 33, 35—39, 42, 43).

DRĂGĂȘANI (Argeș). Ș.m. Cl. X. **Stănescu I. Cicerone** (4469, 82, 97, 99, 500, 03—10, 16, 17, 19—22, 26, 27, 30, 31, 33, 36, 37, 40, 42—44, 48, 52, 54, 55, 62, 66, 75, 82, 85, 90, 605, P). Cl. XI. Iliescu D. Victor (4480, 81, 505, 06, 08, 09, 33, 35, 37, 43), Sacerdoțeanu C. Gheorghe (4449, 500, 04—06, 09, 10, 33, 36, 39, 43, 75, 80, 85, 88, 95).

FĂGĂRAȘ (Brașov). Cl. VIII. Frükstock Ștefan (4509, 19, 36, 37, E: 1618, 29, 43, 44, 46, 50, 52, 57).

FĂGET (Banat). Ș.m. Traian Vuia. Cl. XI. **Gheju Petru** (4419, 20, 25, 27, 29, 35, 38, 40, 44, 47, 52, 53, 60, 61, 63, 68, 72, 73, 75, 79—84, 89, 90, 96, 97, 500, 07, 09, 19, 20, 31, 36—38, 40, 42, 43).

FĂLTICENI (Suceava). Șc. de 7 ani nr. 2. Cl. V. Gîtman Jana (E: 1584, 93, 94, 97, 600, 08, 10), Gîtman Maria (E: 1583, 84, 604, 10, 26, 27, 31), Nohai Mariana (E: 1583, 84, 94, 95, 97, 604, 10, 31), Purnichi Viorica (E: 1583, 84, 94, 95, 600, 04, 10, 31), Rabinovici Silviu (4475, 81, 83, 509, 19, 39), Vornicu Maria (E: 1583, 84, 94, 95, 600, 04, 10).

FETEȘTI - Gară (București). Cl. VII. **Dache Constantin** (E: 1573, 74, 76, 78, 79, 83—85, 87, 90, 94, 95, 97, 600—02, 04, 08, 10, 12—17, 19—23, 25—27, 31, 33, 34, 37, 42, 44, 47). Georgescu Alexandru (E: 1600, 04, 05, 08—11, 17, 18, 20—23, 26, 27, 37, 43—45), Munteanu Ggheorghe (E: 1600, 05, 10, 11, 17—20, 22, 25, 27, 31, 35, 37, 42—44), Mogu Gheorghe (E: 1600, 10, 11, 25, 35—37, 42—44), Nicoară Alexandru (E: 1600, 04, 05, 08—10, 15, 17, 20—22, 25—27, 37, 42—44), Sava Teodor (E: 1600, 05, 08, 11, 26, 35—37, 42—44), Simion Maria (E: 1600, 08, 13, 15, 17, 20, 22—24, 26—28, 31, 42, 44), Stan Iulian (E: 1600, 05, 08, 10, 11, 17—20, 22, 23, 25, 27, 31, 35, 37, 43, 44), Ștefan Georgeta (E: 1600, 08, 11, 13, 15, 23, 24, 28, 35, 37), Trache Ioana (E: 1604, 08, 10, 13, 15, 17, 20—22, 25—27, 30, 31, 37, 42—44), Ulinic Victoria (E: 1608, 13, 15, 17, 20—24, 27, 28, 42, 44). Cl. VIII. Ciobanu Ion (E: 1574, 81, 84, 91, 95, 96, 600, 08, 10, 11, 13, 25), David Tudorița (E: 1584, 91, 95, 604, 05, 07, 08, 10, 11, 15, 22, 25, 26), **Gonciar Ștefan** (E: 1571, 73, 74, 76, 78—80, 83—85, 87, 90, 94, 95, 99—601, 04, 06, 07, 10, 11, 13, 15, 17, 20, 22, 23, 25—27, 31, 33, 34, 36—38, 41, 43, 47), Manea Biță (E: 1584, 91, 96, 604, 11, 17, 20, 25), Pavel Maria (E: 1572, 74, 81, 84, 91, 95, 600, 04, 05, 08—11, 13, 20, 22, 25, 27), Stan Vasile (E: 1574, 84, 96, 600, 05 06, 08, 10, 11, 13), Tocarciuc Georgeta (E: 1589, 91, 607, 15, 20, 23, 26, 27, 31). Cl. X. Alexe Dumitru (4467, 73, 81, 83, 84, 96, 97, 503—06, 09, 10, 27, 36, 38, 40, 43, 62), Drigă Mircea (4464, 73, 81, 83, 84, 97, 503—06, 09, 10, 27, 43, 62), Feleanu Ion (4409, 11, 12, 15, 31, 33, 34, 41, 44, 47, 81, 83, 504), Guef Valentin (4469, 81, 83, 84, 88, 97, 503, 04, 06, 09, 27, 29, 42, 43), Mocanu Constantin (4469, 73, 75, 81, 83, 88, 96, 97, 504, 09, 10, 33, 36, 38, 40, 43, 62), Petcu Virginia (4469, 73, 75, 81, 83, 97, 503, 04, 06, 09, 27, 36, 40, 43, 62).

FOCȘANI (Galați). Ș.m. Unirea. Cl. IX. Buzoianu Maria (4442, 53, 65, 67, 75, 86, 87, 518, 28), Rosenberg Flavia (4468, 75, 81, 83, 90, 509, 17, 19, 33, 36—38, 43, 46). Cl. X. Hristea Teodor (P), Matei Gh. Culiță (4499, 506, 09, 31, 35—37, 39, 43, 46, 52, 61, 65, 75, 77), Paraschiv Florin (4050, P), **Pantelimon A. Anton** (4419—21, 29, 33, 38, 42, 44, 52, 53, 60, 67, 72, 75, 80—84, 89, 94, 96, 503—06, 09, 19, 27, 30, 33, 35—39, 43, P). Cl. XI. **Grădeanu G.** (4429, 35, 36, 46, 48, 51, 54, 55, 57, 61, 74, 79, 82, 84, 88, 89, 92, 95—98, 503—07, 09, 17—20, 27, 31, 31, 35, 36, 38—40, 43), **Năstase Aurel** (4413, 29, 35, 40, 63, 68, 70—75, 78, 81, 82, 84, 86—90, 92, 96, 97, 99, 500, 03—07, 09, 14, 18—20, 26, 28, 30—33, 35, 38—40, 43).

GĂEȘTI (Argeș). Cl. IX. Manolescu Gheorghe (4440, 53, 72, 81—84, 96, 509, 19, 37, 43), Sova V. Valeriu (4420, 44, 53, 81, 83, 84, 533, 36—40, 49). Cl. XI. Alexandrescu Petruș (4420, 40, 52, 53, 72, 81, 84, 90, 96, 503, 09, 19, 37, 43, P).

GALAȚI. Ș.m. 1 **Vasile Alecsandri**. Cl. VIII. Friederich Sergiu (E: 1582, 88, 89, 96—99, 601, 03, 05, 07, 09, 15). Cl. X.

Ender Lucian (4468, 73, 75, 79—84, 89, 90, 96, 500, 07, 09, 17, 19, 32, 33, 37—40. 43, 46, 52, 59, 61, 70). Cl. XI. Felea A. Victor (4421, 22, 31, 32, 34, 43, 56, 57. 70, 78, 86, 88, 94, 95).

Ş.m. 3 **Alexandru Ion Cuza.** Cl. VIII. Bratu Vasile (E: 1602, 03, 05, 07, 09, 15, 16, 18, 20, 22, 23, 27, 29—31), Ciupercă Cornelia (4417, 19, 43, 61, 75, 80, E: 1618, 23, 45, 46), Penciu Fănel (4486, E: 1601 04, 05, 09, 18, 20, 21, 27, 31, 42, 44), Zissu Vasile (E: 1617, 18, 20—23, 27, 29—31, 38, 47). Cl. X. Cojocaru Eugen (4452, 61, 72, 81, 84, 97, 509, 10. 17, 39), Ivănescu Alexandru (4419, 20, 23, 31, 33, 44, 47, 52, 53, 60, 61, 72, 80, 82—84, 97). Cl. XI. Drăgoi Ionel (4419—22, 31, 32, 34, 42, 43, 56, 67, 70, 73, 75, 84, 95), Ismailescu Ileana (4421, 22, 31, 32, 34, 41, 42, 67, 69, 70, 86, 88, 94, 95), Oancea V. Nicolae (4499, 503—06, 09, 10, 17, 19, 22, 31, 35, 37, 39, 75, 77, 80).

Ş.m. 4. Cl. VIII. Cîrlan Constantin (E: 1582—85, 87—90, 93—97), Găzdaru Joiţa (E: 1543, 47, 50, 52, 71—75, 77—79, 81), Melinte Iordache (E: 1599—605, 07, 10, 13—15).

Şc. de 7 ani nr. 17. Cl. V. Corciovei Cecilia (E: 1606, 08, 11, 14, 17, 23, 31, 33, 34, 37), Iloha Felicia (E: 1587, 614, 17, 20, 21, 23, 26—28, 31).

Şc. de 7 ani nr. 21. Cl. VI. Bojin Gheorghe (E: 1590, 92, 600, 07, 11, 17, 20, 21, 26, 31), Tirilă Mioara (E: 1588, 95, 97, 601, 02, 04, 09, 10, 13, 14, 22, 31). Cl. VII. Bodrea Mariana (E: 1584, 87, 90, 97. 600, 11, 17, 18, 23, 24, 29), Mocanu Anica (E: 1587, 91, 93—98, 600, 01, 04, 10, 13, 15, 17, 20, 21, 23, 31, 34, 36, 37, 42, 44), Vaisman Mirel (E: 1600, 17—25, 27—29, 31).

GIURGIU (Bucureşti). Ş.m. 1. Cl. VIII. Berbec F. Nicolae (E: 1584, 87, 97, 600, 04, 10, 11, 20, 21, 27, 31). Cl. IX. Mîrlogeanu Ilie (4423, 52, 81, 84, 96, 509, 10, 19, 33, 39), Ionescu Steliana (4420, 23, 44, 53), Soare V. Dumitru (4421, 22, 31, 41—43, 46, 56, 67, 70, 72, 79, 82, 83, 94, 99—501, 09).

GURAHONŢ (Crişana). Cl. VIII. Sălăgeanu Petru (4519, E: 1589, 91, 93, 96, 99, 605, 09, 16, 18, 23).

GURA HUMORULUI (Suceava). Şc. de 7 ani. Cl. VII. Bociu Glicheria (E: 1574, 79, 83—85, 87, 88, 97, 99, 600, 04), Ciolac Mihai (E: 1617, 18, 20, 21, 23, 27, 28, 31, 37. 44, 53), Leibovici Tobias (E: 1618, 20, 23, 27, 34, 36—38, 42, 45—47).

HALEŞ (Ploieşti). Şc. de 7 ani **Tisău.** Cl. V. Voiciliă N. Ion (E: 1604, 07, 08, 10, 11, 17, 20, 26, 31, 42), Petre Gh. Elena (E: 1617, 20, 21, 26—28, 31, 37, 42, 44, 53—56), Stanciu Cornelia (E: 1587, 612, 17, 20, 21, 23, 26—28, 31). Cl. VII. Cîmpeanu N. Angela (E: 1617, 20, 21, 26, 27, 31, 37, 51, 52, 56, 59), Giurgea Maria(E: 1622), Mazilu Elena (E: 1593, 98, 604, 10, 17, 18, 20, 21, 23. 26, 27, 31, 37, 42, 43, 48, 55—57), Negulescu Elena (E: 1614, 17—23, 25—28, 31, 52), Stanciu Nicoleta (E: 1599, 602, 12, 17—25—28, 31, 34, 37, 42, 43, 47, 48, 50—52, 54—58), Vişan Voichiţa (E: 1605, 17, 18, 20, 21, 23, 26, 27, 31, 37, 42), Zîrnea Elena (E: 1617, 18, 20, 21, 23, 26, 27, 31, 37, 42).

HAŢEG (Hunedoara). Cl. VIII Sbuchea Radu (E: 1600, 05, 10, 16, 31, 52, 53).

HOREZU (Argeş). Cl. VI. Armăşescu Ion (E: 1600, 10, 17, 20, 22, 26, 27, 37, 42), Iliescu Ion (E: 1600, 10, 13, 17, 20—22, 26), Popa Gheorghe (E: 1600, 04, 08, 10, 17, 20, 22, 26, 43).

HUEDIN (Cluj). Cl. VIII. Gheorghiţă Lucia (E: 1584, 97, 600, 08, 10, 11, 13, 17, 18, 20), Jichici Sisişe (4509, E: 1589, 94, 95, 600, 04, 07, 10, 13, 15, 20, 21, 27), Lazăr Ioan (4475, E: 1589, 91, 95, 600, 04, 07, 08, 10, 11, 13, 15, 20, 21, 23, 27, 30, 37, 40, 42, 44, 54—57), Lazea Gheorghe (E: 1600, 04, 05, 07, 08, 10, 11, 13, 15, 17, 18, 20, 21, 23, 27), Listeş Vasile (4475, E: 1600, 05, 16—18. 20, 21, 23, 27, 31).

HUNEDOARA. Ş.m. **Vulcan.** Cl. V. Kelemen Elisabeta (E: 1594, 97, 600, 04, 08, 10, 17, 26, 27, 31).

HUŞI (Iaşi). Ş.m. Cuza Vodă. Prof. Gîrniţeanu M. (N - Postulatul lui Euclid). Absolvent Dolteanu Temistocle (4419, 23, 26, 29, 33, 37, 52, 72, 74, 75, 81, 83, 84, 89, 97). Cl. XI. Bejan Gheorghe (4472, 83. 84, 99, 505, 06, 10, 35—37, 39, 43), Dacu Petru (4483, 99, 05, 06, 08—10, 19, 22, 35—37, 39, 40, 43).

IABLANIŢA (Banat). Şc. de 7 ani. Cl. VI. Blidaru Stana (E: 1617—22, 25—28, 31)

IAŞI. **Ş.m. 1 Mihail Sadoveanu.** Cl. VII. Cernes Gigi (: 1600, 10, 13, 16, 20, 21, 24, 27, 43, 45). Cl. XI. (4462, 75, 81, 83, 95, 99, 500, 05, 06, 09, 17, 26, 40, 43). Caceaunov Claudia (4462, 81, 95, 99, 500, 05, 06, 09, 17, 26, 40).

Ş.m. 2 Mihail Eminescu. Cl. V. Leizer Marica (E: 1583, 84, 92, 94, 97, 600, 04, 10, 11, 13, 14). Cl. VII. Bercovici Carola (E: 1600, 05, 10, 11, 16—18, 20, 21, 23, 24, 34, 37, 38, 48, 53, 55—57), Segal Gizi (E: 1617, 18, 20, 21, 23, 24, 26, 27, 31, 34, 37, 38, 42), Şuiu Rodica (E: 1616—18, 20, 21, 23, 24, 27, 30, 31. 37, 42). Cl. VIII. Marcu Dorothea (E: 1618, 21, 23, 27, 37, 40. 49, 50, 52, 57, 59), Polingher Corina (4475, 517, 19, E: 1600, 03, 05, 07, 10, 14, 18—26, 28—32).

Ş.m. 3 Costache Negruzzi. Cl. IX. Şerţer Liviu (4420, 35, 40, 52, 53, 75, 81, 83, 84, 509), Tofan Emil (4465, 68, 73, 75, 79—

81, 83, 84, 90). Cl. X. Belaus Dorin (4475, 81, 84, 99, 509, 17, 31, 40, 43, 83), Creţu Constantin (4475, 81, 83, 99, 509, 17, 40, 42, 43). Cl. XI. Dinulescu Mircea (4407, 12, 34, 35, 41, 42, 67, 75, 87, 503, 08, 09), Dragoslav Iulian (4427, 29, 33, 47, 63, 72, 73, 80—84, 90, 96, 503, 05—09, 09, 12, 17, 19, 20, 31, 33, 36—40, 42, 43). Pavel H. Nicolae (4424, 51, 96, 99, 501—03, 05, 09, 13, 19, 31, 36—40, 43), Pintilie Ioan (4427, 29, 52, 61, 64, 72, 75, 80, 82, 95, 507, 10), Ungureanu Radu (4438, 60—65, 68, 75, 80, 81, 84, 509, 08).

Ş.m. 4 Garabet Ibrăileanu. Cl. V. Bursuc Viorica (E: 1583, 84, 94, 97, 600, 04, 10, 14, 17, 31), Ciobanu Voichiţa (E: 1594, 97, 600, 04, 10, 14, 17, 26, 27, 31), Cusin Liliana (E: 1574, 94, 97, 600, 04, 10, 14, 17, 27, 31), Rusu N. Magdalena (E: 1583, 84, 94, 97, 600, 04, 10, 14, 17, 30), Şerban Elena (E: 1617, 27, 31, 53, 59). Sîrbu Rodica (E: 1583, 84, 94, 99, 600, 04, 10, 14, 17, 31), Ţăranu Rodica (E: 1583, 84, 94, 97, 600, 04, 10, 14, 17, 31). Cl. VIII. Georgescu Marieta (4419, E: 1582—96, 600, 05—11, 14—16).

Ş.m. 6 Vasile Alecsandri. Cl. VIII. Thirer Nonel (4519, 43, E: 1617, 18, 20, 21, 23, 24, 27—29, 31).

Şc. de 7 ani nr. 11. Cl. VI. Baraboi Adrian (E: 1600, 01, 04, 07, 10, 11, 13, 26, 27, 31), Muscaliu Gabriela (E: 1600, 01, 07, 03, 10, 11, 13, 26, 27, 31).

INEU (Crişana). Cl. XI. Condrea Vasile (4413, 19, 20, 27, 29, 53, 64, 71, 75, 81—84, 505, 09, 37, 38, 43, P).

LIPOVA (Banat). Cl. XI. Huţiu Horia (4463, 72 73, 75, 79—84, 96, 97), Mihalca Ioan (4463, 72, 505, 06, 09, 10, 27, 36, 39, 49).

LONEA (Hunedoara). Ş.m. seral. Absolvent Grozavu Mihail (4419, 20, 29, 38, 44, 62, 63, 71—73, 79, 80, 82, 84, 97). Cl. X. Fărtat C. Radu (4469, 70, 73, 75, 81—84, 90, 92, 99, 526, 27, 600, 03, 04, 06, 09, 17, 19, 21, 33, 37, 43).

LUGOJ (Banat). Lt. Major Pupăzan Nicolae (4480, 82, 95, 99—501, 03, 05—09, 12, 17, 19, 20, 22, 29, 31, 33, 35—44, 46, 52, 56, 61, 64, 68, 75, 77, 78, 80, P), Cl. VII. Neamţu Ioan (E: 1617, 19, 20, 22, 25, 28, 31, 42, 43). Cl. VIII. Brînda M. Rodica (E: 1582—86, 88—91, 93—97), Harhoi Voichiţa (4475, E: 1584, 85, 89, 1, 93, 98, 600, 03, 05, 10, 18), Lăzărescu I. Mircea (E: 1583—85, 87—98, 600, 07, 08, 10, 11, 14, 18, 20, 21, 27, 29), Popescu Viorel (4517, 19, 43, 75, E: 1583—91, 93, 94, 96, 97, 99—605, 07—14 16—25, 28, 31, 32), Popovici Mariana (4433, 561, E: 1583, 87, 93—95, 97—99, 604, 05, 16—21, 23—29, 31, 34, 35, 37, 46, 48—50, 52). Cl. IX. Harhoi Mircea (4517, 19, 43, 75, E: 1583—91 94, 96, 97, 99—605, 07—14. 16—25, 28, 31, 32). Cl. X. **Boldea Ioan** (4425, 29, 53, 61, 67, 69, 72—75, 78, 81, 86—89, 94, 95, 97, 503, 06, 07, 09, 10, 16, 17, 19, 22, 25—29, 31—33, 36—40, 43). Cl. XI. **Iorga Valeriu** (4419, 20, 24, 29, 38, 44, 47, 51—53, 55, 60—63, 66, 68, 71—74, 80—84, 89, 90, 92, 97, 99, 505—11, 13, 19, 22, 29—31, 33, 35—40, 42, 43).

MĂRĂŞEŞTI (Galaţi). Cl. XI. **Anghel Vasile** (4419, 21, 22, 31, 32, 34, 37, 42—44, 61, 67, 72, 81, 83, 84, 86, 94—600, 03—06, 09, 18, 19, 27, 33, 38—40, 43, 49, 54, 62, 63, 70; N - Asupra pierderilor de curent prin perditanţă şi efectul Corona).

MEDIAŞ (Braşov). Cl. VIII. Brădişteanu Adrian (E: 1600, 04, 05, 08, 10, 17, 18, 20, 21, 23, 27, 28, 31). Cl. X. Birck Hans (4444, 47, 81, 83, 84, 96), Roth Siegfried (4444, 47, 81, 83, 84, 96).

MIZIL (Ploieşti). Cl. X. Oprea Maria (4474, 83, 84, 504, 09, 10, 17, 19, 27, 36, 39).

MOINEŞTI (Bacău). Cl. XI. Popa Gheorghe (4419—22, 29, 31, 34, 41, 43, 44, 52).

MORENI (Ploieşti). Ş.m. Cl. VII. Stiopu Doru (E: 1583—85, 87, 89—93, 96), Tocan Mihail (E: 1582, 83, 86, 87, 89, 91—94, 98, 99, 605—07, 09, 11, 12, 14, 20, 26, 27, 31). Cl. X. Ciobanu Ion (4469, 72, 81, 83, 84, 88, 97, 99, 504, 05, 09, 22, 31), Marinescu Alexandru (4419, 20, 33, 47, 72, 80, 81, 83, 84, 96, 505, 06, 09, 33, 40, 43). Cl. XI. Paraschivoiu Ioan (4419, 21, 22, 27, 31, 34, 41—43, 53, 56).

NĂSĂUD (Cluj). Ş.m. 2 George Coşbuc. Cl. VIII. Marţian Ieronim (E: 1621, 28, 43, 44, 47), Pleş Gheorghe (E: 1600, 02, 06—08, 11, 16—18, 20—22, 24, 27).

OLTENI (Videle, Bucureşti). Ş.m. Cl. VIII. Ionescu M. Ionel (E: 1582—84, 88—90, 93, 95, 97, 600, 10, 13, 15, 20).

ONEŞTI (Baucău). Ş.m. 1. Cl. IX. Andrei Iulian (4420, 33, 44, 52, 53, 81, 83, 84, 509, 19), Toţa Ioan (4463, 75, 81, 90, 96, 99, 509, 19, 38, 43).

ODOBEŞTI (Galaţi). Dragomir Constantin (4467, 71, 73, 83, 86, 95, 503, 09, 16, 36).

OKSZÁCOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR

CĂTRE REZOLVITORII DE PROBLEME

Corespondenții care ne trimit probleme rezolvate trebuie să redacteze fiecare problemă separat, însoțind-o de toate calculele necesare și de figuri desenate cu îngrijire. Nu se vor trimite soluțiile mai multor probleme pe aceeași foaie. Problemele rezolvate de fizică se vor trimite separat, iar pe plic se va scrie: *Pentru redacția de fizică.*

Se primesc lunar cel puțin zece soluții numai la problemele și exercițiile din ultimele trei numere apărute. Pe plic se va scrie localitatea și școala pe care o urmează rezolvitorii, pentru a se evita confuzii la întocmirea rubricii rezolvitorilor de probleme și a listei celor evidențiați. Soluții la problemele propuse pentru școala de 7 ani se primesc numai de la elevii claselor V—VIII, sau ai școlilor profesionale.

Problemele care se propun de către colaboratorii revistei să fie clar alcătuite și însoțite de soluții, să fie personale, iar nu luate din cărți sau reviste. Elevii sînt sfătuiți să înceapă a propune probleme numai după ce au rezolvat un număr destul de mare de exerciții și probleme. Problemele propuse, dar necorespunzătoare, nu se pot publica. Dacă un corespondent constată că unele probleme propuse au fost publicate în cărți sau reviste, este rugat să ne arate precis volumul și pagina unde a mai apărut enunțul sau soluția problemei respective.

Corespondentul nostru care a citit și a înțeles deplin multe din soluțiile publicate, a rezolvat multe din problemele propuse, poate și este îndemnat să încerce să schițeze cîte o notă rezultată dintr-o observație făcută cu ocazia rezolvării unei chestiuni mai grele. Aceste note să fie *refăcute de mai multe ori înainte de a fi trimise*, pentru ca redactarea lor să fie *cît mai clară și concisă*. Figurile să fie făcute separat. În redactare se vor evita prescurtările. Nu se va scrie: $\parallel = ; \sim ; * * * ; \perp ; \parallel ;$ Tr., etc., iar trecerea de la un calcul la altul să fie explicată pentru a se putea urmări ușor desfășurarea unei demonstrații. Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

La publicarea problemelor rezolvate se vor menționa rezolvitorii care au dat o bună redactare și o soluție interesantă, sau mai multe metode de rezolvare.

Tovarășii colaboratori elevi sînt rugați să ne trimită date asupra activității lor extrașcolare la matematică și la fizică, asupra activității cercurilor de matematică și de fizică la care iau parte, pentru ca apoi, prin revistă, să se poată realiza cu succes un schimb de experiență. Dările de seamă concrete se vor publica în G.M.F.-B.

Autorii sînt rugați ca la întocmirea articolelor și notelor să țină seama de următoarele: articolele sau notele să fie scrise clar cu cerneală sau dactilografiate la două rînduri și pe o singură parte a foii, figurile să fie desenate îngrijit și pe o foaie separată. Problemele propuse să fie însoțite de una sau mai multe soluții.

Autorul să semneze clar lucrarea personală pe care o trimite pentru publicat, de asemenea să scrie adresa și data trimiterii lucrării.

— Materialele care nu corespund profilului G.M.F.-B, nu vor fi publicate.

Colecții și numere din anii precedenți

Societatea de Științe Matematice și Fizice din R.P.R., posedă exemplare mai vechi din G.M.F.-B, și G.M.F.-A.

Cititorii noștri își pot procura colecții ca și numere disparate, depunînd banii la poștă prin mandat poștal pe numele Societății de Științe Matematice și Fizice, strada Academiei nr. 14, contul 070.004 la B.R.P.R., filiala Lenin.

Prețul unui exemplar este de lei 3 pentru G.M.F.-A și de lei 1,50 pentru G.M.F.-B. Cheltuielile de transport sînt de 0,20 lei de exemplar.

ABONAMENTE — Societatea de Științe Matematice și Fizice din R.P.R. primește abonamente începînd cu nr. 1/1961 la oricare din publicațiile sale: a) Pentru instituții, școli, biblioteci la prețul de lei 60 anual, pentru fiecare din periodicile sale: G.M.F.-A, G.M.F.-B, M.F.L., Bulletin Mathématique și 40 lei anual la „Mathematica".

b) Pentru profesori și elevi la prețul de 18 lei la G.M.F.-B sau M.F.L. de 36 lei la G.M.F.-A, de 60 lei la Bulletin Mathématique și de 40 lei la „Mathematica".

— Fiecare abonat este rugat să facă cunoscută G.M.F.-B și altor colegi, pentru a face abonamentele din vreme în vederea planificării tirajului lunar.

— Abonamentele se pot face individual sau colectiv prin oficiile poștale locale sau prin factorii poștali.

BIBLIOTECA SOCIETĂȚII DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE DIN R.P.R.

1. E. RUSU	Bazele teoriei numerelor.
2. A. I. MARKUȘEVICI	Șiruri recurente.
3. N. N. VOROBIEV	Numerele lui Fibonacci.
4. P. S. ALEXANDROV	Introducere în teoria grupurilor.
5. I. S. SOMINSKI	Metoda inducției matematice.
6. GH. MIHOC	Elemente de calculul probabilităților.
7. H. IONESCU	Calcule numerice.
8. A. I. MARKUȘEVICI	Arii și logaritmi.
9. A. I. GHELFOND	Rezolvarea ecuațiilor în numere întregi.
10. O. SACTER	Despre conice și alte curbe.
11. ION IONESCU	Maxime și minime geometrice.
12. F. I. ZIGHEL	Cometele.
13. S. SKLOVSKI	Radioastronomia.
14. V. ATANASIU	Structura materiei.
15. V. V. SARONOV	Soarele și observarea lui.
16. O. KREINDLER	Elemente de calcul vectorial.
17. B. B. KUDRIAVȚEV	Experiențe simple cu ultrasunete.
18. M. V. PENTKOVSKI	Nomograme.
19. A. KAHANE	Elemente din teoria congruențelor de drepte.
20. GH. ȚIȚEICA	Culegere de probleme de geometrie, (revăzută și completată de G. D. SIMIONESCU).
21. A. HALANAY	Introducere în teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale.
22. N. STĂNESCU	Electronul.
23. V. SERGIESCU	Introducere în fizica solidului.
24. G. N. BERMAN	Cicloida.
25. C. BORȘ	Noțiuni de geometrie proiectivă.
26. AL. SANIELEVICI	Introducere în radioactivitate.
27. M. HEROVANU	Introducere în fizica atmosferei.
28. C. G. BEDREAG	Bibliografia fizicii romîne.
29. I. S. DUBNOV	Erori în demonstrațiile geometrice.
31. C. POPOVICI	Stelele, date fizice, structura internă, originea și evoluția lor.
32. C. DRIMBA	Elemente de mecanică cerească.
33. C. IONESCU-BUJOR	Elemente de transformări geometrice (I).
34. NICOLAE MILEA	Elemente de geomagnetism.
35. GH. A. CHIȚEI	Metode pentru rezolvarea problemelor de aritmetică.
36. G. PETRESCU	Cutremure de pămînt.
37. C. IONESCU-BUJOR	Elemente de transformări geometrice (II).
38. O. SACTER	Olimpiade matematice.
39. A. I. MARKUȘEVICI	Numere complexe și reprezentări conforme.
40. I. S. GRADSTEIN	Teorema directă și reciprocă.
41. A. I. HINCIN	Fracții continue.
42. V. A. USPENSKI	Unele aplicații ale mecanicii în matematică.
43. V. G. BOLTEANSKI	Ce este derivarea?
44. G. N. BERMAN	Despre numere și studiul numerelor.

Tipografia „Învățămîntului", București — c. 1510

Lei 1,50

E 1426

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE
DIN R. P. R.

GAZETA MATEMATICĂ ȘI FIZICĂ

(SERIA B)

PUBLICAȚIE LUNARA PENTRU TINERET

Anul XII septembrie 1961

9

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

(SERIA B)

Anul XII, nr. 9 septembrie 1961

S U M A R U L

		Pag.
1.	La începutul noului an şcolar	513
2.	Fascicule de cercuri de Emil Morţun	515
3.	Transformatori de Eugen Boia	520
4.	Despre accelerația lui Coriolis de Al. Stoenescu şi C. Ionescu-Ţiu	527
5.	Note matematice de Gheorghe Oprişan, Şerban Strătilă şi Nicolae Peligrad	530
6.	Efecte chimice ale luminii de A. Ababei	539
7.	Din aplicaţiile practice ale firului cu plumb şi ale pendulului (traducere din lb. rusă)	545
8.	Probleme rezolvate (4297, 4298, 4299, 4300, 4328, 4404, 4405, 4412, 4416, 4418, 4433, 4435, 4450, E: 1600, 1602, 1605, 1607, 1608, 1609, 1610)	548
9.	A treia Olimpiadă internaţională de matematică de la Veszprém (4868—4873)	563
10.	Probleme propuse (4874—4914)	564
11.	Exerciţii şi probleme propuse pentru şcoala de 7 ani (E: 1727—1739)	570
12.	Rubrica rezolvitorilor de probleme	571

ANUL XII **9** **SEPTEMBRIE**

O parte din materialele publicate în acest număr a fost asigurată de către filiala Argeş a Societăţii de ştiinţe matematice şi fizice din R.P.R.

COMITETUL DE REDACŢIE

Ailincăi M., profesoară; *Atanasiu V.*, lector, redactor pentru fizică; *Boiangiu D.*, lector; *Ionescu-Bujor C.*, prof. univ.; *Ionescu-Ţiu C.*, profesor, redactor pentru matematică; *Manolescu St.*, profesoară; *Muşat I.*, profesor; *Petrovanu A.*, profesor; *Sacter O.*, conf. univ., redactor şef; *Simionescu D. Gh.* conf. univ.; *Csiki Zoltan*, asistent.

REDACŢIA: Str. Academiei, 14 — Tel. 14.46.53 — Bucureşti I

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar putea interesa redacţia noastră se vor trimite pe adresa de mai sus.

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ
(SERIA B)
PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET
Anul XII, nr. 9 septembrie 1961

LA ÎNCEPUTUL NOULUI AN ŞCOLAR

Noul an şcolar se deschide în patria noastră sub semnul luptei clasei muncitoare şi a întregului popor pentru realizarea măreţelor sarcini trasate de Congresul al III-lea al Partidului Muncitoresc Romîn privind desăvîrşirea construcţiei socialismului.

Congresul al III-lea al partidului nostru a trasat sarcini importante pentru dezvoltarea învăţămîntului din ţara noastră: trecerea treptată la învăţămîntul general de 8 ani, astfel încît durata şcolii medii de cultură generală va ajunge la 12 ani; dezvoltarea reţelei de învăţămînt cu instruire în producţie a elevilor, în scopul îmbinării tot mai strînse a învăţămîntului cu munca productivă.

În cuvîntarea rostită cu prilejul celei de la XVII-a aniversări a eliberării patriei noastre de sub jugul fascist tov. Gheorghe Gheorghiu-Dej a arătat că: „învăţămîntul este pe deplin gratuit, statul suportînd toate cheltuielile".

Caracterul structural nou al şcolii de 8 ani este marcat nu numai printr-o prelungire cu un an a duratei de şcolarizare generală şi obligatorie, dar şi prin organizarea sa ca unitate pedagogică. Anul în plus permite completări în planul şi în programele de învăţămînt, astfel încît să se realizeze o repartizare mai judicioasă a volumului de cunoştinţe ce trebuie însuşit în fiecare clasă, respectîndu-se particularităţile de vîrstă ale elevilor, o pregătire mai temeinică a şcolarilor.

Noile şcoli medii cu instruire în producţie, a căror număr a crescut în acest an la peste 100, au drept scop să dea elevilor, pe lîngă cunoştinţele de cultură generală, cunoştinţe de tehnologie privitoare la diferite ramuri de producţie, precum şi deprinderi practice de muncă în producţie.

Învăţămîntul seral, în continuă dezvoltare, asigură tinerilor muncitori o pregătire de nivel cultural-ştiinţific ridicat, ceea ce se refelctă în creşterea productivităţii muncii. Ei muncesc şi învaţă, iar din rîndurile lor s-au ridicat şi se ridică noi şi noi cadre bine pregătite, care pot face faţă cu succes sarcinilor tot mai mari şi mai complexe puse de economia şi cultura noastră în plină înflorire. Prin grija partidului şi a statului s-au creat toate condiţiile pentru ca învăţămîntul seral să se desfăşoare la un nivel corespunzător dezvoltării impetuoase a culturii şi tehnicii din ţara noastră.

În anii puterii populare, rețeaua învățămîntului a căpătat în țara noastră o dezvoltare uriașă. Numai în actualul an de învățămînt s-au înființat 165 noi școli elementare și medii. Vor învăța în acest an 2 659 800 elevi față de 2 438 406 de elevi anul trecut. Vor funcționa în acest an 780 școli în limbile minorităților naționale, cu 235 181 elevi înscriși. Dacă în urmă cu zece ani existau 42 de școli și 5 secții serale de cultură generală cu 7 100 elevi, în anul școlar 1961—1962 vor învăța în clasele a V—XI ale celor 135 școli și 466 de secții serale, 104 500 muncitori-elevi. În noul an au fost date în folosință 4 005 săli de clasă. Încă 1 244 clase vor fi terminate pînă la 31 decembrie 1961. Doar cheltuielile pentru materialele didactice repartizate școlilor în noul an școlar însumează 14 milioane lei.

Mărețele realizări obținute în domeniul învățămîntului, în perioada care s-a scurs de la eliberarea Romîniei, constituie o mică parte din succesele înregistrate de poporul nostru muncitor sub conducerea partidului pe drumul construirii și desăvîrșirii socialismului. Condusă cu înțelepciune de partid, școala noastră este astăzi în măsură să dea patriei elemente pregătite să facă față cu cinste sarcinilor care le revin pentru victoria deplină a socalismului în țara noastră și trecerea spre comunism.

Organizațiile UTM sînt chemate să sprijine și mai mult școala în munca de educare comunistă a elevilor, în dezvoltarea interesului lor pentru învățătură, pentru întărirea legăturii dintre învățămînt și munca productivă, să sprijine în permanență pe muncitorii-elevi în frecventarea regulată a cursurilor și în însușirea temeinică a cunoștințelor predate în școală.

Societatea de științe matematice și fizice din R.P.R. alături de organizațiile de tineret din școli va contribui prin publicațiile sale, prin organizarea cercurilor de matematică și fizică pe oraș, prin organizarea și desfășurarea olimpiadelor, precum și prin alte forme de activitate, la ridicarea nivelului de cunoștințe, la dezvoltarea legăturii dintre teorie și practică.

Redacția G.M.F.—B, alături de ceilalți factori care contribuie la sprijinirea învățămîntului va căuta să lărgească tot mai mult orizontul de cunoștințe al elevilor în domeniul matematicii și fizicii, să completeze și să aprofundeze capitolele studiate la cursuri.

Prin articole, probleme, note și diferite alte materiale va căuta să formeze la elevi o bază solidă de cunoștințe, va căuta să realizeze o tot mai strînsă legătură a teoriei cu practica, contribuind în acest fel la traducerea în viață a sarcinilor trasate învățămîntului de către Congresul al III-lea al P.M.R.

Folosind din plin condițiile optime de învățămînt create, elevii vor trebui să se străduiască pentru a-și însuși temeinic cunoștințele predate, răspunzînd astfel prin fapte grijii părintești pe care le-o poartă partidul nostru.

Societatea de științe matematice și fizice urează tineretului studios spor la învățătură în noul an școlar!

FASCICULE DE CERCURI

de *EMIL MORȚUN*
profesor emerit al R.P.R., Pitești

Considerăm mulțimea cercurilor ce trec prin două puncte date P și Q. Orice punct M al secantei comune PQ are aceeași putere $(MP \cdot MQ)$ față de orice cerc din mulțimea considerată. Rezultă că două cercuri oarecare din mulțimea acelora care trec prin P și Q, au același ax radical și anume, dreapta PQ.

Luînd această proprietate ca definiție, vom numi fascicul de cercuri mulțimea cercurilor în care două cercuri oarecari au ca ax radical aceeași

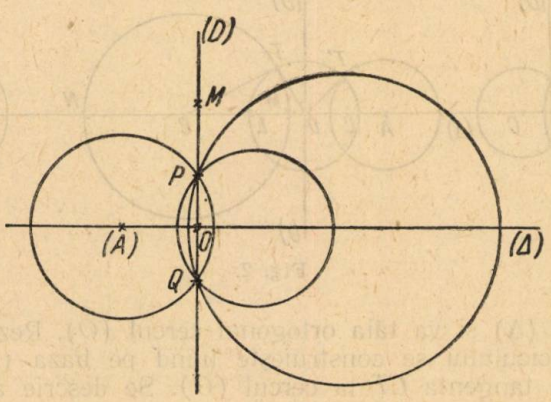


Fig. 1.

dreaptă, care se numește axa fasciculului. Axa fasciculului este deci, dreapta ale cărei puncte au aceeași putere față de toate cercurile fasciculului.

Noțiunea de ax radical fiind mai generală decît aceea de secantă comună (două cercuri exterioare au ax radical, dar nu au secantă comună) vom putea defini fasciculele de cercuri sub o formă mai generală decît cea arătată în exemplul de mai sus (fig. 1), ceea ce ne va conduce și la o clasificare a fasciculelor de cercuri.

Să considerăm un cerc (A) al fasciculului și axul fasciculului (D). Deoarece axul radical a 2 cercuri este perpendicular pe linia centrelor urmează că toate cercurile fasciculului au centrele lor așezate pe dreapta ce trece prin centrul cercului (A) și este perpendiculară pe axa fasciculului. Această dreaptă se numește baza fasciculului și o vom nota prin (Δ).

În cele ce urmează vom nota cu (D) axa fasciculului, cu (Δ) baza fasciculului, cu O intersecția lor, $d = AO$ și R raza cercului dat (A).

Puterea punctului O față de cercul (A) este: $d^2 - R^2$.

Vom arăta că prin cunoașterea unui cerc (A) al fasciculului și al axei sale (D) putem determina orice cerc al fasciculului și deci, întregul fascicul.

Distingem următoarele cazuri (fig. 2):

a) Fascicule de genul I. $d < R$ și deci $d^2 - R^2 < O$ (fig. 2 a). Axul (D) al fasciculului taie cercul dat (A) în două puncte P și Q și deci,

orice cerc al fasciculului trece prin aceste 2 puncte. Reciproc, orice cerc ce trece prin P și Q este un cerc al fasciculului.

b) Fascicule de genul II. $d > R$ și deci $d^2 - R^2 > 0$ (fig. 2, b). Axul (D) al fasciculului nu intersectează cercul (A). În acest caz puterea lui O față de cercul (A) este:

$$OT^2 = d^2 - R^2.$$

Să considerăm cercul (O), cu centrul în O și raza OT. Acest cerc taie ortogonal cercul (A). Punctul O fiind pe axa (D), cercul (O) va tăia ortogonal toate cercurile fasciculului.

Un cerc oarecare al fasciculului va avea centrul într-un punct oare-

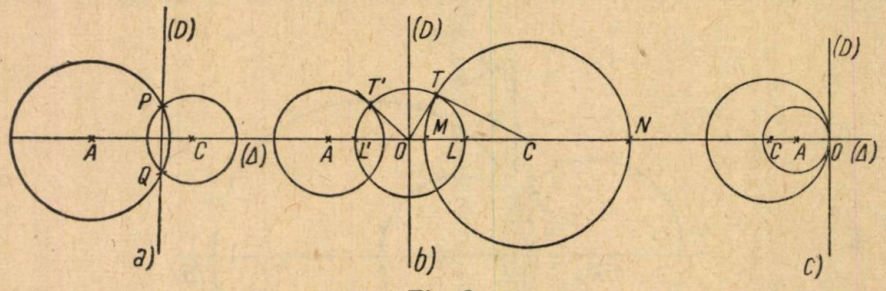


Fig. 2.

care C al bazei (Δ) și va tăia ortogonal cercul (O). Rezultă că un cerc oarecare al fasciculului se construiește luînd pe baza (Δ) un punct C din care ducem tangenta CT la cercul (O). Se descrie apoi un cerc cu centrul în C și cu raza CT.

Raza unui cerc al fasciculului se poate construi numai dacă punctul C de pe baza fasciculului este exterior cercului (O), adică segmentului LL'. Cînd punctul C se confundă cu L sau L', cercul (C) are raza egală cu zero și de aceea, aceste două puncte pot fi considerate ca cercuri de rază nulă ale fasciculului dat.

Punctele L și L' se numesc puncte limită ale fasciculului sau punctele lui Poncelet.

c) Fascicule de genul III; $d = R$ și deci $d^2 - R^2 = 0$ (fig. 2,c).

Toate cercurile fascicolului sînt tangente în O axei (D). Acest caz singular este mai puțin interesant și se poate obține prin particularizarea fasciculelor de genul I, cînd P și Q se confundă. Un cerc oarecare al fasciculului se poate construi ușor, deoarece el are centrul C pe baza (Δ) și raza CO.

Din cele arătate pînă aici se constată că putem construi un cerc oarecare al fasciculului, dacă ne este dat un cerc al fasciculului și axul său. Urmează că un fascicul de cercuri este bine determinat prin cunoașterea unuia din cercurile sale și a axului său.

Vom arăta acum, 2 proprietăți ale punctelor limită (Poncelet).

I. Orice cerc al unui fascicul de gen II intersectează baza în 2 puncte conjugate armonic cu punctele limită. Într-adevăr, OT fiind tangentă cercului (C) avem:

$$OT^2 = OM \cdot ON \quad \text{sau} \quad OL^2 = OM \cdot ON$$

Această relație arată că diviziunea $(LL'MN)$ este armonică.

II. Un punct limită are aceeași polară față de toate cercurile fasciculului

$$CT^2 = CL \cdot CL' \quad \text{sau} \quad CM^2 = CL \cdot CL'$$

Această relație arată că LL' împarte armonic segmentul MN și deci, polara lui L față de un cerc oarecare (C) al fasciculului trece prin L' și este perpendiculară pe (Δ).

Dreapta (Δ) și punctul (L') fiind independente de cercul fasciculului în raport cu care s-a luat polara lui L, înseamnă că această dreaptă polară

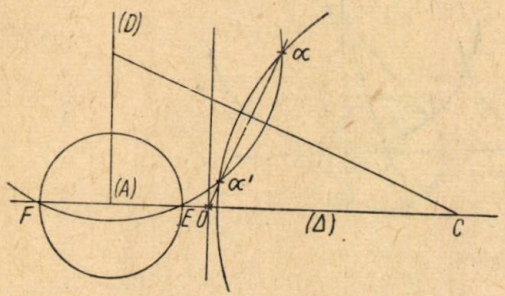


Fig. 3.

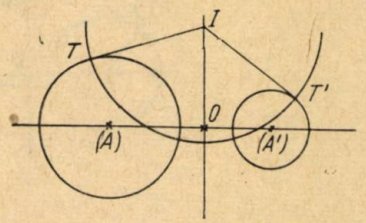


Fig. 4.

luată față de orice cerc al fasciculului va fi aceeași.

Teoremă fundamentală. Prin orice punct al planului trece un cerc al fasciculului și numai unul singur.

Fie α un punct al planului.

a) Fasciculul este de genul I. Cercul căutat este cercul ce trece prin punctele P, Q și α (fig. 2).

b) Dacă fasciculul este de genul III, cercul căutat este cercul ce trece prin α și este tangent în O dreptei (D) (fig. 2).

c) O importanță deosebită prezintă cazul II (fig. 3).

Fosciculul este determinat de cercul (A) și axul său (D) și fie α un punct al planului. Să arătăm că prin α trece totdeauna un cerc al fasciculului.

Unim O cu α; dreapta $O\alpha$ va tăia cercul căutat într-un punct α', deocamdată necunoscut. Problema se reduce la aflarea punctului α'. Notăm cu E și F punctele cercului (A) așezate pe (Δ). O fiind așezat pe axul vertical al celor 2 cercuri există relația:

$$O\alpha' \cdot O\alpha = OE \cdot OF$$

care arată că punctele α, α', E și F sînt conciclice.

Urmează că punctul α' este al doilea punct de intersecție al cercului (αEF) cu dreapta $O\alpha$. Punctul α' odată determinat, centrul C al cercului căutat se va găsi la intersecția mediatoarei segmentului $\alpha\alpha'$ cu baza (Δ), iar raza va fi $C\alpha$.

Teoremă. Orice cerc ortogonal la două cercuri ale unui fascicul este ortogonal la toate cercurile fasciculului (fig. 4).

Fie (I) un cerc ortogonal cercurilor (A) și (A'). Centrul său I este situat pe axul radical al cercurilor (A) și (A'), adică pe axul fasciculului.

Puterea punctului I față de (A) și (A') este IT, însă, I fiind pe axul fasciculului are aceeași putere față de toate cercurile fasciculului; deci, cercul I este ortogonal față de toate cercurile fasciculului.

Această teoremă se poate enunța și sub altă formă: orice cerc care are centrul pe axul fasciculului și taie ortogonal unul din cercurile fasciculului, taie ortogonal toate cercurile fasciculului.

Fascicule conjugate. Toate cercurile ortogonale unui fascicul (F) formează un alt fascicul (F'). Dacă fasciculul (F) este de genul I, fasciculul

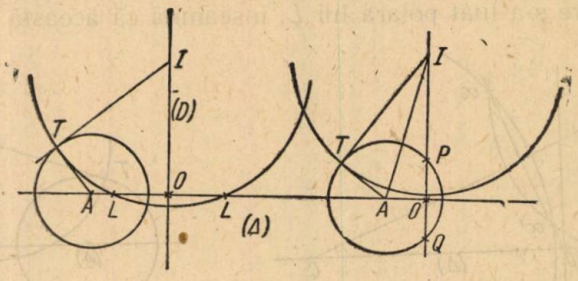


Fig. 5.

(F') este de genul II și reciproc. Fasciculele (F) și (F') se numesc fascicule conjugate.

Fie (F) un fascicul definit prin cercul (A) și axul (D). Orice cerc ortogonal la cercurile acestui fascicul, conform teoremei precedente, va avea centrul său I pe axul (D) al fasciculului (F) și raza IT. Făcînd să varieze I vom obține o infinitate de cercuri ortogonale cercurilor fasciculului (F).

Vom arăta că toate aceste cercuri formează un fascicul (F') avînd ca axă baza $(\triangle)$ a fasciculului (F) și ca bază, axa $(\triangle)$ a fasciculului (F). Să calculăm puterea punctului O față de cercul (I) în ambele cazuri arătate de fig. 5. Această putere este:

$$OI^2 - IT^2; \quad \text{însă:} \quad IT^2 = AI^2 - R^2$$

R fiind raza cercului (A). Urmează că:

$$OI^2 - IT^2 = OI^2 \quad AI^2 + R^2 = -OA^2 + R^2 = |d^2 - R^2|; \; d = OA.$$

Expresia $d^2 - R^2$ fiind constantă, urmează că O are aceeași putere față de toate cercurile (I). Centrele acestor cercurii fiind pe (D), axul radical a două din aceste cercuri este perpendicular în O pe (D), adică este tocmai baza (Δ) a fasciculului (F).

Toate cercurile (I) avînd 2 cîte 2 același ax radical (Δ), formează un fascicul avînd ca ax (Δ) și ca bază axul (D) al fasciculului.

Dacă (F) este genul I: $d^2 - R^2 < 0$; atunci: $OI^2 - IT^2 > 0$ și deci (F') este de genul II. În acest caz, punctele P și Q prin care trec cercurile lui (F) sînt punctele lui Poncelet ale lui (F').

Dacă (F) este de genul II: $d^2 - R^2 > O$, atunci $OI^2 - IT^2 < O$ și deci (F') este de genul I.

Cercurile (I) vor tăia baza (Δ) în 2 puncte L și L', deoarece $OL = OL' = \sqrt{d^2 - R^2}$, aceste puncte sînt punctele lui Poncelet ale fasciculului (F).

Orice cerc al unui fascicul intersectează baza (Δ) în 2 puncte M și N (fig. 6). Punctul O avînd aceeași putere față de toate cercurile fasciculului, urmează că produsul: $OM \cdot ON$ este constant, adică avem relația: $OM \cdot ON = k$, k fiind o constantă pozitivă sau negativă.

Această relație arată că M și N sînt puncte corespondente ale unei involuții al cărui punct central este punctul O.

Această proprietate ne dă posibilitatea să prezentăm fasciculele de

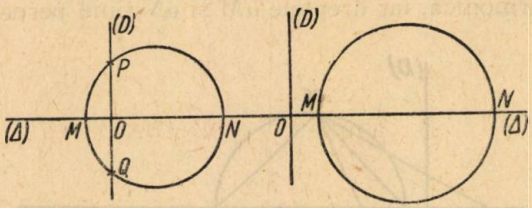


Fig. 6.

cercuri din alt punct de vedere și anume, legate de proprietățile punctelor omoloage ale unei involuții.

Considerăm o dreaptă (Δ), un punct O al acestei drepte și un număr oarecare k, pozitiv sau negativ (fig. 6).

Pe (Δ) luăm 2 puncte M și N astfel încît să avem relația:

$$OM \cdot ON = k$$

care exprimă că M și N sînt puncte omoloage ale unei involuții. La fiecare poziție a lui M corespunde o poziție și numai una, a lui N și reciproc.

Deoarece M poate lua o infinitate de poziții pe (Δ) și N va lua pe (Δ) o infinitate de poziții. Obținem deci, o infinitate de perechi de puncte (M, N). Vom arăta că toate cercurile descrise pe MN ca diametru, formează un fascicul.

Într-adevăr, punctul O are aceeași putere (k) față de toate cercurile descrise pe MN ca diametru. Aceste cercuri, avînd centrele pe (Δ), axul radical a 2 cercuri oarecare este perpendiculara (Δ) în O și deci, cercurile care au MN ca diametru formează un fascicul.

I. $k < O$, atunci M și N sînt deoparte și de alta a punctului O. Cercurile fasciculului taie axa (D) în P și Q. Triunghiul (MNP) fiind dreptunghi: $OP^2 = OM \cdot ON = -k$; $OP = OQ = \sqrt{-k}$.

Deci, punctele P și Q sînt fixe, iar fasciculul este de genul I.

II. Avem $k > O$, atunci M și N sînt ce aceeași parte a punctului O, cercurile descrise cu MN ca diametru nu taie axa (D). Involuția de pe (Δ) are puncte duble reale L și L', care sînt astfel încît:

$$OL = OL' = \sqrt{k}$$

fasciculul este de genul II, iar L și L' sînt punctele lui Poncelet.

Altă demonstrație a teoremei fundamentale.

S-a demonstrat următoarea teoremă: prin fiecare punct al planului trece un cerc al unui fascicul și numai unul singur.

Vom da o nouă demonstrație acestei teoreme pe baza celor arătate mai sus.

Fie α un punct al planului.

I. Dacă fasciculul este de genul I, cercurile sale trec prin P și Q. Construcția revine la a construi un cerc ce trece prin punctele P, Q și α.

II. Dacă fasciculul este de genul II (fig. 7), observăm că relația:

$$OM \cdot CN = k \text{ se mai poate scrie } = OM \cdot ON = OL^2$$

care arată că punctele limită împart armonic segmentul MN. Diviziunea $(LL'MN)$ fiind armonică, iar dreptele αM și αN fiind perpendiculare, urmează că aceste drepte sînt bisectoarele unghiului $L\alpha L'$. Construcția cercului căutat este următoarea: Se unește α cu L și L' și se duc bisectoarele unghiului LL', care taie (Δ) în M și N. Cercul căutat este cercul circumscris triunghiului αMN.

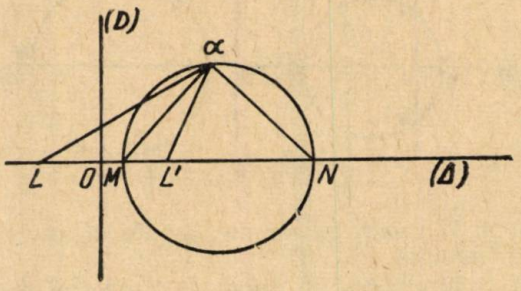


Fig. 7.

TRANSFORMATORI

de prof. EUGEN BOIA, Pitești

Unul din marile avantaje pe care le prezintă energia electrică în raport cu celelalte forme ale energie este și acela că ea poate fi transportată cu ușurință la distanță. Dar se pune problema unui transport în care pierderile de energie sub formă de căldură (efectul Joule-Lenz) și costul conductorilor să fie cît mai mici.

Din expresia puterii curentului alternativ $UI\cos\Phi$ rezultă că pentru același $\cos\Phi$, cu cît U este mai mare cu atît I va fi mai mic și, prin urmare, căldura degajată RI^2t și secțiunea conductorilor se vor micșora. Se demonstrează că secțiunea conductorilor este invers proporțională cu pătratul tensiunii.

Generatorii de curent alternativ se construiesc — în general — pentru tensiuni de cel mult 11 kV, insuficientă în cazul transportului la distanță mare. Ridicarea tensiunii peste această limită și respectiv coborîrea ei la valoarea necesară consumatorilor de curent (120—500 V) se face cu ajutorul transformatorilor.

Ideea de a transforma curentul alternativ aparține savantului rus Pavel Nicolaevici Iablocicov. Bazat pe principiul acestuia Ivan Filipovici Uşaghin (1855—1919) a creat primul trans-

formator din lume, experimentat la 28 august 1882. De atunci, teoria și construcția transformatorilor s-au dezvoltat rapid. În Uniunea Sovietică se construiesc azi linii de transport de cca 2000 km și respectiv, transformatorii necesari ridicării tensiunii depășesc tensiunea de 500 kV.

Principiul de funcționare al transformatorilor

Transformatorul este un aparat electromagnetic static destinat transformării unui sistem de curent alternativ — primar — în altul — secundar — avînd în general alte caracteristici, în special altă tensiune și altă intensitate.

Se compune din: a) miez de fier, ce are rolul de a conduce fluxul magnetic și b) două (uneori, cîteva) înfășurări — primară și secundară — dintre care una e de joasă tensiune și alta de înaltă tensiune.

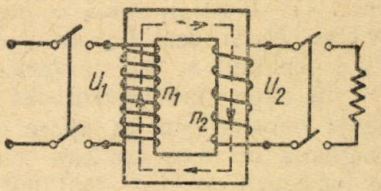


Fig. 1.

Să urmărim schema de principiu din figura 1 în care toate mărimile referitoare la înfășurarea primară se notează cu indicele 1 (de ex. P_1, U_1 etc.), iar cele referitoare la înfășurarea secundară cu indicele 2 (de exemplu P_2, U_2 etc.). Presupunem că circuitul înfășurării secundare este deschis (transformatorul funcționează în gol), iar la bornele înfășurării primare se aplică o tensiune alternativă sinusoidală.

Curentul care străbate această înfășurare va crea în miez un flux magnetic variabil, care va induce t.e.m. în ambele înfășurări. Considerînd că înfășurările sînt străbătute de același flux (nu sînt scăpări), rezultă că valorile instantanee ale t.e.m. induse sînt: $e_1 = -n_1 \frac{d\Phi}{dt}$, $e_2 = -n_2 \frac{d\Phi}{dt}$, în care cu n s-a notat numărul de spire, iar cu Φ valoarea instantanee a fluxului magnetic ce străbate înfășurarea (în weberi).

$$\text{Dar, } \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d(\Phi_m \cos \omega t)}{dt} = -\omega \Phi_m \sin \omega t,$$

deci $e_1 = n_1 \Phi_m \omega \sin \omega t$ și $e_2 = n_2 \omega \Phi_m \sin \omega t$. Pentru $\sin \omega t = 1$, t.e.m. induse au valori maxime:
$E_{1m} = n_1 \omega \Phi_m = 2\pi \nu n_1 \Phi_m$, iar valorile eficace vor fi:
$E_1 = \frac{E_{1m}}{\sqrt{2}} = 4{,}44\, n_1 \nu \Phi_m$ și $E_2 = 4{,}44\, n_2 \nu \Phi_m$, în care ν = frecvența curentului alternativ, și Φ_m = fluxul maxim.

Rezultă că, $\frac{E_1}{E_2} = \frac{n_1}{n_2} = k$, adică raportul dintre t.e.m. ale înfășurărilor transformatorilor sînt egale cu raportul dintre numărul de spire. Numărul k se numește „raport de transformare", care poate fi reprezentat — cu aproximație — sub forma raportului dintre tensiunile de mers în gol ale transformatorului ($k = \frac{U_1}{U_2}$), deoarece în acest caz $E_2 = -U_2$, $E_1 \approx U_1$ (cînd fluxul magnetic de scăpări și rezistența înfășurării primare au valori neglijabile).

La mersul în gol în înfășurarea secundară nu există curent, iar în înfășurarea primară este foarte mic — circa 5—8% din curentul nominal (eixstent la funcționarea în sarcină normală). Acest curent se numește „curent de mers în gol" și este în urma lui U_1 cu aproape 90°. El se folosește la magnetizarea oțelului și pentru acoperirea pierderilor prin histerezis și curenți turbionari (puterea absorbită de transformator la funcționarea sa în gol e consumată tocmai pentru a acoperi aceste pierderi).

Căderea de tensiune în înfășurările transformatorului este foarte mică (2—3%) și dacă o neglijăm, rezultă că U_1 va echilibra numai t.c.e.m. E_1 și deci $U_1 = -E_1 = -4{,}44\ n_1\ v\ \Phi_m$. Prin urmare, dacă U_1 = constant și Φ_m = constant.

În clipa cînd înfășurarea secundară va fi închisă asupra unei impedanțe oarecare, în ea apare curentul secundar I^2, care creează un flux magnetic de sens contrar celui creat de curentul primar I_1 și în miez se formează un flux rezultant, numit flux util. Conform raționamentului anterior, fluxul util trebuie să fie egal cu fluxul creat de curentul primar la funcționarea în gol, de aceea acest curent va crește pînă cînd se va conpensa acțiunea demagnetizantă a înfășurării secundare. Deci creșterea curentului de sarcină I_2 — respectiv creșterea puterii $U_2\ I_2$ — duce la creșterea curentului primar I_1 — respectiv la creșterea puterii $U_1\ I_1$ absorbită de transformator de la rețea.

Miezurile de transformatori se fac din fierul cel mai moale și din benzi izolate de tablă de fier. Se reduc astfel pierderile cauzate de curenții F o u c a u l t și fenomenul de histerezis, randamentul transformatorului ajungînd la cca 98%.

Deci:

$$P_1 \approx P_2 \text{ și } \frac{U_1}{U_2} = \frac{I_2}{I_1}, \text{ iar } \frac{I_1}{I_2} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Ce se întîmplă cînd scurtcircuităm înfășurarea secundară.

În acest caz $U_2 = 0$, iar dacă $U_1 = U_1$ nominală, atunci I_2 și deci I_1 vor căpăta valori foarte mari (de peste 10—20 ori valorile nominale) și înfășurările se pot arde. Mărimile ce caracterizează un transformator pot fi determinate prin încercarea de scurtcircuit, care constă în aplicarea unei tensiuni primare pentru care în înfășurări curenții sînt egali cu curenții nominali. Această tensiune scăzută se numește „tensiune de scurtcircuit". (5,5—7,5% U nominală). La încercarea de scurtcircuit, întreaga putere este — practic — cheltuită pentru acoperirea pierderilor în cuprul înfășurărilor.

Tipuri de transformatori.

Transformatorii pot fi clasificați după diferite criterii.

După destinația ce o au, distingem: a) transformatori de forță pentru transportul și distribuția energiei electrice; b) autotransformatori, pentru transformarea redusă a tensiunii; c) regulatori de inducție, pentru reglarea tensiunii în rețelele de distribuție; d) transformatori de măsură, pentru conectarea în circuit a aparatelor de măsură; e) cu destinație specială: pentru sudură, cuptoare electrice etc.

După transformarea de tensiune ce o fac: a) coborîtori de tensiune; b) ridicători de tensiune.

După fazele curentului pe care-l transformă: a) monofazați; b) trifazați; c) polifazați (mai puțini folosiți).

După circuitul magnetic: a) transformatori cu coloane, în care înfășurările se fac pe miez (fig. 2) înfășurarea de joasă tensiune se așază mai aproape de miez și peste ea se așază concentric înfășurarea de înaltă tensiune; b) transformatori de manta, în care înfășurările sînt așezate la mijloc și sînt cuprinse de miez (fig. 3), acest tip este folosit mai rar.

După sistemul de răcire: a) transformatori uscați, cînd răcirea se face cu aer. Sînt folosiți numai pentru puteri mici; b) transformatori în

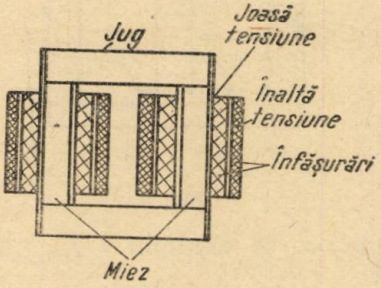


Fig. 2.

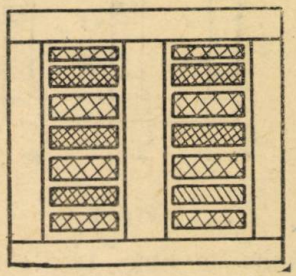


Fig. 3.

ulei, cînd transformatorul se așază într-o cuvă de oțel umplută cu ulei special de transformator (are căldura specifică și constanta dielectrică mari și e bine purificat). Pentru mărirea suprafeței de răcire se folosește cuva tubulară. Cuva se umple complet cu ulei și se leagă cu ajutorul unei țevi cu un mic vas de oțel (6—8% din volumul cuvei) numit cutie de expansiune (conservator) ce se instalează pe capacul cuvei și în care uleiul se poate dilata liber. În transformatorii puternici (peste 30 000 kW, cantitatea de căldură degajată e mare și se recurge la pompe speciale care trimit uleiul din cuvă într-un răcitor special.

Transformatori trifazați.

Alimentarea cu energie electrică a întreprinderilor industriale se realizează mai ales în curent trifazat. În condiții egale, o linie trifazată necesită 3/4 din cantitatea de metal neferos necesară pentru construirea unei linii monofazate. De aceea și transformatorul trifazat a luat locul transformatorului monofazat.

Circuitul magnetic al transformatorului trifazat constă din trei coloane reunite în partea lor inferioară și superioară prin cîte un jug drept prin care se închid fluxurile magnetice (fig. 4). Această construcție a fost propusă de inginerul rus M. O. Dolivo-Dobrovolski.

Pe coloane se așază mai întîi cele trei faze ale înfășurării de joasă tensiune (sîrmă groasă) și peste ele cele trei faze ale înfășurării de înaltă tensiune (sîrmă subțire). Începuturile și sfîrșiturile acestor faze se notează prin literele *a, b, c,* și *x, y, z* respectiv cu *A, B, C* și *X, Y, Z*. Fazele aceleiași înfășurări se pot conecta în stea, în triunghi sau în zigzag (nu se folosește în înalta tensiune). Grupele de conexiuni frecvent folosite sînt $Y/Y_0 - 12$, $Y/\Delta - 11$ și $Y_0/\Delta - 11$. Conexiunile în stea se notează cu *Y*,

iar cele în triunghi prin △. Indicele zero înseamnă că punctul neutru este scos afară. Primul simbol reprezintă conexiunea înfășurării de înaltă tensiune, iar al doilea simbol conexiunea înfășurării de joasă tensiune. În figura 5 se prezintă schema transformatorului din grupa $Y/\triangle -11$.

Raportul de transformare la transformatorul trifazat în care ambele înfășurări au aceleași conexiuni, de ex. Y/Y, este egal cu raportul dintre

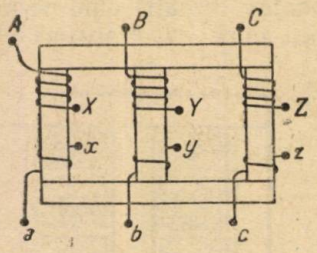


Fig. 4.

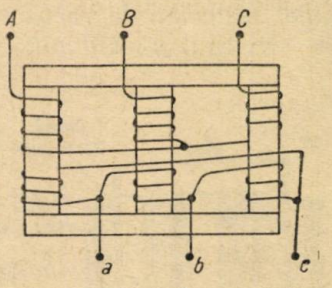


Fig. 5.

tensiunile de linie. Iar la conexiuni diferite, de exemplu $Y/\triangle$, raportul rezultă din raportul tensiunilor pe fază.

Să explicăm semnificația numerelor 11 și 12 din notațiile convenționale ale grupelor de conexiuni ale transformatorilor.

Între vectorii tensiunilor de linie ale înfășurării de joasă tensiune și vectorii respectivi ai înfășurării de înaltă tensiune există o decalare unghiulară care depinde de sistemul de conexiune al înfășurărilor și de sensul tensiunilor în aceste înfășurări. Acesta din urmă depinde de sensul bobinării fazelor și notația extremităților acestora.

Decalarea unghiulară se notează printr-un număr care înmulțit cu 30° dă unghiul de decalare între vectorii tensiunilor joasă și înaltă. De exem-

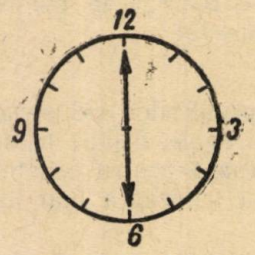


Fig. 6.

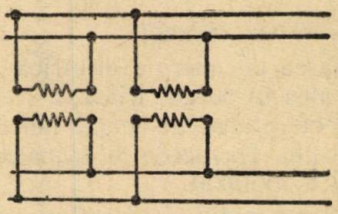


Fig. 7.

plu nr. 11 arată că decalarea e de $11 \times 30° = 330°$, iar 12 că aceasta este de $12 \times 30° = 360°$, ceea ce este echivalent cu 0°.

Numărul care indică decalarea se poate determina ușor cu metoda ceasornicului: minutarul fixat în permanență la orele 12 reprezintă U înaltă, iar acul orar reprezintă U joasă. Din figura 6 rezultă că decalarea este egală cu 6, adică cu $6 \times 30° = 180°$ (opoziție de fază).

Mersul în paralel al transformatorilor.

Sarcina și deci, puterea consumată, variază — în general — în funcție de timp. În aceste cazuri, se recurge la funcționarea în paralel a doi,

trei transformatori, care vor fi conectați și deconectați în funcție de valoarea sarcinii.

În figura 7 se dă schema funcționării în paralel a doi transformatori monofazați.

Pentru a fi posibilă funcționarea în paralel a transformatorilor trebuie respectate o serie de condiții, dintre care :

a) tensiunile primare și secundare, deci și raportul de transformare, să fie identice ;

b) egalitatea tensiunilor de scurtcircuit.

e) grupele de conexiuni ale înfășurărilor transformatorilor să fie identice (de exemplu, se leagă în paralel $Y/\triangle$ cu $Y/\triangle$.

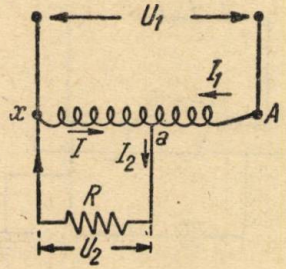


Fig. 8.

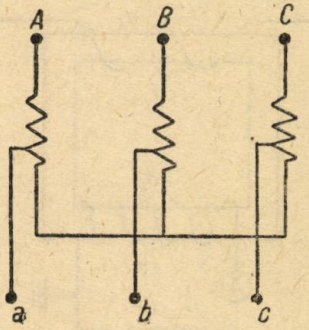


Fig. 9.

Nerespectarea acestor condiții face să apară curenți de egalizare între transformatori (și aceștia se pot arde), supraîncarcă unul din transformatori etc.

Autotransformatori.

Spre deosebire de transformatorul obișnuit, la autotransformatori înfășurările sînt cuplate electric. Astfel înfășurarea de joasă tensiune reprezintă o parte din înfășurarea de înaltă tensiune (fig. 8). Se aplică relațiile cunoscute de la transformatorii obișnuiți : $\frac{U_1}{U_2} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{n_1}{n_2}$.

În partea comună a înfășurării, ax trece un curent $I = I_2 - I_1$. Dacă $k < 2$, adică se face o mică schimbare de tensiune, I are valoarea mai mică decît I_1 și înfășurarea părții comune, ax, se face cu o secțiune mai mică. Deci se micșorează consumul de cupru. Tocmai în această ieftinire constă avantajul autotransformatorului față de transformatorul obișnuit. Cînd $k > 2$ acest avantaj se micșorează mult.

Un mare neajuns al autotransformatorului este faptul că în caz de întrerupere a înfășurării ax, U înaltă pătrunde în rețeaua de joasă tensiune și aceasta mărește pericolul deservirii.

În figura 9 se prezintă schema de principiu a unui autotransformator trifazat.

Autotransformatorul a fost inventat în anul 1892 de M. O. Dolivo-Dobrovolski.

Transformatorii de măsură.

Acești transformatori servesc pentru transformarea curentului sau tensiunii circuitului care alimentează instrumentele de măsurat și aparatajul de comandă. Cu ajutorul lor se lărgesc limitele de măsurare a instrumentelor de măsurat și se face nepericuloasă deservirea acestora.

Transformatorii de măsură se împart în transformatori de intensitate și transformatori de tensiune.

Transformatorii de intensitate, transformă curentul de mare intensitate în curent de mică intensitate. (cca. 5 A). Au aceeași structură ca

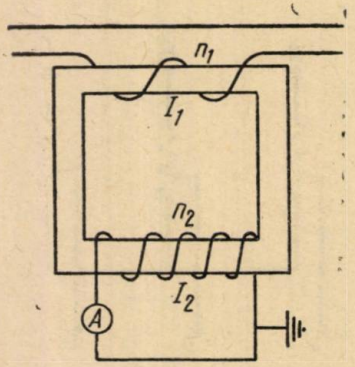


Fig. 10.

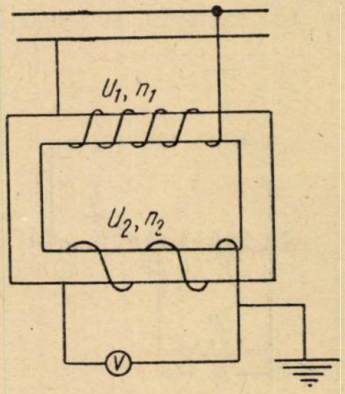


Fig. 11.

și transformatorii obișnuiți, însă extremitățile înfășurării primare nu se conectează la faze diferite, ci se intercalează într-o fază (se leagă în serie).

Funcționarea acestor transformatori se aseamănă cu funcționarea transformatorilor de forță în scurtcircuit (rezistența ampermetrului ce închide înfășurarea secundară e foarte mică).

În înfășurarea primară, U_1 este foarte mică și I_1 este mare (spire puține), iar în înfășurarea secundară I_2 este mică (cca. 5 A) și U_2 este mare (cca. 3—5 V).

În figura 10 se prezintă instalat pe circuit un transformator de intensitate monofazat

$$k = \frac{n_2}{n_1} = \frac{I_1}{I_2}, \text{ deci } I_1 = k \cdot I_2$$

Foarte comod pentru exploatare este transformatorul de intensitate portabil cu miez de oțel, numit clește de măsurat curentul. Cu ajutorul cleștilor cu resort, miezul se desface și cuprinde conductorul parcurs de curentul de măsurat. Astfel, conductorul joacă rolul înfășurării primare.

Pentru curent trifazat se folosesc trei transformatori ca cel din figura 10.

Dacă se întrerupe circuitul secundar al transformatorului în funcțiune, tensiunea la bornele acestei înfășurări se va mări brusc ($I_2 = 0$), devenind periculoasă. De aceea înfășurarea secundară se leagă la pământ.

Transformatorii de tensiune sînt transformatori de coborîre obișnuiți. Pe înfășurarea secundară ($U_2 \approx 100$ volți) se așază voltmetrul (fig. 11):

$$k = \frac{U_1}{U_2} = \frac{n_1}{n_2} \text{ și } U_1 = k \cdot U_2.$$

Funcționarea acestor transformatori este similară cu funcționarea în gol a transformatorilor obișnuiți (rezistența voltmetrului cu care se închide înfășurarea secundară este foarte mare).

În rețelele de curent trifazat se folosesc transformatori de tensiune monofazați și trifazați.

Pentru evitarea accidentelor care se pot produce în cazul cînd înfășurarea de înaltă tensiune este străpunsă, se leagă înfășurarea secundară la pămînt.

PENTRU CERCURILE DE ELEVI

DESPRE ACCELERAȚIA LUI CORIOLIS

ALEXANDRU STOENESCU și *C. IONESCU-ȚIU*

Una din problemele cele mai delicate ale cinematicii este problema mișcării relative și a determinării accelerației lui Coriolis. Rezolvarea acestei probleme a necesitat aproape o jumătate de secol de cercetări.

Astăzi sînt însă numeroase metode de rezolvare — în special metode vectoriale— care permit găsirea rezultatului în cîteva minute.

Desigur este meritorie orice încercare de prezentare a problemei cu metode simple, elementare, la îndemîna tuturor; în acest cadru se situează articolele tov. prof. Ion Cristescu și Gh. Vieroșanu, publicate în G.M.F.-B nr. 6 și 8/1961.

În articolul acesta, vom arăta că metoda utilizată de tov. profesor Ion Cristescu se poate aplica direct cazului general al mișcării plane.

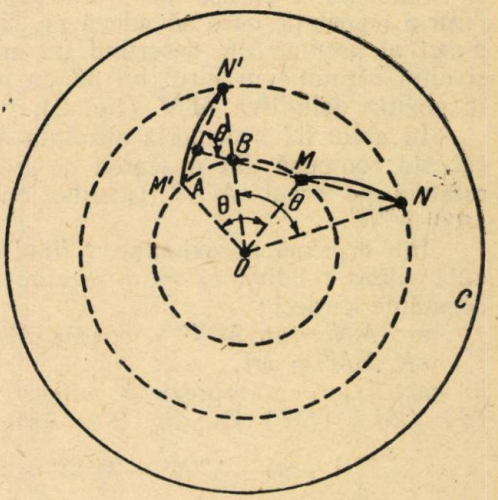


Fig. 1.

În adevăr, să presupunem că un mobil M străbate într-un timp foarte scurt t cu viteza v un arc de curbă MN față de un disc O (fig. 1).

Dar în timpul t, discul se rotește în jurul lui O cu viteza unghiulară ω și parcurge unghiul $\theta = \omega t$; rezultă de aci că arcul de curbă MN ajunge după timpul t într-o nouă poziție $M'N'$.

Mișcarea mobilului în raport cu discul pe curba MN reprezintă mișcarea relativă (curba MN se numește traiectorie relativă iar viteza v viteza relativă) ; mișcarea discului, cu traiectoria MN cu tot, reprezintă mișcarea de transport (ω este viteza unghiulară în mișcarea de transport, iar arcele MM' și NN' sînt respectiv curbele descrise de punctele M și N în mișcarea de transport).

Mișcarea mobilului M raportată la un sistem fix (în cazul de față fundația care suportă axul de rotație al discului) reprezintă mișcarea absolută, mișcare rezultată din compunerea mișcării relative și mișcării de transport.

Menționăm încă odată că arcul de curbă $M'N'$ nu este altul decît arcul MN deplasat și prin urmare triunghiurile OMN și $OM'N$ sînt identice.

Rezultă de asemenea că laturile corespunzătoare acestor triunghiuri fac între ele același unghi și anume de rotație θ adică

$$\sphericalangle MOM' = \sphericalangle NON' = \sphericalangle (MN, M'N') = \theta$$

(a se vedea figura 1)

Geometric aceste egalități rezultă ușor. Astfel unghiurile $\sphericalangle MOM'$ și $\sphericalangle NON'$ sînt egale deoarece au o parte comună și anume $\sphericalangle MON'$, iar celelalte două părți necomune, unghiurile $\sphericalangle MON$ și $\sphericalangle M'ON'$ sînt egale din egalitatea triunghiurilor OMN și $OM'N'$.

Unghiurile $\sphericalangle (MN,M'N')$ și $\sphericalangle NON'$ sînt egale prin faptul că triunghiul BAN' și BON au toate unghiurile egale, (cele din B ca opuse la vîrf și cele din N' și N din egalitatea triunghiurilor OMN și $OM'N'$).

Ca urmare a acestor rezultate geometrice putem considera mișcarea de transport a curbei MN (din poziția MN în poziția $M'N'$) compusă dintr-o translație care să aducă pe MN în $M'N''$ paralelă cu MN (fiecare punct al arcului MN descriind un arc de cerc egal și paralel cu MM') și dintr-o rotație în jurul lui M' cu unghiul θ care să aducă arcul $M'N''$ în poziția definitivă $M'N'$ (fig. 2).

In acest fel traiectoria absolută MN' a mobilului poate fi considerată că este compusă din mișcarea de transport pe arcul MM', din mișcarea relativă pe arcul $M'N'''$ (identic cu arcul MN) și din mișcarea pe arcul $N''N'$.

Intr-o primă aproximație, t fiind foarte mic putem considera deocamdată viteza relativă $v_r = v$, precum și viteza unghiulară de transport ω constante și deci :

$$\text{arc } MN = \text{arc } M'N'' = \text{coarda } M'N'' = vt,$$

$$\text{arc } MM' = \omega rt,$$

în care $v_t = \omega$ reprezintă viteza de transport pe traiectoria MM' ($r = OM = OM'$). Din fig. 2 se deduce ușor :

$$s = \text{arc } N''N' = M'N'' \cdot \theta = vt \cdot \omega t = \frac{1}{2}(2v\omega)t^2.$$

Rezultă că pe arcul $N''N'$ viteza va fi :

$$\frac{ds}{dt} = v\omega t$$

și întrucît t este foarte mic va fi neglijabilă în raport cu viteza relativă v_r și cu viteza de transport v_t.

În schimb accelerația pe arcul $M''N'$ va fi de mărime finită:

$$a_c = 2\,\omega\,v$$

și denumită accelerația lui Coriolis.

Direcția și sensul acestei accelerații sînt date de tangenta în N'' la arcul $N''N'$ cu sensul de la N'' la N'; cu alte cuvinte accelerația lui Coriolis se găsește în planul mișcării și este perpendiculară pe coarda $M'N''$, adică este perpendiculară pe viteza relativă.

Spre a găsi ușor direcția și sensul accelerației lui Coriolis se rotește viteza relativă cu 90° în sensul dat de viteza unghiulară ω (fig. 3).

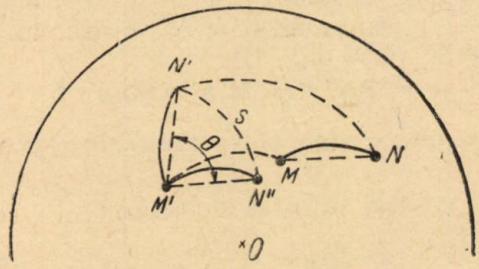


Fig. 2.

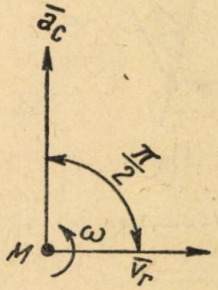


Fig. 3.

Accelerația lui Coriolis se poate determina în valoare, direcție și sens, considerînd vectorii ω și v primul reprezentînd viteza unghiulară a discului (perpendiculară pe disc și cu sensul astfel ales ca discul să se rotească în sensul direct — de la dreapta la stînga), iar cel de al doilea reprezentînd viteza relativă pe traiectoria MN.

În acest caz:

$$\bar{a}_c = 2\,\bar{\omega} \times \bar{v}$$

adică accelerația lui Coriolis este dată de dublul produsului vectorial *) dintre vectorul ce reprezintă viteza unghiulară în mișcarea de transport și vectorul ce reprezintă viteza relativă.

Din cele arătate anterior rezultă că viteza absolută $\bar{v}_a$ se poate determina adunînd vectorial viteza relativă $\bar{v}_r$ cu viteza de transport $\bar{v}_t$:

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t$$

fiecare din aceste viteze fiind tangente la traiectoriile respective (traiectoria absolută, traiectoria relativă și traiectoria de transport).

În ceea ce privește accelerația absolută $\bar{a}_a$ ea se compune din accelerația relativă $\bar{a}_r$ corespunzătoare mișcării pe traiectoria relativă MN,

*) vezi Elemente de calcul vectorial de *O. Kreindler*, Biblioteca S.S.M.F. nr. 16).

din accelerația de transport $\bar{a}_t$ corespunzătoare mișcării pe traiectoria de transport MM' și accelerația lui Coriolis, adică:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_c$$

în care

$$\bar{a}_c = 2\,\bar{\omega} \times \bar{v}$$

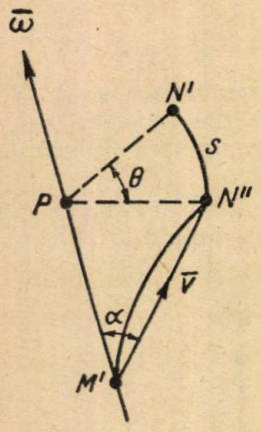


Fig. 4.

Determinarea accelerației lui Coriolis în cazul general, cînd arcul de curbă relativă MN este oarecare și deci cînd viteza relativă v presupusă îndreptată după coarda MN a acestui arc face un unghi a cu viteza unghiulară ω, se poate face la fel ca în cele expuse anterior.

Singura deosebire va fi la determinarea spațiului s pentru arcul $N''N'$ întrucît în acest caz (a se vedea fig. 4)

$$s = PN''\,\theta = M'N'' \cdot \sin\alpha \cdot \theta$$

$$s = n\,\omega\,t^2 \sin\alpha = \frac{1}{2}\,(2v\,\omega \sin\alpha)\,t^2.$$

Accelerația lui Coriolis are deci valoarea numerică:

$$a_c = 2\,\omega \cdot v \cdot \sin\alpha,$$

iar vectorial este reprezentată tot prin expresia:

$$\bar{a}_c = 2\,\bar{\omega} \times \bar{v}.$$

NOTE MATEMATICE

ASUPRA ARIEI TRIUNGHIULUI PODAR ȘI GENERALIZAREA TEOREMEI LUI SIMSON

Fie α', β', γ' intersecțiile cevienelor unui punct P cu cercul circumscris triunghiului ABC. Triunghiul α', β', γ' poartă numele de triunghiul circumpedal al lui P.

Considerăm apoi, triunghiul podar al lui P față de ABC (triunghiul format prin unirea proiecțiilor punctului P pe laturile triunghiului ABC). Notăm $\alpha\,\beta\,\gamma$ acest triunghi. Mai notăm cu $x\,y\,z$ triunghiul podar al lui P față de triunghiul $\alpha'\,\beta'\,\gamma'$.

Fie m_a, m_b, m_c, distanțele de la P la vîrfurile triunghiului ABC (coordonatele tripolare ale lui P față de ABC) și m'_a, m'_b, m'_c distanțele de la P la vîrfurile triunghiului $\alpha'\,\beta'\,\gamma'$.

Dacă r_1 și r_2 sînt razele cercurilor circumscrise triunghiurilor $\alpha\,\beta\,\gamma$ și $x\,y\,z$, iar s și S ariile triunghiurilor $\alpha\,\beta\,\gamma$ și ABC, conform unei for-

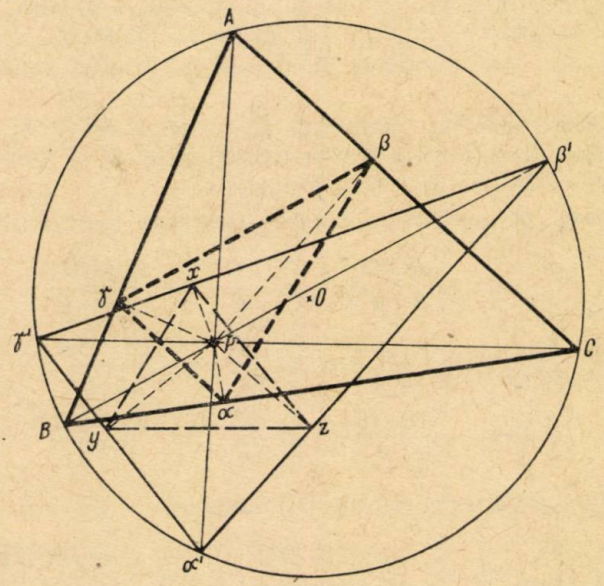
mule cunoscute care ne dă aria unui triunghi în funcție de laturi și de raza cercului circumscris, avem:

$$\beta'\gamma' = \frac{4s}{\alpha\beta \quad \alpha'\gamma'} \cdot r_1, \text{ din triunghiul } \alpha\ \beta\ \gamma. \tag{1}$$

Pe de altă parte, din triunghiul $A\ \beta\ \gamma$, avem:

$$\beta'\gamma' = \frac{2 \text{ aria } A\beta'\gamma'}{A\gamma' \cdot A\beta} \cdot m_a, \tag{2}$$

ținînd seamă că m_a este diametrul cercului circumscris în triunghiul $A\ \beta\ \gamma$. Dar triunghiurile $A\ \beta\ \gamma$ și ABC au un unghi egal și deci:



$$\frac{\text{aria } A\beta'\gamma'}{S} = \frac{A\gamma' \cdot A\beta}{AB \cdot AC}$$

deci (2) devine:

$$\beta'\gamma' = \frac{2S}{AB \cdot AC}\ m_a \tag{3}$$

Din (1) și (3) se deduce:

$$r_1 \cdot \frac{4s}{\alpha\beta \cdot \alpha'\gamma'} = \frac{2S}{AB \cdot AC} \cdot m_a$$

de unde:

$$2r_1 = \frac{S : (AB \cdot AC)}{s : (\alpha\beta \cdot \alpha'\gamma')}.$$

Procedînd analog pentru triunghiurile $C\ \beta\ \gamma$ și $B\ \alpha\ \gamma$, obținem:

$$2r_1 = \frac{S:(AB\cdot AC)}{s:(\alpha\beta\cdot\alpha\Upsilon)}\cdot m_a = \frac{S:(BC\cdot BA)}{s:(\beta\Upsilon\cdot\beta\alpha)}\cdot m_b = \frac{S:(CA\cdot CB)}{s:(\Upsilon\alpha\cdot\Upsilon\beta)}\cdot m_c \qquad (4)$$

Notînd cu S' aria triunghiului circumpedal $\alpha'\ \beta'\ \gamma'$ și cu s' aria triunghiului $x\ y\ z$ și raționînd ca mai sus avem:

$$2r_2 = \frac{S':(\alpha'\beta'\cdot\alpha'\Upsilon')}{s':(xy\cdot xz)}\cdot m_a' = \frac{S':(\beta'\Upsilon'\cdot\beta'\alpha')}{s':(yz\cdot yx)}\cdot m_b' = \frac{S':(\Upsilon'\alpha'\cdot\Upsilon'\beta')}{s':(zx\cdot zy)}\cdot m_c' \qquad (5)$$

Însă, din patrulaterele inscriptibile $PB\alpha\gamma$ și $PC\alpha\beta$, deducem:

$$\sphericalangle P\alpha\Upsilon = \sphericalangle PB\Upsilon \text{ și } \sphericalangle P\alpha\beta = \sphericalangle Pc\beta$$

iar pe de altă parte $\sphericalangle PB\Upsilon = \sphericalangle P\alpha'\beta'$ și $\sphericalangle Pc\beta = \sphericalangle P\alpha'\Upsilon'$ avînd aceiași măsură și deci: $\sphericalangle P\alpha\Upsilon = \sphericalangle P\alpha'\beta'$ și $\sphericalangle P\alpha\beta = \sphericalangle P\alpha'\Upsilon'$.
Făcînd suma acestor relații obținem $\sphericalangle\alpha = \sphericalangle\alpha'$. Analog pentru $\sphericalangle\beta = \sphericalangle\beta'$ și $\sphericalangle\Upsilon = \sphericalangle\Upsilon'$.

Prin același procedeu deducem că și $\sphericalangle A = \sphericalangle x$; $\sphericalangle B = \sphericalangle y$; $\sphericalangle C = \sphericalangle z$. Deci, triunghiul $\alpha\ \beta\ \gamma$ și triunghiul $\alpha'\ \beta'\ \gamma'$ sînt asemenea. La fel, triunghiurile ABC și xyz sînt asemenea.

Ținînd seama de egalitatea acestor unghiuri rezultă:

$$\frac{s}{S'} = \frac{\alpha\beta\cdot\alpha\Upsilon}{\alpha'\beta'\cdot\alpha'\Upsilon'} \text{ și } \frac{S}{s'} = \frac{AB\cdot AC}{xy\cdot yz}$$

$$\frac{s}{S'} = \frac{\beta\Upsilon\cdot\beta\alpha}{\beta'\Upsilon'\cdot\beta'\alpha'} \text{ și } \frac{S}{s'} = \frac{BC\cdot BA}{yz\cdot yx}$$

$$\frac{s}{S'} = \frac{\Upsilon\alpha\cdot\Upsilon\beta}{\Upsilon'\alpha'\cdot\Upsilon'\beta'} \text{ și } \frac{S}{s'} = \frac{CA\cdot CB}{zx\cdot zy}$$

Ținînd seamă de aceste relații, (5) devine:

$$2r_2 = \frac{s:(\alpha\beta\cdot\alpha\Upsilon)}{S:(AB\cdot AC)}\ m_a' = \frac{s:(\alpha\beta\cdot\beta\Upsilon)}{S:(BC\cdot BA)}\cdot m_b' = \frac{s:(\alpha\Upsilon\cdot\beta\Upsilon)}{S:(CA\cdot CB)}\cdot m_c' \qquad (6)$$

Considerăm triunghiul $PB\alpha'$ și ținînd seamă că: $\sphericalangle P\alpha'B = \sphericalangle C$ și $\sphericalangle PB\alpha' = \sphericalangle\Upsilon' = \sphericalangle\Upsilon$, rezultă:

$$\frac{\text{aria } PB\alpha'}{S} = \frac{m_a'\cdot B\alpha'}{CA\cdot CB} \text{ și } \frac{\text{aria } PB\alpha'}{s} = \frac{m_b\cdot B\alpha'}{\Upsilon\beta\cdot\Upsilon\alpha}$$

Din aceste relații deducem:

$$\frac{m_b}{m_a'} = \frac{\Upsilon\beta\cdot\Upsilon\alpha}{CA\cdot CB}\cdot\frac{S}{s}$$

Obținînd și relațiile analoage din triunghiurile $PC\beta'$, $PA\gamma'$ și înmulțindu-le obține:

$$\frac{m_a\cdot m_b\cdot m_c}{m_a'\cdot m_b'\cdot m_c'} = \left(\frac{\alpha\beta\cdot\alpha\Upsilon\cdot\beta\Upsilon}{BC\cdot CA\cdot AB}\right)^2\cdot\frac{S^3}{s^3} \qquad (7)$$

Din relațiile (4) și (6) se obține:

$$\frac{r_1^3}{r_2^3} = \frac{m_a \cdot m_b \cdot m_c}{m_a' \cdot m_b' \cdot m_c'} \cdot \frac{S^6}{s^6}\left(\frac{\alpha\beta \cdot \beta\gamma \cdot \gamma\alpha}{BC \cdot CA \cdot AB}\right)^4$$

Ținînd seama de (7) rezultă:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{S^3}{s^3} \cdot \left(\frac{\alpha\beta \cdot \beta\gamma \cdot \gamma\alpha}{BC \cdot CA \cdot AB}\right)^2$$

dar, $BC, CA, AB = 4\,RS$ și $\alpha\beta \cdot \beta\gamma \cdot \gamma\alpha = 4\,r_1 s$.

Deci, înlocuind în (8) rezultă:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{S}{s} \cdot \frac{r_1^2}{R^2}, \quad \text{deci} \quad r_1 r_2 = \frac{R^2 s}{S}$$

Însă, $4r_1 r_2 = m_a \cdot m_a' = m_b \cdot m_b' = m_c \cdot m_c' = \varrho$ care rezultă din (4) și (5) prin înmulțirea rapoartelor și s-a notat cu ϱ puterea lui P față de cercul O circumscris triunghiului ABC. Așadar, $\varrho = 4r_1 r_2 = \frac{4R^2 s}{S}$ de unde:

$$\frac{s}{S} = \frac{\varrho}{4R^2}.$$

Dacă mai ținem seamă că $\varrho = R^2 - d^2$, unde d este distanța de la P la O avem:

$$\frac{s}{S} = \frac{R^2 - d^2}{4R^2}.$$

Din această relație rezultă că pentru ca s să fie constant trebuie ca și d să fie constant. Prin urmare, locul geometric al punctelor pentru care aria triunghiului podar față de un triunghi oarecare ABC este constantă, este un cerc concentric cu cercul circumscris triunghiului ABC.

În cazul cînd punctul variază chiar pe cercul circumscris triunghiului atunci aria triunghiului podar e nulă și proiecțiile sînt în linie dreaptă (teorema lui Simson).

Oprișan Gheorghe, elev, Curtea de Argeș

CÎTEVA GENERALIZĂRI ÎN ANALIZA COMBINATORIE

I.1. Fie f o funcție. Convenim să notăm derivata succesivă de ordinul p a acestei funcții cu $f^{(p)}$. Dacă $f = x^n$ atunci:

$$f^{(p)} = n\,(n-1)\,\ldots\,(n-p+1)x^{n-p} = A_n^p\,x^{n-p},$$

unde A_n^p este simbolul aranjamentelor.

2. Considerăm funcția:

$$\varphi = (x+1)^n \quad \text{cu} \quad n \in N.$$

Ținînd seama de binomul lui Newton, avem

$$\varphi = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\,x^k$$

Dacă și $p \in N \cup \{0\}$, avem:

$$\varphi^{(p)} = \sum_{k=p}^{n} A_k^p \, C_n^k \, x^{k-p} = A_n^p \, (x+1)^{n-p} \tag{1}$$

dacă facem aici $x = 1$ rezultă:

$$\sum_{k=p}^{n} A_k^p \, C_n^k = A_n^p \, 2^{n-p} \tag{2}$$

Cazuri particulare: $p = 0$:

$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$, relație bine cunoscută (3)

Pentru $p = 1$, avem relația cunoscută

$$C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n = n\,2^{n-1} \tag{4}$$

relație care face obiectul problemei 75, pg. 42 din „Teoreme și probleme alese de matematici" de C. Coșniță.

Pentru $p = 2$, obținem:

$$2C_n^2 + 6C_n^3 + 12C_n^4 + \ldots + (n^2 - n)C_n^n = n(n-1)\,2^{n-2} \tag{5}$$

Considerăm acum funcția: $\psi = (1 - x)^n$ și procedînd analog obținem:

$$\sum_{k=p}^{n} (-1)^k \, A_k^p \, C_n^k = 0 \tag{6}$$

Cazuri particulare, $p = 0$:

$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + C_n^4 - \ldots + (-1)^n \, C_n^n = 0$, relație cunoscută (7)

Pentru $p = 1$, avem:

$$C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - 4C_n^4 + \ldots + (-1)^{n+1} n \, C_n^n = 0 \tag{8}$$

Pe baza relațiilor (3), (4), (7), (8) se rezolvă ușor problema 4321 din GMF-B 8/1960.

Adunînd sau scăzînd membru cu membru relațiile (2) și (6) rezultă:

$$\sum_{k=p}^{n} [1 \pm (-1)^k] \, A_k^p \, C_n^k = A_n^p \, 2^{n-p} \tag{9}$$

În fond, relația (9) se reduce la relația

$$\begin{aligned} &A_p^p \, C_n^p + A_{p+2}^p \, C_n^{p+2} + A_{p+4}^p \, C_n^{p+4} + \ldots = \\ &= A_{p+1}^p \, C_n^{p+1} + A_{p+3}^p \, C_n^{p+3} + A_{p+5}^p \, C_n^{p+5} + \ldots = A_n^p 2^{n-p-1} \end{aligned} \tag{10}$$

Cazuri particulare: Pentru $p = 0$ avem:

$$1 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots = 2^{n-1} \qquad (11)$$

Pentru $p = 1$ avem:

$$C_n^1 + 3C_n^3 + 5C_n^5 + \ldots = 2C_n^2 + 4C_n^4 + 6C_n^6 + \ldots = n2^{n-2} \qquad (12)$$

Pentru $p = 2$ obținem:

$$2C_n^2 + 12C_n^4 + 24C_n^6 + \ldots = 6C_n^3 + 20C_n^5 + 42C_n^7 + \ldots = n(n-1)2^{4-3} \qquad (13)$$

3. Fie:

$$\varphi_i = (1 + x)^{n_i}\ ;\ n_i \in N\ ;\quad i = 1,2, \ldots, m.$$

Avînd în vedere relația (1) rezultă:

$$\varphi_i^{(pi)} = \sum_{K=pi}^{ni} A_K^{pi} C_{ni}^K\, x^{K-pi} = A_{ni}^{pi}\,(x+1)^{ni-pi}$$

Deci:
$$\prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{K=pi}^{ni} A_K^{pi}\, C_{ni}^K\, x^{K-pi}\right) = \left(\prod_{i=1}^{m} A_{ni}^{pi}\right)(x+1)^{\sum_{i=1}^{m}(ni-pi)} \qquad (14)$$

Vom identifica coeficienții lui x^h din cei doi membri ai identității (14). În membrul al doilea acest coeficient se poate scrie:

$$E_{II} = \left(\prod_{i=1}^{m} A_{ni}^{pi}\right) C_{\sum_{i=1}^{m}(ni-pi)}^{h}$$

Pentru primul membru considerăm ecuația auxiliară:

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha i = h \qquad (15)$$

și fie $(\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_m)$ un sistem de soluții al acestei ecuații. Luăm termenii cu $x^{\alpha i'}$ respectiv din factorii $\left(\sum_{K=pi}^{ni} A_K^{pi}\, C_{ni}^K\, x^{K-pi}\right)$ și îi înmulțim între ei. Avem $x^{K-pi} = x^{\alpha i}$, deci $K = \alpha'_i + p_i$ și rezultă termenul:

$$\left[\prod_{i=1}^{m} A_{pi+\alpha' i}^{pi}\, C_{ni}^{pi+\alpha' i}\right] x^h$$

Dacă considerăm toate sistemele de soluții ale ecuației (15) rezultă că coeficientul lui x^h din dezvoltarea primului membru al relației (14) este

$$E_I = \sum \prod_{i=1}^{m} A_{pi+\alpha i}^{pi}\, C_{ni}^{pi+\alpha i}$$

suma Σ extinzîndu-se tocmai pentru toate sistemele de soluții ale ecuației (15). Se obține deci identitatea $E_I = E_{II}$, adică:

$$\sum \prod_{i=1}^{m} A_{pi+\alpha i}^{pi}\, C_{ni}^{pi+\alpha i} = \left(\prod_{i=1}^{m} A_{ni}^{pi}\right) C_{\sum_{i=1}^{m}(ni-pi)}^{h} \qquad (16)$$

Cazuri particulare. Să considerăm mai întîi, $p = 0$; rezultă:

$$\sum \prod_{i+1}^{m} C_{ni}^{\alpha i} = C_{m}^{\sum_{i=1}^{h} ni} \tag{17}$$

identitate semnalată de Tiberiu Popoviciu în R.M.T. 7/1925 (V) și demonstrată cu ajutorul binomului).

Dacă în identitatea (17) facem $m = 2$ atunci, deoarece $\alpha_2 = h - \alpha_1$ (v. rel. 15) rezultă:

$$\sum C_{n1}^{\alpha 1} C_{n2}^{\alpha 2} = C_{n1+n2}^{h} \text{ sau: } \sum_{\alpha i=0}^{h} C_{n1}^{\alpha 1} C_{n2}^{h-\alpha 1} = C_{n1+n2}^{h}$$

În notații obișnuite, această identitate se mai scrie:

$$\sum_{K=0}^{p} C_{m}^{K} C_{n}^{p-K} = C_{m+n}^{p} \tag{18}$$

Dacă $p = n$ relația (18) devine:

$$\sum_{K=0}^{n} C_{m}^{K} C_{n}^{K} = C_{m+n}^{n} \tag{19}$$

iar dacă $m = n = p$, obținem:

$$\sum_{K=0}^{n} (C_{n}^{K})^2 = C_{2n}^{n} \tag{20}$$

relație cunoscută.

Să considerăm acum, alt caz particular: $m = 2$; $p_1 = p$; $p_2 = 0$; $n_1 = n_2 = n$ și $h = n - p$. Rezultă:

$$\sum A_{p+\alpha 1}^{p} C_{n}^{p+\alpha 1} C_{n}^{\alpha 2} = A_{n}^{p} C_{2n-p}^{n-p}$$

Dar, $n - \alpha_2 = p + \alpha_1$ și prin urmare: $C_{n}^{\alpha 2} = C_{n}^{n-\alpha 2} = C_{n}^{p+\alpha 1}$; Rezultă:

$$\sum_{\alpha 1=0}^{n-p} A_{p+\alpha 1}^{p} (C_{n}^{p+\alpha 1})^2 = A_{n}^{p} C_{2n-p}^{n}$$

Punînd $\alpha_1 + p = k$ rezultă:

$$\sum_{K=p}^{n} A_{K}^{p} (C_{n}^{K})^2 = A_{n}^{p} C_{2n-p}^{n} \tag{21}$$

relație care face obiectul problemei 4449 din GMF-B 11/1960.

Dacă în identitatea (21) punem $p = 0$ rezultă relația (20), iar dacă facem $p = 1$ rezultă:

$$\sum_{k=1}^{n} k (C_{n}^{k})^2 = n C_{2n-1}^{n}, \tag{22}$$

identitate care face obiectul exercițiului 46 (d), p. 62 din Manualul de algebră pentru cl. X-a, ed. 1959.

Șerban Strătilă, elev, Pitești

ASUPRA PROIECȚIEI UNUI UNGHI PE UN PLAN

În lecțiile de geometrie în spațiu de la clasa a X-a reală sînt demonstrate teoreme care se referă la unghiul unei drepte cu un plan și la proiecția pe un plan a unghiului drept care are o latură paralelă cu planul de proiecție.

Aceste teoreme pot pune problema determinării acestor unghiuri în condiții mai generale.

1. Astfel, pentru unghiul unei drepte cu un plan se poate pune pro-

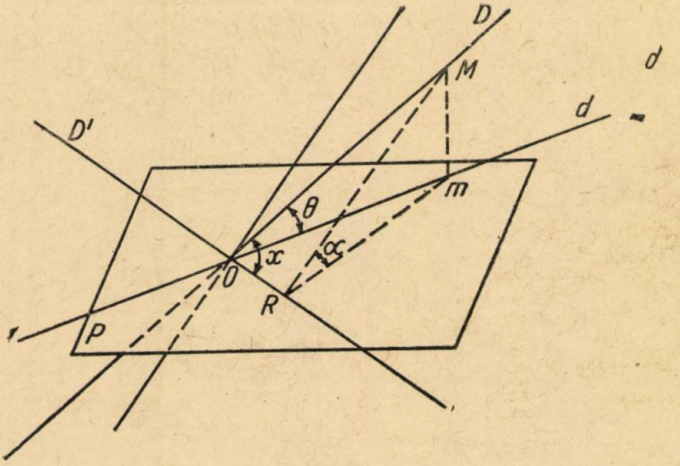


Fig. 1.

blema determinării lui în funcție de unghiul ce-l face aceiași dreaptă cu o altă dreaptă a planului.

În fig. 1 s-a considerat o dreaptă D, proiecția ei pe planul P, dreapta d, o altă dreaptă a planului D' și unghiurile: x dintre D și D', O dintre D și d și α unghiul plan al diedrului format de planul P cu planul determinat de D și D'.

Un punct M al dreptei D se proiectează în R pe D' și în m pe planul P. Luînd $OM = l$ avem: $Rm = l \sin x \cos \alpha$ și $Mm = l \sin x \sin \alpha$. Rezultă: $Om = \sqrt{l^2 \cos^2 x + l^2 \sin^2 x \cos^2 \alpha} = l \sqrt{1 - \sin^2 x \sin^2 \alpha}$

deci: $\sin \theta = \sin x \sin \alpha$ și $\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 x \cos^2 \alpha}$

Teorema care arată că unghiul dreptei cu planul este mai mic față de unghiurile acelei drepte cu oricare altă dreaptă a planului rezultă din relația stabilită. Observînd că $\sin \alpha \leqslant 1$ și atunci $\sin \theta \leqslant \sin x$, deci $\theta \leqslant x$.

Egalitatea avînd loc în cazul cînd planul dreptelor D și D' este perpendicular pe planul P, caz în care D' se confundă cu d.

2. Teorema care privește proiecția pe un plan a unui unghi drept cu o latură paralelă cu acel plan se sugerează ideia determinării mărimii proiecției unui unghi oarecare.

Pentru a preciza elementele în funcție de care se cere să se determine mărimea proiecției unui unghi oarecare θ, îl vom considera situat într-un plan care face cu planul de proiecție unghiul α și că una din latu-

rile lui formează cu dreapta de intersecție a celor două plane un unghi x.

În fig. 2 vom considera: $\sphericalangle xoy = \theta$; $\sphericalangle xoy = \varphi$; $\sphericalangle Mm, m = \alpha$; $\sphericalangle MOm_1 = x$ și $OM = ON = l$.

Rezultă că: $Om_1 = l \cos x$; $On_1 = l \cos(x+\theta)$; $Mm_1 = l \sin x$; $Nn_1 = l \sin(x+\theta)$, m_1 și n_1 fiind proiecțiile punctelor M și N luate pe laturile unghiului pe dreapta de intersecție a celor două plane.

De asemenea avem: $m_1 m = l \sin x \cos \alpha$ și $nn_1 = l \sin(\theta + x) \cos x$, m și n fiind proiecțiile punctelor M și N pe planul de proiecție.

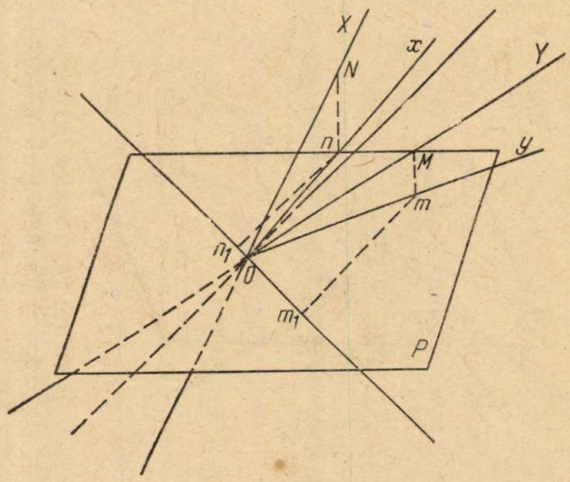


Fig. 2.

Fiindcă proiecțiile pe plane paralele sînt figuri egale, vîrful unghiului θ este luat chiar pe planul de proiecție. Rezultă că:

$$Om = \sqrt{l^2 \cos^2 x + l^2 \sin^2 x \cos^2 \alpha} = l \sqrt{1 - \sin^2 x \sin^2 \alpha}.$$

$$On = l\sqrt{1 - \sin^2(\theta + x) \sin^2 \alpha},$$

$$mn^2 = [l \cos(\theta - x) - l \cos x]^2 + [l \sin(\theta + x) \cos \alpha - l \sin x \cos \alpha]^2$$

$$mn^2 = l^2 [\cos(\theta + x) - \cos x]^2 + l^2 \cos^2 \alpha [\sin(\theta + x) - \sin x]^2.$$

$$mn^2 = 4l^2 \sin^2\left(x + \frac{\theta}{2}\right) \sin^2 \frac{\theta}{2} + 4l^2 \cos^2 \alpha \cos^2\left(x + \frac{\theta}{2}\right) \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

$$mn^2 = 4l^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\left[\sin\left(x + \frac{\theta}{2}\right) + \cos^2\left(x + \frac{\theta}{2}\right) \cos^2 \alpha\right].$$

$$mn^2 = 4l^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\left[1 - \sin^2 \alpha \cos^2\left(x + \frac{\theta}{2}\right)\right].$$

deci: $mn = 2l \sin \frac{\theta}{2} \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2\left(x + \frac{\theta}{2}\right)}$.

Din triunghiul mOn vom calcula $\cos\varphi$, unde φ este proiecția unghiului θ. Avem:

$$\cos \varphi = \frac{Om^2 \quad On^2 - mn^2}{2\, Om \cdot On}, \text{ și rezultă:}$$

$$\varphi \cos = \frac{\cos \theta - \sin x \sin (\theta + x) \sin^2 \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 x \sin^2 \alpha} \cdot \sqrt{1 - \sin^2 (\theta + x) \sin^2 \alpha}} \qquad (1)$$

Dacă în loc de unghiul x al unei laturi a unghiului θ cu dreapta de intersecție dintre planul în care se află unghiul și planul de proiecție și de unghiul α, dintre cele două plane vrem să folosim chiar unghiurile pe care laturile unghiului θ le face cu planul de proiecție, unghiuri care pe figură sînt: $\sphericalangle MOm$ și $\sphericalangle NOn$ și pe care în calcule le notăm cu u și v, conform celor rezultate în paragraful 1, avem:

$$\sin u = \sin x \sin \alpha \quad \text{și} \quad \sin v = \sin (x + \theta) \sin \alpha$$

deci va rezulta că avem:

$$\cos \varphi = \frac{\cos \theta - \sin u \sin v}{\cos u \cos v} \qquad (2)$$

formulă care poate fi transformată într-o alta calculabilă prin logaritmi:

$$1 + \cos \varphi = \frac{\cos \theta + \cos u \cos v - \sin u \sin v}{\cos u \cos v}, \text{ sau}$$

$$2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{\cos \theta + \cos (u + v)}{\cos u \cos v}$$

de unde:

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{\cos \frac{u+v+\theta}{2} \cos \frac{u+v-\theta}{2}}{\cos u \cos v}} \qquad (3)$$

In cazul particular cînd unghiul θ care se proiectează este drept și cînd o latură a lui este paralelă cu planul de proiecție în formula (1) avem $\theta = \frac{\pi}{2}$ și $x = 0$ sau în formula (2) avem $\theta = \frac{\pi}{2}$ și $u = 0$ și rezultă din ambele: $\cos \varphi = 0$, deci proiecția acestui unghi este un unghi drept.

Nicolae Peligrad, profesor Pitești

EFECTELE CHIMICE ALE LUMINII

de *M. ABABII*, profesoară, Rîmnicul Vîlcea

Transformările chimice, întîlnite atît în natură cît și în industrie, au loc în anumite condiții de temperatură, presiune, lumină, frecare, lovire etc.

Fenomenele chimice provocate de lumină au o importanță uriașă și au format obiectul unui studiu științific începînd încă de la sfîrșitul secolului al XVIII-lea.

Cercetările au arătat că lumina poate declanșa diferite tipuri de reacții, ca reacții de polimerizare, de descompunere și de combinare. Iradiind fosforul galben cu lumină de lungime de undă scurtă fosforul galben trece prin polimerizare în fosfor roșu a cărui molecule sînt formate dintr-un complex de molecule de fosfor galben.

Sub acțiunea luminii, amoniacul, bromura de argint, apa oxigenată, se descompun în elementele componente.

Prin iradierea unui amestec gazos de clor și hidrogen, aceste elemente se combină și se formează acidul clorhidric.

Reacțiile chimice produse sub acțiunea luminii se numesc reacții fotochimice. Importanța lor în natură și tehnică va rezulta din exemplele care urmează.

Fotosinteza din frunzele verzi ale plantelor, care stă la baza formării substanțelor organice în plante din substanțe neorganice, este izvorul întregii materii organice de pe glob.

Descompunerea bromurii de argint prin iluminarea stratului fotosensibil al plăcilor fotografice, obținerea negrului de anilină prin oxidarea anilinii pe fibră la acțiunea luminii (coloranți de developare), senzația vizuală provocată de produsele de descompunere ale pigmentului roz, numeroasele reacții fotochimice folosite în industria chimică, arată rolul reacțiilor fotochimice în tehnică și industrie.

Legile fundamentale ale fotochimiei

Latura cantitativă a reacțiilor fotochimice a fost precizată și fundamentată prin cercetări minuțioase. Bunzen și Roscoe (1855) au stabilit legea fundamentală a fotochimiei, care arată:

Cantitatea de substanță Q, activată fotochimic este direct proporțională cu fluxul luminos absorbit Φ și cu timpul de iradiere t, adică cu cantitatea de energie luminoasă absorbită.

$$Q = k \Phi t,$$

unde factorul de proporționalitate k, depinde de natura reacției fotochimice care are loc și valoarea acestui coeficient de proporționalitate *determină cantitatea de substanță activată de unitatea de energie absorbită.*

Prima afirmație de acest gen a fost făcută încă din 1782, însă într-o formă destul de confuză.

Studiul cantitativ al proceselor fotochimice este complicat pentru că procesul provocat de lumină, numit proces primar, poate fi urmat de numeroase reacții secundare, care au un caracter pur chimic. Procesele primare sînt singurile care ar trebui să se numească procese fotochimice.

În 1905 Einstein, formulînd ipoteza cuantelor de lumină, a formulat o lege extrem de simplă, valabilă pentru procesele fotochimice primare.

Fiecărei cuante hν, absorbite îi corespunde transformarea unei molecule care a absorbit lumina.

Această lege se numește legea echivalenței. Să explicăm formarea acidului clorhidric din hidrogen și clor sub acțiunea luminii.

O moleculă de clor sub acțiunea unei cuante $h\nu$ se descompune în atomi de clor cu o activitate chimică mai mare:

$$Cl_2 + h\nu = Cl + Cl \text{ (proces primar)}$$

Acesta este singurul proces fotochimic. Desfășurarea violentă a procesului de formare a acidului clorhidric, constă în lanțul proceselor secundare care au loc, pe de o parte între atomii de clor și moleculele de hidro-

gen, iar pe de altă parte între atomii izolați de hidrogen și moleculele de clor.

$$\left.\begin{aligned} Cl + H_2 &= H\,Cl + H \\ H + Cl_2 &= H\,Cl + Cl \end{aligned}\right\} \text{procese secundare}$$

Reacțiile de acest gen, care constau dintr-un lanț de procese, ce decurg succesiv, au căpătat denumirea de *reacții înlănțuite*. Lanțul format din asemenea procese poate fi foarte lung, poate peste un milion de verigi, pînă cînd o impuritate sau peretele vasului va capta atomul de clor pus în libertate și prin aceasta reacția în lanț se va întrerupe. Reacția în lanț poate fi întreruptă și artificial, dacă se introduce o substanță care captează energia atomilor de clor. Astfel de substanțe elimină procesele secundare și dau posibilitatea verificării legii lui Einstein. Relativ la această lege trebuie să menționăm: deoarece absorbției unui foton îi corespunde transformarea unui molecule, rezultă că nu pot activa decît radiațiile pentru care $h\nu$ este mai mare decît energia de activare D, necesară procesului primar, adică numai acele care satisfac condiția: $h\nu \geqslant D$,

Reacțiile înlănțuite au un rol important în multe procese chimice, în special în procesele de ardere. Minuțioase cercetări în domeniul reacțiilor înlănțuite au fost făcute de academicianul N. N. Semenov, care a dat o teorie a reacțiilor înlănțuite. Pentru lucrările sale științifice: „Teoria reacțiilor înlănțuite" (1936) și „Teoria termică a arderii și a exploziilor" (1940), N. N. Semenov a fost distins cu Premiul Stalin de gradul I.

Reacții fotochimice sensibilizate

Condiția $h\nu \geqslant D$, arată că lumina absorbită trebuie să aibă o anumită frecvență ν. Dacă frecvența se situează în afara benzii de absorbție, nu va avea loc nici absorbția și nici reacția fotochimică. Pentru ca procesul să aibă loc adăogăm substanței studiată o altă substanță, a cărei bandă de absorbție cuprinde pe ν. Substanța adăugată, care se numește sensibilizator, absoarbe fotonul $h\nu$ și energia se transmite prin ciocniri frecvente moleculelor substanței de studiat. Astfel de reacții fotochimice se numesc reacții fotochimice sensibilizate. Pentru ca fenomenul să aibă loc este necesar ca moleculele sensibilizatorului să întîlnească moleculele substanței studiată înainte de a pierde surplusul de energie prin iradiere. Din această cauză este necesară o presiune care asigură posibilitatea ciocnirii moleculelor sensibilizatorului cu moleculele substanței studiate.

Ca exemplu de reacție fotochimică sensibilizată putem da formarea apei oxigenate din hidrogen și oxigen sub acțiunea radiațiilor cu lungimea de undă $\lambda = 2537$ Å.

O asemenea radiație nu este absorbită nici de hidrogen și nici de oxigen. Dacă introducem vapori de mercur, care absorb lumină de această lungime de undă, atunci reacția decurge după schema:

$$Hg + h\nu = \dot{Hg} \text{ (atom de } \dot{Hg} \text{ activat)}$$

$$\dot{Hg} + H_2 = Hg + 2H$$

Atomii de hidrogen avînd o activitate chimică mărită intră în reacție cu oxigenul și formează apa oxigenată. Astfel de reacții fotochimice sensibilizate întîlnim în natură și în tehnică.

Să analizăm fenomenul de fotosinteză din frunzele verzi ale plantelor, care este un proces chimic sensibilizat.

Cu studiul fotosintezei s-a ocupat în trecut B a y e r, T i m i r e a z e v, W i l l s t a t t e r etc., care au stabilit: în frunzele verzi ale plantelor, din bioxid de carbon și din apă, sub acțiunea luminii și a clorofilei, se formează ca produs intermediar aldehida formică, care apoi prin polimerizare se transformă în glucoză și aceasta se transformă în amidon, celuloză:

$$CO_2 + H_2O + \text{energie} \rightarrow O_2 + (CH_2O)$$

$$6\,CH_2O \rightarrow C_6H_{12}O_6$$

$$nC_6H_{12}O_6 - nH_2O = (C_6H_{10}O_5)n.$$

După această teorie oxigenul eliminat de plante în mediul înconjurător provine din bioxidul de carbon care înainte de a se combina cu apa se descompune în oxid de carbon și oxigen.

Cercetările actuale făcute cu izotopii radioactivi au permis a pătrunde în intimitatea procesului de fotosinteză și au arătat că procesul se desfășoară astfel:

1. S-a stabilit că descompunerea apei este un proces de fotoliză, adică se descompune sub acțiunea energiei furnizate de soare. La acest proces participă clorofila conținută în cloroplaste, niște corpuscule de formă alungită aflate în celulele frunzelor verzi. Clorofila are rol de sensibilizator fotochimic sau de transmițător de energie.

Energia necesară descompunerii apei furnizată de lumină nu este absorbită direct de apă. Clorofila *b* absoarbe lumină de o anumită lungime de undă și clorofila *b* la rîndul său prin fenomenul de fluorescență emite o lumină de o altă lungime de undă, care este caracteristică clorofilei *a* și deci va fi absorbită de clorofila *a*, care la rîndul său o va transmite apei.

2. Organismele folosesc pentru transformări chimice catalizatori chimici, numiți enzime, care sînt produși de celula vie.

Fotoliza apei este activată de un sistem de mai multe enzime, acordate una cu alta și care lucrează concertat. Enzimele care participă la fotoliza apei sînt hidrazele și anume codehidraza unu (Co I) și codehidraza doi (Co II). Să reprezentăm schematic descompunerea apei care se desfășoară în prezența energiei furnizate de lumină, a clorofilei din cloroplaste, ca sensibilizator fotochimic și în prezența hidrazelor care au rol de catalizatori chimici: $H_2O + CoI \xrightarrow[\text{cloroplaste}]{\text{lumină}} CoIH_2 + \frac{1}{2}O_2$

$$H_2O + CoII \xrightarrow[\text{cloroplaste}]{\text{lumină}} CoIIH_2 + \frac{1}{2}O_2$$

Deci: a) Lumina are rol de a descompune apa și de a forma dihidrocodehidraza I și II care conțin *hidrogen sub un potențial chimic ridicat*.

b) Din acest proces rezultă oxigen care este eliminat de plante în mediul înconjurător, care după cum se vede provine din apă și nu din bioxidul de carbon.

c) Hidrogenul rezultat din descompunerea apei servește pentru hidrogenări și pentru a produce acidul adenozin-trifosforic (ATF).

3. Pentru desfășurarea procesului fotochimic mai este necesară și energia a două legături bogate în energie ale ATF. Astfel de reacții care sînt posibile grație energiei ce se eliberează la desfacerea legăturii bogate

în energie se numesc endergonice. Deci descompunerea apei este o reacție endergonică.

4 Paralel cu fotoliza apei, să vedem ce se întîmplă cu bioxidul de carbon. Lucrările lui M. Calvin și ale colaboratorilor săi (1947—1956), care au folosit bioxid de carbon marcat au stabilit:

— Bioxidul de carbon, printr-o reacție de carboxilare, este fixat de 1.5 difosfatul de rubiloză, o substanță macromoleculară.

— Primul compus care rezultă din această reacție este acidul 2 carboxi 3 ceto pentoză difosfat.

— Acest produs este nestabil și sub influența unui sistem enzimatic al carboxidismulazei se desface în 2 molecule de acid 3 fosfogliceric, care mai departe este redus de hidrogenul provenit prin fotoliza apei în prezența unei enzime și a *ATF* în aldehidă 3 fosfo glicerică.

— Aldehida 3 fosfo glicerică trece în continuare în 1,6 difosfat de fructoză, iar aceasta în glucoză, fructoză, din care prin condensare se formează zaharoza, amidonul, celuloza.

Trebuie să menționăm că 1.5 difosfatul de rubiloză este mereu regenerat încît procesul de fotosinteză este un proces în circuit și viteza circuitului este numai de cîteva secunde.

În concluzie, procesul fotochimic este un proces complex la care participă un sistem de mai multe enzime, clorofila și alți pigmenți din cloroplaste.

Teoria fotochimică a fotografiei

Obținerea fotografiilor constituie o aplicație practică a fenomenelor fotochimice. Sub acțiunea luminei bromura de argint, din stratul sensibil de pe placa fotografică, se descompune și apare argintul metalic sub forma unor particule extrem de mici. Acest proces este un proces fotochimic primar, care duce la apariția imaginii latente. Acest proces nu a fost lămurit multă vreme. Astăzi se explică astfel:

Sărurile de argint din stratul fotosensibil conțin ioni de argint. Sub acțiunea luminii are loc un efect fotoelectric, în urma căruia electronii puși în libertate, neutralizează ioni pozitivi de argint transformîndu-i în atomi. Argintul metalic sub formă de atomi izolați formează imaginea latentă. Deoarece concentrația argintului pusă în libertate nu depășește 10^{-7} g/cm^3, iar stratul fotosensibil are o grosime de aproximativ 2—3 μ se înțelege că obsevarea directă a imaginii latente nu este posibilă.

Germenii care apar pe suprafața microcristalelor de bromură de argint, fac posibilă acțiunea revelatorului, care provoacă descompunerea bromurei de argint inițiată de lumină. Acțiunea revelatorului este cu atît mai mare cu cît acțiunea luminei a fost mai puternică și cu cît cristalul este mai mare. Dimensiunile cristalelor măresc sensibilitatea plăcilor dar micșorează puterea de a reda detaliile.

Fotografia oferă posibilitatea de a înregistra radiații infraroșii și ultraviolete, inaccesibile observării directe, a unor procese de durată foarte scurtă și a unor procese de o intensitate extrem de redusă. Aceste fapte au dus la folosirea fotografiei în astronomie, astrofizică, în tehnica cinematografică și în cercetările tehnice și științifice.

În acest scop pentru a mări sensibilitatea emulsiilor, pentru anumite regiuni spectrale se folosesc sensibilizatori. Fotografierea în regiunea infraroșie prezintă mari avantaje. Se pot fotografia obiecte îndepărtate

printr-un strat de atmosferă în care există o ceață fină. Acest lucru este posibil, datorită difuziei, mai puțin pronunțată, pe care o suferă radiațiile infraroșii. Astrofizicienii sovietici, au utilizat plăci sensibilizate la raze infraroșii pentru fotografierea nebuloaselor. De asemenea s-a reușit să se fotografieze pe plăci obișnuite ultravioletul îndepărtat folosind un strat subțire de ulei de mașină, care sub acțiunea razelor ultraviolete devine fluorescent. Lumina de fluorescență, avînd o lungime de undă mai mare, pătrunde prin stratul de gelatină și permite fotografierea în ultraviolet.

Teoria fotochimică a vederii

Teoriile existente asupra vederii explică vederea ca un fenomen fotochimic tipic. Imaginea observată se formează pe retină, un țesut fotosensibil care se poate asemăna cu emulsia fotosensibilă. Retina cuprinde ramificațiile nervului optic și elemente fotosensibile numite bastonașe și conuri. Numărul acestor elemente în ochiul omului este de 7.10^6 conuri și 130.10^6 bastonașe. Ceva mai în afara axului optic se găsește pata galbenă și în mijlocul ei o mică adîncitură numită fovea centralis. Experiența arată că vedem clar, dacă imaginea se formează pe pata galbenă și distingem detaliile, dacă se proiectează pe fovea centralis. Elementele fotosensibile joacă un rol diferit în senzația vizuală: bastonașele sînt mai sensibile la lumină, iar conurile disting culorile. Procesul care explică fotosensibilitatea bastonașelor se petrece astfel: extremitățile bastonașelor conțin un pigment roz, numit purpura vizuală, care are proprietatea de a se descompune sub acțiunea luminii. Acesta este un proces fotochimic tipic. Produsele de descompunere acționează asupra nervului optic și astfel începe seria proceselor care se încheie cu senzația vizuală.

Sub acțiunea unei iluminări puternice, purpura vizuală se poate descompune în întregime și astfel bastonașele își pierd capacitatea fotosensibilă. După un anumit interval de timp însă, purpura se reface și bastonașele își recapătă sensibilitatea.

Alt fenomen este migrarea pigmentului întunecat. Pentru a proteja elementele fotosensibile de acțiune puternică a luminii, în retină începe migrarea pigmentului întunecat spre suprafața retinei. Cînd intensitatea luminii scade atunci migrarea se face în sens contrar.

Problema percepерii culorilor nu este clarificată. O teorie care explică perceperea culorilor este teoria *tricromatică*. Această teorie admite perceperea a trei culori fundamentale (roșu, verde, violet) în proporții diferite. Această teorie a fost fundamentată de Lomonosov (1756) și mai tîrziu dezvoltată de Young (1802) și studiată amănunțit de Helmholtz. Conform acestor concepții trebuie să admitem trei specii de aparate nervoase. În 1947 Granit a stabilit că în ochiul broaștei și al pisicei există trei tipuri de aparate fotosensibile, care au maximul de sensibilitate pentru albastru, verde și portocaliu. Aceste rezultate reprezintă o confirmare serioasă a teoriei tricromatice, deoarece ochiul omului are o mare asemănare cu ochiul vertebratelor.

Fluorescență — luminiscența care se întrerupe instantaneu, o dată cu întreruperea iluminării.

Luminiscența, este o emisie luminoasă care se caracterizează printr-o lungime de undă mai mare decît lumina absorbită, pentru că o parte A, din energia fotonului absorbit este cheltuită în procese intramoleculare, încît în conformitate cu legea conservării energiei avem: $h\nu = h\nu_0 - A$.

DIN APLICAȚIILE PRACTICE ALE FIRULUI CU PLUMB ȘI ALE PENDULULUI

Firul cu plumb și pendulul — sînt fără îndoială cele mai simple (cel puțin ca idee) dintre toate aparatele care servesc știința. Cu atît este mai uimitor cu cît cu ajutorul unor instrumente atît de primitive s-au obținut rezultate cu adevărat de basm: cu ajutorul lor omul a reușit să pătrundă cu mintea în măruntaiele Pămîntului, să afle ce se petrece la zeci de kilometri în interiorul scoarței terestre. Vom aprecia pe deplin această cucerire a științei, dacă ne vom reaminti că cea mai adîncă mină din lume nu se

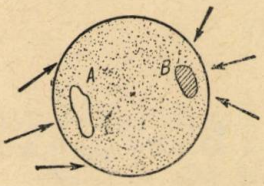


Fig. 1.

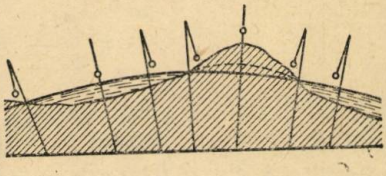


Fig. 2.

află la mai mult de 3,25 km, adică nici pe de parte nu egalează acele adîncimi despre care ne dau indicații firul cu plumb și pendulul care se află pe suprafața Pămîntului.

Principiul mecanic care stă la baza aplicațiilor firului cu plumb nu este greu de înțeles. Dacă sfera pămîntească ar fi fost perfect omogenă, direcția firului cu plumb în fiecare punct s-ar fi putut determina prin calcul. O repartiție neuniformă a maselor în apropierea suprafeței sau în adîncime modifică această direcție teoretică. Apropierea unui munte obligă firul cu plumb să se încline puțin spre el — cu atît mai mult cu cît muntele este mai aproape și cu cît este mai mare masa sa. În apropierea observatorului din Simeiz, (localitate în U.R.S.S.), firul cu plumb are o deviere destul de importantă provocată de peretele învecinat al munților Crimeii; unghiul de deviere este de aproape jumătate de minut. Și mai mult atrag spre ei un fir cu plumb munții Caucaz: astfel la Ordjonikidze devierea față de verticală este de 37 de secunde, la Batum de 39 secunde. Invers, un spațiu gol în interiorul Pămîntului exercită asupra pendului o acțiune de respingere: el este atras în direcție opusă, de către masele înconjurătoare (mărimea respingerii este egală cu atracția pe care ar fi exercitat-o asupra firului cu plumb masa substanței, dacă spațiul gol ar fi fost umplut cu substanța respectivă. Firul cu plumb este respins nu numai de spațiile goale, dar — în mod corespunzător mai slab — și de îngrămădirile de substanță mai puțin dense decît media. Iată de ce la Moscova, situată departe de munți, firul cu plumb totuși deviază spre nord, cu 10 secunde. După cum vedem, firul cu plumb poate servi ca instrument care permite să cercetăm structura internă a Pămîntului.

Și mai multe date pot fi furnizate în această privință cu ajutorul pendulului. Acest aparat are, după cum știm, următoarea proprietate: dacă amplitudinea oscilațiilor sale nu depășește cîteva grade, durata unei osci-

lații aproape că nu depinde de amplitudine: oscilațiile mai mari și mai mici au aceeași durată. Durata oscilațiilor, după cum de asemenea știm, depinde de lungimea pendulului și de accelerația gravitației, corespunzătoare locului respectiv de pe suprafața globului pămîntesc. Formula care leagă durata T a unei oscilații complete de lungimea l a pendulului și accelerația g a gravității pentru oscilații mici este dată de relația:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

În această formulă, dacă lungimea l a pendulului se ia în metri, accelerația gravității trebuie luată în m/s^2.

Dacă pentru studiul structurii scoarței terestre se folosește un pendul care face o oscilație simplă pe secundă, vom avea:

$$\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 1 \text{ și } l = \frac{g}{\pi^2}$$

Este limpede că, orice variație a forței de atracție va influența lungimea unui astfel de pendul: pentru ca pendulul să bată exact secunda, el va trebui să fie mărit sau scurtat. Pe această cale se reușește să se măsoare variații ale forței gravității de 0,0001 din mărimea sa. Nu vom descrie tehnica efectuării unor măsurători cu firul cu plumb și pendulul (ele sînt cu mult mai complicate decît ne putem închipui). Vom da numai cîteva rezultate dintre cele mai interesante.

S-ar părea că în apropierea țărmurilor oceanului firul cu plumb ar trebui să devieze întotdeauna în direcția continentului, așa cum deviază în direcția masivelor muntoase.

Experiența nu confirmă însă această previziune. Pendulul arată că pe ocean și pe insule, intensitatea forței gravității este mai mare decît în apropierea țărmurilor, iar în apropierea țărmurilor este mai mare decît departe în interiorul continentului.

Ce dovedește aceasta? Acest lucru se datorește evident faptului că sub continente avem de-a face cu substanțe mai ușoare decît sub fundul oceanelor. Din aceste fapte fizice geologii scot indicații prețioase privind structura rocilor care formează scoarța planetei noastre.

Servicii de neînlocuit a adus o astfel de metodă de cercetare cu privire la lămurirea cauzelor așa numitei „anomalii magnetice de la Kursk". Voi da cîteva rînduri din raportul unuia dintre cercetători *).

*) Cercetările din zona anomaliei de la Kursk s-au efectuat nu cu firul cu plumb ci cu ajutorul unei balanțe de torsiune (așa numitul „variometru"). Firul aparatului este răsucit sub acțiunea atracției maselor subpămîntene. Precizia acestui aparat uimitor este pînă la 10^{12} dintr-un gram! Atracția unor munți mari este simțită de variometru la distanța de 300 km. Iată descrierea pe scurt a aparatului.

„Partea principală a aparatului este balanța de torsiune reprezentată schematic în fig. 3. Brațul M_1E făcut dintr-un tub de aluminiu subțire are lungimea de aproximativ 40 cm: la un capăt al brațului este fixată o greutate de aur M_1 de 30 grame; la celălalt capăt se atîrnă de firul EM_2 o greutate de aur M_2 tot de 30 grame. Brațul este suspendat de un fir foarte subțire de platină — iridiu AO de 60—70 cm. Pentru protecția de curenții de convecție aerieni balanța este protejată prin pereți metalici tripli. În aparat există două perechi de balanțe cu torsiune așezate la 180° una față de alta; S este o oglindă plană.

„...Se poate afirma cu toată siguranța că sub suprafața terestră, există mase atractive importante: limita vestică a acestor mase... este stabilită cu claritate deplină. Totodată este foarte probabil că aceste mase se extind îndeosebi în direcție estică avînd panta estică mult mai lină decît cea vestică".

Se știe ce importanță industrială se acordă enormelor rezerve de minereu de fier care s-au descoperit în zona anomaliei de la Kursk, care se măsoară în zeci de miliarde de tone și care formează jumătate din rezerva mondială. Vom da de asemenea cîteva rezultate privind cercetarea anomaliei forței de gravitație în Uralul de est, (efectuate în 1930 de astronomii din Leningrad).

„Lîngă Zlatoust avem un maximum al forței de gravitație corespunzătoare maisvului cristalin al crestei munților Urali".

„Al doilea maxim la est de Kozerova caracterizează apropierea de suprafața terestră a crestei scufundate".

„Al treilea maxim la est de Mișkino din nou indică apropierea rocilor străvechi de suprafața terestră".

„În sfîrșit cel de al patrulea maxim la vest de Petropavlovsk din nou arată apropierea rocilor grele.

Fig. 3.

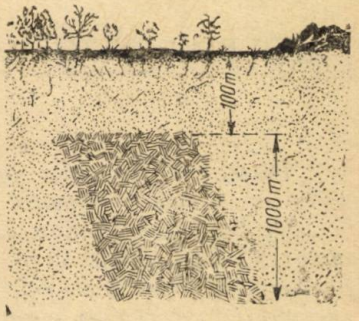


Fig. 4.

În fața noastră se află două dintre nenumăratele exemple de aplicații practice ale fizicii în alte domenii aparent foarte depărtate de ea.

Astăzi știința a căpătat încă o metodă fină de înregistrarea anomaliei forței gravitației. Asupra mișcării sateliților artificiali se exercită atît abaterea planetei noastre de la forma sferică cît și prezența neomogeneităților din structura ei. Cînd un satelit artificial trece deasupra unei creste muntoase sau deasupra unui loc unde se află roci de mare densitate, teoretic, el trebuie să coboare puțin și să-și accelereze mișcarea sub acțiunea excesului local de masă atractivă. E adevărat, înregistrarea acestor efecte este posibilă practic numai în cazul cînd satelitul zboară destul de sus deasupra suprafeței terestre pentru ca rezistența atmosferei să nu influențeze tabloul general al mișcării sale.

Problemă:

Închipuiți-vă că pendulul unui ceas de perete oscilează în apă. Discul său are o formă hidrodinamică care reduce aproape la zero rezistența apei în timpul mișcării. Care va fi durata oscilațiilor unui astfel de pendul: mai mare decît în afara apei sau mai mică? Sau mai simplu: pendulul va oscila mai repede în apă decît în aer?

Soluție: Întrucît pendulul oscilează într-un mediu cu mică rezistență s-ar părea că nu există cauze care ar putea să-i modifice sensibil viteza de oscilație. Totuși experiența arată că pendulul oscilează mai încet decît s-ar putea explica numai prin rezistența mediului.

Acest fenomen misterios la prima vedere se explică prin acțiunea de împingere a apei asupra unui corp scufundat în ea. Această forță micșorează greutatea pendulului fără să-i modifice masa. Prin urmare pendulul se află în apă exact în aceleași condiții în care s-ar afla, dacă s-ar fi transportat pe o altă planetă unde accelerația gravității este mai slabă. Din formula:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{}},$$

rezultă că, o dată cu micșorarea accelerației gravității, durata oscilațiilor T trebuie să crească: pendulul va oscila mai încet.

(Traducere din limba rusă)

PROBLEME REZOLVATE

Problema 4297

Dispunem de două becuri identice cu indicațiile: 50 W, 220 V și de un încălzitor electric cu indicațiile: 400 W, 220 V.

a) *Să se determine variația tensiunii la bornele becurilor în cazul cînd: 1) încălzitorul e în paralel cu becurile; 2) încălzitorul e în serie cu becurile. Tensiunea rețelei este 220 V, iar rezistența firelor care leagă receptorii la sursa de curent este de 10 Ω.*

b) *Cu cît diferă prețul energiei consumate de receptori în cele două cazuri, dacă 1 kWh costă 0,60 lei?*

c) *Care sistem de montare se utilizează în practică și de ce?*

Constantin Emilia, profesoară, Iași

Soluția autoarei. a) Dacă încălzitorul nu e pe circuit, avem: R_b = rezistența unui bec; R_o = rezistența firelor de legătură; P_b = puterea unui bec.

$$R_b = \frac{U^2}{P_b} = \frac{220^2}{50} = 968\ \Omega; \quad R_1 = \frac{R_b}{2} = \frac{968}{2} = 484\ \Omega.$$

Rezistența totală a circuitului este $R_{1t} = R_1 + R_0 = 484 + 10 = 494\ \Omega$.

Intensitatea curentului pe circuit va fi $I_1 = \frac{U}{R_{1t}} = \frac{220}{494} = 0{,}44\ A$.

Tensiunea de la bornele becurilor este $U_1 = I_1 R_1 = 212{,}96$ V.

1) Dacă se pune încălzitorul în paralel cu becurile, $R_i = \frac{U^2}{P_i} = \frac{220^2}{400} = 121\ \Omega$, unde R_i = rezistența încălzitorului și P_i = puterea încălzitorului.

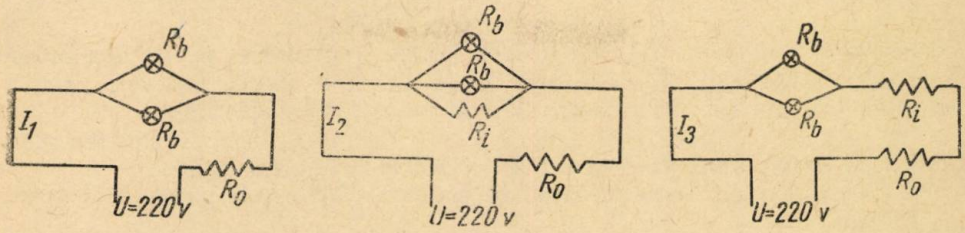
Păstrînd semnificația notațiilor : $R_2 = \frac{R_1 R_f}{R_1 + R_f} = \frac{484 \cdot 121}{484+121} = 96{,}80\ \Omega$.

$$R_{2t} = R_2 + R_0 = 96{,}80 + 10 = 106{,}80\ \Omega$$

$$I_2 = \frac{U}{R_{2t}} = \frac{220}{106{,}80} = 2{,}05\ A\ ;\ U_2 = I_2 \cdot R_2 = 198{,}44\ \text{V}.$$

Variația de tensiune de la bornele becurilor este :

$$\Delta U = 212{,}96\ \text{V} - 198{,}44\ \text{V} = 14{,}52\ \text{V}.$$



2) Dacă încălzitorul e în serie cu becurile :

$$R_{3t} = \frac{R_b}{2} + R_i + R_0\ ;\ R_{3t} = 484 + 121 + 10 = 615\ \Omega$$

$$I_3 = \frac{U}{R_{3t}} = \frac{220}{615} = 0{,}35\ A$$

$$U_3 = I_3 \cdot R_1 = 0{,}35 \cdot 484 = 169{,}40\text{V}.$$

Variația de tensiune va fi :

$$\Delta U = 212{,}96\ \text{V} - 169{,}40\ \text{V} = 43{,}56\ \text{V}.$$

b) Puterea dezvoltată de receptori în cele două montaje va fi :

$$P_2 = \frac{U_2^2}{R_2} = \frac{198{,}44^2}{96{,}80} = 406{,}80\ \text{W}$$

$$P_3 = I_3^2 (R_1 + R_f) = 0{,}35^2 \cdot 605 = 72{,}60\ \text{W}$$

Energiile dezvoltate în timp de 5 ore :

$$W_2 = P_2 \cdot t = 406{,}80\ \text{W} \cdot 5\ h = 2034\ \text{Wh} = 2{,}03\ \text{kWh}$$

$$W_3 = P_3 \cdot t = 72{,}60\ \text{W} \cdot 5\ h = 363\ \text{Wh} = 0{,}36\ \text{kWh}$$

Prețurile corespunzătoare la cele două cazuri :

W_3 este $0{,}36 \cdot 0{,}60 = 0{,}22$ lei și W_2 este $2{,}03 \cdot 0{,}60 = 1{,}22$ lei,

iar diferența de preț este 1,22—0,22 = 1 leu.

c) Receptorii se montează obișnuit, în paralel, deoarece puterea dezvoltată este mai mare și satisfac mai bine scopului pentru care sînt utilizați.

Problema 4298

Un muncitor urcă un sac de 60 kgf la înălțimea de 15 m. El poate să facă 8 drumuri pe oră, timp de 7 ore.

a) *Să se calculeze lucrul mecanic pe care îl produce muncitorul în fiecare drum.*

b) *Să se calculeze lucrul mecanic efectuat într-o zi, știind că greutatea sa proprie este de 70 kgf.*

c) *Să se exprime lucrul mecanic în unități MKS, în fiecare caz.*

I. Jaliu, profesor, București

Soluția autorului. a) În fiecare drum muncitorul ridică greutatea $G=60+70=130$ *kgf*, la înălțimea de 15 m, deci lucrul mecanic produs de muncitor într-un drum este: $W=G.h=130.15=1950$ *kgfm.*

b) Într-o zi muncitorul face $8.7=56$ drumuri, deci lucrul mecanic produs în timpul unei zile va fi: $W'=1950.56=109.200$ kgfm.

c) Unitatea de lucru mecanic în sistemul *MKS* este joule-ul. 1 joule $=\frac{1 \text{ kgfm}}{9{,}8}$; lucrul mecanic efectuat într-un singur drum va fi:

$L=\frac{1950}{9{,}8} \approx 198$ joule. Lucrul mecanic efectuat într-o zi va fi:

$$W' = \frac{109\,200}{9{,}8} \cong 11143 \text{ joule.}$$

Problema 4299

Perioada pendulului unui ceasornic este de 1 s. Să se calculeze perioada pendulului acestui ceasornic în următoarele cazuri:

a) Cînd ceasornicul este așezat la suprafața Lunii. (Se va lua masa Lunii de 81 ori mai mică decît cea a Pămîntului, iar raza sa de 4 ori mai mică decît cea a Pămîntului).

g) Ceasornicul e așezat într-un ascensor ce urcă cu o accelerație $a=g$.

c) Ceasornicul e așezat într-un ascensor care cade liber.

d) Ceasornicul e așezat într-al III-lea satelit artificial sovietic.

C. Savu, profesor, Urlați

Soluția autorului. — a) Din legea atracției universale aplicată pentru un corp la suprafața Pămîntului avem:

$g_p = \frac{kM}{R^2}$, unde M = masa Pămîntului și R = raza sa:

La suprafața Lunii avem: $g_l = \frac{k M_1}{R_1^2} = \frac{4^2 kM}{81\, R^2}$; $g_l = \frac{4^2}{81} g_p$, iar perioada pe lună devine:

$$T_l = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_l}} = 2\pi \sqrt{\frac{81\, l}{4^2 g_p}} = \frac{9}{4} \cdot 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_p}} = \frac{9}{4} T_p = 2{,}25 \text{ s.}$$

Ceasornicul merge de 2,25 ori mai încet.

b) În cazul ascensorului ce urcă, perioada pendulului devine:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{a}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{T}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} s.$$

Aici $a = 2g$ deoarece pentru a ridica pendulul pe verticală cu o accelerație egală cu g trebuie să aplicăm asupra lui o forță $F = 2G$.

c) În cazul ascensorului ce cade liber avem:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g-a}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g-g}} = \infty.$$

Un pendul așezat într-un ascensor ce cade liber nu oscilează. (ceasornicul nu funcționează).

d) În cazul celui de-al III-lea satelit artificial avem:

$$T_5 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_s - a}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_s - \frac{v^2}{R_s}}}$$

Aici g_s și R_s sînt accelerația căderii libere și distanța de la centrul pămîntului la satelit, iar termenul $\frac{v}{R_s}$ e accelerația centripetă a satelitului. Dar știm că avem: $\frac{v^2}{R_s} = g_s$ și $\frac{v^2}{R_s} - g_s = 0, T = \infty$. Un ceasornic cu pendul așezat în satelit nu funcționează.

Problema 4300

O sirenă emite un sunet cu o frecvență de 660 Hz. Vîntul bate într-o anumită direcție cu viteza de 17 m/s. Care va fi frecvența acestui sunet auzit de un observator ce se află fix față de sirenă în sensul mișcării vîntului?

C. Savu, profesor, Urlați

Soluția autorului. — Dacă nu ar bate vîntul, sirena ar emite sunete cu lungimea de undă λ ce se propagă spre O cu viteza $V = 340$ m/s. Cînd bate vîntul, lungimea de undă devine λ' și se propagă spre O cu viteza $V' = V + V_1 = (340 + 17)$ m/s. Deci:

$$\lambda' = \lambda + S = VT + V_1T = T(V + V_1) = \frac{V + V_1}{\nu};$$

$$\lambda' = \frac{V'}{\nu'} = \frac{V + V_1}{\nu'} \quad \text{sau:} \quad \frac{1}{\nu'} = \frac{1}{\nu}$$

frecvențele fiind egale.

Problema 4328

Ce rezistență electrică are un bec electric de 100 W, 220 V, cînd este supus unei tensiuni de 4 volți?

Se va considera temperatura de funcționare normală a becului $\theta_2 = 3000^0K$, *temperatura camerei* $\theta_0 = 27^0C$ *și coeficientul termic al rezistivității wolframului* $\alpha = 0{,}0048\ grad^{-1}$.

Carol Bukowski, profesor Sighișoara

Soluția autorului. — Temperatura filamentului incandescent este $\theta_2 = 3000 - 273 = 2727^0C$. Diferența dintre temperatura filamentului și aceea a camerei este $\Delta\theta_2 = 2700^0C$. Rezistența becului la temperatura camerei va fi:

$$R_0 = \frac{R_2}{1 + \alpha\Delta\theta_2}.$$

Dar, rezistența R_2 la incandescență este $R_2 = \frac{U_2^2}{P}$, adică

$$R_2 = \frac{220^2}{100},\quad R_0 = \frac{484}{1+0{,}0048\cdot 2700},\quad R_0 \approx 34{,}66\ \Omega.$$

Din formula cantității de căldură $\Delta Q = mc\cdot\Delta\theta$, putem scrie că temperaturile pe care le ia filamentul becului sînt direct proporționale cu căldurile degajate de curentul electric:

$$\frac{\Delta\theta_2}{\Delta\theta_1} = \frac{\Delta Q_2}{\Delta Q_1}.$$

Insemnînd cu U_1 tensiunea de 4 volți și cu U_2 tensiunea de 220 volți, legea Joule-Lenz $\left(\Delta Q = 0{,}24\frac{U^2}{R}\Delta t\right)$ ne dă:

$$\frac{\Delta\theta_2}{\Delta\theta_1} = \frac{U_2^2 R_1}{U_1^2 R_2},\quad \frac{\Delta\theta_2}{\Delta\theta_1} = \frac{U_2^2 R_1}{U_1^2 R_2},\quad \frac{\Delta\theta_2}{\Delta\theta_1} = \frac{U_2^2 R_0(1+\alpha\Delta\theta_1)}{U_1^2 R_0(1+\alpha\Delta\theta_2)},$$

$$\frac{U_2^2}{U_1^2} = \frac{\Delta\theta_2(1+\alpha\Delta\theta_2)}{\Delta\theta_1(1+\alpha\Delta\theta_1)}$$

Inlocuim pe U_2 cu 220, pe U_1 cu 4, pe $\Delta\theta_2$ cu 2700 și aflăm pe $\Delta\theta_1$, adică creșterea de temperatură a filamentului la tensiunea de 4 volți:

$$\left(\frac{220}{4}\right)^2 = \frac{2700(1+0{,}0048\cdot 2700)}{\Delta\theta_1(1+0{,}0048\,\Delta\theta_1)},$$

$$0{,}0048\,\Delta\theta_1^2 + \Delta\theta_1 - \frac{2700\ (1+0{,}0048\cdot 2700)}{55^2},$$

$$48\,\Delta\theta_1^2 + 10000\,\Delta\theta_1 - 124600 = 0,\quad \Delta\theta_1 \approx 11{,}8^\circ C$$

Rezistența filamentului pentru o ridicare de temperatură de $11{,}8^0C$ va fi:

$$R_1 = R_0(1+\alpha\Delta\theta_1),\quad R_1 = 34{,}66\ (1+0{,}0048\cdot 11{,}8),\quad R_1 \approx 36{,}6\ \Omega.$$

Problema 4404

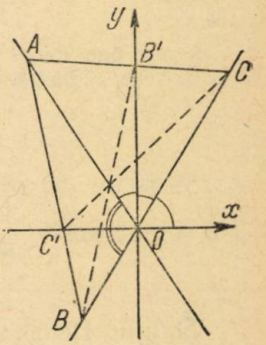
Se dau dreptele $y^2 = mx^2$ $(m > 0)$ *pe care se iau punctele* A, B, C. *Dreptele* AB *și* AC *taie axele* Ox *și* Oy *respectiv în punctele* C' *și* B'. *Să se arate că dreptele* BB' *și* CC' *se taie pe dreptele date.*

Gh. Cezar, elev Buzău

Soluție. Ecuația $y^2 = mx^2$ reprezintă dreptele $y = +\sqrt{m}x$ și $y = -\sqrt{m}x$ concurente în origine $(m \geqslant 0)$. Aceste două drepte avînd coeficienți unghiulari $+\sqrt{m}$ și $-\sqrt{m}$ egali și de semne contrare sînt simetrice față de axele de coordonate care sînt bisectoarele unghiului celor două drepte. În cazul cînd punctele A, B și C sînt așezate pe una din drepte, problema este evidentă. Se consideră cazul cînd punctele B și C sînt situate pe dreapta $y = +\sqrt{m}x$ și punctul A este situat pe dreapta $y = -\sqrt{m}x$, analog cu cazul cînd punctele B și C sînt situate pe dreapta $y = -\sqrt{m}x$ și punctul A este situat pe dreapta $y = +\sqrt{m}x$.

Teorema bisectoarei aplicată triunghiurilor AOB și AOC dă:

$$\frac{OA}{OB} = \frac{C'A}{C'B} \text{ și } -\frac{OC}{OA} = \frac{B'C}{B'A}.$$



Înmulțind relațiile rezultă:

$$\frac{C'A}{C'B} \cdot \frac{OB}{OC} \cdot \frac{B'C}{B'A} = -1.$$

Conform reciprocei teoremei lui *Ceva*, dreptele BB' și CC' se taie pe dreapta AO, deci pe curba dată.

S-au primit soluții bune de la *Șerban Lungu*, Cluj, *Ene Dumitru* student București, *Ilie Mihai* București, *M. Tănăsescu* elev Horezu și *Gh. Grădeanu* elev Focșani.

Problema 4405

Să se găsească numărul de patru cifre a, b, c, d *știind că:*

$$\frac{\overline{abcd}}{\overline{ad}} = \overline{abc} = (b + c - a)^2$$

Gh. Cezar, elev Buzău

Soluție. Din enunț reiese:

$$\frac{1000a + 100b + 10c + d}{10a + d} = 100a + 10b + c$$

$$1000a + 100b + 10c + d = 1000a^2 + 100ab + 10ac + 100ad + 10bd + cd \quad (1)$$

$$1000a(a - 1) + 100b(a - 1) + 10c(a - 1) + d(100a - 1) + 10bd + cd = 0$$

Cum numărul $\overline{abcd}$ are patru cifre rezultă $a \geqslant 1$ și nici un termen din (1) nu poate fi negativ. Rezultă că toți acești termeni trebuie să fie nuli.

$$1000\,a\,(a-1)=0, \quad \text{deci}: \; a=1; \quad 100\,b\,(a-1)=10\,c\,(a-1)=0$$

Pentru $a = 1$ egalitatea (1) devine:

$$99\,d+10\,bd+cd=0; \quad 99\,d=0, \quad \text{deci}: \; d=0; \quad 10\,bd=cd=0.$$

Egalitatea (1) este verificată numai pentru $a = 1$ și $d = 0$. Din enunț rezultă:

$$\overline{1\,bc}=(b+c-1)^2 \tag{2}$$

Deci, numărul $\overline{1bc}$ este un pătrat perfect cuprins între 100 și 200, adică 100, 121, 144, 169, 196; $\overline{1bc}=100\neq(0+0-1)^2$; $\overline{1\,bc}=121\neq$ $\neq(2+1-1)^2$; $\overline{1\,bc}=144\neq(4+4-1)^2$; $\overline{1\,bc}=169\neq(6+9-1)^2$; $\overline{1\,bc}=196=(9+6-1)^2$.

Convine numai $b = 9$ și $c = 6$. Deci, numărul căutat este:

$$abcd = 1960.$$

S-au primit soluții bune de la *Petre Chiva* elev Pitești, *Bluoss Hans* elev București, *M. Ciulei* elev Sighișoara, *Victor Olteanu* elev București și *Ion Colbeanu* absolvent Buhuși.

Problema 4412

Să se demonstreze că dacă a, b, c sînt numere pozitive și $a+b+c=1$, *atunci avem* $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 9$. *Generalizare.*

* * *

Soluție. Deoarece a + b + c = 1 avem:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c)=1+1+1+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+$$

$$\left(+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)=3+\frac{a^2+b^2}{ab}+\frac{a^2+c^2}{ac}+\frac{b^2+c^2}{bc}$$

și ținînd seamă că $x^2 + y^2 \geqslant 2xy$ rezultă că:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3+\frac{a^2+b^2}{ab}+\frac{a^2+c^2}{ac}+\frac{b^2+c^2}{bc}\geqslant 3+2+2+2=9,$$

deci:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 9.$$

În general, dacă avem n numere pozitive $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ astfel ca $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_n = 1$, avem:

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n}\geqslant n^2$$

Într-adevăr, urmînd un raționament analog, avem

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}=\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)(a_1+a_2+\ldots+a_n)=$$

$$=n+\left(\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_1}\right)+\left(\frac{a_1}{a_3}+\frac{a_3}{a_1}\right)+\left(\frac{a_1}{a_4}+\frac{a_4}{a_1}\right)+\ldots$$

$$=n+\frac{a_1^2+a_2^2}{a_1a_2}+\frac{a_1^2+a_3^2}{a_1a_3}+\frac{a_1^2+a_4^2}{a_1a_4}+\ldots$$

unde suma $\frac{a_1^2+a_2^2}{a_1a_2}+\frac{a_1^2+a_3^2}{a_1a_3}+\ldots$ are $\frac{n^2-n}{2}$ termeni

Într-adevăr, din înmulțirea $\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)\cdot(a_1+a_2+\ldots a_n)$ se obțin n^2 termeni. Scăzînd din aceștia cei n termeni obținuți din înmulțirile $a_1\cdot\frac{1}{a_1}$; $a_2\cdot\frac{1}{a_2}$;. . . etc., obținem n^2-n termeni, și formînd grupele de mai sus de cîte 2 termeni ajungem la concluzia arătată.

Ținînd seamă acum că: $x^2+y^2\geqslant 2xy$ obținem:

$$n+\frac{a_1^2+a_2^2}{a_1a_2}+\frac{a_1^2+a_3^2}{a_1a_3}+\ldots\geqslant n+2\cdot\frac{n^2-n}{2}=n^2 \text{ de unde}$$

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n}\geqslant n^2.$$

Egalitate se obține pentru $a_1=a_2=a_3=\ldots=a_n$.

Soluții bune am primit de la *Stan Mircea*, elev București, *Tr. Vidrașcu*, student Iași, *Alex. Popa* elev București, *Elena Fințescu* elevă București și *Al. Abramovici* elev Timișoara.

Problema 4416

Să se demonstreze că expresia $E=3^{4n+2}+2^{3n+6}$ *se divide exact prin 73, oricare ar fi n întreg.*

Blagovest Sendor, Sofia

Soluție. Expresia se mai scrie:

$$E=3^2\cdot(3^4)^n+2^6\cdot(2^3)^n=9\cdot 81^n+64\cdot 8^n=9(73+8)^n+64\cdot 8^n=$$
$$=\mathfrak{M}\,73+9\cdot 8^n+64\cdot 8^n=\mathfrak{M}\,73+8^n(9+64)=\mathfrak{M}\,73$$

Problema 4418

Să se arate că dacă aria totală și volumul unui paralelipiped dreptunghic sînt egale respectiv cu aria totală și volumul unui cub dat, atunci paralelipipedul dreptunghic se confundă cu acel cub.

Emil Mortun

Soluția autorului. Notăm cu x, y, z dimensiunile paralelipipedului și cu a latura cubului. Avem următoarele relații:

$$2xy + 2xz + 2yz = 6a^2; \quad xyz = a^3 \text{ sau } xy + yz + zx = 3a^2; \quad xyz = a^3$$

Vom exprima două dimensiuni, x și y, cu ajutorul celei de a treia dimensiune, z.

Din relația a doua găsim: $z = \frac{a^3}{xy}$ și $xy = \frac{a^3}{z}$. (1)

Înlocuim în prima relație:

$$\frac{a^3}{z} + z(x+y) = 3a^2, \text{ deci } x + y = a^2 \cdot \frac{3z - a}{z^2} \quad (2)$$

x, y, z și a fiind numere pozitive egalitatea (2) este posibilă numai dacă $x + y > 0$, sau $z > \frac{a}{3}$. (3)

Relațiile I și II ne dau pe $x + y$ și xy. Vom determina pe x și y prin rezolvarea ecuației:

$$u^2 - \frac{3a^2z - a^3}{z^2} u + \frac{a^3}{z} = 0$$

sau

$$z^2u^2 - (3a^2z - a^3)u + a^3z = 0$$

Această ecuație va avea rădăcinile sale reale dacă:

$$\Delta = (3a^2z - a^3)^2 - 4a^3z^3 \geqslant 0$$

După o grupare convenabilă de termeni această condiție se mai poate scrie sub forma:

$$\Delta = -a^3(z - a)^2(4z - a) \geqslant 0,$$

ceea ce este posibil numai dacă $4z - a \leqslant 0$ sau $z \leqslant \frac{a}{4}$.

Această condiție, împreună cu condiția (III) ne dă sistemul de inegalități simultane.

$$z > \frac{a}{3}; \quad z < \frac{a}{4};$$

$$z > \frac{a}{3}; \quad z = \frac{a}{4}$$

Aceste inegalități, după cum se vede, sînt imposibile.

Singura posibilitate de realitate a rădăcinilor este:

$$z = a \text{ care dă } \Delta = 0$$

Dar în acest caz relațiile (I) și (II) ne arată că

$$x = y = a, \quad z = a,$$

adică paralelipipedul se confundă cu cubul dat.

S-au mai primit soluții bune de la *Raicu Viorel* absolvent Drăgănești Olt, *I. Boldea* elev Lugoj, *Tr. Ene* elev Ploiești, *V. Olteanu* elev București, *Florin Brezeanu* absolvent Tîrgoviște și *Petre Chiva* elev Pitești.

Problema 4433

Să se calculeze expresia:

$E = 4(x^2 + y^2 + u^2 + v^2)$ în funcție de a, b, știind că:

$$a^2uv + b^2xy = 0,$$
$$b^2x^2 + a^2u^2 = a^2b^2,$$
$$b^2y^2 + a^2v^2 = a^2b^2$$

Șt. Musta

Soluție: Din prima relație de condiție avem:

$a^2uv = -b^2xy$ sau $a^4u^2v^2 = b^4x^2y^2$. Din această relație și ținînd seama de celelalte avem:

$$\frac{\frac{x^2}{a^2}}{\frac{v^2}{b^2}} = \frac{\frac{u^2}{b^2}}{\frac{y^2}{a^2}} = \frac{\frac{x^2}{a^2} + \frac{u^2}{b^2}}{\frac{y^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}} = \frac{b^2x^2 + a^2u^2}{b^2y^2 + a^2v^2} = 1.$$

Deci

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{v^2}{b^2}\ ;\ x^2 = \frac{a^2}{b^2}v^2.\ \text{De asemenea}\ \frac{y^2}{a^2} = \frac{u^2}{b^2}\ ;$$

$$u^2 = \frac{b^2}{a^2}y^2.$$

Expresia dată devine succesiv:

$$E = 4\left(\frac{a^2}{b^2}v^2 + y^2 + \frac{b^2}{a^2}y^2 + v^2\right) = 4 \cdot \frac{a^4v^2 + a^2b^2y^2 + b^4y^2 + a^2b\,v^2}{a^2b^2} =$$

$$= 4 \cdot \frac{a^2(a^2v^2 + b^2y^2) + b^2(b^2y^2 + a^2v^2)}{a^2b^2} = 4 \cdot \frac{a^2b^2(a^2 + b^2)}{a^2b^2} =$$

$$= 4(a^2 + b^2).$$

Problema 4435

Ce condiție trebuie să îndeplinească primul termen și rația unei progresii aritmetice cu termeni întregi și pozitivi, pentru ca un termen oarecare ridicat la puterea n (n natural) să fie tot un termen al șirului.

Beniczky Ladislau

Soluție: Fie $a,\ a + r,\ a + 2r, \ldots$ o progresie aritmetică. Trebuie să avem

$$(a + pr)^n = a + qr \ldots\ldots \qquad (1)$$

unde p și q sînt numere naturale. Calculăm q din expresia precedentă

$$q = \frac{(a + pr)^n - a}{r} \ldots\ldots \qquad (2)$$

Efectuînd calculele obținem

$$q = \frac{a^n + C_n^1 a^{n-1} pr + C_n^2 a^{n-2} p^2 r^2 + \ldots + p^n r^n - a}{r}.$$

Afară de primul și ultimul termen de la numărător, fiecare termen conține pe r, ca factor, deci a, p și r fiind numere întregi avem

$$q = \text{număr întreg} + \frac{a^n - a}{r};$$

$$\text{dar } a^n - a = a(a^{n-1} - 1) = a(a-1)(a^{n-2} + a^{n-3} + \ldots + 1).$$

Prin urmare condiția cerută de problemă este, ca unul dintre factorii a, $a-1$, $a^{n-2} + a^{n-3} + \ldots + a + 1$, să fie divizibil cu r.

S-au mai primit soluții bune de la *N. Popa* elev Focșani, *V. Olteanu* elev București, *Gh. Banu* elev Pucioasa, *Catrinel Teodorescu* elevă București și *Gh. Gladcenko* student Brașov.

Problema 4450

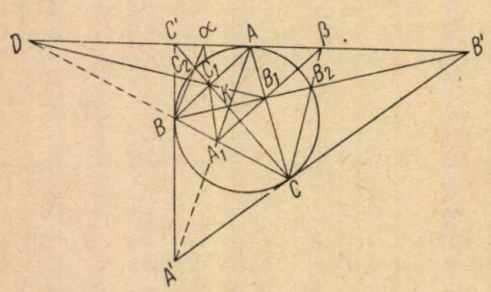
Fie ABC un triunghi oarecare și AA_1, BB_1, CC_1 simedianele sale interioare. Simedianele BB_1 și CC_1 intersectează cercul circumscris triunghiului ABC respectiv în punctele B_2 și C_2.

Dacă notăm $\alpha \equiv (A_1C_1, BC_2)$ și $\beta \equiv (A_1B_1, CB_2)$ să se arate că punctele A, α și β sînt colineare.

Mircea Stan, elev București

Soluție: Simedianele AA_1, BB_1, CC_1 sînt dreptele care unesc vîrfurile triunghiului tangențial $A'B'C'$ cu vîrfurile A, B și C.

Dreapta AC este astfel polara punctului B' și deci punctele B, B_1, B_2 și B' formează o diviziune armonică.



Se știe însă că punctele C, A_1, B, D, formează tot o diviziune armonică (D este intersecția CB și $B'C'$). Rezultă că razele omoloage CB_2, A_1B_1 și DB' sînt concurente, adică punctul β se află pe tangenta în A la cercul circumscris triunghiului ABC. În mod analog se demonstrează că α se găsește tot pe aceeași tangentă (care este simediana exterioară a punctului A), deci punctele α, β și A sînt colineare.

Problema E : 1600

O motocicletă, o motoretă și o bicicletă costă împreună 14 880 lei. Știind că motoreta costă 4950 lei mai puțin decît motocicleta și cu 3720 lei mai mult decît bicicleta, să se afle cît costă fiecare în parte. Soluție aritmetică.

Virginica P. Grăjdeanu

Soluție. Dacă din suma totală de lei 14 880 scădem de două ori pe 3720 și o dată pe 4950, obținem de 3 ori costul bicicletei, adică: $3720 \cdot 2 = 7440$; $7440 + 4950 = 12\,390$ lei; $14\,880 - 12\,390 = 2490$ lei costul a trei biciclete; $2490 : 3 = 830$ lei costă o bicicletă.

Motoreta costă cu 3720 lei mai mult decît bicicleta:
$830 + 3720 = 4550$ lei.

Motocicleta costă cu 4950 lei mai mult decît motoreta:
$4550 + 4950 = 9500$ lei.

Problema E : 1602

O bucată de fier de 15 dm^3 se află cufundată în apă la o adîncime de 3 m. Pentru scoaterea la suprafață se folosește un scripete mobil acționat de un motor electric. Să se calculeze: a) *Forța depusă de motorul electric la scoaterea corpului din apă,* b) *lucrul mecanic efectuat de motor pentru a aduce corpul la suprafața apei,* c) *puterea motorului dacă ridicarea corpului pînă la suprafața apei s-a făcut cu viteza de 2 m/s.*

V. Jipa

Soluția autorului. a) $15 \times 7{,}8 = 117$ kgf. greutatea corpului în aer. Introdus în apă corpul va fi supus forței arhimedice egală cu greutatea apei dezlocuite.

Corpul va dezlocui 15 dm^3 de apă.

$15 \times 1 = 15$kgf este forța arhimedică

$117 - 15 = 102$ kgf este greutatea corpului în apă

$102 : 2 = 51$ kgf depune motorul electric

b) $3 \times 2 = 6$ m acționează forța motorului electric întrucît scripetele este mobil.

$51 \times 6 = 306$ kgfm este lucrul mecanic efectuat de motorul electric.

c) $3 : 2 = 1{,}5$ secunde durează ridicarea corpului.

$306 : 1{,}5 = 204$ kgfm/s $= 2{,}75$ CP este puterea motorului electric.

Problema E : 1605

Să se verifice identitățile:

$$\frac{abc - a}{(b-a)(c-a)} + \frac{abc - b}{(c-b)(a-b)} + \frac{abc - c}{(a-c)(b-c)} = 0$$

$$\frac{abc + c + d}{(b-a)(c-a)} + \frac{abc + a + c}{(c-b)(a-b)} + \frac{abc + b + a}{(a-c)(b-c)} = 0$$

* * *

Soluție. a) După ordonarea numitorilor prima identitate devine:

$$\frac{abc-a}{(a-b)(c-a)}+\frac{abc-b}{(b-c)(a-b)}+\frac{abc-c}{(c-a)(b-c)}=0$$

Se observă că numitorul comun este $(a-b)(c-a)(b-c)$. După amplificarea fracțiilor, identitatea are numărătorul egal cu zero. Deci, prima identitate e verificată.

b) Ca și la prima, se ordonează numitorul și se amplifică respectiv cu $(b-c)$; $(c-a)$ și $(a-b)$ și se obține:

$$(b-c)[abc+(b+c)]+(c-a)[abc+(c+a)]+(a-b)[abc+(a+b)].$$

După efectuarea parantezelor se obține rezultatul zero.

Soluții bune s-au primit de la *Sorin Dimovici* elev Pitești, *Elena Chizinski* elevă Fetești, *Elena Ene, Silvia Nicolae* eleve Ploiești și alți corespondenți.

Problema E : 1607

La plenara din 3—5 decembrie 1959 a C.C. al P.M.R. se arată că: . . . în 1959 industria siderurgică a sporit gradul de folosire a agregatelor cu circa 10% la furnale, cu 20% la cuptoarele Martin și cu 7% la laminoarele în funcțiune, ceea ce a contribuit la creșterea producției de fontă cu peste 100 000 tone, a producției de oțel cu circa 460 000 tone și a laminatelor și țevilor cu circa 250 000 tone. Care a fost producția în 1958?

D. Bătinețu

Soluție: Producția de fontă din 1958 a fost de:

$x=\frac{100\,000\times 100}{10}=1\,000\,000$ tone. Producția de oțel a fost de:

$y=\frac{460\,000\times 100}{20}=2\,300\,000$ tone.

Producția de laminate și țevi a fost de: $z=\frac{250\,000\times 100}{7}=$

$$=3\,571\,428\,\frac{4}{7}\text{ tone}$$

Problema E : 1608

Întreprinderea de colectarea metalelor, centrul Sibiu, sprijinită de organizația de partid și tineret din întreprinderi, a reușit să colecteze cantitatea record de 809 088 kg fier vechi, în luna ianuarie 1960.

Ce cantitate de fier vechi, fontă și metale neferoase s-au colectat, dacă fonta reprezintă $\frac{22}{147}$ *din fierul vechi, iar metalele neferoase* $\frac{3}{22}$ *din fontă.*

I. Candrea, profesor Sibiu

Soluția autorului. Această problemă se rezolvă prin împărțirea în părți egale. Considerăm cantitatea de fier una din aceste părți; iar fonta reprezintă $\frac{22}{147}$. Dar metalele neferoase reprezintă $\frac{3}{22}$ din fontă, adică

$$\frac{3}{22} \cdot \frac{22}{147} = \frac{1}{49}$$

din fierul vechi, ceea ce înseamnă că, cantitatea de 809 088 kg fier vechi se compune din următoarele părți egale: fier vechi $147 \cdot \left(\frac{1}{147}\right)$; fonta $22 \cdot \left(\frac{1}{147}\right)$; neferoase $3 \cdot \left(\frac{1}{147}\right)$, adică 172 părți egale.

Avem: 809 088 : 172 = 4704.

Rezultă: cantitate de fier 4704 . 147 = 691488 kg, cantitatea de fontă 4704 . 22 = 13488 kg, cantitatea de metale neferoase 14112 kg.

— Proba: 691488 + 103488 + 14112 = 809088 kg.

Problema E: 1609

Un drumeț are de parcurs un drum de 40 km. Prima parte a drumului o merge pe jos cu 5 km/oră, iar a doua parte, cu o căruță făcînd 10 km/oră. La înapoiere, drumul făcut cu căruța îl parcurge pe jos, iar cel făcut pe jos îl parcurge cu căruța.

Știind că la înapoiere a făcut cu 2 ore mai puțin decît la dus, să se afle cîți km a parcurs pe jos și cîți cu căruța la înapoiere.

I. Albescu, Făgăraș

Soluția autorului. Se observă că drumul poate fi considerat parcurs odată pe jos și odată cu căruța.

40 : 5 = 8 ore este parcurs drumul pe jos

40 : 10 = 4 ore este parcurs drumul cu căruța și

8 + 4 = 12 ore durează drumul dus și întors și cu căruța și pe jos

12 — 2 = 10 ore, de două ori timpul de la înapoiere;

10 : 2 = 5 ore timpul de la înapoiere.

Presupunem că drumul ar fi fost parcurs pe jos: 5 . 5 = 25 km; 40 — 25 = 15 km; 10 — 5 = 5 km diferențe vitezelor; 15 : 5 = 3 ore cu căruța la înapoiere; 5 — 3 = 2 ore pe jos la înapoiere. Rezultă: 5 . 2 = 10 km pe jos și 10 . 3 = 30 km cu căruța.

Problema E : 1610

Casa de bilete a unui teatru de stat a vîndut pentru un spectacol bilete de 7 lei și de 4 lei, în total 625 bucăți.

Să se afle cîte bilete s-au vîndut din fiecare categorie, dacă pe toate biletele vîndute s-a încasat suma de 2965 lei.

Virginica P. Grăjdeanu

Soluție. Este o problemă ce se rezolvă prin metoda falsei poziții (a ipotezelor).

Presupunem că toate biletele vîndute erau de 4 lei bucata. În acest caz s-ar fi încasat : $625 \cdot 4 = 2500$ lei.

Suma totală rezultată (2500) este mai mică decît cea reală. Cu cît ? Cu $2965 - 2500 = 465$ lei.

Din ce cauză, în urma presupunerii, a rezultat o sumă cu 465 lei mai mică decît cea reală ? Fiindcă presupunerea noastră nu a ținut seama că în cele 625 bilete, erau și bilete de 7 lei.

Să vedem care este diferența de preț între cele două categorii de bilete : $7 - 4 = 3$ lei.

Dacă am înlocui un bilet cu 4 lei cu unul de 7 lei, diferența dintre suma reală încasată și cea rezultată în urma presupunerii noastre s-ar micșora cu 3 lei.

Dacă am înlocui 2 bilete de 4 lei cu 2 de 7 lei, diferența s-ar micșora cu 6 lei.

De cîte ori ar trebui să înlocuim un bilet de 4 lei cu unul de 7 lei, pentru a lichida diferența dintre cele două sume ? (pentru a ajunge la suma reală încasată ?) De atîtea ori, de cîte ori se cuprinde 3 în 465.

$465 : 3 = 155$, acestea sînt biletele de 7 lei.

Pentru a afla cîte bilete s-au vîndut de 4 lei, fie că scădem din 625 pe 155 (adică $625 - 155 = 470$ bilete de 4 lei), fie că le aflăm prin același raționament, presupunînd de data aceasta că toate biletele vîndute erau de 7 lei bucata.

Vom avea : $625 \cdot 7 = 4375$ lei ; $4375 - 2965 = 1410$ lei ; $7 - 4 = 3$ lei.

$1410 : 3 = 470$ bilete de 4 lei bucata.

Verificare : $155 \times 7 = 1085$ lei ; $470 \times 4 = 1880$ lei, $1085 + 1880 = 2965$ lei.

S-au mai primit soluții bune de la *Rodica Gheorghiu*, elevă Timișoara, *Cristian Țînțăreanu* elev București, Maria Drigă elevă Feteşti, Nicoleta Stanciu elevă Haleș, S. Dimovici elev Pitești și *Mariana Cepoiu* elevă Ploiești.

A TREIA OLIMPIADĂ INTERNAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ, 1961.

Această ediție a olimpiadei s-a desfășurat în Republica Populară Ungară, în orașul Veszprém, între 8—15 iulie 1961, cu participarea a 48 elevi din învățămîntul mediu, absolvenți a 10—12 clase din următoarele țări: R. P. Bulgară, R. S. Cehoslovacă, R. D. Germană, R. P. Polonă, R. P. Romînă și R. P. Ungară.

Concursul a constat din două lucrări scrise, în zile diferite, acordîndu-se pentru fiecare lucrare cîte patru ore de lucru.

Publicăm în continuare subiectele propuse *:

Prima lucrare (aritmetică, algebră și trigonometrie)

4868. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$x + y + z = a,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = b^2,$$
$$xy = z^2$$

unde a și b sînt numere date. În ce condiții cele trei numere x, y, z, care verifică sistemul, sînt pozitive și distincte?

4869. Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi oarecare și S aria sa. Să se demonstreze că:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4S\sqrt{3}.$$

În ce caz este valabilă egalitatea?

4870. Să se rezolve ecuația

$$\cos^n x - \sin^n x = 1,$$

unde n este număr natural oarecare.

A doua lucrare scrisă (geometrie plană și în spațiu)

4871. Se dă un triunghi oarecare $P_1P_2P_3$ și un punct arbitrar P interior triunghiului. Dreptele P_1P; P_2P; P_3P taie respectiv laturile triunghiului în Q_1, Q_2, Q_3. Să se demonstreze că printre rapoartele

$$\frac{P_1P}{PQ_1}, \quad \frac{P_2P}{PQ_2}, \quad \frac{P_3P}{PQ_3},$$

există cel puțin unul care nu este mai mare ca 2 și cel puțin unul care nu este mai mic decît 2.

4872. Să se construiască un triunghi ABC cunoscînd două laturi $AC = b$, $AB = c$ și unghiul $AMB = \omega$, unde M este mijlocul laturii AC și $\omega < \frac{\pi}{2}$. Să se arate că:

$$b \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \leqslant c < b,$$

este condiția necesară și suficientă pentru ca problema să aibă soluții și să se explice prezența semnului de egalitate.

---

*) La problemele propuse 4868—4914 se primesc soluții pînă la 30 decembrie 1961.

4873. Fie A, B, C trei puncte situate de aceeași parte a unui plan ε, care nu sînt în linie dreaptă, iar planul ABC nu este paralel cu planul ε. Fie apoi, A', B', C' trei puncte arbitrare în planul ε. Notăm cu L, M, N respectiv mijloacele segmentelor AA', BB', CC' și cu G centrul de greutate al triunghiului LMN (se exclude cazul cînd punctele L, M, N nu formează un triunghi).

Să se afle locul geometric al punctului G atunci cînd punctele A', B', C' se mișcă în planul ε, independent unele de altele.

PROBLEME PROPUSE *)

4874. Care număr trebuie adunat la ambii termeni ai fracțiilor $\frac{m}{m+2}$ și $\frac{m^2}{3}$ pentru ca ele să devină egale. Discuție.

Emil Morțun, profesor Pitești

4875. O rachetă este lansată vertical cu o viteză inițială de 2 km/s. Razele Soarelui cad sub unghiul de 20° cu orizontala. Ce viteză are umbra rachetei pe Pămînt în momentul lansării?

Teodor Leca, profesor Curtea-de-Argeș

4876. Să se afle produsul primilor n termeni ai șirului de funcții definit de relația de recurență

$$f_n(x) = f_{n-1}^2(x) - 2, \text{ unde } f_1(x) = x.$$

Mihai Popescu, profesor Slatina

4877. Fie M un punct al medianei AD a unui triunghi ABC. Cercurile MCD și MBD taie respectiv laturile AC și AB în P și Q. Se cere:

a) Să se arate că triunghiul APQ este asemenea cu triunghiul ABC.

b) Locul geometric al centrului cercului circumscris triunghiului APQ, cînd M este mobil pe AD;

c) Poziția punctului M pentru care raza cercului MBD este minimă.

N. Peligrad, profesor Pitești

4878. Să se găsească mulțimea punctelor din plan $M(x, y)$ pentru care avem:

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2ax^3 - 2axy^2 - a^2x^2 + 2a^3x - a^2y^2 \leqslant 0; \quad (a > 0).$$

Popa Viorel, profesor Pitești

---

*) VIII (4874, 4875, 4880, 4889); IX (4876, 4877, 4881, 4890, 4894, 4900, 4902, 4906, 4907); X (4878, 4879, 4882, 4885, 4886, 4887, 4888, 4891, 4893, 4895, 4897, 4899, 4901, 4903, 4909); XI (4883, 4884, 4892, 4896, 4898, 4904, 4905, 4908, 4910, 4911, 4912, 4913, 4914).

4879. Ce consideră triunghiul ABC avînd vîrful A fix, iar latura $BC = a$ = constantă și se află pe dreapta s fixă. Să se arate că pentru aceste triunghiuri: $R^2 \sin A(\cos A + \cos B \cos C) = \text{const}$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului ABC.

Ixaru Grigore, profesor Găești

4880. Un cărucior cu masa de 19,62 kg, în care se află un copil cu masa egală cu 3 unități tehnice, are o viteză de 2 m/s. O forță de 2,2 kgf îl deplasează pe distanța de 200 m ridicîndu-i viteza la 36 km/h. Să se determine coeficientul de frecare considerînd că deplasarea s-a făcut pe orizontală.

Eugen Boia, profesor Pitești

4881. Se dă $f(x) = A + Bx - x^2$. Să se arate că: $af(m) + bf(m) + cf(p) < (a + b + c)f\left(\frac{am+bn+cp}{a+b+c}\right)$, unde a, b, c sînt numere pozitive.

C. Ionescu-Țiu

4882. Un curent electric de 10 A trece timp de 20 h printr-o soluție de acid sulfuric. Se întreabă: ce volum va ocupa sub presiunea de 2 Atm și la 27° C hidrogenul rezultat din electroliză?

* * *

4883. Un potențiometru are rezistența de 48Ω. El este alimentat cu o sursă de curent cu *t.e.m.* de 90 V și rezistența interioară de 2 Ω. Un consumator de curent cu rezistența de 15 Ω se leagă între una din bornele potențiometrului și cursorul acestuia. Se întreabă: ce poziție trebuie să ocupe cursorul pentru ca în consumator să aibă loc o cădere de tensiune de 30 V?

Eugen Boia, profesor Pitești

4884. Ce amplitudine unghiulară are un pendul cu masa de 4 kg și perioada de 6,28 s, dacă pentru o elongație unghiulară de 60° în lungul firului de susținere acționează o tensiune de 30 N? Frecarea este neglijabilă.

* * *

4885. Să se rezolve ecuația $\sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^{2k+1} \cdot x^{2(n-k)-1} = 0$.

Simion Sorin, profesor Pitești

4886. Să se rezolve ecuația: $8 \sin \frac{3x}{2} \sin^3 \frac{x}{2} = 1$.

D. I. Manolache, profesor C. de Argeș

4887. Dîndu-se trei puncte A, B, C să se găsească cîte puncte O există în spațiu de aceiași parte a planului ABC, astfel încît triedrul $OABC$,

cu vîrful în O, să fie tridreptunghic. Să se găsească condiția pe care trebuie să o îndeplinească punctele A, B, C pentru ca problema să aibă soluție. În ce caz proiecția lui O pe planul ABC va cădea în exteriorul triunghiului ABC?

Oprișan Gh., elev Curtea-de-Argeș

4888. Să se arate că ecuația $x^3 + ax^2 + b = 0$, unde $a \neq 0$, $b \neq 0$ nu poate avea două rădăcini x_1 și x_2, astfel ca $x_1 + x_2 = 0$. Dacă ecuația admite o rădăcină pozitivă x_1, atunci celelalte două rădăcini sînt imaginare dacă $-4x_1^3 < b < 0$.

Dacă ecuația admite o rădăcină negativă x_2, atunci și celelalte două rădăcini sînt reale, dacă $0 < b < -4x_2^3$.

C. Ionescu-Țiu

4889. Să se arate că dacă N este o sumă de trei pătrate, atunci $3N$ se poate pune sub forma unei sume de patru pătrate.

Ghica S. Anton, elev Pitești

4890. Fie a, b, c laturile unui triunghi ABC, iar M, N, P punctele în care bisectoarele exterioare întîlnesc laturile opuse ale triunghiului. Să se arate că $\frac{1}{a \cdot AN} + \frac{1}{b \cdot BP} + \frac{1}{c \cdot CM} = 0$.

Stancu Ion, elev Pitești

4891. Se dă ecuația: $x^3 + mx^2 + nx + p = 0$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3. Să se formeze ecuația de gradul III în y ale cărei rădăcini y_1, y_2, y_3 satisfac relațiile:

$$y_1 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2 + x_3}; \quad y_2 = \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1 + x_3} \text{ și } y_3 = \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_1 + x_2}.$$

C. N. Bănică, absolvent Cîmpulung Mușcel

4892. Se dau punctele A și B mobile pe cercul fix (O). Perpendiculara dusă din A pe tangenta în B la cerc taie cercul (O) a doua oară în M și tangenta în N. Să se determine distanța AB în funcție de raza R a cercului, astfel ca lungimea BN să fie maximă.

G. N. Diță, absolvent Pitești

4893. Să se arate că: $\frac{a}{l_a \cos\frac{A}{2}} + \frac{b}{l_b \cos\frac{B}{2}} + \frac{c}{l_c \cos\frac{C}{2}} = \frac{2R}{r}$; A, B, C; a, b, c; l_a, l_b, l_c fiind respectiv unghiurile, laturile și bisectoarele interioare ale triunghiului ABC.

Șerban Strătilă, elev Pitești

4894. Se consideră patrulaterul circumscriptibil $ABCD$ și fie A_1, A_2; C_1, C_2 proiecțiile punctelor A și C, respectiv pe bisectoarele unghiurilor B și respectiv D. Să se arate că patrulaterul $A_1 A_2 C_1 C_2$ este inscriptibil într-un cerc care are centrul pe AC. Să se calculeze raza acestui cerc în funcție de laturile patrulaterului.

Bică I. Constantin, absolvent Pitești

4895. Se dă un condensator plan care are între armături dielectricul format din două straturi, unul de parafină, iar al doilea de mică cu grosimea de 0,5 mm. Suprafața unei plăci este de 10 cm. Capacitatea acestui condensator este de 9,56 cm. Să se calculeze grosimea plăcii a doua.

Popescu Gh., elev Curtea de Argeș

4896. a) Să se reprezinte grafic funcția $y = \frac{x^3+x^2-2}{x^2+3}$.

b) Să se deducă din studiul variației acestei funcții numărul rădăcinilor reale ale ecuației $x^3 + (1-\lambda)\, x - 3\lambda - 2 = 0$, cînd λ variază.

c) Să se verifice rezultatul obținut, aplicînd ecuației de mai sus teorema lui Rolle.

Emil Morțun

4897. Să se determine laturile triunghiurilor care au un unghi de 60°, raza cercului înscris exprimată prin $\sqrt{3}$ și știind că măsurile laturilor lor sînt numere întregi.

N. Peligrad, profesor Pitești

4898. Se consideră bateria de n condensatori care se formează astfel: se leagă în serie separat primii k condensatori și următorii $n-k$ condensatori; iar cele două montaje se așază în paralel. Capacitatea totală a bateriei este C. Din ramura bateriei care conține primii k condensatori legați în serie se iau primii i $(i < k)$ condensatori, care se leagă în serie cu ceilalți $n-k$ condensatori. Să se arate că avem relația:

$$\sum_{\lambda=i+1}^{k} \frac{1}{C_\lambda} = \sum_{\lambda=k+1}^{n} \frac{1}{C_\lambda},$$

cînd capacitatea bateriei rămîne constantă. C_i reprezintă capacitatea condensatorului i.

Ixaru Grigore, profesor Găiești

4899. În triunghiul ABC latura BC este fixă, iar vîrful A mobil astfel încît să existe relația: $\operatorname{tg} A = \frac{\sin B \sin C}{2 \sin A}$. Să se afle locul geometric al centrului de greutate al triunghiului ABC.

Simion Sorin, profesor Pitești

4900. Se dă un triunghi dreptunghi ABC $(A = 90°)$ în care $AB = a$, $AC = 3a$. Fie E un punct pe AC astfel ca: $EA : EC = 1 : 2$. Din E se se duce o perpendiculară pe AC în exteriorul triunghiului pe care se ia punctul D, astfel ca $ED = a$. Se cere: a) Să se demonstreze că punctele B, A, D, C sînt conciclice;

b) Fie O centrul acestui cerc. Se duc tangentele în C, D, B care se întretaie respectiv în G și F. Să se arate că patrulaterul $CGFB$ este un

dreptunghi. d) Fie M punctul unde dreapta GF taie prelungirea catetei BA și H și P proiecțiile vîrfurilor F și G pe această direcție. Să se arate că: $\frac{HB}{HM} = \left(\frac{PB}{PM}\right)^2$.

D. I. Manolache, profesor Curtea de Argeș

4901. In cîte moduri distincte se pot repartiza n obiecte diferite la k persoane, astfel încît fiecare persoană să primească cel puțin un obiect? ($n > k$). Să se considere cazul $n = k$ și cazul particular $n = 5$ și $k = 3$.

Șerban Strătilă, elev Pitești

4902. Fie A, B, C trei puncte fixe pe dreapta ($\triangle$) și un punct M mobil pe cercul fix O. Se consideră punctul D pe AM, astfel încît $\frac{AD}{DM} = k$ = constant. Să se afle locul geometric al punctului de intersecție al dreptelor BM și CD.

Ghica S. Anton, elev Pitești

4903. Să se arate că dacă: $a + b + c + d = 0$ atunci

$$6(a^5 + b^5 + d^5 + c^5) = 5(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(a^3 + b^3 + c^3 + d^3).$$

Anghelache C. Tudorică, absolvent Pitești

4904. Triunghiul ABC de arie constantă are vîrful A fix, iar vîrful B mobil pe o dreaptă fixă ($\triangle$). Să se afle locul geometric al punctului C. Ce devine acest loc geometric cînd aria ABC e nulă și unghiul A egal cu $0°$ sau $180°$. Generalizare.

Gh. I. Oprișan, elev Curtea-de-Argeș

4905. Un condensator este compus din două sfere concentrice. Mediul dielectric dintre cele două sfere este de ebonită groasă de 2 mm. Raza sferei mari este de 0,502 m. a) Să se calculeze capacitatea condensatorului; b) ce rază are sfera izolată ca să poată avea capacitatea condensatorului, dacă se află în aer.

Popescu Gheorghe, elev C. de Argeș

4906. Fie H ortocentrul triunghiului ABC înscris în cercul de rază R și A', B', C', inversele punctelor A, B, C, față de polul H și puterea k. Să se demonstreze că H este centrul cercului înscris în triunghiul $A'B'C'$ și că raza acestui cerc este $\frac{k}{2R}$. (În legătură cu problema 2884).

Ixaru Grigore profesor Găești

4907. a) Să se reprezinte în același sistem de axe, curbele: $y = \sqrt{x}$; $y = -\sqrt{x}$; $y = \sqrt{-x}$; $y = -\sqrt{-x}$; apoi curbele: $x = y^2$; $x = -y^2$ și apoi curba $y^4 = x^2$;

b) Să se reprezinte grafic $y = \sqrt{|x|}$ și $y = -\sqrt{|x|}$ și apoi, $x = \sqrt{|y|}$ și $x = -\sqrt{|y|}$.

C. Ionescu-Țiu

4908. Un fascicul de cercuri este determinat prin cercul (A) și axul său (D). Să se construiască un cerc ce aparține acestui fascicul și față de care un punct al planului are o putere dată.

Emil Morțun

4909. Un amestec este format din 5 kg de O_2, 2 kg de N_2 și 6 kg de CO_2. Să se determine: a) Numărul de kmoli ai amestecului, b) Greutatea moleculară medie a amestecului.

C. Teodorescu, profesor

4910. Peste un pod ce are o formă convexă cu raza de curbură $R = 50$ m trece un tramvai electric cu greutate de 10 tf.

Motorul tramvaiului cu un randament (randament industrial) de 80% folosește un curent de 50 A sub tensiunea de 550 V și dezvoltă o forță de tracțiune de 440 kgf. Să se afle: a) puterea electrică utilă în kW a motorului, b) viteza medie în k_m/h a tramvaiului pe pod; c) forța de apăsare ce exercită tramvaiul în mișcare pe mijlocul podului; d) energia electrică în kWh consumată pe tot parcursul podului, știind că distanța între capetele podului este de 60 m.

Pompiliu Teaha, profesor Timișoara

4911. La o fermă zootehnică a unei gospodării colective se construiește un jgheab din 3 scînduri de lățime a. Ce unghi de înclinare trebuie să aibă pereții laterali pentru ca debitul de apă al jgheabului să fie maxim?

(Examenul de maturitate, iulie 1961)

4912. Să se studieze variația și să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = x\,\frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}.$$

(Examenul de maturitate, iulie 1961)

4913. Să se studieze variația și să se reprezinte grafic funcția $f(x) = \frac{x}{2x^2-5x+2}$. Să se găsească ecuația tangentei în origină și coordonatele punctului în care aceste tangente taie din nou curba.

(Examenul de maturitate, iulie 1961)

4914. O dreaptă trecînd prin origină $y = mx$ taie din nou curba în general, în două puncte M_1 și M_2. Între ce limite trebuie să fie cuprins m ca aceste puncte să existe?

Să se determine în funcție de m, coordonatele mijlocului M al segmentului M_1M_2, și să se afle relația independentă de m ce există între aceste coordonate.

(Examenul de maturitate, iulie 1961)

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PROPUSE PENTRU ȘCOALA DE 7 ANI *

E : 1727. Să se găsească un număr de patru cifre care să fie în același timp multiplu de 11 minus 3 și multiplu de 23 plus 3.

I. Velescu, profesor Ciofrîngeni, Argeș

E : 1728. La o cooperativă s-au vîndut într-o zi 10 m de stambă și 22 m șifon, pentru care s-a încasat suma de 780 lei. În altă zi s-au vîndut 20 m stambă, 24 m șifon și 12 m ștofă, pentru care s-a încasat suma de 2400 lei. Prețul unui metru de șifon reprezintă 0,25 din prețul unui metru de ștofă. Să se afle cît costă un metru din fiecare fel de material.

Mitran I. Nicolae, profesor Slatina

E : 1729. Numărul 6561 din sistemul zecimal se scrie în alt sistem 14641. Să se afle baza noului sistem.

Anghelache Tudorică, absolvent Pitești

E : 1730. Media aritmetică a cantității de grîu primită de 4 familii de colectiviști (care nu au același număr de membri), pentru zilele-muncă, este de 2250 kg. Prima familie a primit cu 100 kg mai mult decît a patra familie. A doua familie a primit de 2 ori mai mult decît prima, iar a treia familie a primit de 3 ori mai mult decît a doua familie. Ce cantitate de grîu a primit fiecare familie ?

Mitran I. Nicolae, profesor Slatina

E : 1731. Un stîlp de radiodifuziune AB se află pe un teren plan. Privît din punctul D, care se află la o distanță de 120 m acest stîlp, el poate fi văzut sub un unghi de 30°. Să se calculeze : a) de la ce distanță poate fi văzut sub un unghi de 60° ; b) lungimea ancorelor AC și AD.

Ion Oproiu, profesor Mușcel

E : 1732. Să se găsească de cîte ori este mai mic volumul Lunii decît volumul Soarelui, dacă diametrul Lunii este de 400 de ori mai mic decît diametrul Soarelui.

Marinescu Gabriela, profesoară C. de Argeș

E : 1733. Dintr-o foaie de tablă în formă de exagon regulat se pot decupa șapte cercuri egale. Să se afle : a) raza maximă a acestor cercuri dacă latura exagonului este egală cu a ; b) aria deșeurilor.

Marinescu Gabriela, profesoară, C. de Argeș

E : 1734. Se dă un patrat $ABCD$ cu latura a. Se duce diagonala AC. Se ia mijlocul M al segmentului DC și din el se duc segmentele AM și MB. Să se calculeze aria triunghiului AMN.

Ion Oproiu, profesor Mușcel

*) (E : 1727, 1728, 1730) ; VI (E : 1729, 1735, 1736, 1737) ; VII (E : 1731, 1732 1733, 1734, 1738, 1739).

E : 1735. O sumă de bani este împărțită la 6 elevi astfel : primul ia $\frac{1}{5}$ din sumă mai puțin cu 2 lei, al doilea ia $\frac{1}{4}$ din sumă mai puțin cu 5 lei, al treilea ia $\frac{1}{3}$ din sumă mai puțin cu cît a luat al patrulea, al cincilea a luat $\frac{1}{2}$ din sumă mai puțin cît a luat primul și ultimul la un loc. Cît a primit fiecare dacă primul a primit cît al doilea și al patrulea cît al șaselea ?

C. Ionescu-Țiu

E : 1736. Viteza periferică a pietrei unui polizor este de 1000 m/min, iar turația axului polizorului este de 15 rot/s. Să se calculeze diametrul pietrei de polizor.

* * *

E : 1737. Dacă se introduce într-un lichid, un corp cu volumul de 40 cm^3, rămîne nescufundat 37,5% din volum. Introducînd în același lichid, un corp cu masa de trei ori mai mare decît a primului, acesta se scufundă complet. Ce volum maxim poate avea cel de-al doilea corp ?

Ghica S. Anton, elev Pitești

E : 1738. Să se arate că :

$$(a + b)\,(\sqrt{a} + \sqrt{b}) + ab = (a + b + \sqrt{ab})^2$$

* * *

E : 1739. Fie triunghiul ABC cu $\sphericalangle A = 30°, \sphericalangle B = 90°$. Ducem bisectoarea unghiului B care intersectează pe AC în M. Fie N proiecția lui M pe BC. Notînd $MN = a$ și $NC = b$ să se determine numerele întregi m și n astfel ca expresia $E = ma + nb$ să fie egală cu perimetrul triunghiului ABC.

Ixaru Grigore, profesor Găiești

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

Pînă la 15 mai 1961 s-au mai evidențiat ca rezolvitori de probleme de matematică din GMF-B, propuse în numerele 1—4/1961, după cum urmează :

1. **Gheorghiu A. Nicolae** (cl. XI ș.m. 1 Ploiești), 2. **Chiva N. Petre** (cl. X ș.m. 1 Pitești), 3. **Șerban Longin** (cl. XI Pucioasa), 4. **Lustig Gheorghe** (cl. IX ș.m. 5 Timișoara), 5. **Scarlat Nicolae** (student Timișoara), 6. **Dumitrică Aurel** (cl. XI ș.m. 3 Tîrgoviște), 7. **Ene P. Elena** (cl. VIII ș.m. 1 Ploiești), 8. **Kessler Petre** (cl. XI Sighișoara), 9. **Năstăsescu Constantin** (cl. XI Pucioasa), 10. **Neagu Gheorghe** (cl. XI Sighișoara), 11. **Opriș Ion** (cl. XI ș.m. 1 Ploiești), 12. **Banu N. Gheorghe** (cl. X Pucioasa), 13. **Radu A. Gheorghe** (cl. XI Pucioasa), 14. **Caramalis Paula** (cl. VIII ș.m. 1 Ploiești), 15. **Diaconescu C. Radu** (cl. XI Pucioasa), 16. **Pitea M. Virgil** (cl. VIII ș.m. 2 Tîrgu Jiu), 17. **Tîrcă Mihail** (cl. VI Valea Lungă Ploiești), 18. **Stancu M. Ion** (cl. X ș.m. 1 Pitești), 19. **Gurămultă V. Dănuț** (cl. V Sascut), 20. **Zoller David** (cl. X Săveni), 21 **Popescu Viorela** (cl. VIII ș.m. 2 Timișoara), 22. **Elec T. Maria** (cl. VII Zalău).

Pînă la 15 mai 1961 s-au mai primit cîte cel puțin 10 probleme de matematică, bine rezolvate, din problemele propuse în ultimele 3 numere din GMF-B, după cum urmează :

ORADEA (Crișana). Ș.m. 1. Cl. VII. Borcia Sorin (E: 1582, 89—92, 94—97, 99—601, 04—11, 13—15). Cl. VIII. Ciup Doina (4520, 43, E: 1561, 64, 67, 617, 20, 21, 26, 31), Davidescu Mircea (4475, E: 1599, 600, 04, 09, 10, 13—15), Erdei Gabriel (E: 1571, 73, 74, 77, 79, 81, 84, 89—91, 94—98), Orghidan Dana (E: 1583, 86, 91, 96, 603, 04, 09, 14, 18, 20—22, 24, 31), Simpăleanu Virgil (4421, 22, 31, 34, 43, 58, E: 1584, 85,

Mihalcea Elena (4484, E: 1584, 85, 87, 87—95, 97), Wald Robert (4486, 519, 43, 71, E: 1604—21, 23—31). Cl. X. Curecin Ştefan (4420, 33, 81, 84, 504, 06, 09, 10, 19, 36), Romocea Teofil (4420, 33, 52, 81, 83, 84, 99, 509, 10, 19, 36, 38). Cl. XI. Papp Ana (4472, 83, 509, 17, 40, 43), Pascu Nicolae (4421, 22, 34, 37, 43, 67, 69, 77, 88, 503, 04, 09, 24, 26, 27).

Ş.m. 4. Cl. XI. Fărcaş Irina (4425, 27, 67, 69, 70, 80, 86, 88, 91, 93, 99, 500, 03—05, 09, 10, 40, 43).

OŢELUL ROŞU (Banat). Cl. VII. Fiat Mircea (E: 1590, 602, 03, 07, 15, 19, 20, 22, 23, 25). Cl. X. Munteanu Elena (4380, X82, 83, 98, 99, 419, 20, 32, 34, 42, 46, 52, 63, 67, 81, 83).

PANCIU (Galaţi). Cl. VI. Guică I. Constantin (E: 1600, 01, 04, 10, 17, 20, 26—28, 31). Cl. X. Matei Mihai (4444, 53, 72, 75, 81, 83, 84, 506, 09, 19, 39, 52). Cl. XI. Cristea I. Vasile (4419, 20, 22, 30, 34, 44, 55, 63, 72, 75, 80, 84, 88, 504, 09, 27, 35, 36, 39, 43), Spătaru Ion (4419, 20, 22, 31, 34, 43, 52, 53, 63, 72, 75, 79, 84, 87, 88, 98, 504—05, 09, 22, 28, 35, 39, 43), Trăistaru Ion (4463, 72, 75, 81, 83, 84, 88, 95, 504, 09, 19, 27, 39, 49, 62, 66).

PETROŞANI (Hunedoara). **Ş.m. 1** Cl. VIII. Orlov Zinaida (4480, 519, 43, E: 1614, 18, 21, 23, 37, 43, 45—47), Popescu Lucian (4470, E: 1587, 88, 97, 99—601, 04, 05, 07, 09—11, 13, 15, 17, 19—21, 25, 28, 31, 33, 34, 43, P).

PIATRA NEAMŢ (Bacău). **Ş.m. 1 Petru Rareş**. Cl. VIII. Gaşparic Călin (4517, 43, 61, E: 1617, 20, 23, 27, 29, 31, 37, 46).

PITEŞTI (Argeş). **Ş.m. 1 N. Bălcescu**. Cl. VIII. Bîrzotescu Dan (4475, E: 1600, 01, 04, 10, 11, 20, 23, 27, 31, 37, 38), Calotă I. Aurică (E: 1605, 08—11, 16—21, 23, 27, 28, 31, 37, 38, 42, 43, 47), Costea Ion (E: 1600, 04, 05, 07, 10, 11, 16, 17, 20, 21, 23, 26, 27, 31, 36—38, 46), Dumitrescu Eugen (4543, E: 1600, 07, 08, 10, 14, 17, 20, 21, 23, 27, 29—31, 27, 38), Hurduc Mihai (4519, 43, E: 1599, 600, 04, 07, 08, 10, 11, 13, 15, 17, 19, 21—23, 26, 27, 31, 33, 36—38, 42, 43, 47). Cl. IX. Tărăbuţă Mihail (4462, 68, 99—501, 05, 09, 19, 37, 43, 44, 46, 52, P). Cl. X. Bejan Gheorghe (4442, 43, 83, 503—06, 09, 10, 27), Chiva N. Petre (4447, 61, 67—69, 73, 80, 84, 88, 97, 99, 503—10, 17—19, 22, 26—28, 30, 32—34 36—40, 42, 43, 46, 47, 55, 56, 59, 61, 63, 66, 68, 72, 75, 77, 80, 81, 85, 88, 95, 96, 604, 07, 10, 14—21, 24—34, 38, 45, 50, 58, 59, 63, 68, 69), Pătraşcu I. Gheorghe (4469, 73, 80, 88, 503, 04, 06, 19, 26—28, 32, 33, 36, 39, 43, 66), Popescu I. Remus (4422, 31, 32, 34, 42, 43, 54, 83, 84, 87, 96, 504, 06, 09, 10, 19, 27, 36, 43, 46, 56, 61), Stancu M. Ion (4464, 68, 90, 92, 99, 505—07, 09, 10, 13, 17—19, 22, 29—43, 46, 47, 59—61, 68, 70, 75, 91, 610).

Ş.m. 3 Alexandru Odobescu. Cl. VIII. Grigorescu V. Ionel (4470, 75, E: 1517, 43, 99—601, 04—08, 10—13, 15—18, 20, 21, 27, 28, 31, 34, 37, 38, 42, 43, 47), Ionescu V. Marcel (4475, E: 1599—06, 09, 13, 16). Cl. IX. Diaconu M. Nicolae (4470, 75, 81, 83, 96, 503, 09, 17, 19, 28, 37, 43, 52), Zamfir D. Cornel (4422, 29, 31, 32, 34, 37, 43, 47, 56, 88, 504, 06, 09, 19, 27, 39, 43). Cl. X. Diaconescu I. Ion (4422, 27, 31, 52, 53, 72, 81, 84, 86, 503, 09, 17, 19, 27, 43), Joiţa N. Dan (4470, 72, 75, 81, 84, 96, 503, 09, 10, 17, 19, 43).

PLOIEŞTI **Ş.m. 1 Ion Luca Caragiale**. Cl. V. Bîrsan Georgeta (E: 1574, 79, 84, 94, 97, 600, 04, 08), Dinescu Marius (E: 1617, 20, 23, 26, 27, 31, 34, 35, 37, 41, 42). Cl. VI. Mihăilescu Cristian (E: 1573, 74, 79, 84, 87, 94, 97, 600, 04, 10). Cl. VIII. Anghel Maria (4509, 43, E: 1617, 18, 20, 21, 23, 27, 29, 31), Andronescu D. Gabriel (E: 1618, 20, 21, 23, 27, 29, 31, 34, 37, 46, 47, 52, 53, 57, 59), Avram Florian (4475, 80, E: 1587—89, 91—98, 600, 04, 05, 08, 10, 11), Anghelache Radu (4484, E: 1587, 89—91, 95, 97, 98, 600, 05, 10, 11, 13, 16, 18, 20, 21, 23, 26, 27, 31), Barnu Aurica (E: 1604—11, 13, 15, 20—22, 26, 31). Bucur I. Nicolae (E: 1613, 20, 21, 23, 25—27, 29, 31, 37, 38, 43, 46, 47), Bratu Mircea (E: 1589, 91, 96, 604, 05, 09, 27), Bădulescu Cipriap (E: 1607, 17, 18, 21, 24, 29, 31, 37, 43, 47), Bem I. Alexandru (E: 1583, 84, 87, 89—91, 95, 97, 98, 600, 05, 10, 11, 13, 16, 18, 20, 21, 23, 29, 31), **Caramalis Paula** (4475, 80, 517, 43, E: 1582—84, 86, 87, 89—91, 93—601, 03—05, 07—11, 13—17, 20, 21, 23, 26, 27, 31), Cotorceanu Steliana (4431, 34, 44, 52, 72, 75 81, 83, 84, 96, 509, 43), Chiriţă R. Gheorghe (4484, E: 1582, 87, 92, 97, 98, 600, 04, 05, 10, 11, 13, 16, 20, 23, 26, 27, 31), Dragomir Emilia (E: 1584, 85, 87, 88, 90, 97, 98, 600, 03, 04, 05, 08—11, 13, 20, 21, 31, 607, 16 22), Diaconescu Romeo (E: 1600, 04, 05, 07, 10, 17, 20, 23, 27), **Ene P. Elena** (4431, 34, 41, 56, 67, 70, 75, 517, 19, 43, E: 1580—632), Enescu Liviu (E: 1600, 07—10, 12, 15, 20, 28, 31), Filipescu Gabriel (4417, 75, 543, E: 1597, 99—601, 05, 11, 18, 21, 25, 26, 31), Gheorghe Clara (E: 1584, 84, 87, 90, 97, 98, 600, 04—11, 13, 15, 18, 20—22, 31). Grigoriu Mariana (E: 1583, 84, 87, 89, 91, 92, 97, 600, 04, 05, 08, 10, 13, 17—26, 31), Gheorghiu Apolodor (4484, (E: 1582—84, 87, 89, 91, 93, 97, 98, 600, 04, 09—11, 13, 16, 20, 21, 23, 31). Iacobescu Gabriel (E: 1591, 92, 94—97, 600, 05, 07, 09—12, 15, 17, 18, 20, 21, 23, 26, 27, 31, 33, 38, 44),

89—91, 97, 600, 04, 05, 10, 16, 20, 22, 23, 26), Mihăilescu Ştefan, (E: 1604, 07, 10, 20, 21 ,23, 43, 47), Molotiuc Stela (4484, E: 1583—85, 87, 90, 97, 98, 600, 04—11, 15, 20—23, 27, 31), Nicolae Paula (E: 1583, 85, 88, 90, 97, 98, 604, 06—09, 11, 16, 20—23, 26, 27, 31), Năsulescu Viorel (E: 1604, 07, 10, 17, 20, 21, 23, 31, 37, 43, 47). Niţă D. Vasile (4484, E: 1582, 87, 89, 92, 97, 98, 600, 04, 05, 09—11, 13, 15, 16, 20, 22, 23, 26, 27, 31), Predescu I. Maria (E: 1584, 85, 87, 88, 90, 97, 98, 600, 03, 04, 07—11, 13, 16, 20—23, 31), Plăeşu Cecilia (E: 1599, 600, 04, 05, 09—11, 13, 14, 16, 17, 20, 21, 23, 26—28, 31, 32, 44), Popescu Dan (E: 1557, 58, 61, 63, 67, 68, 71, 75, 77, 78, 81, 89, 91—93, 95, 600, 04, 05, 07, 08, 10, 13, 20, 27), Paraschiv I. Nicolae (E: 1587, 89, 91, 95, 97, 98, 600, 05, 10, 11, 13, 15, 16, 18, 20, 21, 23, 26, 27, 29, 31), Pluta Elena (E: 1583, 85, 87, 90, 97, 98, 600, 03, 06—11, 13, 15, 20—22, 31), Popescu Valentina (E: 1557, 58, 85, 87, 90, 600, 04, 06, 27), Pîrvu Cornelia (4484, E: 1583, 85, 87, 90, 91, 97, 98), Staicu I. Gheorghe (E: 1634, 37, 38, 42, 48, 50—54), Stănculescu Delia (E: 1584, 85, 87, 88, 90, 97, 98, 600, 03, 04, 11, 21, 23, 24, 26, 27, 31), Stoica Florica (1599, 600, 04, 04, 08—11, 13, 14, 17, 18, 20, 21, 26—28, 31, 32, 36), Stoica George (4475, 84, E: 1583, 91, 93, 98, 605, 09, 11, 16, 17, 20, 21, 23, 31), Tudor Liviu (E: 1603, 04, 09, 20—23, 31, 37, 38, 47), Tudorache C. (4484, E: 1583, 87, 90, 91, 97, 98, 600, 04, 06, 09, 11, 15—17, 20—23, 27, 31), Vlădescu Venera (E: 1600, 04—11, 13, 15—17, 20, 23, 27, 37, 42). Cl. X. Aisner Sergiu (4444, 48, 52, 65, 67, 70, 84, 87, 503, 04, 09, 19, 33, 36—39), Bădescu Gh. (4442, 43, 54, 67, 69, 86, 88, 503, 04, 27), Butaciu Viorel (4433, 75, 81, 83, 84, 509, 17, 19, 36, 72, 74), Constantinescu Al. Marius (4499, 500, 06, 08—10, 17, 19, 31, 33, 36, 38—40, 42, 43, 46, 51, 52, 59, 61, 68, 75, 84, 91, 601, 04, 07, 10), Cruceru Ştefan (4496, 97, 510, 17, 19, 36, 39, 43), Dinu Toma (4470, 75, 80, 81, 84, 69, 503, 09—17, 33, 36, 39, 43), Enăchescu Doina (4510, 12, 22, 27, 29—33, 35), Georgescu Decebal (4420, 81, 83, 84, 96, 505, 09, 19, 36), Georgescu Ioan (4503, 04, 09, 10, 16, 17, 19, 27, 28, 36, 38—40), Ilie Haretina (4431, 34, 44, 52, 75, 81, 509, 39), Ionescu Aurel (4444, 47, 51, 61, 74, 75, 84, 96, 97, 517, 19), Jelea Vladimir (4503, 07, 10, 17, 31, 39, 40, 42), Lazea Adrian (4420, 31, 32, 34, 44, 47, 52, 54, 67, 69, 72, 81, 83, 84, 86, 88, 96, 503, 04, 06, 09, 10, 27, 43), Manole Gheorghe (4411, 33, 44, 53, 61, 75, 81, 84, 85, 94, 96, 509, 10, 17, 19, 22, 36, 39, 43), Maxim Dan (4472, 73, 80, 81, 96, 99, 506, 09, 19, 20, 23, 36, 39, 40, 43), Mircea Elena (4431, 34, 44, 52, 75, 81, 509, 39), Micheţiu Constantin (4422, 31, 32, 34, 42, 43, 54, 67, 69, 86, 88, 503, 04, 27), Munteanu Mariana (4461, 84, 509, 10, 17, 19, 36, 39, 43, 75), Nicolae Angela (4447, 52, 61, 75, 83, 84, 500, 04, 09 10, 17, 19, 36, 39, 43), Nicolae Nicolae (4463, 66, 73, 81, 83, 84, 90, 96, 507, 09, 10, 19, 22, 31, 36, 38—40, 43, 46, 61, 62), Neacşu Viorel (4452, 67, 70, 75, 81, 83, 84, 87 503, 04, 09, 19, 33, 36—39), Oprea Maria (447, 52, 61, 75, 81, 84, 509, 17, 36, 37), Petre Nicolae (4472, 74, 75, 84, 87, 97, 509, 10, 19, 36 39) Peiulescu Marius (4472, 74, 75, 82, 83, 509, 10, 17, 19, 31, 36, 38, 39, 43, 52), Rădulescu Larisa (4452, 61, 73, 75, 81, 83), Reghină N. Petre (4451, 74, 75, 606, 09, 10, 17, 19, 22, 36, 39, 40, 43), Seniatinski Lucia (4431, 34, 44, 52, 75, 81, 83, 509), Szekely Steliana (4431, 34, 44, 52, 75, 81, 83, 509), Teodorescu Cristian (4447, 52, 61, 75, 84, 509, 17, 36, 39, 53), Vasilescu Dumitru (4444, 47, 52, 81, 83, 84, 96, 509, 43), Vasilescu Luminiţa (4420, 33, 44, 52, 53, 75, 509, 17, 36, 39, 43), Voicu D. Nicolae (4447, 52, 61, 75, 84, 509, 17, 36, 39, 43). Cl. XI. Apostol D. Nicolae (4475, 503—07, 09, 10, 16, 17, 19, 20, 26, 27, 33, 36, 39, 40, 43, 49), Babone Stelian (4503, 07, 09, 17, 31, 33), Constantinescu Ştefan (4503, 07, 09, 10, 17, 31, 33, 35, 36, 39, 40, 42, 43), Dolete I. Ioan (4420, 23, 25, 27, 29, 52, 53, 60, 61, 68, 71—73, 75, 78, 80—84, 89, 90, 96, 97, 99, 500, 05—07, 09, 20, 31, 36), Ene Nicolae (4419, 21, 29, 32, 34, 41, 44, 47, 50, 53, 57, 72, 81, 83, 84, 86, 87, 94, 500, 03, 04, 06, 09, 10, 40, 43), Ene Traian (4463, 68, 73, 92, 99, 506, 07, 09, 10, 17—20, 22, 31, 33, 35—37, 39, 41, 43, 44, 46, 52, 61, 62, 70, 73, 75, 80, 81, 602, 03, 10), Gheorghiade Alexandru (4419, 20, 23, 31, 32, 34, 42—44, 55, 60, 61, 63, 71—73, 75, 76, 80, 81, 83, 84, 89, 90, 96, 97, P), **Gheorghiu A. Nicolae** (4419—23, 31, 33, 34, 47, 62—76, 78—84, 86, 90, 94—97, 99, 500, 02—07, 09, 10, 17—19, 20, 22, 27, 28, 31, 33, 35—37, 39, 40, 42—44, 46, 47, 49, 51, 52, 56, 59—64, 66, 70, 73, 75—86, 602), Jelea Gabriel (4425, 33, 48, 51—53, 89, 509, 20, 33, 35, 36, 43, 47, 61, 62), Lungu Duca (4463, 66, 68, 73, 81, 84, 90, 96, 505—07, 17, 20, 22, 31, 39, 40, 43, 46), Miu Ion (4419, 20, 24, 26, 52, 60, 61, 81, 84, 96, 97, 509, 10, 33, 39, 40, 43, 56, 62), Nicolaescu Mihaela (4472, 81, 83, 99, 500, 03, 05, 09, 10, 14). Nicolescu Doina (4436, 47, 52, 61, 75, 81, 509, 17, 39, 84), **Opriş Ion** (4466, 68, 69, 71, 73, 76, 78, 87, 89, 92, 94, 95, 502, 18—20, 22, 26, 27, 28, 31, 32, 35—37, 39, 40, 42—44, 46—49, 52, 55, 56, 60—62, 64, 66, 70, 73), Stan Teodor (4463, 64, 70, 72, 75, 80—84,

86, 90, 96, 97, 99, 500, 03—05, 09, 39, 43), Voicu Eugen (4433, 51, 62, 73, 89, 509, 20, 36, 43, 47, 61, 62).

Ş.m. 2 A. Toma. Cl. VIII. Georgescu P. Viorica (E: 1599, 605, 08, 10, 16, 21, 23, 35, 37, 43, 46), Radu Stelian (4543, 45, E: 1604, 08, 10, 13, 14, 20, 21, 23, 26, 27, 31, 37, 38, 42, 46). Cl. X. Petrec Alexandru (4499, 503, 04, 06, 09, 10, 16, 17, 19, 27, 28, 31, 33, 36, 43), Dogaru Sanda (4463, 69, 72, 80, 81, 83, 88, 94, 95, 504, 09, 19, 27, 49, 62), Teodorescu Mihaela (4463, 69—71, 83, 88, 95, 504, 05, 09, 10, 19, 27, 49, 62, 66, 73).

Ş.m. 3. Mihai Viteazul. Cl. IX. Condiescu Mădălina (4407, 12, 21, 34, 47, 52, 509, 33), Grigorescu Stelian (4483—85, 506, 09, 10, 28, 37, 39), Stăvaru Cristina (4425, 80, 81, 84, 505, 06, 09, 19, 37, 39, 43, 52). Cl. X. Hoinărescu N. Călin (4444, 81, 83, 99, 505, 06, 09, 22, 35, 36), Indescifrabil (4431, 34, 52, 75, 81, 83, 509).

Ş.m. 5. Alexandru Ion Cuza. Cl. X. Mîrzea Gheorghe (4499, 509, 17, 19, 37, 43, 46, 52, 60, 77, 604).

Ş.m. 6 C. I. Parhon. Cl. VII. Sternberg Marga (E: 1584, 86, 87, 89, 91, 93, 96, 610, 16, 20, 21, 26). Cl. VIII. Petcu A. Elena (E: 1584, 85, 87, 90, 97, 98, 600, 04, 06—11, 16, 20—23, 31). Cl. X. Miu T. Elena (4456, 75, 509, 17, 19, 29, 38, 39, 43, 61).

Ş.m. serală a rafinăriei nr. 3. Cl. XI. Teodorescu Liviu (4470, 81, 95, 99, 503, 05, 09, 16, 19, 21, 28, 35, 36, 39, 40, 43).

Absolventă Ştefănescu Rodica (4499, 500, 05, 06, 09, 31, 36—38, 43).

PREDEAL (Braşov). **Ş.m.** Cl. VIII. Ioniţă I. Maria (E: 1599, 606, 10, 11, 13—18, 20, 21, 23, 24, 26—28, 31, 37, 60).

PUCHENI (Ploieşti). Cl. VI. Cucoş E. Luminiţa (E: 1600—02, 04, 07, 08, 10—14).

PUCIOASA (Ploieşti). Cl. VIII. Ion Constantin (E: 1600, 10, 17, 18, 21, 23, 31, 37, 43, 45—47), Popa Tiberiu (E: 1599, 600, 04, 09. 10, 13, 17, 18, 20, 21, 23, 27, 31, 37, 43, 45—47), Rădulescu I. Mihail (E: 1587, 89, 91, 9, 600, 08—10, 16, 18, 21, 23), Ruxăndoiu Aurel (E: 1584, 87, 91, 600, 08, 09, 10, 16, 20, 23), Stanciu Eugenia (E: 1571, 87, 88, 608—11, 16, 18, 20, 21, 23, 25), Stoica Florenţiu (4453, 56, 603, 17, 43, E: 1584, 87, 89—97, 99, 600, 04, 07, 08, 10, 13—15, 17, 18, 20—23, 27—29), Tîrcă Gheorghe (E: 1600, 04, 09, 10, 13, 17, 18, 20, 21, 23, 26, 31, 33, 37, 43, 45, 46), Vlad V. Viorel (E: 1583, 87, 91, 600, 08—10, 16, 20, 23). Cl. IX. Drăghici Laurenţiu (4470, 75, 83, 86, 506, 08, 09, 16, 28, 43). Cl. X. **Banu N. Gheorghe** (4420, 60, 68—70, 72, 73, 76, 78—83, 86—90, 95, 96, 99, 503, 04, 06. 07, 09, 10, 16, 17, 19, 26—28, 31, 33, 36—40, 43), Caloianu Pompiliu (4431, 34, 35, 53, 61, 75, 80, 84, 89, 95), **Diaconescu C. Radu** (4468—70, 72, 74, 79—84, 88—90, 96, 97, 99, 503—10, 16, 17, 19, 26—28, 31, 33, 35, 37—43), Marin I. Victor (4419, 21, 23, 27, 33, 41, 44, 47, 54, 68, 70, 72, 73, 75, 80, 81, 83, 84, 89, 90, 97), Marinescu Victor (4420, 22, 23, 31, 33—35, 40, 44, 47, 53, 54, 61, 64, 68, 70, 72, 73, 75, 80, 81, 83, 84, 89, 95, 97), Popa I. Nicolae (4431, 72, 73, 75, 80, 81, 83, 84, 89, 90, 509, 17, 33), Popescu Gheorghe (4422, 31, 34, 35, 52, 53, 75, 80, 84, 89, 95), **Radu A. Gheorghe** (4419—23, 26, 27, 29, 31—34, 39, 41—44, 47, 51—54, 60, 61, 67—70, 72—75, 78—84, 86—90, 96, 97), Sencovici Mihaela (4419, 22, 31, 34, 52, 54, 70, 72—75, 80, 82—84, 89, 90, 97), **Şerban Longin** (4433, 53, 68—70, 72, 73, 75, 76, 79—84, 86, 87, 90, 95, 97, 99, 500, 03—07, 10, 11, 16, 17, 19, 21, 26, 27, 30—33, 35—44, 46, 47, 51, 52, 55, 56, 59, 61, 63, 66, 72, 75—77, 80, 81, 83—85, 88, 91, 92, 95, 96, 99—601, 03, 07, 10—12), Stoica I. Aurelian (4470, 88, 89, 503, 04, 09, 17, 27, 33, 39, 40, 43), Tîrcă Ion (4419—22, 31—35, 43, 44, 47, 52, 53, 56, 61, 73, 75, 80—82, 84, 89, 95, 96). Cl. XI. **Năstăsescu Constantin** (4462, 98—501, 05—11, 13, 17—20, 22, 30—47, 51, 52, 57, 59—62, 64, 65, 68, 70, 73, 74), Popescu S. Gheorghe (4447, 71, 80, 89, 95, 97, 99, 503—05, 09—11, 17, 19, 20, 22, 33, 35—43, 62, 73, 75, 79—81, 88, 91, 93, 607, 08, 10), Stanciu Stelian (4475, 84, 89, 95, 97, 503—06, 09, 10, 13, 17, 19, 22, 33, 35—37, 39, 40, 43).

REŞIŢA (Banat). Cl. V. Maldet Iosefina (E: 1574, 79, 83, 84, 94, 97, 600, 01, 10, 17, 23, 31), Rusinov Anton (E: 1574, 79, 84, 94, 97, 600, 04, 08, 10, 12, 13). Cl. VI. Calmuschi Adrian (E: 1574, 84, 86, 87, 600, 04, 08, 10, 11, 14), Farbaş Enric (E: 1600, 04, 06, 08, 10, 11, 13, 20—23, 37, 38), Peter Gabriela (E: 1600, 04, 06, 08, 10, 11, 13, 20—23, 37, 38). Cl. VII. Barbu Tatiana (E: 1600, 07, 09, 16, 18, 20, 22, 25, 27, 31, 45, 53), Kostner Edith (E: 1575, 78, 601, 07, 10, 11, 20—22, 25, 27, 31), Lichman Renate (E: 1587, 600, 01, 10, 11, 19, 20, 22, 23, 25, 27, 31), Radu Stela (E: 1600, 01, 10, 11, 18, 20, 22, 23, 25, 27, 31, 42, 53), Raica Ana (E: 1606, 08, 10, 11, 17, 21, 25, 27, 28, 31, 44), Stiopu Mahda (E: 1575, 78, 601, 07, 10, 11, 14, 20, 21, 25, 27, 31). Cl. X. Vuc Mihai (4464 75, 81, 83, 84, 99, 509, 10, 17, 43).

RÎMNICU SĂRAT (Ploieşti). **Ş.m. Alexandru Vlahuţă.** Absolvenţi: Perlea Nicolai (4499, 500, 05—10, 17, 19, 22, 31, 33, 35, 42, 43), Soaită N. Ileana (4463, 81, 84, 99, 505, 06, 09, 19, 33, 37, 38, 43).

Şcoala de 7 ani Bălăceanu. Absolvent Diamandescu M. Emil (4543, E: 1587, 91, 95,

97. 610, 11, 15, 17, 18, 20, 21, 23, 27, 29, 34, 36, 37, 42, 47).

RÎMNICU VÎLCEA (Argeş). **Ş.m. Nicolae Bălcescu.** Cl. VII. Cişmaru N. Valentin (E: 1600, 04, 07, 10, 15, 20, 21, 27, 31). Cl. XI. Popescu I. Virgiliu (4503—06, 09, 10, 19, 33, 36, 38—40, 43).

Ş.m. Vasile Roaită. Cl. VII. Costin Rodica (E: 1587, 89, 93, 96, 99—601, 03, 04, 06, 10, 18, 21, 28, 29), Droaşcă Bogdan (E: 1586, 99—601, 06, 07, 10, 19—25, 28, 38, 42, 44), Ghelmez Florentina (E: 1591, 99, 602, 04, 05, 07—11, 15, 17—23, 25, 42).

Şcoala de 7 ani Călimăneşti. Cl. VI. Tamcencu Alexandru (E: 1600, 01, 04, 06, 08, 10, 11, 14).

ROMAN (Bacău). Cl. IX. Niculescu Gh. Gheorghe (4475, 83—84, 96, 98, 500, 08, 09, 39, 43, 70, P). Cl. XI. Cănilă C. Const. (4419—23, 27, 29, 31, 44, 51—53, 55, 60, 61, 63).

ROŞIORII DE VEDE (Bucureşti). **Liceul Tudor Vladimirescu.** Cl. VIII. Iliescu D. Dana (4475, E: 1599, 600, 10, 16, 21, 25, 27, 28, 31), Popescu I. Aurel (E: 1648—52, 54, 57, 59), Toader Michi (4543, E: 1618—21, 31, 33, 35—37). Cl. X. Boia A. Dan (4499, 503, 04, 07—10, 16, 19, 22, 27, 28, 31, 37—40, 43), Tainechin Alexandru (4499, 509—10, 12, 19, 22, 31, 33, 37—39, 40, 43).

SACADAT (Crişana). **Şc. 7 ani.** Cl. VII Gherghel Traian (E: 1516—28, 31, 32, 98, 99).

SALONTA (Crişana). **Ş.m. A. Janos.** Cl. VIII. Ardelean Vasile (4475, E: 1583—85, 87—90, 93, 95, 97, 98), Bereczki Maria (4519, 20, 43, E: 1600, 20, 21, 23, 26, 27, 29), Halmăgeanu Gheorghe (E: 1600, 01, 04, 07, 08, 10, 11, 13, 14, 17, 20, 23, 28). Cl. IX. David Florea (4509, 17, 33, 36, 38, 41, 43, 47).

SASCUT (Bacău). Cl. V. **Gurămultă V. Dănuţ** (E: 1574, 77, 79, 81, 83, 84, 90, 91, 94—97, 600, 04, 07—11, 13—15, 17, 20, 26, 29—31).

SATU MARE (Maramureş). **Ş.m. 1.** Cl. VIII. Brenner Robert (E: 1617, 18, 20, 21, 23, 27, 31, 37, 43, 47), Mayer Robert (4475, E: 1607, 09, 17, 20, 21, 23, 27, 29, 36, 37, 42, 44), Nemeş Vasile (4475, E: 1584, 85, 88, 89, 91, 600—02, 10, 13, 14, 16, 21, 22, 25, 27, 56, 70), Samuel Iudita (E: 1618, 20, 29, 31, 37, 38, 43, 45—47, Weisz Ioan (4517, 19, 43, E: 1618, 20, 31, 33, 36, 37, 43), Weisz Iudita (E: 1617, 18, 20, 23, 27, 31, 37, 42, 43, 47). Cl. IX. Edeltraut Lini (4453, 70, 509, 16, 19, 33), Szekely Maria (4475, 81, 83, 96, 98, 509, 19, 33, 39, 43).

Ş.m. Mihail Eminescu. Cl. VIII. Emler Mircea (E: 1599, 608, 10, 11, 18, 20, 21, 23, 27, 29, 31, 37, 44). Cl. X. Achimaş Gheorghe (4499, 503, 04, 06, 09, 10, 26—28, 39, 43).

SAVENI (Suceava). Cl. VIII. Calacudă Henriette (E: 1593, 96, 98, 99, 607, 17, 18, 20, 21, 27, 31, 34, 37, 44, 47, 50, 52—55, 57, 59), Pîrîu Dumitru (E: 1600, 01, 04, 07, 10, 15, 18, 20, 21, 23, 26, 27, 33, 38, 42—44, 46), Savitescu Gheorghe (4484, E: 1582, 94, 96, 99, 600, 03, 04, 08, 11, 18, 20, 21, 23, 24, 27, 31), Sologan Mihai (E: 1584, 86, 97, 600, 05, 10, 11, 17, 20, 21). Cl. X. Enache Ioan (4496, 506, 09, 10, 17, 19, 36, 39, 41, 43, 73, 80, 83). Ostin Mihai (4472, 73, 80, 81, 83, 84, 90, 96, 509, 17, 19, 43), Zoller David (4419, 20, 44, 61, 72, 73, 75, 81—84, 96, 97, 99, 505—09, 10, 19, 31, 36, 39, 42, 43, 52, 61, 63, 75, 77, 80, 81, 84, 91, 607).

SFINTU GHEORGHE (Braşov). Cl. VII. Ciolan Gheorghe (E: 1583, 84, 94, 97, 600, 04, 09, 10, 13, 14). Cl. VIII. Belea Dorina (E: 1582, 84, 86, 87, 89, 90, 91, 94—97), Încze Eva Maria (E: 1582, 84, 86, 87, 89—91, 94—97).

SFIRLEANCA (Ploieşti). **Şc. 7 ani.** Cl. VI. (E: 1584, 87, 94, 97, 600, 02, 10, 17, 20, 21), Mihalcea Elena (E: 1583, 88, 94, 95, 97, 600, 02, 04, 07, 08, 10, 17), Niţă Ana (E: 1583, 84, 88, 94, 95, 97, 600, 02, 04, 10), Petcu Aurelia (E: 1583, 84, 86, 88, 92, 94—97, 600, 02, 04, 08). Cl. VII. Iancu A. Lucica (E: 1583—85, 88, 89, 91, 92, 94—97, 600, 02, 04, 09, 10), Mazilu I. Florica (E: 1582—85, 88, 89, 91, 94, 96, 97, 602, 04, 09—11), Pîrvu Rodica (E: 1583, 84, 88, 91, 94—97, 99, 600, 02, 04, 09, 10).

SIBIU (Braşov). **Şc. tehnică construcţii.** An. I. Dan Virgiliu (4463, 71, 72, 81—84, 90, 99, 500, 05, 06, 09, 10, 19, 31, 35—38, 40, 43, 46, 62, 73). Abs. That Frieder (4463, 72, 81, 500, 05, 06, 09, 10, 19, 31, 33, 36, 40, 43, 62).

Ş.m. 1. Gheorghe Lazăr. Cl. IX. Cramarenco Pavel (4419, 20, 44, 52, 53, 75, 81, 505, 06, 09, 33, 39). Ionescu Mircea (4475, 81, 83, 508, 09, 18, 19, 33, 39, 43), Păcuraru Iuliu (4419, 28, 44, 53, 81, 96, 509, 39, 52, 53), Todor Mihai (4444, 53, 81, 83, 84, 96, 509, 17, 19, 33, 36, 43). Cl. XI. Blasopol Radu (4499, 505, 06, 09, 31, 33, 40, 43, 75, 77, 80, 86), Ciorneî Valer (4499, 504—06, 09, 10, 14, 19, 22, 27, 35, 37, 43, 49, 61, 62, 66, 75, 77, 78, 80, 81, 93, 95, 602, 07, 13).

Ş.m. 2. Cl. VIII. Trif Maria (4475, 80, E: 1600, 01, 04, 07—11, 13, 15—18, 20, 21, 23, 25, 26, 31). Cl. IX. Mihu Dumitru (4509, 19, 37, 43, 46, 52).

Ş.m. 3. George Coşbuc. Cl. VII. Loşiţă Ileana (E: 1600, 01, 04, 09, 10, 13, 20, 31, 44). Cl. VIII. Bîrleanu Luminiţa (4475, 96, E: 1582, 86, 94, 600, 04, 10, 21, 27, 31). Cl. X. Manea Octavian (4434, 42, 43, 52, 81, 87, 509, 28, 36, 39). Cl. XI. Arhir Ion (4419, 34, 63, 69, 73, 80, 83, 84, 95, 503, 04, 27).

Şcoala de 7 ani nr. 9. Cl. VII. Boieriu Maria (E: 1617, 20, 27, 28, 31, 33, 35, 37, 38, 43, 44), Holanda Doina (E: 1617, 20, 21, 23, 27, 31, 34, 37, 38, 42), Victor Cristea (E: 1604, 05, 10, 17, 18, 20, 21, 23, 27, 28).

Şc. de 7 ani nr. 12. Cl. VI. Trif Nicolae (E: 1617, 20—22, 26, 31, 33, 37, 38, 42), Durea Nicolae (E: 1583, 84, 87, 90—92, 94—97).

Şcoala de 7 ani nr. 15. Cl. VII. Bucur Delia (E: 1611, 12, 17, 18, 20, 21, 23, 24, 26—32), Rădoi Silviu (E: 1583, 84, 86, 87, 90, 93—97), Ungureanu Dan (E: 1617, 18, 20, 21, 27, 28, 48, 54, 60).

Şc. tehn. proiectanţi. An. I. Andrei Maria (4500, 05, 06, 09, 10, 18, 19, 20, 33, 36, 39, 40).

SIGHET (Maramureş). **Ş.m. Filimon Sîrbu.** Cl. X. Smicală Ion (4499, 505, 06, 09, 10, 19, 22, 33, 35, 37, 43).

SIGHIŞOARA (Braşov). Absolvent Schosch Walter (4484, 86, 95, 96, 503, 04, 06, 09, 33, 36).

Ş.m. 1. Cl. VIII. Floca Margareta (4475, 86, 543, E: 1583, 601, 07, 08, 10—13, 16, 17, 20, 21, 23, 24, 27, 31, 37, 38, 42, 44). Iacob Nicolae (E: 1599, 600, 05, 08, 11, 16, 21, 26, 31). Oroş Octavian (4486, 516, 622, E: 1599, 600, 05, 08, 11, 13, 16), Purenciu Mircea (4453, 75, E: 1587, 91, 93, 97, 601, 04, 06—08, 10, 13), Răducan Doina (E: 1587, 91, 601, 04, 13, 15—17, 20, 31). Cl. IX. Crişan Zosim (4421, 41, 42, 67, 70, 81, 86, 94, 96, 516), Karl Günther (4475, 81, 33, 96, 506, 09, 17, 19, 36, 39, 43), Olteanu Elena (4381, 82, 490, 96), Serachitopol Adrian (4420, 32, 33, 34, 41, 43, 52—54, 67, 70, 81, 83, 86, 87, 505, 09, 16, 19, 28, 35, 36, 39). Cl. X. Ajai Maria (4432, 76, 503, 04, 09, 16, 27, 28, 31, 36), Duşleag Cezarina (4481, 84, 503, 04, 06, 09, 27, 31, 33, 36, 39, 43). Cl, XI. Dumitriu Virginia (4433), **Neagu Gheorghe** (4499—501, 03—07, 09, 10, 14, 16, 17, 20, 27, 28, 31, 33, 36—44, 46, 49, 62, 70, 75, 77—81, 84, 85, 88, 90, 91, 95, 95, 99, 600, 02, 04, 07).

Ş.m. 2. Cl. VII. Iacobi Mihaela (4475 E: 1583, 84, 90, 91, 94, 95, 97, 98, 600—02, 04), Macht Cristof (E: 1587, 89—92, 95, 97, 98, 600, 01, 04, 05, 07, 08, 10, 11, 13, 16). Cl. XI. Brăteanu Silviu (4419, 20, 22, 23, 34, 37, 41, 43, 44, 52, 72, 81, 83, 84, 503, 04), **Kessler Peter** (4419, 20, 22, 23, 31, 34, 38, 42—44, 52, 53, 63, 69, 71—73, 75, 80—84, 86—89, 95, 96, 99—501, 03—06, 09, 17—19, 22, 27—31, 33, 36, 38—40, 42, 43).

SIMERIA (Hunedoara). Cl. XI. Novac Anghel (4462, 63, 71, 99, 500, 05, 06, 73).

SINAIA (Ploieşti). **Ş.m. George Enescu.** Cl. IX. Vasilescu Cireşica (4419, 33, 52, 53, 81, 83, 96, 509, 33, 36, 39). Cl. X. Puicu Mihai (P).

SLĂNIC (Ploieşti). Cl. X. Constantinoiu F. Nicolae (4431, 32, 34, 37, 86, 87, 94, 95, 104, 27, 28). Cl. XI. Duma H. Ilie (4419, 63, 64, 72, 75, 80, 81, 84, 96).

SLATINA (Argeş). **Ş.m. Tudor Vladimirescu.** Cl. VII. Diaconu N. Radu (E: 1600, 01, 04, 07, 08, 10, 11, 13, 31). Cl. VIII. Ionescu Mihai (E: 1599—601, 09, 10, 19—21, 25, 27, 28, 47), Popescu Tiberiu (E: 1580, 89, 91, 96, 9, 600, 04, 10, 11, 14). Cl. IX. Oanţă L. Sima (4467, 81, 86, 96, 503, 08, 09, 19, 33, 37, 46). Cl. X. Ionescu M. Horia (4427, 29, 35, 40, 47, 53, 72, 75, 80—84, 96, 99, 504).

SOHATU (Bucureşti). Cl. VII. Decu T. Aurel (E: 1600, 08, 10, 17, 18, 20—25, 27, 46, 47), Mihăiţă Veronica (idem), Tănăsache Elena (idem).

STREHAIA (Oltenia). Cl. VIII. Bran Mircea (4453, 519, E: 1586, 91, 605, 17, 18, 20, 21, 23, 26, 27, 42, 43, 46, 47), Colţan Emil (E: 1620, 26, 27, 33, 42—47), Gheorghiţă Ionel (E: 1617, 21, 23, 26, 28, 31, 37, 43, 44, 47), Mîndreanu Eugen (4543, E: 1596, 605, 16—18, 20, 21, 23, 26, 27, 42, 43, 45—47, 63). Cl. X. Băgligiu Octavian (4420—22, 31, 34, 41, 44, 48).

ŞOMCUŢA MARE (Maramureş). Cl. VI. Maximilian Abraham (E: 1617, 23). Cl. VIII. Farcaş Simion (4543, E: 1587, 97, 620, 21, 27, 31), Wemberger L. (4543, 97, E: 1620, 21, 26, 27, 29, 31).

SFÎRLEANCA (Ploieşti). Cl. VII. Călin V. Maria (E: 1582—86, 88, 91, 93—600, 03, 04, 08—10).

SUCEAVA. **Ş.m. Ştefan-cel-Mare.** Cl. VII. Cucu Nicolae, (E: 1600, 04, 09, 10, 18, 20, 27, 31, 37, 38, 43, 47), Racocea Cezar (E: 1601, 03, 05, 09, 11, 18, 20, 21, 23, 27, 29, 31). Cl. VIII. Pîrîu Dumitru (E: 1584, 87, 600, 04, 10, 18, 23). Raţă Mircea (4475, E: 1599, 600, 04, 05, 10, 17, 21, 23, 31). Cl. IX. Coifman Hardy (4475, 81, 83, 90, 96, 509, 19, 36, 37, 39, 43, 99). Cl. X. Sorohan Liviu (4473, 75, 80, 82—84, 90, 509, 17, 43, 52).

TECUCI (Galaţi). Ş.m. 2 Cl. VII. Pavel Tatiana (E: 1583, 84, 87, 89, 90, 92, 96, 97, 600, 01, 04, 07, 09, 10, 13, 16). Cl. VIII. Adam Ionel (E: 1600, 04, 05, 08—11, 20, 22, 23, 25—27, 31), Tătaru Ioan (E: 1600, 04, 05, 08—11, 20—23, 25—27, 31, 37).

TELEAJEN (Ploieşti). **Ş.m. 3 seral.** Cl. X. Bădoiu Traian (4505, 06, 09, 10, 19, 30, 43, 52).

TIMIŞOARA (Banat). **Studenţi: Scarlat Nicolae** (4419, 21—24, 27, 29, 31—34, 38, 41—44, 52, 53, 55, 56, 59—63, 67, 70—72, 75, 80—84, 87, 90, 95, 96, 99, 503—10, 16, 19, 22, 28, 31—33, 35—40, 42, 43, 56,

SZÁCHENYI ... 1883

61, 62, 66, 70, 72, 73, 75), Soukup Luise (Fac. mat.) (4419, 20, 23, 27—29, 44, 48, 52, 62, 72, 80, 81, 83, 99, 505, 06, 09, 10, 20, 40, 43).

Ş.m. 1 **Nikos Beloianis**. Cl. VI. Gheorghiu Doina Rodica (E: 1617, 20—22, 26—28, 31, 37, 47). Cl. X. Munteanu Dan (4419, 29, 44, 52, 78, 81, 83). Cl. XI. Comşulea Cornelia (4419, 20, 44, 52, 60, 72, 75, 81, 83, 84).

Ş.m. 2. **Nikolaus Lenau**. Cl. VI. Teleagă Petre (E: 1617, 20, 22, 23, 26—28, 31, 37, 42). Cl. VIII. Anonim (E: 1583, 87, 89, 92, 93, 617, 20, 21, 23, 26). Matiesch Helga (E: 1605, 10, 11, 16, 21, 26, 27, 30, 31, 44), **Popescu Viorela** (E: 1583, 91, 93, 600, 01, 04, 06—11, 14, 16—18, 20, 21, 23, 26, 29, 31, 33, 37, 42, 47), Richard Ortinau (E: 1605, 08, 13, 15, 17—19, 21, 23, 25, 26), Schwartz Agneta (E: 1583, 84, 87, 89, 94, 96, 98, 600, 05, 10, 17, 31). Cl. XI. Bohn Erich (4419, 20, 23, 29, 30, 33, 37, 63, 65, 72, 81, 83, 84, 96), Filip Norbert (4419, 20, 23, 44, 47, 81, 83, 84, 539, 43).

Ş.m. 5. Cl. VIII. Weinberger Iudita (E: 1587, 90, 94, 98, 600, 04, 07—10, 16). Cl. IX. **Lustig Gheorghe** (4421, 30, 38, 41—44, 48, 51, 55, 61, 63—66, 68, 70, 71, 78, 79, 83, 85—87, 89, 90, 92, 97, 99, 500, 03, 06—64, 66—68, 70, 73—75, 80, 84, 86, 88, 91, 9, 602, 04, 06, 12).

Ş.m. 7. Cl. IX. Marinceu Emilia (4433, 52, 53, 68, 74, 81, 83, 84, 96, 98). Cl. X. Gora Horaţiu (4472, 75, 80—84, 99, 506, 09, 17, 19, 33, 39, 43), Suciu Cornel (4419, 20, 29, 72, 75, 80—84), Olariu Victor (4499, 501, 06, 09, 13, 18, 19, 33, 38, 43, 47—53).

Şc. de 7 ani nr. 4. Cl. VII. Klein Gabriela (E: 1583, 84, 90, 95, 97, 600, 04, 07, 08, 38, P).

TÎRGOVIŞTE (Ploieşti). Ş.m. 3. **Nicolae Bălcescu**. Cl. VII. Milea Aurelia (E: 1600, 01, 04, 07—10, 13, 15, 16), Niculescu Constantin (E: 1583, 87, 94, 97, 600, 11, 20, 21, 24, 27, 31). Cl. X. Anghelescu Dumitru (4420, 44, 52, 83, 506, 07, 09, 10, 21, 31, 36, 41—43, 67, 69, 78, 88, 503, 04, 27), Mădan I. Rodica (4442, 67, 88, 503, 04, 07, 09, 27, 44, 83), Migdalovici Marcel (4473, 75, 80—84, 90, 99, 508, 09, 19, 30, 33, 37—39, 43, 44, 68). Cl. XI. Cojan Dan (4499, 505, 09, 35, 37, 40, 43, 73, 75, 86). **Dumitrică Aurel** (4499, 500, 03—10, 14, 16, 18, 21, 22, 24, 26—28, 31—35, 38—40, 42, 43, 45, 49, 50, 52, 54, 55, 59, 62, 63, 68, 70, 72, 73, 75—86, 91—93, 95, 99, 600, 03, 06, 07, 10—13).

TÎRGU CĂRBUNEŞTI (Oltenia). Cl. XI. Guşiţă Marcel (4499, 500, 05—07, 09, 10, 17—20, 22, 29—31, 33, 36—41, 43, 72, 73, 75, 80—84, 96, 97).

TÎRGU JIU (Oltenia). Absolvent. Vîlceana Sabin (4419, 33, 38, 44, 52, 55, 60, 61, 63, 71, 75, 506, 09, 22, 31, 33, 36, 39, 40, 42, 43, 61, 73—75, 80, 81, 83, 84, 91, 602).

Ş.m. 1. Cl. VI. Bănică Marian (E: 1601, 06—08, 11, 14, 15, 20, 21, 31).

Ş.m. 2. Cl. VIII. **Pitea M. Virgil** (E: 1582—97, 601, 03—11, 13—20, 22—28, 30, 31), Roangheş Elena (E: 1604—06, 08, 10, 11, 16, 18, 20, 23, 27, 29, 31, 32).

Ş.m. 3. Cl. IX. Onea I. Romulus (4475, 81, 90, 96, 509, 19, 36, 52, 86, 566, 85). Cl. X. Neagoe V. Emilian (4434, 36, 44, 52, 81, 96, 509, 10, 43), Stamate Laurian (4444, 52, 75, 81, 96, 509, 10, 36, 43).

TÎRGU LĂPUŞ (Maramureş). Ş.m. Cl. VII. Bellu Mircea (E: 1562, 83—85, 87, 90, 95, 622, 25, 31), Bercovici Iosif (E: 1583, 84, 87, 90, 91, 95, 617, 20, 22, 25, 31), Saiovici Iudita (E: 1583, 84, 89, 91, 92, 97, 600, 10, 23, 31), **Samuel Iacob** (E: 1584 89, 90, 95, 97, 600, 07, 08, 10, 23, 25, 31). Solnicanuc Sever (E: 1583, 84, 87, 90, 91, 95, 617, 20, 22, 25, 31). Cl. X. Cîndea Octavian (4483, 509, 17, 19), Paşca Gheorghe (4469, 83, 88, 509, 16, 17, 19, 27, 63, 66), Pop Nicolae (4469, 509, 16, 19, 27, 28, 43, 56, 63, 66), Sas Alexandru (4434, 42, 43, 75, 81, 508, 09, 17, 20, 38).

— Elevii claselor IX—XI nu vor trimite soluţii la problemele propuse pentru şcoala de 7 ani. Problemele rezolvate trebuie să fie din ultimele trei numere apărute ale G.M.F.-B şi vor fi trimise numai odată în cursul unei luni. Problemele de matematică vor fi expediate într-un singur plic şi vor fi însoţite de un borderou cu numerele problemelor, scrise în ordine crescîndă. Idem pentru problemele de fizică. Pe plic se va scrie localitatea, şcoala şi clasa pe care o urmează rezolvitorul. La rubrica rezolvitorilor nu se va anunţa decît cel puţin 10 probleme bine rezolvate. Problemele incomplet rezolvate, care sînt copiate, sau care conţin erori, nu vor fi anunţate ; iar rezolvitorii nu mai pot fi evidenţiaţi. Problemele propuse să fie însoţite de una sau mai multe soluţii.

CĂTRE REZOLVITORII DE PROBLEME

Corespondenții care ne trimit probleme rezolvate trebuie să redacteze fiecare problemă separat, însoțind-o de toate calculele necesare și de figuri desenate cu îngrijire. Nu se vor trimite soluțiile mai multor probleme pe aceeași foaie. Problemele rezolvate de fizică se vor trimite separat, iar pe plic se va scrie: *Pentru redacția de fizică.*

Se primesc lunar cel puțin zece soluții numai la problemele și exercițiile din ultimele trei numere apărute. Pe plic se va scrie localitatea și școala pe care o urmează rezolvitorii, pentru a se evita confuzii la întocmirea rubricii rezolvitorilor de probleme și a listei celor evidențiați. Soluții la problemele propuse pentru școala de 7 ani se primesc numai de la elevii claselor V—VIII, sau ai școlilor profesionale.

Problemele care se propun de către colaboratorii revistei să fie clar alcătuite și însoțite de soluții, să fie personale, iar nu luate din cărți sau reviste. Elevii sînt sfătuiți să înceapă a propune probleme numai după ce au rezolvat un număr destul de mare de exerciții și probleme. Problemele propuse, dar necorespunzătoare, nu se pot publica. Dacă un corespondent constată că unele probleme propuse au fost publicate în cărți sau reviste, este rugat să ne arate precis volumul și pagina unde a mai apărut enunțul sau soluția problemei respective.

Corespondentul nostru care a citit și a înțeles deplin multe din soluțiile publicate, a rezolvat multe din problemele propuse, poate și este îndemnat să încerce să schițeze cîte o notă rezultată dintr-o observație făcută cu ocazia rezolvării unei chestiuni mai grele. Aceste note să fie *refăcute de mai multe ori înainte de a fi trimise*, pentru ca redactarea lor să fie *cît mai clară și concisă*. Figurile să fie făcute separat. În redactare se vor evita prescurtările. Nu se va scrie: $\parallel =$; $\sim$; $\measuredangle$; $\perp$; $\parallel$; Tr., etc., iar trecerea de la un calcul la altul să fie explicată pentru a se putea urmări ușor desfășurarea unei demonstrații. Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

La publicarea problemelor rezolvate se vor menționa rezolvitorii care au dat o bună redactare și o soluție interesantă, sau mai multe metode de rezolvare.

Tovarășii colaboratori elevi sînt rugați să ne trimită date asupra activității lor extrașcolare la matematică și la fizică, asupra activității cercurilor de matematică și de fizică la care iau parte, pentru ca apoi, prin revistă, să se poată realiza cu succes un schimb de experiență. Dările de seamă concrete se vor publica în G.M.F.-B.

Autorii sînt rugați ca la întocmirea articolelor și notelor să țină seama de următoarele: articolele sau notele să fie scrise clar cu cerneală sau dactilografiate la două rînduri și pe o singură parte a foii, figurile să fie desenate îngrijit și pe o foaie separată. Problemele propuse să fie însoțite de una sau mai multe soluții.

Autorul să semneze clar lucrarea personală pe care o trimite pentru publicat, de asemenea să scrie adresa și data trimiterii lucrării.

— Materialele care nu corespund profilului G.M.F.-B, nu vor fi publicate.

Colecții și numere din anii precedenți

Societatea de Științe Matematice și Fizice din R.P.R., posedă exemplare mai vechi din G.M.F.-B, și G.M.F.-A.

Cititorii noștri își pot procura colecții ca și numere disparate, depunînd banii la poștă prin mandat poștal pe numele Societății de Științe Matematice și Fizice, strada Academiei nr. 14, contul 070.004 la B.R.P.R., filiala Lenin.

Prețul unui exemplar este de lei 3 pentru G.M.F.-A și de lei 1,50 pentru G.M.F.-B. Cheltuielile de transport sînt de 0,20 lei de exemplar.

ABONAMENTE — Societatea de Științe Matematice și Fizice din R.P.R. primește abonamente la oricare din publicațiile sale:

a) Pentru instituții, școli, biblioteci la prețul de lei 60 anual, pentru fiecare din periodicile sale: G.M.F.-A, G.M.F.-B, M.F.L., Bulletin Mathématique și 40 lei anual la „Mathematica".

b) Pentru profesori și elevi la prețul de 18 lei la G.M.F.-B sau M.F.L. de 36 lei la G.M.F.-A, de 60 lei la Bulletin Mathématique și de 40 lei la „Mathematica".

— Fiecare abonat este rugat să facă cunoscută G.M.F.-B și altor colegi, pentru a face abonamentele din vreme în vederea planificării tirajului lunar.

— Abonamentele se pot face individual sau colectiv prin oficiile poștale locale sau prin factorii poștali.

Litografia și Tipografia Învățămîntului. — c. 1710. Lei 1,50

E 1426

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE
DIN R. P. R.

GAZETA MATEMATICĂ ȘI FIZICĂ

(SERIA B)

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul XII octombrie 1961

10

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

(SERIA B)

Anul XII, nr. 10 octombrie 1961

SUMARUL

Pag.

1. Despre formularea corectă a noţiunilor, proprietăţilor şi a raţionamentelor matematice, de E. Dobrescu şi I. Sălăgean 577
2. Aplicaţii fizico-matematice în minerit de Vanţă Maria şi Rosinger Elemer 585
3. Unele aspecte ale folosirii izotopilor radioactivi în minerit de Vanţă Maria 590
4. Noţiuni introductive asupra spaţiilor metrice de Ilie Constantinescu 592
5. Note matematice de Albu Toma şi Torsan Ilie . . . 597
6. Dispozitiv pentru demonstrarea distribuţiei electricităţii pe conductori de D. Atanasiu 599
7. Probleme rezolvate (4345, 4422, 4423, 4444, 4446, 4447, 4457, 4460, 4461, 4472, 4474, 4475, 4480, 4482, 4483, 4485, 4486, 4489, 4492, 4497, E: 1581) 600
8. Chestiuni de examen (4915—4931) 617
9. Probleme propuse (4932—4962) 620
10. Exerciţii şi probleme propuse pentru şcoala de 7 ani (E: 1740—1752) 624
11. Dare de seamă asupra Olimpiadelor de matematică şi fizică, 1961 de I. Muşat 626
12. Rubrica rezolvitorilor de probleme 629

ANUL XII **10** OCTOMBRIE

O parte din materialele publicate în acest număr a fost asigurată de către subfiliala Petroşeni a Societăţii de ştiinţe matematice şi fizice din R.P.R.

COMITETUL DE REDACŢIE

Ailincăi M., profesoară; *Atanasiu V.*, lector, redactor pentru fizică; *Boiangiu D.*, lector; *Ionescu-Bujor C.*, prof. univ.; *Ionescu-Ţiu C.*, profesor, redactor pentru matematică; *Manolescu St.*, profesoară; *Muşat I.*, profesor; *Petrovanu A.*, profesor; *Sacter O.*, conf. univ., redactor şef; *Simionescu D. Gh.* conf. univ.; *Csiki Zoltan*, asistent.

REDACŢIA: Str. Academiei, 14 — Tel. 14.46.53 — Bucureşti 1

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar putea interesa redacţia noastră se vor trimite pe adresa de mai sus.

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

(SERIA B)

Anul XII, nr. 10 octombrie 1961

DESPRE FORMULAREA CORECTĂ A NOŢIUNILOR, PROPRIETĂŢILOR ŞI A RAŢIONAMENTELOR MATEMATICE

E. DOBRESCU şi I. SĂLĂGEAN

I. Oamenii, în orice domeniu al preocupărilor, îşi exprimă gîndurile prin propoziţii şi fraze. Formularea corectă a propoziţiilor şi a frazelor este o condiţie necesară pentru ca oamenii să se înţeleagă între ei. Acest lucru se obţine în general respectînd legile gramaticale ale vorbirii, forma specifică de exprimare a omului.

În domeniul matematicilor claritatea şi preciziunea exprimării este o problemă de conţinut. Vom căuta să lămurim această problemă limitîndu-ne la fapte pe care elevii, chiar din primele clase ale învăţămîntului mediu le-au atins şi le pot înţelege.

Necesităţile vieţii materiale obligă pe om să studieze diferite aspecte ale obiectelor lumii materiale. Astfel omul constată existenţa unor mulţimi de obiecte asupra cărora, pe de o parte face evaluări cantitative numărîndu-le sau măsurîndu-le, pe de altă parte le studiază formele spaţiale. În acest fel iau naştere în mintea omului noţiunile matematice de număr, raport, egalitate, operaţii cu numere, ecuaţii, apoi noţiunile de punct, dreaptă, plan, figură geometrică, etc....

Acceptînd unele noţiuni de acest fel ca fundamentale, construim logic alte noţiuni utile în teorie şi aplicaţii, formulînd aceste construcţii logice prin *definiţii*. Studiind noţiunile definite descoperim diferite proprietăţi, pe care le formulăm prin *axiome* şi *teoreme*. Axiomele sînt adevăruri fundamentale admise ca evidente, valabilitatea lor fiind confirmată de nenumărate repetări ale faptelor ce le conţin, cum şi prin consecinţele lor teoretice şi practice. Descoperirea teoremelor se face prin *raţionamente matematice*, care pentru a fi juste trebuie să respecte anumite legi ale gîndirii, numite *legi ale logicei*.

II. Definiţiile, axiomele, teoremele şi raţionamentele matematice le formulăm cu ajutorul unor *propoziţii matematice*, cărora le dăm această denumire chiar dacă din punct de vedere gramatical unele ar fi fraze. Să considerăm cîteva exemple de propoziţii matematice

(a) . . . . . „Triunghiul *ABC* este dreptunghic"
(b) . . . . . „Triunghiul *ABC* are două laturi egale"
(c) . . . . . „Triunghiul *ABC* este isoscel"
(d) . . . . . „Triunghiul *ABC* are două unghiuri egale"
(e) . . . . . „Patrulaterul *ABCD* este dreptunghi"
(f) . . . . . „Patrulaterul *ABCD* are diagonalele egale"

O trăsătură caracteristică a matematicilor este că își exprimă unele propoziții simbolic, cu ajutorul unor semne convenționale. De exemplu relațiile de ordine dintre două numere reale x și y se exprimă cu propozițiile

(g) . . . . . $x = y$
(h) . . . . . $x > y$
(k) . . . . . $x < y$
(l) . . . . . $x \neq y$

Propoziția „numerele reale x și y au același semn" se scrie

(m) . . . . . $xy > 0$

Numerele x și y fiind reale, iar m un număr natural, considerăm și următoarea propoziție, pe care o vom folosi în cele ce urmează

(n) . . . . . $x^m = y^m$

Cînd o propoziție matematică, de exemplu propoziția (a) este adevărată spunem: „avem a", iar cînd nu este adevărată spunem: „nu avem a". În acest fel „nu avem a" este o nouă propoziție, care se numește „negarea lui a", sau „non a" și convenim să o notăm $\bar{a}$. Dăm negările unora din propozițiile de mai sus:

$(\bar{a})$ . . . . . „Triunghiul ABC nu este dreptunghic"
$(\bar{b})$ . . . . . „Triunghiul ABC nu are două laturi egale"
$(\bar{c})$ . . . . . „Triunghiul ABC nu este isoscel"
$(\bar{g})$ . . . . . $x \neq y$
$(\bar{h})$ . . . . . $x \leqslant y$
$(\bar{m})$ . . . . . $xy \leqslant 0$

După cele spuse apare ca evident următorul fapt:

O propoziție și negarea ei nu pot să fie deodată adevărate sau deodată neadevărate, cînd una este adevărată, atunci cealaltă nu este adevărată, adică

„nu avem a" este același fapt ca și „avem $\bar{a}$"

„avem a" este același fapt ca și „nu avem $\bar{a}$"

Reținem și faptul că negarea este un mijloc de a forma dintr-o propoziție o altă propoziție.

Un alt mijloc de a forma propoziții este compunerea propozițiilor, care se face legînd două propoziții cu cuvintele de legătură „și", „sau", „deci", „adică", sau alte cuvinte echivalente. Se folosește frecvent legătura de forma „dacă..., atunci...". Întrebuințarea justă a acestor cuvinte de legătură este deosebit de importantă pentru formularea clară a propozițiilor matematice.

Înainte de a lămuri întrebuințarea corectă a cuvintelor de legătură, vom examina relațiile dintre două propoziții. Examinînd propozițiile (a) și (c) din exemplele anterioare, constatăm următoarele:

— Un triunghi dreptunghic poate să fie totodată și isoscel.
— Un triunghi poate să fie dreptunghic fără să fie isoscel.
— Un triunghi poate să nu fie dreptunghic, dar să fie isoscel.
— Un triunghi poate să nu fie nici dreptunghic nici isoscel.

În concluzie, oricare din propozițiile *(a)* și *(c)* poate să fie adevărată sau neadevărată independent de faptul dacă în același timp cealaltă este adevărată sau neadevărată. Două propoziții care satisfac această condiție se zic *propoziții independente.*

Două propoziții independente legate prin cuvîntul „și" formează o nouă propoziție, pe care o considerăm adevărată atunci și numai atunci cînd cele două propoziții componente sînt amîndouă adevărate.

Rezultă că „*a* și *c*" este o propoziție adevărată atunci cînd atît *a* cît și *b* sînt adevărate, adică atunci cînd triunghiul ABC este dreptunghic și totodată isoscel.

Alte exemple:

(a și $\bar{c}$*)* . . . . . „Triunghiul *ABC* este dreptunghic, dar nu este isoscel".

($\bar{a}$ și *c)* . . . . . „Triunghiul *ABC* nu este dreptunghic, dar este isoscel".

($\bar{a}$ și $\bar{c}$*)* . . . . . „Triunghiul *ABC* nu este nici dreptunghic, nici isoscel".

În logica matematică cuvîntul de legătură „și" se numește conjuncție și se înlocuiește cu semnul $\cap$, sau cu un punct $\cdot$, adică „*a* și *c*" se scrie „$a \cap c$", sau „$a.c$". Cînd legăm două propoziții cu conjuncția „și" se zice că le legăm conjunctiv și că obținem o *propoziție conjunctivă.*

Putem lega conjunctiv și două propoziții care nu pot să fie deodată adevărate, dar în acest caz obținem o propoziție conjunctivă, care nu este niciodată adevărată, propoziție care se zice absurdă.

Exemple:

1. „*a* și $\bar{a}$" este o propoziție absurdă, pentru că un triunghi nu poate în același timp să fie dreptunghic și să nu fie dreptunghic.

2. „*g* și *h*" este o propoziție absurdă, pentru că nu putem avea în același timp $x = y$ și $x > y$.

În aceste exemple propozițiile componente se zic contradictorii, pentru că nu pot să fie deodată adevărate.

Două propoziții independente sau contradictorii legate prin cuvîntul „sau" formează o nouă propoziție, numită propoziție disjunctivă, care se consideră adevărată cînd cel puțin una din propozițiile, componente este adevărată.

Deci „*a sau c*" este o propoziție adevărată în următoarele trei cazuri: — cînd *a* este adevărată; — cînd *c* este adevărată; — cînd *a* și *c* sînt adevărate.

Referindu-ne la propozițiile date ca exemple avem:

(a sau *c)* . . . . . „Triunghiul ABC este drepunghic sau isoscel".

Propoziție adevărată cînd triunghiul este dreptunghic, sau cînd este isoscel, sau cînd este dreptunghic și isoscel.

(g sau *h)* . . . . . $x=y$ sau $x > y$, propoziție care este adevărată numai în două cazuri, cînd $x = y$, sau cînd $x > y$, pentru că al treilea caz, $x = y$ și $x > y$ este absurd.

Observăm că în vorbirea gramaticală obișnuită cuvîntul „sau" are un sens disjunctiv strict, adică leagă două propoziții în cazul cînd una din ele este adevărată, pe cînd în logica matematică leagă două propoziții

cînd *cel puțin* una din ele este adevărată, admițînd deci și cazul ca să fie amîndouă adevărate dacă acest caz nu este absurd.

Cuvîntul de legătură „sau" îl numim disjunctiv și îl notăm cu semnul $\cup$ sau $+$, adică în loc de „*a* sau *c*", scriem „$a \cup c$" sau „$a+c$".

În cele precedente am lămurit cînd zicem că două propoziții sînt independente și cînd zicem că două propoziții sînt contradictorii. Între două propoziții există și altfel de relații.

Examinînd propozițiile *e* și *f* din exemplele noastre, constatăm că dacă *e* este adevărată, atunci și *f* este adevărată, adică dacă un patrulater este dreptunghic, atunci diagonalele lui sînt egale. Dacă însă considerăm aceste două propoziții în ordine inversă nu putem afirma că dacă *f* este adevărată, atunci este adevărată și *e*, pentru că există patrulatere care au diagonalele egale, dar nu sînt dreptunghiuri. În particular trapezele isoscele au diagonalele egale.

Dacă între două propoziții considerate într-o anumită ordine există o astfel de dependență încît dacă prima este adevărată, atunci este adevărată și a doua, exprimăm această depedență prin oricare din propozițiile:

„Dacă avem *e*, *atunci* avem *f*"

„Din *e rezultă f*"

„Avem *e*, *deci* avem *f*" sau „*e* deci *f*"

În acest caz notăm

„$e \rightarrow f$"

Între exemplele date în acest articol mai avem

$g \rightarrow n$

adică din $x = y$ rezultă $x^m = y^m$

Menționăm aici frecventa greșeală de exprimare, pe care o întîlnim și în unele manuale, care se face folosind cuvîntul „și" în loc de cuvîntul „deci". Se spune:

„Patrulaterul *ABCD* este dreptunghic și diagonalele lui sînt egale", ceea ce este o legare conjunctivă a două propoziții dependente, care sînt amîndouă adevărate cînd prima este adevărată.

După ce am demonstrat propoziția „Dacă avem *e*, atunci avem *f*", ori de cîte ori întîlnim propoziția *e* ca adevărată, vom spune „avem *e*, *deci* avem *f*".

Dacă între două propoziții există o astfel de dependență, încît din una rezultă cealaltă indiferent de ordinea lor, atunci spunem că cele două propoziții sînt echivalente și între ele punem fie semnul $\leftrightarrow$, *fie semnul egalității* $=$.

Între exemplele noastre avem:

$b \leftrightarrow d$; $c \leftrightarrow d$; h sau $k \leftrightarrow l$, care se poate scrie $h \cup k = l$.

$g \leftrightarrow m$ și n, care se poate scrie $g = m \cap n$.

Cititorii pot constata ușor valabilitatea acestor echivalențe.

După ce am constatat că două propoziții sînt echivalente, de exemplu propozițiile *b* și *d*, ori de cîte ori o întîlnim pe una ca adevărată avem drept să afirmăm: „avem *b* adică avem *d*", sau „avem *d*, adică avem *b*".

Și în astfel de cazuri e greșit să întrebuințăm cuvîntul „și" în loc de adică. Astfel cînd rezolvăm o ecuație, o transformăm succesiv în ecuații

echivalente și nu este just să legăm aceste ecuații echivalente prin cuvîntul „și".

Este necorectă vorbirea: $3x = 12$ și $x=4$,
corect este: $3x = 12$, adică $x=4$.

Putem spune că două propoziții echivalente au același conținut exprimat sub forme diferite.

III. Negarea propoziției conjuctive „a și c" o putem nota „$\overline{a \text{ și } c}$" ca fiind adevărată cînd „a și c" nu este adevărată.

„a și c" este adevărată, atunci și numai atunci cînd a și c sînt amîndouă adevărate, deci „a și c" nu este adevărată cînd cel puțin una din propozițiile a și c nu este adevărată„ adică cel puțin una din negările $\bar{a}$ și $\bar{c}$ este adevărată, adică „$\bar{a}$ sau $\bar{c}$" este adevărată.

Putem deci spune că negarea „$\overline{a \text{ și } c}$" este adevărată atunci și numai atunci cînd propoziția „$\bar{a}$ sau $\bar{c}$" este adevărată, adică aceste propoziții sînt echivalente, ceea ce se scrie astfel:

$$\overline{a \text{ și } c} = \bar{a} \text{ sau } \bar{c}$$

folosind semnele convenționale avem

$$\overline{a \cap c} = \bar{a} \cup \bar{c} \qquad (1)$$

Putem spune: *negarea unei propoziții conjunctive este echivalentă cu cojuncția negărilor propozițiilor componente.*

Propunem cititorilor să dovedească următoarea identitate logică

$$\overline{a \cup c} = \bar{a} \cap \bar{c} \qquad (2)$$

care spune: *negarea unei propoziții disjunctive este echivalentă cu conjuncția negărilor propozițiilor componente.*

Identitățile logice (1) și (2) se numesc relațiile lui A. de Morgan.

IV. Cu ajutorul propozițiilor formulăm definițiile, axiomele și teoremele matematice.

Definiția construiește o propoziție nouă, pe care convenim să o considerăm echivalentă cu o propoziție dată.

Citățm ca exemplu definiția:

„Dacă un triunghi are două laturi egale, atunci spunem că triunghiul este isoscel".

Structura unei definiții este:

„Dacă avem (b), atunci *spunem* că avem *(c)*".

Din faptul că definiția este o convenție stabilită de noi, ar rezulta că putem forma după voia noastră orice definiție, totuși e necesar ca definiția să aibă sens și să fie utilă în teorie și aplicații.

O definiție are sens dacă stabilește o echivalență între o propoziție care *nu este absurdă* și o nouă propoziție creată de noi.

Nu are sens, de exemplu definiția următoare:

„Dacă un pentagon are toate unghiurile drepte, atunci spunem că el este orto-pentagon".

Aici propoziția „un pentagon are toate unghiurile drepte" este o propoziție absurdă, pentru că nu există pentagon cu toate unghiurile drepte, deci „orto-pentagonul" definit de noi nu există.

Pentru a ne asigura că o definiție are sens, ea trebuie să fie însoțită de o așa numită *teoremă de existență.*

Reamintim, ca exemplu, cîteva definiții și teoremele lor de existență:

1. *Definiție:* „Dacă două drepte dintr-un plan nu au nici un punct comun, atunci ele sînt paralele".

Teorema de existență: „Două drepte perpendiculare pe aceeași dreaptă sînt paralele".

2. *Definiție:* „Dacă două triunghiuri au unghiurile respectiv egale și laturile omoloage proporționale, atunci spunem că ele sînt asemenea".

Teorema ei de existență: „Orice dreaptă paralelă cu o latură a unui triunghi formează cu celelalte două laturi un triunghi asemenea cu cel considerat".

3. *Definiție:* „Dacă o dreaptă este perpendiculară pe toate dreptele dintr-un plan, atunci spunem că ea este perpendiculară pe acel plan".

Teorema ei de existență: „Dacă o dreaptă este perpendiculară pe două drepte neparalele dintr-un plan, atunci ea este perpendiculară pe acel plan".

Axiomele și teoremele sînt propoziții matematice de forma:

„Dacă avem (c), atunci avem (d)" unde propoziția (c) se numește *ipoteză,* iar (d) *concluzie.*

După ce am admis o axiomă, sau am demonstrat o teoremă, ori de cîte ori vom întîlni propoziția (c) ca adevărată, avem dreptul să spunem: „avem (c), deci avem (d)".

Recomandăm elevilor să urmărească cele de mai sus pe propozițiile (c) și (d) din exemplele acestui articol.

Folosind exemplele citate mai avem teorema:

„Dacă avem (e), atunci avem (f)"

adică: „Dacă un patrulater este dreptunghic, atunci diagonalele lui sînt egale".

Mai citățm teorema:

„Dacă aevm (g), atunci avem (n)", adică:

„Dacă x și y sînt numere reale iar m număr natural, și avem $x = y$, atunci avem $x^m = y^m$".

Axiomele și teoremele stabilesc faptul că dintr-o propoziție (p) numită ipoteză, rezultă o altă propoziție (r), numită concluzie.

Ca să dovedim că două propoziții (p) și (r) sînt echivalente trebuie să demonstrăm următoarele două teoreme:

— „Dacă avem (p), atunci avem (r)".

— „Dacă avem (r), atunci avem (p)".

Două propoziții, de acest fel, *a căror enunțuri se obțin una din cealaltă schimbînd între ele ipoteza și concluzia se numesc teoreme reciproce.*

Din faptul că o teoremă este adevărată nu rezultă că și teorema reciprocă ar fi adevărată, deci după ce am stabilit o teoremă *e necesar să cercetăm dacă și teorema reciprocă este adevărată sau nu este adevărată.*

Exemple:

1. Avem *teorema:*

„Dacă într-un triunghi două laturi sînt egale, atunci sînt egale și unghiurile opuse acelor laturi".

Se știe că în acest caz este adevărată și *teorema reciprocă:*

„Dacă într-un triunghi două unghiuri sînt egale, atunci sînt egale și laturile opuse acelor unghiuri.

2. Avem *teorema:* „Dacă un patrulater este dreptunghi, atunci diagonalele lui sînt egale".

În acest caz *nu este adevărată teorema reciprocă:*

„Dacă un patrulater are diagonalele egale, atunci el este dreptunghic".

Dacă într-o teoremă negăm atît ipoteza cît și concluzia obținem o nouă teoremă care se numește teorema contrară cu cea dintîi.

Avînd deci teorema:

— „Dacă avem (p), atunci avem (r)"

Teorema ei contrară este:

— „Dacă avem $(\bar{p})$, atunci avem $(\bar{r})$".

Din faptul că o teoremă este adevărată nu rezultă nici că teorema contrară ar fi adevărată, nici că teorema contrară nu ar fi adevărată, deci după ce am stabilit o teoremă e necesar să cercetăm dacă teorema contrară este sau nu este adevărată.

Exemple:

1. Avem *teorema:*

„Dacă într-un triunghi două laturi sînt egale, atunci sînt egale și unghiurile opuse acelor laturi".

Se știe că în acest caz este adevărată și *teorema contrară:*

„Dacă într-un triunghi două laturi *nu* sînt egale, atunci *nu* sînt egale nici unghiurile opuse acelor laturi".

2. Avem *teorema:*

„Dacă un patrulater este dreptunghic, atunci diagonalele lui sînt egale".

În acest caz *nu este adevărată teorema contrară:*

„Dacă un patrulater *nu* este dreptunghic, atunci diagonalele lui *nu* sînt egale".

Avem ca exemplu trapezul isoscel, care *nu* este dreptunghic și totuși diagonalele lui *sînt* egale.

Să examinăm atent relația logică dintre teorema:

— „Dacă avem (p), atunci avem (r)"

și *contrara teoremei ei reciproce.*

— „Dacă avem $(\bar{r})$, atunci avem $(\bar{p})$"

Prima afirmă că *ori de cîte ori este adevărată propoziția* (p), *este adevărată și propoziția* (r), ceea ce înseamnă că atunci cînd (r) nu este adevărată, nu este adevărată nici (p), adică dacă $(\bar{r})$ este adevărată, atunci și $(\bar{p})$ este adevărată, deci a doua propoziție este și ea adevărată.

Reciproc, dacă a doua teoremă este adevărată, ea afirmă că atunci cînd (r) nu este adevărată, nici (p) nu este adevărată, ceea ce înseamnă că atunci cînd (p) este adevărată, (r) nu poate să fie neadevărată, deci și (r) este adevărată, adică prima teoremă este și ea adevărată.

Avem deci următoarea concluzie importantă:

Orice teoremă și contrara reciprocei ei sînt deodată adevărate sau neadevărate.

Exemplu:

Este adevărată *teorema:*

„Dacă un patrulater este dreptunghic, atunci diagonalele lui sînt egale".

Este adevărată *contrara reciprocei* ei:

„Dacă diagonalele unui patrulater nu sînt egale, atunci patrulaterul nu este dreptunghic".

Recapitulînd cele spuse, cu două propoziții și cu negările lor putem formula patru teoreme:

1. Teorema directă:

(T) . . . . „Dacă avem (p), atunci avem (r)".

2. Teorema reciprocă:

(R) . . . . „Dacă avem (r), atunci avem (p).

3. Contrara teoremei directe:

(T_c) . . . . „Dacă avem (p), atunci avem $(\bar{r})$.

4. Contrara teoremei reciproce:

(R_c) . . . . „Dacă avem $(\bar{r})$, atunci avem $(\bar{p})$.

Între aceste patru teoreme totdeauna există următoarele relațiuni logice:

1°. Teoremele (T) și (R_c) sînt echivalente, deci e destul să o demonstrăm pe una din ele ca să fim asigurați că și cealaltă este adevărată, sau să constatăm că una din ele este neadevărată ca să fim asigurați că cealaltă este neadevărată.

2°. Teoremele (R) și (T_c) sînt echivalente pentru că dacă considerăm pe (R) ca teoremă directă, atunci (T_c) este contrara reciprocei lui (R).

3°. Dacă (T) și (R) sînt amîndouă adevărate, atunci (T_c) și (R_c) sînt și ele amîndouă adevărate, iar dacă (T) și (R) sînt amîndouă neadevărate, atunci (T_c) și (R) sînt și ele amîndouă neadevărate, adică prima pereche de teoreme este echivalentă cu perechea ultimelor două. Acest fapt rezultă din cele spuse la 1° și 2°.

4°. Perechea (T_c) și (R_c) este echivalentă cu perechea (T) și (R).

*

Ca încheiere sfătuim pe elevi să-și fixeze principiile logice, care decurg din cele arătate în acest articol, ceea ce pot realiza căutînd în fiecare caz să caute cît mai multe exemple de propoziții, definiții, teoreme care concretizează cele spuse. După ce își vor fixa aceste reguli logice să caute să le respecte în studiile lor ulterioare confruntînd exprimarea vorbită și scrisă cu aceste reguli.

Cele spuse aici pot servi ca fapte inițiale pentru studiul unei ramuri a științelor matematice, care se numește *„Algebra logicei"*.

Astăzi „Algebra logicei" se aplică larg și în practică, la studiul matematic al mecanismelor automate. Ideia și realizarea acestei aplicații se datorește mai ales următorilor savanți: fizicianul rus *Ehrenfest* (1910), japonezii *Nakashima* și *Hanzawa* (1936), matematicienii sovietici *V. I. Sestacov* (1938) și *M. A. Gavrilov* (în prezent).

În țara noastră un colectiv de cercetători, condus de Acad. *Gr. Moisil* a dat și dă rezultate remarcabile în acest domeniu, contribuind la sarcina trasată de Congresul al III-lea al P.M.R. de a dezvolta automatizarea în toate ramurile tehnicii.

Elevii, după studierea acestui articol se pot iniția în Algebra logicei și în aplicarea ei la automatizări, studiind articolul: „Despre logica clasică, logica matematică și despre automatică" de *P. Constantinescu,* — articol apărut în Gazeta matematică și fizică, seria A, nr. 9 — septembrie 1960.

După aceasta vor putea înțelege ușor cele tratate în broșura: „Scheme cu comandă directă cu contacte și relee" de *Gr. C. Moisil* — Editura Academiei R.P.R. 1959.

APLICAȚII FIZICO-MATEMATICE ÎN MINERIT

VANȚĂ MARIA și *ROSINGER ELEMER* profesori Petroșani.

Matematica și fizica își găsesc vaste domenii de aplicare în industria și tehnica minieră, atît în problemele legate de lucrările de prospecțiuni și explorări cît și în problemele de exploatare propriu zisă sau în construcția de utilaj minier.

Problemele puse de industria minieră fac apel atît la cunoștințe de matematică și fizică elementară cît și la ramurile cele mai avansate ale acestor științe.

În cele ce urmează se vor expune unele exemple de aplicare a cunoștințelor elementare de matematică și fizică.

Iată o problemă foarte importantă în exploatarea minieră — anume determinarea pantei minime a galeriilor direcționale. Aceste galerii trebuie să aibă o ușoară pantă de la extremitățile zăcămîntului către galeria principală, pentru a asigura pe de o parte, scurgerea apelor, iar pe de altă parte, pentru a ușura transportul vagonetelor pline. Pentru un transport rațional panta trebuie astfel aleasă încît efortul necesar pentru coborîrea vagoanelor pline să fie egal cu efortul necesar pentru urcarea celor goale. O pantă exagerată cauzează greutăți și posibilități de accidente la transport, printr-un efort mai mare pentru aducerea vagonetelor goale și prin necesitatea frînării celor pline. Dacă notăm cu G greutatea unui vagonet plin, cu G_1 greutatea unui vagonet gol, cu x unghiul de înclinare și cu μ coeficientul de frecare *(fig. 1)* problema se rezolvă punînd condiția ca forța paralelă cu planul, care acționează asupra vagonetului plin $F = G\sin\alpha - G\mu\cos\alpha$ cînd acesta coboară, să fie egală cu forța $F_1 = G_1 \sin\alpha + G_1 \mu \cos\alpha$, care acționează asupra vagonetului gol cînd el urcă, adică :

$$G(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = G_1(\sin\alpha + \mu\cos\alpha).$$

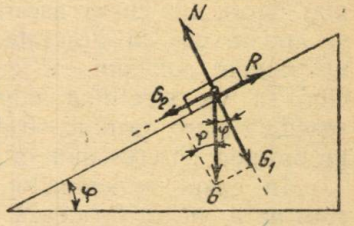


Fig. 1.

împărțind ambii membri ai egalității cu cos α și ținînd seama că pentru unghiuri α foarte mici cos $\alpha \cong 1$, iar sin α = tg $\alpha = i$ obținem:

$$G(i - \mu) = G_1(i + \mu),$$

de unde : $i = \mu \dfrac{G + G_1}{G - G_1}$.

Vom arăta în continuare o aplicație interesantă a forței centrifuge de inerție într-o fază de preparare a minereurilor. Faza de care ne ocupăm este clasarea — adică separarea particulelor de minereu în clase care se caracterizează prin dimensiuni cuprinse între anumite limite.

Aceste clasoare centrifuge utilizează forța centrifugă de inerție care acționează asupra grăunților de minereu fiind știut că această forță, la turații mari, poate avea valori de cîteva sute de ori mai mari decît forța gravitației.

Separatoarele centrifuge, numite hidrocicloane, au forma conică. Fluidul, care conține minereul mărunțit, intră printr-un tub lateral. Ca urmare a intrării tangențiale, cu viteză mare, a fluidului în aparat, ia

naștere mișcarea de rotație, în plan orizontal, o particulă solidă este supusă forței centrifuge de inerție,

$$F_c = m\omega^2 r,$$

care tinde să o deplaseze spre periferie și totodată unei forțe de frecare dirijată în sens contrar.

Forța centrifugă de inerție depinde de distanța r de la axa ciclonului, iar forța de frecare depinde de viteza de deplasare a particulei în plan orizontal. Pe verticală, acționează asupra particulei, greutatea ei mg. Dacă viteza radială nu este suficientă particula cade.

Cînd viteza de intrare a fluidului în ciclon crește, forța centrifugă se mărește și se pot separa particule mai grele. Acestea sînt evacuate din ciclon pe un tub lateral.

Descriem în continuare o metodă cu utilizare largă în prepararea minereurilor și a cărbunilor numită zetaj bazată pe diferența de greutate specifică a componentelor minereului. Minereul este un amestec de substanță utilă și de steril. Pentru separarea substanței utile de steril și pentru concentrarea substanței utile se folosește o mașină de zetaj *(fig. 2)* formată principial dintr-o cutie de lemn sau metal (1) împărțită în două compartimente printr-un perete vertical (2). Într-unul din compartimente se găsește ciurul 3 pe care se aduce minereul ,iar în al doilea compartiment se mișcă pistonul 4. Cutia mașinii este plină cu apă. La mișcarea în jos, pistonul apasă asupra apei, care se ridică în compartimentul din stînga, trece prin ochiurile ciurului și dacă are viteză suficientă, ridică grăunții, pe cei mai ușori mai mult, iar pe cei grei mai puțin. La cursa ascendentă a pistonului grăunții vor cădea pe ciur și anume cei cu greutate specifică mare vor cădea mai repede. După un număr suficient de curse ale pistonului, amestecul mineral de pe ciur se va stratifica după greutatea specifică, granulele cu greutate specifică mare formînd stratul inferior, iar celelalte succedîndu-se deasupra, în ordinea descrescîndă a greutății lor specifice.

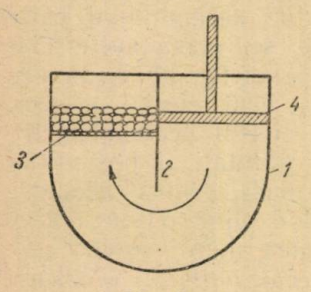


Fig. 2.

În cazul minereurilor, sterilul se adună în pătura superioară, iar substanța utilă formează stratul inferior de greutate specifică mare. În cazul cărbunilor sterilul se adună pe ciur, iar cărbunii, care au greutatea specifică mai mică formează stratul superior.

Este interesant de observat că, prin stratificarea minereului, centrul său de greutate a coborît, deoarece particulele cu greutate specifică mare se găsesc în straturile inferioare. Dar prin coborîrea centrului de greutate energia potențială $W = mgh$, a sistemului s-a micșorat, deoarece înălțimea h, a centrului de greutate față de un nivel oarecare, de exemplu față de suprafața ciurului, a scăzut. Rezultă că sistemul a trecut în stare de echilibru stabil corespunzătoare energiei minime a sistemului.

Un alt exemplu îl constituie studiul și calculul presiunilor la care sînt supuse tunelurile și galeriile de mină. Asupra tunelurilor și galeriilor acționează așa-numita presiune litostatică care se datorește greutății rocilor de deasupra construcției. Presiunea litostatică depinde de natura

rocilor situate deasupra construcției, de adîncimea la care se găsește tunelul sau galeria de mină, cît și de dimensiunea construcției.

Astfel în cazul rocilor cu duritate mică de pildă pămînturi curgătoare, pămînturi nisipoase cu apă, presiunea litostatică p este dată de relația:

$$p = \gamma\, a^2\, H, \tag{1}$$

unde γ este densitatea rocilor, a, lățimea construcției, H, adîncimea construcției.

În cazul general al rocilor friabile lipsite de coeziune s-au propus mai multe formule, pentru calculul presiunii litostatice:

$$p = \gamma a^2 H\left[1 - \frac{H}{a}\,\mathrm{tg}\,\varphi\,\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\right] \tag{2}$$

$$p = \gamma a^2 H\,\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \tag{3}$$

$$p = \frac{\gamma a^2}{\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}\left[1 + H e^{-\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}\right] \tag{4}$$

$$p = \frac{\gamma a^2}{2}\left(\frac{H\,\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}{H\,\mathrm{tg}\,\varphi + \frac{a}{2}\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} + \frac{\mathrm{tg}\,\varphi}{3}\right), \tag{5}$$

unde φ este unghiul de frecare interioară a rocilor după efectuarea construcției.

În cazul rocilor cu coeziune mare presiunea litostatică se calculează astfel:

$$p = \frac{\gamma\, a}{12\, k}\left(\frac{a^2}{4} - 12\, k^2\right), \tag{6}$$

unde k este coeficientul de coeziune al rocilor.

Pe baza formulelor propuse (empirice) de mai sus, se poate obține

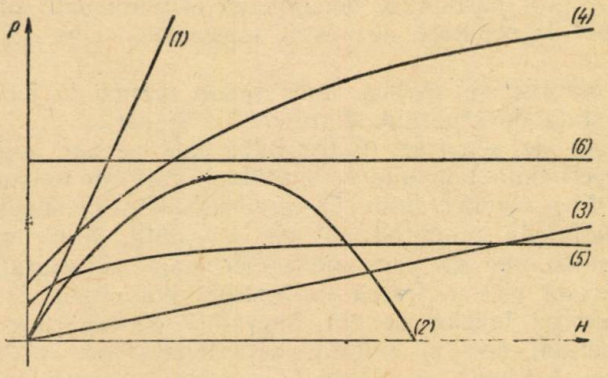


Fig. 3.

următorul grafic al relației dintre presiunea litostatică p și adîncimea H a construcției (*fig. 3*).

Repartizarea presiunii litostatice în diferitele puncte ale secțiunii transversale a acoperișului construcției miniere este dată de relația:

$$p = \frac{\gamma H}{2P}(a x - x^2), \qquad (7)$$

unde P este reacția rocilor laterale, iar x distanța variabilă a punctelor deschiderii (lățimii) lucrării miniere, între limitele 0 și a, la originea coordonatelor situată în punctul A (*fig. 4*).

Se observă că membrul al doilea al relației (7) este un trinom de gradul doi. Deci valoarea maximă a presiunii p se va obține pentru $x = \frac{a}{2}$, deci în punctul din mijlocul acoperișului.

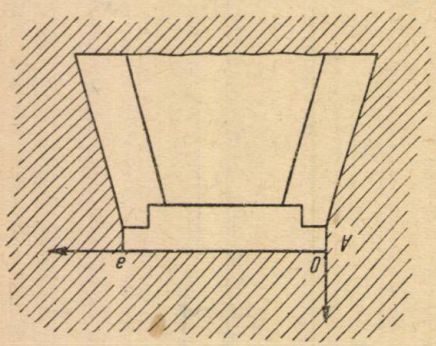


Fig. 4.

În acest punct valoarea lui p este

$$p = \frac{\gamma H a^2}{8P}.$$

Dar fenomenul fizic, cu aplicația cea mai largă în domeniul preparării minereului, este tensiunea superficială.

Metoda de preparare bazată pe fenomenul amintit este flotația, considerată azi drept cea mai importantă metodă de concentrare a minereurilor.

Flotația este un proces complex în care deosebim următoarele faze: amestecarea minereului măcinat cu apă, încît materialul solid să reprezinte 15—35% în greutate din tulbureala rezultată; aerarea tulburării fie prin agitare, fie prin injectare de aer, adăogarea unor cantități reduse de anumite substanțe, numite reactivi. Datorită reactivilor numiți spumanți se formează o spumă la suprafața tulburelii. Prin adăogarea reactivilor numiți colectori particulele de minereu util flotează, adică se adună în spumă și pot fi separate de restul mineralelor care rămîn în masa tulburelii.

Procesele descrise se explică, dacă ținem seamă de fenomenele care au loc la suprafața de separație dintre lichid și aer.

La suprafața de separare dintre tulbureală și aer acționează forțe de tensiune superficială tangente la suprafață, care au tendința să micșoreze suprafața liberă a lichidului. De asemenea stratul superficial posedă o energie superficială proporțională cu suprafața, fiind egală cu produsul dintre constanta de tensiune superficială și suprafață. Această energie superficială este o formă de energie potențială.

Prin producerea bulelor de aer, suprafața de separare lichid-aer se mărește considerabil deci și energia superficială are acum o valoare mult mai mare. În baza principiului al II-lea termodinamicii, energia potențială a unui sistem tinde întotdeauna către valoarea minimă. În consecință, pentru a menține o suprafață de separație lichid-aer mărită, este necesar să se micșoreze tensiunea superficială a lichidului. Micșo-

rarea tensiunii superficiale a apei se realizează prin adăugarea spumanților în cantități mici, ceea ce permite formarea și menținerea spumei.

Chiar fenomenele magnetice și electrice se aplică pentru concentrarea minereurilor.

Concentrarea magnetică se bazează pe diferența dintre permeabilitatea magnetică a diferitelor minerale. Unele minerale ca magnetitul, introdus într-un cîmp magnetic, se comportă asemănător cu o bucată

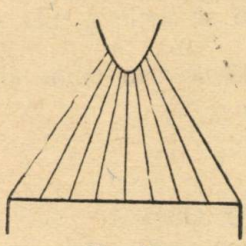


Fig. 5.

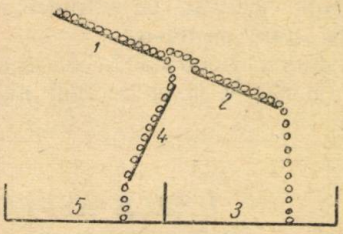


Fig. 6.

de fier moale, și anume, liniile de forță ale cîmpului magnetic se curbează și pătrund în interiorul minereului. Astfel de minerale au permeabilitatea magnetică mare. Dacă introducem într-un cîmp magnetic neomogen un mineral cu permeabilitatea mare, mineralul este atras către regiunile în care intensitatea cîmpului crește.

Pentru realizarea unui cîmp magnetic cu intensitate variabilă în spațiu, se folosesc magneți permanenți sau electromagneți cu cei doi poli magnetici de forme diferite.

În *figura 5* se vede un astfel de electromagnet avînd un pol plan, iar unul aproape ascuțit. În acest caz, intensitatea cîmpului magnetic crește de la polul plan, unde liniile de forță sînt mai rare, către polul ascuțit unde liniile de forță se îndesesc.

Concentrarea electrică a minereului poate fi de două feluri: concentrarea electrostatică bazată pe diferența de conductivitate a mineralelor și concentrarea dielectrică bazată pe diferența dintre constantele dielectrice ale minereurilor.

Un tip de separator electrostatic este cel arătat în *figura 6*. Minereul prin sfărîmare este adus pe placa 1 încărcată cu electricitate și avînd o înclinare care să permită materialului să alunece liber pe ea.

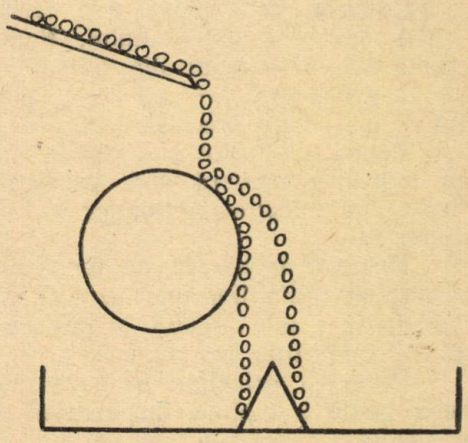


Fig. 7.

Placa 2, separată de prima printr-un anumit spațiu este încărcată cu electricitate de semn contrar. Mineralele conducătoare se încarcă repede pe placa 1 cu electricitate de același semn cu cea de pe placă și în consecință sînt respinse de aceasta fiind atrase în același timp de placa 2. Aceste

minerale vor sări prin urmare de pe placa 1 pe placa 2 fiind apoi colectate în cutia 3.

Mineralele izolatoare se încarcă mai greu cu electricitate și fiind respinse, din această cauză, cu o forță insuficientă continuă să alunece pe placa 1, cînd în spațiul liber dintre plăcile 1 și 2 și cu ajutorul plăcii 4 sînt dirijate în cutia 5.

Un alt tip de separator electrostatic folosește ca electrod un cilindru încărcat care se rotește (*fig. 7*). Particulele de minereu care se încarcă repede sînt respinse de cilindru, iar cele care se încarcă mai greu cad în jos pe lîngă cilindru.

Tensiunea electrică la care se încarcă plăcile sau cilindrul este de 10 000—25 000 V și chiar mai mult.

UNELE ASPECTE ALE FOLOSIRII IZOTOPILOR RADIOACTIVI ÎN MINERIT

VANȚA MARIA, Petroșani.

Izotopii radioactivi sînt utilizați, pe scară din ce în ce mai mare, în cele mai variate domenii ale activității omenești. În industrie pentru controlul și automatizarea proceselor de producție, în agricultură etc. Se realizează în felul acesta însemnate economii și se deschid posibilități noi pentru progresul tehnic.

În țara noastră, aplicațiile izotopilor radioactivi au început practic în 1955 și au căpătat o dezvoltare însemnată mai ales în sectorul industriei petroliere extractive.

Folosind experiența acumulată în industria petroliferă, carotajul radioactiv (cercetarea geologiei subsolului cu ajutorul radiațiilor) se extinde și la lucrări de exploatare a cărbunelui. El a fost aplicat în regiunile carbonifere din Valea Jiului, Banat și se prevede introducerea lui la explorarea cărbunelui din Oltenia. Principalele avantaje ale carotajului radioactiv constă în reducerea prețului de cost cu circa 30—50% și într-o mai mare precizie de ordin geologic.

Pentru controlul și reglarea automată a diferitelor instalații folosite în industria minieră s-au proiectat și experimentat diferite dispozitive bazate pe folosirea izotopilor radioactivi. Acestea pot fi grupate în trei categorii.

Dispozitive bazate pe fenomenul de absorbție, respectiv măsurarea absorbției radiațiilor unor izotopi de către materialele studiate. Absorbția radiațiilor γ este funcție de grosimea materialului străbătut, de densitate și de compoziția lui chimică.

Pe acest principiu se bazează dispozitivele de numărare a vagonetelor goale sau pline, dispozitivul de supraveghere și control al umplerii complete a vagoanelor cu cărbuni. Dispozitive asemănătoare se utilizează în supravegherea și dirijarea transportului subteran. Astfel, pentru indicarea poziției locomotivei în camera dispecerului, se fixează pe locomotivă o sursă de radiații, iar într-un anumit punct al drumului, un contor prevăzut cu o sursă de curent care declanșează un semnal luminos pe pupitrul de comandă al dispecerului.

Deoarece absorbția este funcție de grosimea materialului, metoda amintită stă la baza construirii unor serii de dispozitive pentru măsurarea debitelor benzilor de transport a cărbunelui.

O problemă importantă este determinarea conținutului în cenușă a cărbunelui. Dispozitivul radiometric proiectat folosește dependența coeficientului de absorbție al radiațiilor γ de numărul atomic al elementului absorbant. În cazul unor energii a radiațiilor mai mici de 0,1 *MeV*, coeficientul de absorbție crește rapid odată cu numărul atomic. Deoarece cea mai mare parte a cărbunilor este formată din elemente cu numere atomice mici (*H, C, N, O*), iar în structura cenușii se găsesc elemente cu numere atomice mijlocii (*Al, Si, Mg, Ca, Fe*), radiațiile γ vor fi absorbite cu atît mai puternic cu cît cărbunii vor conține mai multe elemente cu număr atomic mai mare, adică cu cît va fi mai mare conținutul în cenușă din cărbune.

Dispozitivul de măsurare este format dintr-o sursă de radiații γ slabe, într-un înveliș de plumb, care iradiază proba de cărbune și, dintr-un detector de radiații γ.

Tot pe principiul absorbției radiațiilor se bazează construcția dispozitivului pentru analiza rapidă a aerului de mină. Acest dispozitiv este format din două camere dintre care una umplută cu aer, iar cealaltă umplută cu aerul de mină de analizat. În fiecare din ele se găsește cîte o sursă de radiații α. Măsurîndu-se diferența de absorbție a radiațiilor în cele două camere se poate determina compoziția aerului de mină. Dacă această diferență depășește o anumită limită se declanșează un dispozitiv de semnalizare.

Una din problemele de primă importanță a industriei carbonifere este mecanizarea separării sterilului din cărbunele extras.

Institutul de combustibili fosili al Academiei de Știință a U.R.S.S. a elaborat o metodă radiometrică de separare a cărbunilor de bucățile de steril. Metoda se bazează pe variația absorbției radiațiilor nucleare de către cărbune în funcție de conținutul de impurități minerale din el. Pentru aceasta, există dispozitive care împart fluxul de cărbune într-o serie de canale în care bucățile se mișcă una după alta. La sfîrșitul fiecărui canal este fixată o sursă de radiații (tuliu 170), ale cărui radiații sînt interceptate de bucata în mișcare. La trecerea unei bucăți de steril intensitatea radiațiilor scade sub o valoare stabilită și un releu electronic cu acțiunea rapidă, conectează electromagnetul unei lopeți care aruncă bucata de steril într-un recipient special.

Cercetările au arătat că se pot separa chiar bucăți la care conținutul în cenușă diferă cu aproximativ 5%. În felul acesta separatorul radiometric poate fi folosit nu numai pentru separarea sterilului de cărbune, ci și pentru separarea bucăților de cărbuni după o valoare dată a conținutului în cenușă cu obținerea a trei produse: concentrat, produs industrial și steril.

Un al doilea grup de dispozitive se bazează pe fenomenul de reflexie al radiațiilor unor izotopi. Cu ajutorul reflexiei se pot măsura grosimile pereților conductelor și grosimile tubajelor sondelor. Se poate determina de asemenea umiditatea cărbunilor și rocilor.

Al treilea fel de dispozitive folosesc izotopi radioactivi ca indicatori. De exemplu marcînd metanul cu un izotop, radioactiv gazos, într-o

gură de mină se poate determina momentul și distanța pînă unde metanul a putut migra și se pot trage concluzii asupra modului de înmagazinare în deplasare a metanului în zăcămînt.

În timpul operațiilor de împușcare din mină, la care se folosește dinamită sau alți explozivi, se observă uneori cazuri de explodare incompletă a încărcăturii găurilor de mină. Aceasta poate duce la accidente nu numai în frontul de lucru, dar și la consumatori, la care împreună cu cărbunii pot ajunge cartușe neexplodate.

Pentru evitarea acestor accidente se poate folosi cu bune rezultate marcarea radioactivă a tuturor cartușelor. Marcarea se realizează introducînd în cartuș o anumită cantitate de substanță radioactivă, de preferință Sb 124, întrucît emite radiații penetrante și are timpul de înjumătățire acceptabil — de 60 zile. Substanța radioactivă se poate aplica chiar pe partea exterioară a cartușului, pe inelul de marcare.

Cartușele neexplodate pot fi apoi detectate cu ajutorul unui aparat radiometric în frontul de lucru pe banda transportorului sau în verigile următoare ale circuitului tehnologic din mină, din uzina de preparare sau chiar la consumator.

Realizările descrise reprezintă un prim pas al aplicațiilor izotopilor radioactivi în industria minieră. Ne putem aștepta, ca în viitorul apropiat, munca grea a minerului să fie mult ușurată datorită extinderii folosirii izotopilor radioactivi.

PENTRU CERCURILE DE ELEVI

NOȚIUNI INTRODUCTIVE ASUPRA SPAȚIILOR METRICE

ILIE CONSTANTINESCU, inginer, Petroșani

1. În cele ce urmează vom căuta treptat cu exemple simple să înțelegem noțiunea de spațiu metric, cum și mulțimile de puncte într-un spațiu metric.

Dreapta numerică reală, este cunoscută elevilor care cunosc astfel și *corespondența biunivocă* între numerele reale și o axă.

Fie A_1 de abscisă x_1 și A_2 de abscisă x_2. Se știe că distanța între punctele A_1 și A_2 este

$$\overline{A_1A_2} = |x_2 - x_1|$$

Să notăm $\varrho(A_1, A_2) = |x_2 - x_1|$ (1)

Se vede imediat că $\varrho(A_1, A_2)$ este un număr real pozitiv, egal cu zero numai cînd $x_1 = x_2$, adică $A_1 \equiv A_2$.

De asemenea, $\varrho(A_1, A_2) = |x_2 - x_1| = |x_1 - x_2| = \varrho(A_2, A_1)$.

Iarăși, $\varrho(A_1, A_2) = |x_2 - x_1|$; $\varrho(A_2, A_3) = |x_3 - x_2|$;

$$\varrho(A_1, A_3) = |x_3 - x_1| = |x_3 - x_2 + x_2 - x_1| \leqslant |x_3 - x_2| + |x_2 - x_1| = \varrho(A_2, A_3) + \varrho(A_1, A_2),$$

căci modulul sumei e cel mult egal cu suma modulelor.

2. Fie P un plan cu două axe rectangulare ox și oy.

Se știe că între mulțimea perechilor ordonate de numere reale (x, y) și punctele M ale acestui plan, există o corespondență biunivocă.

Fie M_1 de coordonate (x_1, y_1) și M_2 de coordonate (x_2, y_2).

Să notăm cu

$$\varrho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (2)$$

Se știe că formula (2) exprimă distanța între punctele M_1 și M_2.

Distanța între două puncte este un număr real pozitiv, nul numai cînd punctele M_1 și M_2 coincid, același și între M_1 și M_2 ca și între M_2 și M_1.

De asemenea, luînd trei puncte M_1, M_2, M_3, formînd un triunghi, lungimea oricărei laturi (distanța între două puncte) este inferioară sumei lungimilor celorlalte două laturi, egală numai în cazul că cele trei puncte sînt colineare.

Avem deci:

$\varrho(M_1, M_2) \geqslant 0$; iar $\varrho(M_1, M_2) = 0$ dacă și numai dacă $M_1 \equiv M_2$;

$\varrho(M_1, M_2) = \varrho(M_2, M_1)$; $\varrho(M_1, M_3) \leqslant \varrho(M_1, M_2) + \varrho(M_2, M_3)$.

3. În același plan să notăm cu

$$\varrho(M_1, M_2) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| \qquad (3)$$

Se vede că $\varrho(M_1, M_2)$ reprezintă lungimea drumului $M_1 NM_2$, adică drumul parcurs dacă deplasarea nu ar fi posibilă decît paralel cu axele.

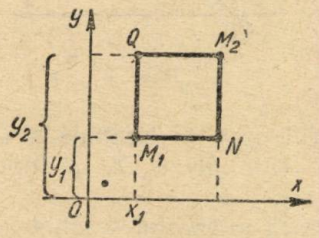


Fig. 1.

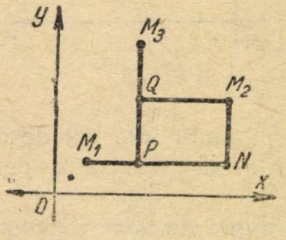


Fig. 2.

$\varrho(M_1, M_2)$ este un număr real pozitiv ca sumă a două lungimi M_1N și NM_2.

$\varrho(M_1, M_2) = 0$ dacă M_1N și NM_2 sînt nule adică $M_1 \equiv M_2$.

$\varrho(M_1, M_2) = \varrho(M_2, M_1)$ căci $M_1N + NM_2 = M_2Q + QM_1$. (fig. 1)

În fine avem:

$$\varrho(M_1, M_2) = M_1N + NN_2;\ \varrho(M_1, M_3) = M_1P + PM_3;$$
$$\varrho(M_2, M_3) = M_2Q + QM_3. \text{ (fig. 2)}$$

Dar $PQ = NM_2$; $QM_2 = PN$, deci:

$$\varrho(M_1, M_3) = M_1P + PM_3 < M_1P + PM_3 + QM_2 + PN =$$
$$= M_1P + PN + PQ + QM_3 + QM_2 =$$
$$= M_1N + NM_2 + QM_2 + QM_3 = \varrho(M_1, M_2) + \varrho(M_2, M_3)$$

Adică : $\varrho(M_1, M_3) \leqslant \varrho(M_1, M_2) + \varrho(M_2, M_3)$.

Voi spune că și $\varrho(M_1, M_3)$ definit de (3) este o distanță în planul P.

4. În general fie M o mulțime de elemente x, și fie x_1, x_2 două elemente oarecare ale lui M.

Dacă găsim o corespondență oarecare (o funcție), cu ajutorul căreia oricăror două elemente x_1 și x_2 să le corespundă un număr real $\varrho(x_1, x_2)$ și numai unul, cu proprietățile

1. $\varrho(x_1, x_2) \geqslant 0$; $\varrho(x_1, x_2) = 0$ dacă și numai dacă $x_1 = x_2$
2. $\varrho(x_1, x) = \varrho(x_2, x_1)$ și
3. $\varrho(x_1, x_3) \leqslant \varrho(x_1, x_2) + \varrho(x_2, x_3)$,

vom spune că am definit o *distanță* în mulțimea M. Orice mulțime în care avem definită o distanță se numește *spațiu metric*.

Dreapta numerică reală în care am definit distanța cu (1) este deci un spațiu metric.

Planul P în care am definit distanța fie cu (2), fie cu (3) este un spațiu metric.

5. Fie dreapta numerică R și M_0 un punct de abscisă x_0, un punct

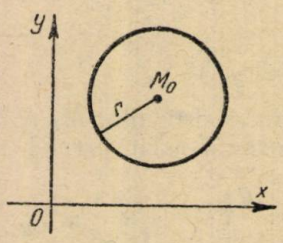


Fig. 3.

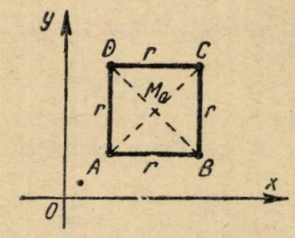


Fig. 4.

al ei. Vom numi interval deschis cu centrul în x_0 și lungime r, mulțimea punctelor M de abscisă x, pentru care $\varrho(M_0, M) < r$, ϱ fiind definit de (1).

Din punct de vedere geometric se vede că intervalul deschis cu centrul în M_0 și lungime r, este mulțimea punctelor cuprinse între A și B.

Fie planul P. Vom numi cerc deschis cu centrul în M_0 și rază r, mulțimea punctelor pentru care $\varrho(M_1, M_2) < r$. (fig. 3)

Dacă ϱ este definit de (2) atunci cercul deschis cu centrul M_0 și rază r, este mulțimea punctelor din cercul geometric cu centrul în M_0 și Rază R.

Dacă ϱ e definit de (3) atunci cercul deschis cu centrul în M_0 și rază r e format din punctele interioare ale pătratului ABCD de latură r, a cărui diagonale se întîlnesc în M_0. (fig. 4)

6. Fie M o parte a dreptei numerice reale R și M_0 $(x_0) \in R$.

Dacă orice interval deschis cu centrul în M_0, oricare ar fi r, conține cel puțin un punct al lui M, M_0 se numește *punct aderent* mulțimei M.

De exemplu fie M mulțimea compusă din punctele între A (1) și B (2). Notăm $M = (A, B)$. Fie $P\left(\frac{3}{4}\right)$. Este el punct aderent mulțimii M? (fig. 5)

Răspunsul este negativ căci toate intervalele cu centrul în P și lungimea mai mică ca $\frac{1}{4}$, nu conțin nici un punct între A și B.

Fie $Q\left(\frac{3}{2}\right)$. Este un punct aderent mulțimii M?

Evident că da, orice interval cu centru în Q conține puncte între A și B.

Este punctul A punct aderent? El nu aparține mulțimii, dar orice

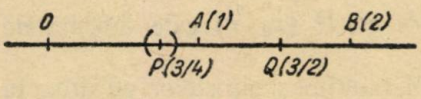


Fig. 5.

interval deschis cu centrul în A, oricare ar fi lungimea lui conține în partea dreaptă puncte între A și B.

Fie M mulțimea formată din punctele între A și B și originea, adică $M\,(A, B) \cup \{0\}$.

Este originea un punct aderent al noii mulțimi M?

Este adevărat că nici un interval cu centrul în 0 de lungime mai mică ca 1 nu conține puncte cuprinse între A și B, dar îl conține pe 0 care este punct al lui M și răspunsul este afirmativ.

Observăm din exemplele date că orice punct al unei mulțimi este un punct aderent al său, dar că și puncte care nu aparțin mulțimii (exemplu A sau B sînt tot puncte aderente.

Fie planul P și ϱ definit cu relația (2) sau (3). Fie M_0 un punct al lui P și D o mulțime de puncte din P.

Dacă orice cerc deschis cu centrul în M_0 și raza r oricît de mică ar fi, conține cel puțin un punct al lui D, vom spune că punctul M_0 este aderent mulțimii D.

7. În general fie M un spațiu metric, adică o mulțime în care s-a definit o distanță ϱ.

Vom numi *sferă deschisă* cu centrul într-un punct x_0 și rază r, mulțimea elementelor x, pentru care $\varrho\ (x_0, x) < r$.

În cazul dreptei numerice reale R, sfera deschisă este intervalul deschis, iar în cazul planului P, *cercul deschis*.

Dacă N este o submulțime a lui M și $x_0 \in M$, x_0 este aderent lui N dacă orice sferă deschisă cu centrul în x_0 conține cel puțin un punct al lui N.

8. Fie M o mulțime de puncte pe dreaptă sau în plan. Mulțimea punctelor aderente lui M poartă numele de *aderență* sau *închiderea* lui M și se notează $\overline{M}$.

Dacă $M = \overline{M}$, se zice că M este o mulțime *închisă*.

De exemplu mulțimea punctelor cuprinse între A (1) și B (2) pe o dreaptă numerică reală nu este o mulțime închisă căci

$$\overline{(A\,;\,B)} = (A,\,B) \cup \{A,\,B\} \supset (A,\,B)$$

adică aderența mulțimii (A, B) conține pe lîngă punctele cuprinse între A și B și pe A și B.

9. Să notăm cu $I\ (x_0, r)$ un interval deschis pe dreapta R cu centrul în x_0 și raza r și cu $I^0\ (x_0, r)$ același interval fără punctul x_0.

Fie M o mulțime din R. Dacă oricare ar fi r, $I^0\ (x, y)$ conține cel puțin un punct al lui M, vom spune că x_0 este un *punct de acumulare* al lui M.

Scrim lucrul acesta

$$M \cap I^0(x_0, r) \neq \emptyset \text{ (mulțimea vidă) oricare ar fi } r,$$

adică intersecția lui M cu $I^0\ (x_0, r)$ este diferită de mulțimea vidă, oricare ar fi r.

Fie de exemplu M mulțimea punctelor pe dreaptă de abscisă rațională și $M_0\ (x_0)$ un punct de abscisă irațională.

Cum știm că orice număr irațional este limita unui șir convergent de numere raționale, oricît de mic ar fi r există un număr rațional $\frac{p}{q}$ astfel ca

$$x_0 - r < \frac{p}{q} < x_0 + r$$

adică $M \cap I\ (x_0, r) \neq \emptyset$ și x_0 e un punct de acumulare a lui M.

Nu orice punct aderent este un punct de acumulare.

Să luăm de exemplu exemplul care l-am mai considerat

$$M = (A, B) \cup \{0\}.$$

0 este punct aderent dar nu este punct de acumulare.

Definiții analoge se pot lua și în plan folosind cercul deschis unde ϱ este dat de (2) sau (3).

10. Fie M o mulțime a lui R și $M_0\ (x_0) \in M$

Dacă $I\ (x, r) \subset M$ pentru cel puțin un r, vom spune că M_0 este un *punct interior* al lui M.

De exemplu fie A (1), B (2) și $M_0\left(\frac{11}{10}\right)$. Dacă $M = (A, B)$, punctul $M_0\left(\frac{11}{10}\right)$ este interior căci, $I\left(\frac{11}{10}, \frac{1}{100}\right) \subset M$.

Mulțimea punctelor interioare formează *interiorul* mulțimii și se notează cu int M.

Dacă toate punctele unei mulțimi sînt puncte interioare, adică dacă $M = int\ M$, vom spune că M e o mulțime *deschisă*.

Definiții analoge se pot da în plan folosind cercul deschis.

Exemple de acest fel se pot da multe și propunem acest lucru cercurilor de elevi. În acest fel cu exemple pe dreaptă și în plan se pot lămuri proprietăți ale spațiilor metrice, definind chiar distanța în moduri diferite și altele decît exemplele date de noi

ASUPRA UNEI INEGALITĂȚI TRIGONOMETRICE

Este cunoscută inegalitatea

$$\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \leqslant \frac{1}{8}$$

A, B, C fiind unghiurile unui triunghi oarecare.

Dăm mai jos și alte demonstrații.

1. Dacă triunghiul ABC este dreptunghic sau obtuzunghic:

$$\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \leqslant 0$$

(avînd egalitate dacă ABC este dreptunghic) și deci cu atît mai mult

$$\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \leqslant \frac{1}{8}$$

Așadar, vom considera cazul cînd ABC este un triunghi ascuțitunghic.

Fie H ortocentrul, O centrul cercului circumscris triunghiului ABC, A' mijlocul lui BC, H_a piciorul înălțimii din A și H'_a punctul de intersecție al înălțimii din A cu cercul ABC.

Se știe că $AH = 2OA'$ și că $HH_a = H_aH'_a$.

Avem: $AH = 2 \cdot OA' = 2R \cos A$, analog $BH = 2R \cos B$ și

$$HH_a = BH \cdot \sin (HBH_a) = 2R \cos B \cdot \cos C$$

unde R este raza cercului ABC.

Dacă notăm cu ϱ puterea lui H față de cercul ABC, avem:

$$\varrho = AH \cdot HH'_a = AH \cdot 2HH_a = 2R \cos A \cdot 4R \cos B \cos C = 8R^2 \cos A \cos B \cos C.$$

Dacă H nu coincide cu O, adică dacă ABC nu este un triunghi echilateral, avem:

$$\varrho = R^2 - OH^2 < R^2, \quad \text{sau} \quad 8R^2 \cos A \cos B \cos C < R^2$$

sau

$$\cos A \cos B \cos C < \frac{1}{8}, \quad (R \neq 0)$$

Dacă H coincide cu O, adică dacă triunghiul ABC este echilateral, avem

$$\varrho = R^2 - OH^2 = R^2, \text{ sau } 8R^2 \cos A \cos B \cos C = R^2, \text{ sau } \cos A \cos B \cos C = \frac{1}{8}.$$

Egalitatea are loc numai în cazul cînd triunghiul ABC este echilateral.

2. Avem: $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ și analogele.

Înmulțim membru cu membru inegalitățile evidente:

$$a^4 \geqslant a^4 - (b^2 - c^2)^2 ; \; b^4 \geqslant b^4 - (c^2 - a^2)^2 ; \; c^4 \geqslant c^4 - (a^2 - b^2)^2$$

și apoi extragem rădăcina pătrată din ambii membri. Obținem:

$$(b^2 + c^2 - a^2)\,(c^2 + a^2 - b^2)\,(a^2 + b^2 - c^2) \leqslant a^2 b^2 c^2,$$

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \cdot \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \leqslant \frac{1}{8}.$$

Considerînd acum că a, b, c sînt laturile unui triunghi ABC inegalitatea precedentă se scrie: $\cos A \cos B \cos C \leqslant \frac{1}{8}$, avînd egalitate numai cînd $a = b = c$ adică atunci cînd triunghiul ABC este echilateral.

Albu Toma, cl. XI, Petroșani

ASUPRA UNEI TEOREME A LUI TRAIAN LALESCU

În Gazeta matematică nr. 1 din 1938 pag. 487 *Traian Lalescu* enunță următoarea teoremă:

„Fiind dat un polinom $A(x)$ de gradul al treilea, există totdeauna un polinom de gradul al treilea $F(x)$ și numai unul singur care verifică relația

$F^2(x) = A(x) + x^4 R(x)$ unde $R(x)$ este un polinom de gradul al doilea care trebuie determinat.

Iată demonstrația: Fie $F(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ și $R(x) = px^2 + qx + r$

Se observă din enunț că polinomul $R(x)$ este de gradul al doilea și că va fi determinat din condiția ca membrul al doilea din enunțul teoremei să fie un patrat perfect.

Dacă $A(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ atunci trecînd la identificarea coefiicenților celor doi membri ai relației din enunțul teoremei se obțin relațiile:

$$a^2 = p ; \; 2ab = q ; \; b^2 + 2ac = r, \tag{1}$$

$$d^2 = a_3 ; \; 2ad = a_2 ; \; 2bd + c^2 = a_1 ; \; 2ad + 2bc = a_0 \tag{2}$$

din relațiile (2) determinăm pe a, b, c, d, din aproape în aproape abstracție făcînd de un factor constant $\varepsilon = \pm 1$, *deci* $F(x)$ este determinat în mod unic. Din relațiile (1) se determină p, q, r și determinăm astfel și polinomul $R(x)$

Iată acum un enunț generalizat:

Fie $A(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, un polinom de gradul n. Există totdeauna un polinom de gradul n, $F(x)$ și numai unul astfel încît să avem relația: $F^2(x) = A(x) + x^{n+1} R(x)$, unde $R(x)$ este un polinom de gradul $(n - 1)$

Relația din enunțul generalizat se mai poate scrie:

$$\sum_{i=0}^{n} b_i^2 x^{2i} + 2 \sum_{\substack{i,j=0 \\ i \neq j}}^{n} b_i b_j x^{i+j} = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^{n+i+1} \qquad (3)$$

egalînd coeficienții din această relație obținem relațiile:

$$b_0^2 = a_0,\ 2b_0b_1 = a_1,\ 2b_0b_2 + b_1^2 = a_2, \ldots 2(b_0b_n + b_1b_{n-1} + \ldots) = a_n \qquad (4)$$

$$2(b_1b_n + b_2b_{n-1} + b_3b_{n-2} + \ldots) = c_0;$$

$$2(b_2b_n + b_3b_{n-1} + b_4b_{n-2} + \ldots) = c_1; \ldots b_n^2 = c_{n-1} \qquad (5)$$

Din relațiile (4) se determină (abstracție făcînd de factorul constant $\varepsilon = \pm 1$), coeficienții polinomului $F(x)$:

$$b_0,\ b_1,\ b_2, \ldots b_n.$$

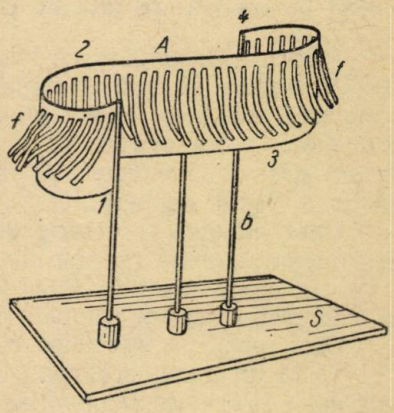
Torsan Ilie, absolvent Alba-Iulia

Observare: Din relațiile (5) s-ar determina apoi și coeficienții polinomului R (x), c^1, c^0, ...pentru ca cele două polinoame $F(x)$ și $R(x)$ să fie determinate; calculele sînt însă laborioase întrucît duc la sisteme de grad superior.

SĂ CONSTRUIM PRIN MIJLOACE PROPRII MODELE ȘI APARATE DE FIZICĂ

DISPOZITIV PENTRU DEMONSTRAREA DISTRIBUȚIEI ELECTRICITĂȚII PE CONDUCTORI

Dispozitivul din figura alăturată are drept scop să arate că electricitatea se răspîndește la suprafața conductorilor, iar pe suprafețele curbe, electricitatea se răspîndește pe partea convexă. Pentru construire se dau următoarele detalii:



O placă din aluminium (A) de grosime 0,5—1 mm se curbează după cum se arată în figură.

Curburile 1—2 și 3—4 pot fi circulare sau de alte forme (eliptice).

Foițele (f) sînt de staniol lipite la partea superioară și au rolul de electroscop. Suportul (S) este din lemn sau metal, iar barele (b) din lemn sau metal izolat.

Se încarcă placa (A) cu electricitate de la o mașină electrostatică Wimshurst. Ce se observă? Foițele de staniol se vor depărta pe partea convexă a curburilor și vor rămîne lipite pe partea concavă. Pe porțiunea plană 2—3 foițele se vor depărta și pe o parte și cealaltă a plăcii. Dacă părțile curbate au raze de curbură diferite, atunci pe porțiunile cu rază de curbură mai mică (ascuțite) foițele se vor depărta mai mult.

D. Atanasiu, Petroșani

PROBLEME REZOLVATE

Problema 4345

Se dă un cub $ABCDA'B'C'D'$.

a) *Să se determine locul geometric al mijloacelor segmentelor xy, unde x este un punct arbitrar al segmentului AC și y un punct arbitrar al segmentului $B'D'$.*

b) *Să se determine locul geometric al punctelor z de pe segmentul xy, care satisfac relația: $zy=2xz$.*

(A II-a olimpiadă internațională de matematică)

Soluție dată de *Ion Tomescu*, absolvent Ploiești. a) Fie M mijlocul segmentului xy. Cînd x este fix pe AC și y este mobil pe $B'D'$, M descrie un segment paralel cu $B'D'$ și egal cu jumătate din $B'D'$ (linia mijlocie a triunghiului $xB'D'$) care se găsește la egală distanță între planele $(ABCD)$ și $(A'B'C'D')$.

Deci, pentru fiecare poziție a lui x pe AC locul lui M este un segment paralel cu $B'D'$ și egal cu $\frac{1}{2}$ $B'D'$. Cînd x alunecă pe AC, segmentul loc geometric alunecă paralel cu el însuși, rămînînd la egală distanță de planele $(ABCD)$ și $(A'B'C'D')$, deci, determină o porțiune dintr-un plan situat la egală distanță de planele bazelor $ABCD$ și $A'B'C'D'$.

Pentru a determina forma acestei porțiuni de plan considerăm pozițiile extreme ale lui x: cînd x se află în A, locul este segmentul FE, iar cînd x se află în C, locul este segmentul GH (E,F,G,H sînt respectiv centrele pătratelor $AA'DD'$; $AA'BB'$; $BB'CC'$; $CC'DD'$).

Se verifică ușor că punctele E, F, G, H formează un pătrat al cărui raport de asemănare față de pătratele de bază este de $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Pentru a demonstra că locul geometric este toată suprafața pătratului $EFGH$ trebuie să mai demonstrăm că această suprafață este densă sau compactă, adică nu există puncte ale sale care să nu satisfacă condițiile problemei, adică oricare ar fi punctul N pe suprafața pătratului $EFGH$ se pot găsi două puncte P,Q respectiv pe diagonala AC și $B'D'$ așa ca N să fie mijlocul segmentului PQ.

Cînd punctul Q descrie diagonala $B'D'$ simetricul lui Q față de N descrie un segment paralel cu $B'D'$ și situat în planul $(ABCD)$ N găsindu-se la egală distanță față de bazele cubului. Rezultă că P se găsește la intersecția acestui segment loc geometric cu diagonala AC.

Deci, pozițiile punctelor P,Q se determină astfel:

Se ia un punct arbitrar Q', pe $B'D'$, se construiește simetricul lui Q' față de N și prin acest punct se duce paralela la $B'D'$ care taie pe AC în P. Dreapta NP taie pe $B'D'$ în Q. Deci, am găsit două puncte P și Q (P pe AC și Q pe $B'D'$) așa ca N să fie mijlocul segmentului PQ și cu aceasta și problema continuității locului e rezolvată.

b) În caz că $zy=2xz$ locul geometric al lui z este suprafața unui dreptunghi ale cărui vîrfuri E', F', G', H' interioare segmentelor AD', AB', CB' CD' le împart în raportul $\frac{1}{3}$, adică

$$\frac{AE'}{AD'} = \frac{AF'}{AB'} = \frac{CG'}{CB'} = \frac{CH'}{CD'} = \frac{1}{3}$$

Aceste puncte se obțin cînd x se află în A și C și y se află în B' și D'. Se demonstrează că suprafața acestui pătrat este compactă găsind două puncte P și Q colineare cu z în mod analog ca la pct. a), așa ca $\frac{Pz}{zQ} = \frac{1}{2}$ (P pe AC și Q pe $B'D'$) pentru un z ales arbitrar în planul $E'F'G'H'$.

Observări. Problema se poate generaliza înlocuind cubul cu o prizmă oblică patrulateră $ABCDA'B'C'D'$, x fiind un punct arbitrar al segmentului AC și y un punct arbitrar al segmentului $B'D'$.

Să se afle în acest caz, locul geometric al punctului z de pe segmentul xy așa ca $zy = k.xz$ (k este un coeficient real dat).

Printr-un raționament analog se găsește că locul geometric al punctului z este porțiunea de plan cuprinsă în interiorul patrulaterului $EFGH$, unde E, F, G, H se găsește respectiv pe AD', AB', CB', CD' și satisfac relațiile:

$$\frac{D'E}{EA} = \frac{B'F}{FA} = \frac{B'G}{GC} = \frac{D'H}{HC} = k.$$

Se demonstrează că această porțiune de plan este densă (toate punctele sale satisfac condițiile problemei) găsind două puncte, P pe AC și Q pe $B'D'$ colineare cu un punct arbitrar z din planul $EFGH$, așa ca $\frac{Qz}{zP} = k$. Pentru a găsi cele două puncte se intersectează diagonala AC cu paralela dusă la BD prin punctul care este omoteticul unui punct arbitrar al segmentului $B'D'$, față de centrul z de omotetie și raport de omotetie $\frac{1}{k}$.

Patrulaterul $EFGH$ este paralelogram căci $FG = EH \frac{k}{k+1} AC$ și $EF = GH = \frac{k}{k+1} BD$, iar $\sphericalangle GHE = \sphericalangle \alpha$ (unde α este unghiul diagonalelor AC și BD) ca unghiuri cu laturile paralele.

$$A_{EFGH} = GH \cdot HE \cdot \sin\alpha$$

$$A_{ABCD} = A_{A'B'C'D'} = \frac{1}{2} BD \cdot AC \sin\alpha$$

Dar, $GH \cdot HE = \frac{k^2}{(k+1)^2} \cdot BD \cdot AC$, deci, $A_{EFGH} = \frac{2k^2}{(k+1)^2} A_{ABCD}$.

Deci, aria paralelogramului $EFGH$ este $\frac{2k^2}{(k+1)^2}$ din aria bazei prismei oblice patrulatere.

Problema 4422

O rezistență de 80 Ω și una de 20 Ω legate în paralel sînt scufundate într-o baie de 5 kg apă la 20°C. La bornele rezistențelor se aplică o tensiune de 220 V. Se cere:

a) *Care este intensitatea curentului ce trece prin fiecare rezistență?* b) *Ce putere absorb de la rețea cele două rezistențe?* c) *Cît durează încălzirea apei de la 20°C la 35°C?* d) *Cu cît crește această durată, dacă la început se introduce în apă 1 kg de gheață avînd temperatura de 0°C? Se neglijează capacitatea calorică a vasului și toate pierderile de căldură. Se dă căldura de topire a gheții; L=80 cal/g.*

(La admiterea în Inst. Politehnic, București, 1960)

Soluție dată de *N. Popa*, elev Focșani. a) Avem: $80I_1=220$ și $20I_2=220$. Deci:

$$I_1 = 2{,}75\ A \text{ și } I_2 = 11A.$$

b) $P_1 = I_1U = 2{,}75A \cdot 220V = 605W$, $P_2 = I_2U = 11A \cdot 220V = 2420W$.

c) Avem; $Q_{ad} = 0{,}24\,t\ (605 + 2420)$ cal $= 726\,t$

$$Q_{abs} = 5000\,g \cdot \frac{1\ cal}{g \cdot grad} \cdot 15\ grad = 75000 \text{ Deci:}$$

$$726\,t = 75000;\ t = \frac{75000}{726} \approx 103{,}3 \text{ secunde}$$

d) $$Q_{abs} = 1000\,g \cdot \frac{80\,cal}{g} + 1000\,g\,\frac{1\,cal}{g \cdot grad} \cdot 35\ gr + 75000 =$$

$$= 80000 + 35000 + 75000 = 190000 \text{ cal.}$$

$$726\,t = 190000;\ t = \frac{190000}{726} = 261{,}7 \text{ secunde.}$$

Deci durata crește cu 158,4 secunde.

Problema 4423

Să se determine un număr natural care îndeplinește următoarele condiții: a) nu are decît factorii primii 2 și 3; b) suma tuturor divizorilor săi este egală cu 28; c) suma pătratelor acelorași divizori este egală cu 210.

(La admiterea în Fac. matem-fizică, București, 1960)

Soluția I dată de *N. Popa*, elev Focșani — a) Numărul avînd ca factori primi pe 2 și 3 este $N=2^{\alpha} \cdot 3^{\beta}$, unde α și β sînt numere naturale.

b) Suma tuturor divizorilor numărului N este:

$$\frac{(2^{\alpha+1} - 1)(3^{\beta+1} - 1)}{2} = 28$$

sau:

$$(2^{\alpha+1} - 1)(3^{\beta+1} - 1) = 56.$$

c) Suma pătratelor acelorași divizori este:

$$\frac{(2^{2\alpha+2} - 1)(3^{2\beta+2} - 1)}{24} = 210$$

sau:

$$(2^{2\alpha+2} - 1)(3^{2\beta+2} - 1) = 5040.$$

Avem deci: $(2^{\alpha+1}-1)(3^{\beta+1}-1)=56$ și $(2^{2\alpha+2}-1)(3^{2\beta+2}-1)=5.040$, sau: $(2^{\alpha+1}-1)(3^{\beta+1}-1)=56$ și $(2^{\alpha+1}+1)(3^{\beta+1}+1)=90$, sau: $2^{\alpha+1}\cdot 3^{\beta+1}-2^{\alpha+1}-3^{\beta+1}+1=56$ și $2^{\alpha+1}\cdot 3^{\beta+1}+3^{\beta+1}+2^{\alpha+1}+1=90$.

Adunînd găsim: $2^{\alpha+1}\cdot 3^{\beta+1}=72$, iar scăzînd găsim: $2^{\alpha+1}+3^{\beta+1}=17$. De aici deducem: $2^{\alpha+1}=8$ și $3^{\beta+1}=9$ sau: $\alpha=2$ și $\beta=1$. Deci $N=2^2\cdot 3=12$.

Soluția II dată de *V. Olteanu*, elev București — Numărul căutat are forma $N=2^m3^n$, iar divizorii săi sînt: 2^m3^n, 2^m3^{n-1}, 2^m3^{n-2}, ..., 2^m3, 2^m; $2^{m-1}3^n$, $2^{m-1}3^{n-1}$, ..., $2^{m-1}3$, 2^{m-1}; ...; 2^23^n, $2\,3^{n-1}$, ..., 2^23, 2^2; $2\cdot 3^n$, $2\cdot 3^{n-1}$, ..., $2\cdot 3$, 2; 3^n, 3^{n-1}, ..., 3, 1. Vom avea relațiile:

$$(2^m3^n+2^m3^{n-1}+\ldots+2^m)+(2^{m-1}3^n+2^{m-1}3^{n-1}+\ldots+2^{m-1})+\ldots$$
$$+(3^n+3^{n-1}+\ldots+3-1)=28 \text{ și}$$
$$2^{2m}3^{2n}+2^{2m}3^{2(n-1)}+\ldots+2^{2m}+2^{2(m-1)}3^{2n}+2^{2(m-1)}3^{2(n-1)}+\ldots$$
$$+2^{2(m-1)}+\ldots+3^{2n}+3^{2(n-1)}+\ldots+3^2+1=210$$
$$(2^m+2^{m-1}+\ldots+2+1)(3^n+3^{n-1}+\ldots+3-1)=28$$
$$(2^{2m}+2^{2(m-1)}+\ldots+2^2+1)(3^{2n}+3^{2(n-1)}+\ldots+3^2+1)=210$$
$$(2-1)(2^m+2^{m-1}+\ldots+2+1)(3-1)(3^n+3^{n-1}+\ldots+3-1)=56$$
$$(2^2-1)(2^{2m}+2^{2(m-1)}+\ldots+2^2+1)\cdot(3^2-1)(3^{2n}+3^{2(n-1)}+\ldots+$$
$$+3^2+1)=5040$$
$$(2^{m+1}-1)(3^{n+1}-1)=56$$
$$(2^{m+1}-1)(2^{m+1}+1)(3^{n+1}-1)(3^{n+1}+1)=5040$$

sau:

$$(2^{m+1}-1)(3^{n+1}-1)=56 \text{ și } (2^{m+1}+1)(3^{n+1}+1)=90.$$

Din sistemul de mai sus deducem soluțiile acceptabile: $2^{m+1}=8$ $3^{n+1}=9$, de unde $m=2$, $n=1$ și $N=12$.

Observare. Deoarece întotdeauna expresia $2^{m+1}-1$ este impară și expresia $3^{n+1}-1$ este pară înseamnă că nu putem avea decît soluție: $2^{m+1}-1=7$; $3^{n+1}-1=8$ sau: $2^{m+1}=8$; $3^{n+1}=9$, de unde: $m=2$, $n=1$, $N=12$. În acest caz nu avem nevoie de relația a doua.

Problema 4444

Se consideră un dreptunghi ABCD cu laturile $AB=CD=a$, $BC=AD=a\sqrt{3}$. *Se prelungesc laturile sale în același sens cu segmentele* $BN=DP=x$ *și* $CN=AQ=y$. *Să se calculeze lungimile acestor segmente știind că unghiul* $AMQ=30°$ *și că raportul dintre aria patrulaterului MNPQ și a dreptunghiului ABCD este* $\frac{5}{2}$.

Gh. D. Simionescu

Soluție. Din triunghiul *AMQ* avem: $\frac{AQ}{AM}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ sau: $\frac{y}{a+x}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, de unde $y=\frac{\sqrt{3}}{3}(a+x)$ sau: $a+x=\sqrt{3y}$.

Dar, $A_{MNPQ} = \frac{5}{2} A_{ABCD}$ și $A_{MNPQ} = A_{ABCD} + 2A_{AMQ} + 2A_{BMN}$, deci, $2A_{AMQ} + 2A_{BMN} = \frac{3}{2} A_{ABCD}$ sau:

$y(a+x)+x(a\sqrt{3}+y)=\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$ sau: $2y(a+x)+2x(a\sqrt{3}+y)=3a^2\sqrt{3}$.

Deci: $2y^2\sqrt{3}+2(\sqrt{3}y-a)(a\sqrt{3}+y)=3a^2\sqrt{3}$ sau:

$4y^2\sqrt{3}+4ay-5a^2\sqrt{3}=0$ de unde, $y_1=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ și $y_2=\frac{-5a}{2\sqrt{3}}$.

Singura soluție acceptabilă este $y_1=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, $x=\frac{a}{2}$. Deci,

$$x=\frac{a}{2} \text{ și } \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

— S-au primit multe soluții bune la această problemă.

Problema 4446

Să se reprezinte grafic:

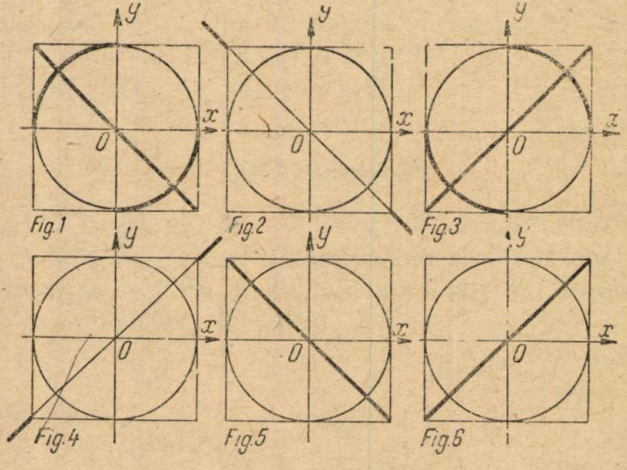
$x\sqrt{1-x^2}+y\sqrt{1-y^2}=0$; $x\sqrt{x^2-1}+y\sqrt{y^2-1}=0$

$x\sqrt{1-x^2}-y\sqrt{1-y^2}=0$; $x\sqrt{x^2-1}-y\sqrt{y^2-1}=0$

$x\sqrt{1+x^2}+y\sqrt{1+y^2}=0$; $x\sqrt{1+x^2}-y\sqrt{1+y^2}=0$

C. Ionescu-Țiu

Soluție. Prima ecuație se poate scrie: $(x^2-y^2)(x^2+y^2-1)=0$ și $x^2 \leqslant 1$ și $y^2 \leqslant 1$. Dar vedem că $x=-y$. Deci reprezentarea ei grafică



este formată din dreapta $x+y=0$ limitată între punctele de coordonate: $x=-1$ și $y=1$ și $x=-1$ și $y=-1$ și din sferturile cercului trigonometric situate în cadranele II și IV (fig. 1).

A doua ecuație este: $(x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 1) = 0$. Dar $x \leqslant -1$ și $x \geqslant 1$ și $y \leqslant -1$ și $y \geqslant 1$, iar x și y trebuie să fie de semne contrarii. Deci, graficul este format din porțiunile de dreaptă $x + y = 0$ care se află în exteriorul pătratului circumscris cercului trigonometric (fig. 2).

La a treia ecuație: $(x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 1) = 0$ observăm că $x^2 \leqslant 1$ și $y^2 \leqslant 1$ și $xy > 0$. Deci, graficul este porțiunea din dreapta $x - y = 0$ cuprinsă în interiorul pătratului circumscris cercului trigonometric și sferturile din acest cerc situate în cadranele I și III (fig. 3).

A patra ecuație este $(x - y^2)(x^2 + y^2 - 1) = 0$, dar $x^2 \geqslant 1$ și $y^2 \geqslant 1$ iar $x\ y > 0$. Deci graficul este format din porțiunile de dreaptă $x - y = 0$, situate în afara pătratului respectiv (fig. 4).

A cincea ecuație este: $(x^2 - y^2)(x^2 + y^2 + 1) = 0$, dar $xy < 0$ Deci, graficul este dreapta $x + y = 0$ (fig. 5).

A șasea ecuație este $(x^2 - y^2)(x^2 + y^2 + 1) = 0$, dar $xy > 0$. Deci graficul este dreapta $x - y = 0$.

Soluție bună s-a primit de la *N. Popa* elev Focșani.

Problema 4447

Să se demonstreze că oricare ar fi întregul m numărul $m^2 + m + 11$ este prim cu 5, iar numărul $m^2 + 2m + 5$ este prim cu 11.

Gh. Buicliu

Soluție dată de *N. Popa* elev Focșani. Orice număr poate fi scris în raport cu 5. Astfel: $\mathfrak{M}5$, $\mathfrak{M}5 \pm 1$, $\mathfrak{M}5 \pm 2$. Dacă $m = \mathfrak{M}5$ atunci numărul $N = m^2 + m + 11 = \mathfrak{M}5 + 1$. Dacă $m = \mathfrak{M}5 + 1$, $N = \mathfrak{M}5 + 3$; dacă $m = \mathfrak{M}5 - 1$, $N = \mathfrak{M}5 + 1$; dacă $m = \mathfrak{M}5 + 2$, $N = \mathfrak{M}5 + 2$, iar dacă $m = \mathfrak{M}5 - 2$, $m = \mathfrak{M}5 + 3$.

Deci, oricare ar fi m numărul $m^2 + m + 11$ este prim cu 5.

De asemenea, orice număr în raport cu 11 se scrie: $\mathfrak{M}11$, $\mathfrak{M}11 \pm 1$, $\mathfrak{M}11 \pm 2$, $\mathfrak{M}11 \pm 3$, $\mathfrak{M}11 \pm 4$ și $\mathfrak{M}11 \pm 5$.

Dacă $m = \mathfrak{M}11$, $N = m^2 + 2m + 5 = \mathfrak{M}11 + 5$; dacă $m = \mathfrak{M}11 + 1$, $N = \mathfrak{M}11 + 3$; dacă $m = \mathfrak{M}11 - 1$, $N = \mathfrak{M}11 + 4$; dacă $m = \mathfrak{M}11 + 2$, $N = \mathfrak{M}11 + 2$; dacă $m = \mathfrak{M}11 - 2$, $N = \mathfrak{M}11 + 5$; dacă $m = \mathfrak{M}11 + 3$, $N = \mathfrak{M}11 + 9$; dacă $m = \mathfrak{M}11 - 3$, $N = \mathfrak{M}11 + 8$; dacă $m = \mathfrak{M}11 + 4$, $N = \mathfrak{M}11 + 7$; dacă $m = \mathfrak{M}11 - 4$, $N = \mathfrak{M}11 + 2$; dacă $m = \mathfrak{M}11 + 5$, atunci $N = \mathfrak{M}11 + 7$, iar dacă $m = \mathfrak{M}11 - 5$, $N = \mathfrak{M}11 + 9$.

Deci, oricare ar fi numărul m, numărul $m^2 + 2m + 5$ este prim cu 11.

Problema 4457

Un circuit cuprinde în serie, un alternator, un bec cu rezistență de 20 Ω și o bobină de rezistență R și inductanță L necunoscute. Diferențele de potențial măsurate cu voltmetrul termic sînt respectiv: la extremitățile becului 50V, la extremitățile bobinei 70V, la bornele alternatorului 87V.

Se cere: a) Intensitatea curentului; b) rezistența R a bobinei; c) inductanța L a bobinei; d) puterea absorbită de bec, puterea absorbită de bobină și puterea alternatorului; e) factorul de putere al circuitului. Frecvența curentului care circulă în acest circuit este $f = 50$ herți.

(Bacalaureat, Franța, septembrie, 1959)

Soluție dată de *N. Popa*, elev Focșani. a) $I = \frac{U_b}{R_b} = \frac{50\,V}{20\,\Omega} = 2{,}5A.$ Intensitatea este 2,5 *A*.

b) $I = \frac{U\ bobină}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}$ și $I = \frac{U\ alternator}{\sqrt{(R+20)^2+(\omega L)^2}}$ sau:

$$2{,}5 = \frac{87}{\sqrt{400+40R+784}} \text{ sau: } R = \frac{169}{250}\,\Omega = 0{,}676 \text{ ohmi}$$

c) $L = \frac{\sqrt{784+R^2}}{\omega}$. Dar $\omega = 2\pi\nu = 314$ rad/s

$$\text{Deci } L = \frac{\sqrt{783{,}543024}}{314} = 0{,}089 \text{ henry}$$

d) $P_b = U_b \cdot I = 50V \cdot 2{,}5A = 125W$; $P_{bobina} = U_{bob} \cdot I \cdot \frac{R}{Z_b} = \frac{70 \cdot 2{,}5 \cdot 0{,}676}{28} =$

$= 9{,}225W$; $P_a = U_{alt} \cdot I \cdot \frac{R+20}{34{,}8} = 87 \cdot 2{,}5 \cdot \frac{20{,}676}{34{,}8} = 129{,}225\,W.$

e) Dar $P_a = U_{alt} \cdot I \cdot \cos\varphi$. Deci $\cos\varphi = \frac{20{,}676}{34{,}8} \approx 0{,}594$

Deci factorul de putere al circuitului este 0,594.

Problema 4460

A. *Să se transforme* $x = cosa\ cosb\ cosc$ *și* $y = sina\ sinb\ sinc$ *în sume de cosinus și de sinus:*

a) În cazul general cînd $a+b+c$ *este oarecare,*

b) În cazul cînd $a+b+c = \frac{\pi}{2}$

c) În cazul cînd $a+b+c = \pi$

B. *Dacă* $a = \frac{\alpha}{3}, b = \frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3}, c = \frac{\alpha}{3} + \frac{2\pi}{3}$ *și se notează* $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{3} = p$;

a) Să se calculeze tga, tgb, tgc în funcție de p.

b) Să se calculeze tga+tgb+tgc și tga tgb tgc în funcție de tg α.

c) Să se calculeze suma $S = tga\ tgb + tgb\ tgc + tga\ tga.$

(Journal de mathématiques élémentaires)

Soluție dată de *N. Popa*, elev Focșani.

A. Avem $x = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)] \cdot \cos c =$

$$= \frac{1}{4}[\cos(a+b+c) + \cos(a+b-c) + \cos(a-b+c) + \cos(a-b-c)]$$

$$y = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)] \sin c = \frac{1}{4}[\sin(-a+b+c) + \sin(a-b+c) +$$
$$+ \sin(a+b-c) - \sin(a+b+c)]$$

b) $x = \frac{1}{4}(\sin 2a + \sin 2b + \sin 2c)$ şi

$$y = \frac{1}{4}(\cos 2a + \cos 2b + \cos 2c - 1)$$

c) $x = -\frac{1}{4}(\cos 2a + \cos 2b + \cos 2c + 1)$ şi

$$y = \frac{1}{4}(\sin 2a + \sin 2b + \sin 2c)$$

B. Avem $\operatorname{tg}\frac{a}{3} = p$; $\operatorname{tg} b = \operatorname{tg}\left(\frac{a}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{p+\sqrt{3}}{1-p\sqrt{3}}$ şi

$$\operatorname{tg} c = \operatorname{tg}\left(\frac{a}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{p-\sqrt{3}}{1+p\sqrt{3}}$$

b) $\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c = p + \frac{p+\sqrt{3}}{1-p\sqrt{3}} + \frac{p-\sqrt{3}}{1+p\sqrt{3}} = \frac{3(3p-p^3)}{1-3p^2} = 3\operatorname{tg} a$

Deci $\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c = 3\operatorname{tg} a$

$$\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c = p \cdot \frac{p^2-3}{1-3p^2} = -\operatorname{tg} a$$

c) $S = \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c + \operatorname{tg} c \operatorname{tg} a = \frac{p(p+\sqrt{3})}{1-p\sqrt{3}} + \frac{p^2-3}{1-3p^2} +$

$+ \frac{p(p-\sqrt{3})}{1+p\sqrt{3}} = \frac{9p^2-3}{1-3p^2} = -3$. Deci $S = -3$.

Problema 4461

Ce relaţii algebrice există între x şi y dacă: $tgx.cosy \pm cosx.tgy = 0$.

C. Ionescu-Ţiu

Soluţie. Relaţia devine:

$$\frac{\sin x \cdot \cos y}{\cos x} \pm \frac{\cos x \cdot \sin y}{\cos y} = 0 \text{ sau: } \frac{\sin x \cdot \cos^2 y \pm \cos^2 x \cdot \sin y}{\cos x \cdot \cos y} = 0$$

Rezultă: $\cos x \neq 0$ şi $\cos y \neq 0$.

În primul caz avem: $\sin x - \sin x.\sin^2 y + \sin y + \sin^2 x.\sin y = 0$ sau: $(\sin x + \sin y)(1 - \sin x.\sin y) = 0$. Deci $\sin x + \sin y = 0$ şi $\sin x.\sin y = 1$, sau $2\sin\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2} = 0$ şi $\sin x \cdot \sin y = 1$.

Rezultă: $x + y = 2k\pi$, sau $x - y = (2k+1)\pi$.

Relația $\sin x.\sin y = 1$ nu poate fi satisfăcută în condițiile problemei.
În al doilea caz avem: $\sin x - \sin x.\sin^2 y - \sin y + \sin^2 x.\sin y = 0$ sau: $(\sin x - \sin y)(1 + \sin x.\sin y) = 0$ care dă:

$$\sin x - \sin y = 0 \text{ și } \sin x.\sin y = -1, \text{ sau:}$$

$$2 \sin \frac{x-y}{2} \cdot \cos \frac{x+y}{2} = 0 \text{ și } \sin x \cdot \sin y = -1.$$

Deci $x - y = 2k\pi$ sau $x + y = (2k+1)\pi$.
Relația $\sin x.\sin y = -1$ nu poate fi satisfăcută decît dacă $\cos x = 0$ și $\cos y = 0$, ceea ce e imposibil.
S-a primit soluție bună de la *N. Popa*, elev Focșani.

Problema 4472

Să se rezolve complet ecuația:

$$x^3 + px - q^2 = 0, \text{ știind că } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4 \text{ și } x_1 = x_2 x_3$$

V. Ștefănescu, Odobești

Soluție dată de *N. Popa*, elev Focșani. Scriem relațiile dintre rădăcini și coeficienți:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = p \text{ și } x_1x_2x_3 = q^2 \text{ sau:}$$

$x_1^2 = (x_2x_3)^2 = q^2$. Rezultă că avem două cazuri: 1) $x_1 = q$ și 2) $x_1 = -q$

În primul caz $x_2 + x_3 = -q$ și $x_2x_3 = q$, prin urmare

$$x_1 = q,\ x_2 = \frac{-q + \sqrt{q^2 - 4q}}{2} \text{ și } x_3 = \frac{-q - \sqrt{q^2 - 4q}}{2}.$$

În al doilea caz avem: $x_2 + x_3 = q$, $x_2x_3 = -q$ și deci:

$$x_1 = -q;\ x_2 = \frac{q + \sqrt{q^2 + 4q}}{2} \text{ și } x_3 = \frac{q - \sqrt{q^2 + 4q}}{2}.$$

Dar $(x_1 + x_2 + x_3)^2 = 0 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 4 + 2p$.
Deci $p = -2$

În primul caz avem:

$$x_1^2 + (x_2 + x_3)^2 - 2x_2x_3 = 4. \qquad q^2 + q^2 - 2q = 4 \text{ sau:}$$

$$q^2 - q - 2 = 0 \text{ și } q_1 = 2 \text{ și } q_2 = -1.$$

Ecuația dată se descompune în: $x^3 - 2x - 4 = 0$ cu rădăcinile: $x_1 = 2$, $x_2 = -1 + i$ și $x_3 = -1 - i$ și ecuația: $x^3 - 2x - 1 = 0$ cu rădăcinile

$$x_1 = -1,\ x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ și } x_3 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}:$$

În al doilea caz avem: $q^2 + q^2 + 2q = 4$ sau: $q^2 + q - 2 = 0$ $q_1 = -2$ și $q_2 = 1$. Deci avem ecuația: $x^3 - 2x - 4 = 0$ cu rădăcinile: $x_1 = 2$, $x_2 = -1 + i$ și $x_3 = -1 - i$ și ecuația: $x^3 - 2x - 1 = 0$ cu rădăcinile

$$x_1 = -1,\ x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ și } x_3 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Deci avem în ambele cazuri aceleași două ecuații:

$$x^2 - 2x - 4 = 0,\ x_1 = 2,\ x_2 = -1 + i,\ x_3 = -1 - i \text{ și}$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0,\quad x_1 = -1, x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ și } x_3 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Problema 4474

Să se rezolve ecuația: $ax^3+bx^2+cx+d=0$, știind că există relația: $b^2-3ac=0$.

Moldovan Grigore, student, Cluj

Soluție. Din relație avem: $c = \frac{b^2}{3a}$ și înlocuind în ecuație, obținem:

$$3a^2x^3 + 3abx^2 + b^2x + 3ad = 0$$

Făcînd substituția $x = y - \frac{b}{3a}$, avem

$$27a^3y^3 - b^3 + 27a^2d = 0 \text{ Deci: } y^3 = \frac{b^3 - 27a^2d}{27a^3}.$$

Deci: $y_1 = \frac{1}{3a}\sqrt[3]{b^3 - 27a^2d}$; $y_2 = \frac{\alpha}{3a}\sqrt[3]{b^3-27a^2d}$ și $y_3 = \frac{\alpha^2}{3a}\sqrt[3]{b^3 - 27a^2d}$

în care α și α^2 sînt rădăcinile complexe de ordinul trei ale unității.

Deci: $x_1 = \frac{1}{3a}(\sqrt[3]{b^3 - 27a^2d} - b)$; $x_2 = \frac{1}{3a}(\alpha\sqrt[3]{b^3 + 27a^2d} - b)$ și

$y_3 = \frac{1}{3a}(\alpha^2\sqrt[3]{b^3 - 27a^2d} - b)$.

Problema 4475

Dacă abc este un număr de trei cifre ($a>c$). că se arate că:

$$\begin{array}{r} abc- \\ cba \\ \hline def+ \\ fed \\ \hline 1089 \end{array}$$

Gh. Bercea, Timișoara

Soluție dată de N. *Popa*, elev Focșani. Deoarece $a > c$, avem: $c + 10 - a = f$, $b - 1 + 10 - b = e$ și $a - 1 - c = d$ sau: $f = 10 + c - a$ $e = 9$ și $d = a - c - 1$.

Deci $f + d = 10 + c - a + a - c - 1 = 9$, $e + e = 18$ și $d + f = 9$.

Rezultă: $\begin{array}{r} def+ \\ fed \\ \hline 1089, \end{array}$ adică ceea ce era de arătat.

Problema 4480

Să se demonstreze că $5^{8n} - 2^{4n} \cdot 7^{2n}$ *este divizibilă cu 1959.*

(Journal de mathematiques, decembrie 1959)

Soluție. Avem: $5^8 = (5^2)^4 = 25^4 = (25^2)^2 = 625^2 = 390625$ și $2^4 = 16$ și $7^2 = 49$. Deci: $2^4 \cdot 7^2 = 784$ și expresia este: $5^{8n} - 2^{4n} \cdot 7^{2n} = 390625^n - 784^n = (390625 - 784)(390625^{n-1} + 390625^{n-2} \cdot 784 + \ldots + 784^{n-1}) = 389841\,(390625^{n-1} + 390625^{n-2} \cdot 784 + \ldots + 784^{n-1})$. Dar $389841 = 199 \cdot 1959 = \mathfrak{M}. 1959$. Deci, $5^{8n} - 2^{4n} \cdot 7^{2n} = \mathfrak{M}. 1959$.

Problema 4482

Să se arate că:

$$(a_1^{m+p} + a_2^{m+p} + \ldots + a_n^{m+p})(a_1^{m-p} + a_2^{m-p} + \ldots a_n^{m-p}) \geqslant (a_1^m + a_2^m + \ldots + a_n^m)^2$$

unde $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ *sînt numere pozitive.*

C. Ionescu-Țiu

Soluție. Efectuăm calculele și obținem:

$$a_1^{2m} + a_2^{2m} + \ldots + a_n^{2m} + a_1^{m-p} \cdot a_2^{m+p} + \ldots + a_1^{m-p} \cdot a_n^{m+p} + a_2^{m+p} a_2^{m-p} + \ldots + a_{n-1}^{m+p} \cdot a_n^{m-p} \geqslant a_1^{2m} + a_2^{2m} + \ldots + a_n^{2m} + 2a_1^m \cdot a_2^m + \ldots + 2a_{n-1}^m a_n^m$$

Trecînd termenii din membrul doi în primul, vom obține:

$$a_1^{m-p} \cdot a_2^{m-p}(a_1^p - a_2^p)^2 + a_1^{m-p} \cdot a_3^{m-p}(a_1^p - a_3^p)^2 + \ldots + a_{n-1}^{m-p} \cdot a_n^{m-p}(a_{n-1}^p - a_n^p)^2 \geqslant 0.$$

Această inegalitate e evidentă cînd $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ sînt numere pozitive.

Egalitatea are loc cînd:

$$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n.$$

Soluții bune s-au primit de la *N. Popa*, elev Focșani, *Liviu Pirșan*, *Victor Olteanu*, *Catrinel Teodorescu* și *D. M. Bătinețu*, București.

Observare. Prin desfacerea parantezelor și prin ridicarea la pătrat, inegalitatea devine:

$$\sum a_k^{2m} + \sum a_k^{m+p} a_l^{m-p} + \sum a_k^{m-p} a_l^{m+p} \geqslant \sum a_k^{2m} + 2 \sum a_k^m a_l^m$$

unde: $(k, l = 1, 2, 3, \ldots, n$ și $k < l)$, sau:

$$\sum (a_k^{m+p} a_l^{m-p} - 2a_k^m a_l^m + a_k^{m-p} a_l^{m-p}) \geqslant 0$$

deci:

$$\sum a_k^{m-p} a_l^{m-p} (a_k^p - a_l^p)^2 \geqslant 0.$$

Pentru $m=0$ și $p=1/2$, obținem enunțul problemei 4538.

Problema 4483

Două triunghiuri dreptunghice au cîte un unghi egal cu 15°. Cateta mare a unuia din aceste triunghiuri este egală cu cateta mică a celuilalt triunghi. Să se arate că suma ariilor acestor două triunghiuri este dublul ariei pătratului cu latura cît lungimea catetelor egale.

C. Ionescu-Țiu

Soluție. Triunghiurile căutate sînt ABC și ADC, însă ABC este de asemeni un triunghi dreptunghic cu un unghi de 15°, iar AD este înălțime. În acest caz, suma ariilor celor două triunghiuri este chiar aria ABC a cărei valoare este:

$$A = \frac{1}{2} BC \cdot AD = \frac{AD^2}{2\sin C \cdot \cos C} = \frac{AD^2}{\sin 2C} = \frac{AD^2}{\sin 30^\circ} = 2AD^2$$

adică valoarea ariei triunghiului ABC este dublul ariei pătratului de latură AD.

— S-au primit multe soluții bune, însă mai lungi.

Problema 4485

Se dau n numere complexe $z_1, z_2, \ldots, z_n$ astfel încît dacă sînt reprezentate ca puncte în plan ele vor fi vîrfurile unui poligon regulat. Să se demonstreze că dacă numărul complex z are proprietatea că

$$\frac{1}{z_1 - z} + \frac{1}{z_2 - z} + \ldots + \frac{1}{z_n - z} = 0$$

atunci punctul z din planul corespunzător se află în interiorul acestui poligon.

(Clasa X, olimpiada Moscova, 1959)

Soluție dată de *I. I. Tomescu*, student matematici, București. Pentru a reprezenta în plan cele n numere complexe alegem ca origină centrul poligonului regulat, ca axă reală dreapta Oz_1 ce unește centrul poligonului cu imaginea numărului complex z_1 și ca axă imaginară perpendiculara în O pe axa reală. Notăm raza cercului circumscris poligonului cu r. Ținînd seama că sînt situate în vîrfurile unui poligon regulat, numerele complexe $z_1, z_2, \ldots, z_n$ se scriu:

$$z_1 = r(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ); \quad z_2 = r(\cos \theta^\circ + i \sin \theta^\circ); \quad z_3 = r(\cos 2\theta + i \sin 2\theta); \quad z_n = r(\cos (n-1)\theta + i \sin (n-1)\theta).$$

Dacă z_n se obține din z_1 printr-o rotație de unghi $(-\theta)$, deci $(n-1)\theta + \theta = 2\pi$, de unde $\theta = \frac{2\pi}{n}$ și deci numărul complex z_{k+1} se scrie sub forma $r\left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}\right)$. Cînd k ia valorile $0, 1, 2, \ldots, (n-1)$ se

obțin numerele complexe $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Rezultă că numerele complexe $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sînt rădăcinile ecuației binome: $x^n - r^n = 0$, sau notînd $r^n = A$, ale ecuației $x^n - A = 0$.

Fie numerele reale $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rădăcinile ecuației $x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$. Rezultă că:

$$x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \equiv (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n) = f(x)$$

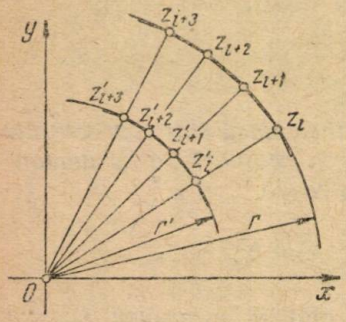
Derivînd în ambii membri obținem:

$$nx^{n-1} + a_1(n-1)x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \equiv \Sigma(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1})$$

sau împărțind cu $(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$ diferit de zero pentru x diferit de rădăcini rezultă:

$$\frac{1}{x-x_1} + \frac{1}{x-x_2} + \ldots + \frac{1}{x-x_n} = \frac{nx^{n-1} + a_1(n-1)x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Proprietatea se păstrează și în cazul rădăcinilor complexe și deoarece $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sînt rădăcinile ecuației binome $x^n - A = 0$ rezultă că:



$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z_i - z} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z - z_i} =$$

$$= -\frac{(x^n - A)'}{x^n - A} = \frac{nx^{n-1}}{x^n - A}$$

Acest lucru se putea observa și direct, făcînd calculele la numărător și ținînd seama de relațiile dintre rădăcini și coeficienți

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z_1 - z} = 0 \text{ se mai scrie } \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z - z_1} = 0 \text{ sau:}$$

$$nz^{n-1} + (n-1)\Sigma z_1(-1)z^{n-2} + (n-2)\Sigma z_1z_2(-1)^2z^{n-3} + \ldots + 2\Sigma z_1z_2\ldots z_{n-2}(-1)^{n-2} \cdot z + \Sigma z_1z_2\ldots z_{n-1}(-1)^{n-1} = 0.$$

Deoarece $\Sigma z_1 = \Sigma z_1z_2 = \ldots = \Sigma z_1z_2\ldots z_{n-1} = 0$ ecuația devine $nz^{n-1} = 0$ care are n-1 rădăcini nule. Rezultă că dacă numărul complex z are proprietatea specificată în enunțul problemei, imaginea sa este în originea axelor, adică în centrul polinomului regulat, deci este interior acestui poligon.

Generalizare. Se dau n numere complexe: $z_1, z_2\ldots z_n$ astfel încît dacă sînt reprezentate ca puncte în plan vor fi vîrfurile unui poligon regulat. Să se demonstreze că dacă numerele complexe z au proprietatea că $\frac{1}{z_1 - z} + \frac{1}{z_2 - z} + \ldots + \frac{1}{z_n - z} = \frac{1}{z}$, atunci reprezentate în plan vor fi vîrfurile unui poligon regulat interior primului și cu același număr de laturi.

Se demonstrează ca mai sus că numerele complexe $z_1, z_2\ldots z_n$ sînt rădăcinile ecuației binome $x^n - A = 0$, unde A este un număr real egal cu $(-1)^{l-1}\, z_1, z_2, \ldots, z_n$. Se observă că relația dată se mai scrie:

$$\frac{1}{z_1-z}+\frac{1}{z_2-z}+\ldots+\frac{1}{z_n-z}+\frac{1}{0-z}=0.$$

Notînd $z_{n+1}=0$, numerele complexe $z_1, z_2, \ldots z_{n+1}$ sînt rădăcinile ecuației

$$x(x^n-A)=0 \text{ sau } x^{n+1}-Ax=0.$$

Am văzut că ecuația $\frac{1}{z_1-z}+\ldots+\frac{1}{z_{n+1}-z}=0$ este echivalentă cu ecuația obținută prin derivarea membrului întîi al ecuației $x^{n+1}-Ax=0$, ale cărui soluții sînt $z_1, z_2, \ldots, z_n, z_{n+1}$.

Rezultă că condiția dată se mai scrie: $(n+1)x^n-A=0$.

Numerele complexe $z'_1, z'_2, \ldots, z'_n$ care verifică această ecuație sînt vîrfurile unui poligon regulat cu n laturi înscris în cercul de rază $r'=\sqrt[n]{\frac{A}{n+1}}$. Poligonul regulat format din imaginile numerelor complexe $z_1, \ldots, z_n$ este înscris în cercul de rază $r=\sqrt[n]{A}$. Avem evident, $r'<r$.

Numerele complexe $z'_1, z'_2, \ldots, z'_n$ se obțin din numerele complexe $z_1, \ldots, z_n$ prin înmulțirea lor cu $\frac{r'}{r}$, adică cu $\sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}<1$. Poligonul regulat format din imaginile numerelor complexe $z'_1, z'_2, \ldots z'_n$ este evident interior poligonului regulat format din imaginile numerelor complexe $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ca vîrfuri. Cele două poligoane regulate sînt asemenea avînd același număr de laturi. Raportul de asemănare este $\sqrt[n]{n+1}$.

Problema 4486

a) *Ce viteză tangențială trebuie imprimată unui satelit artificial al Pămîntului pentru a se roti pe o traiectorie circulară la o înălțime egală cu raza Pămîntului?* (R=6400 km).

b) *Ce forță centripetă în kilograme-forță acționează asupra satelitului dacă masa lui este de 400 kg?*

c) *Cu ce viteză unghiulară se rotește satelitul și de cîte ori înconjoară Pămîntul în 24 de ore?*

(Clasa VIII, Olimpiada 1960, etapa regională)

Soluție dată de *Popa N.*, elev Focșani. a) Pentru ca satelitul să se rotească trebuie ca forța centrifugă să fie egală cu greutatea satelitului.

Deci: $\frac{mv^2}{2R}=\frac{mg}{4}$, deoarece $\frac{g}{g_1}=\frac{4R^2}{R^2}=4$

Deci: $v^2=\frac{Rg}{2}=\frac{6400000\cdot 9{,}8}{2}\ \text{m}^2/\text{s}^2=5600^2\text{m}^2/\text{s}^2$

Deci: $v=5600\ \text{m/s}=5{,}6\ \text{km/s}$.

b) $F_c=\frac{mv^2}{2R}=\frac{mg}{4}=\frac{400\cdot 9{,}8}{4}N=100\ \text{kgf}$

c) $\omega=\frac{V}{2R}=\frac{5{,}6}{12800}=0{,}000438\ \text{rad/s}$

Deci $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{6{,}28\ \text{rad}}{0{,}000438\ \text{rad/s}}$

În 24 ore satelitul face circa 6 rotații.

Problema 4489

Să se afle cel mai mic număr n pentru care numărul $N = 5^n + n$ *este divizibil prin 31.*

Nanu O. student, Iaşi

Soluţia I. Observăm că n poate fi de forma $3k$, $3k \pm 1$ şi că $125 = \mathfrak{M}31 + 1$. Presupunem că $n = 3k$ şi atunci:

$$N = 5^{3k} + 3k = 125^k + 3k = (\mathfrak{M}31 + 1)^k + 3k \Rightarrow \mathfrak{M}31 + 3k + 1.$$

Deci, $3k + 1 = 31$ (cel mai mic multiplu de 31) care dă: $n = 3k = 30$.

Presupunem că $n = 3k + 1$. Avem: $N = 5^{3k+1} + 3k + 1 = 5(\mathfrak{M}31 + 1)^k + 3k + 1 = \mathfrak{M}31 + 3k + 6$. Trebuie ca: $3k + 6 = \mathfrak{M}31$, ceea ce dă pentru k valori mai mari ca 10.

Presupunem că $n = 3k - 1$ şi atunci:

$$N = 5^{3k-1} + 3k - 1 = 25 \cdot 5^{3k-3} + 3k - 1 = 25(\mathfrak{M}31 + 1)^{k-1} + 3k - 1 = \mathfrak{M}31 + 3k + 24.$$

Trebuie ca $3k + 24 = \mathfrak{M}31$ ce dă pentru k valori mai mari ca 10.

Deci numărul cerut este 30.

Soluţia II-a. În baza teoremei lui *Fermat*, orice număr $N = a^{p-1} - 1 = \mathfrak{M} \cdot p$ unde p este un număr prim absolut, iar a este un număr prim cu p.

În particular, dacă $a = 5$ şi $p = 31$ găsim că orice număr de forma $N = 5^{30} - 1$ este un multiplu de 31 şi deci, şi numărul $N = 5^{30} - 1 + 31 = \mathfrak{M} \cdot 31$ adică, $N = 5^{30} + 30 = \mathfrak{M} \cdot 31$.

Rezultă că cea mai mică valoare a lui n astfel ca expresia $5^n + n$ să se dividă cu 31, este $n = 30$.

— S-au primit soluţii bune de la: *Victor Olteanu*, elev Bucureşti, *N. Popa*, elev Focşani şi *D. Bătineţu*, Bucureşti.

Problema 4492

Se consideră o piramidă regulată cu feţele echivalente. Poligonul bazei are n laturi. Feţele laterale formează cu planul bazei unghiul α, *iar între ele unghiul* β. *Muchiile alăturate formează unghiul* γ. *Să se demonstreze relaţiile: 1)* $\sec\alpha = n$; *2)* $\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} = n \operatorname{cotg}\frac{180^\circ}{n}$; *3)* $n^2 \cdot \cos\beta = (n^2 - 1)\cos 180^\circ \left(1 - \frac{2}{n}\right) - 1$.

C. V. Costăchescu

Soluţie. a) Deoarece piramida este echifacială regulată vîrful V se proiectează în centrul O al poligonului de bază. Deci, dacă S este aria unei feţe avem: $n \cdot S\cos\alpha = S$, sau: $n \cdot \cos\alpha = 1$ şi $\frac{1}{\cos\alpha} = n$ sau $\sec\alpha = n$.

b) Fie $\gamma = \sphericalangle FVE$. Ducem VN perpendiculară pe FE şi ON perpendiculară pe FE. Avem: $\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} = \frac{VN}{FN}$. Dar $\alpha = \sphericalangle VNO$, deci:

$$\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} = \frac{ON}{FN \cdot \cos\alpha} = n \cdot \frac{ON}{FN}.$$

Dar din triunghiul FON avem: $\frac{ON}{FN} = \operatorname{cotg}\frac{180^\circ}{n}$; deci,

$$\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} = n \cdot \operatorname{cotg}\frac{180^\circ}{n}.$$

c) Ducem AM perpendiculară pe VB și MC perpendiculară pe VB. Unim A cu C; $\sphericalangle AMC = \beta$ Din triunghiul AMC avem:

$$\cos\beta = \frac{2AM^2 - AC^2}{2AM^2} = 1 - \frac{AC^2}{2AM^2}.$$

Dar din trîunghiul AMB avem: $AM = AB \cdot \sin\left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right) = AB \cdot \cos\frac{\gamma}{2}$.

Din triunghiul ABC deducem: $AC^2 = 2AB^2\left[1 - \cos 180^\circ\left(1 - \frac{2}{n}\right)\right]$.

$$\text{Deci, } \cos\beta = 1 - \frac{1 - \cos 180^\circ\left(1 - \frac{2}{n}\right)}{\cos^2\frac{\gamma}{2}} = 1 - \left[1 - \cos 180^\circ\left(1 - \frac{2}{n}\right)\right]$$

$$\left[\frac{1}{n^2\cos^2\frac{180^\circ}{n}} + \frac{n^2-1}{n^2}\right] = 1 - \frac{1}{n^2\cos^2\frac{180^\circ}{n}} +$$

$$+ \frac{\cos 180^\circ\left(1-\frac{2}{n}\right)}{n^2\cos^2\frac{180^\circ}{n}} - 1 + \frac{1}{n^2} + \frac{(n^2-1)\cos 180^\circ\left(1-\frac{2}{n}\right)}{n^2}, \text{ sau:}$$

$$n^2 \cdot \cos\beta = \frac{-1 + \cos 180^\circ\left(1 - \frac{2}{n}\right)}{\cos^2\frac{180^\circ}{n}} + 1 + (n^2-1)\cos 180^\circ\left(1 - \frac{2}{n}\right) =$$

$$= -2 + 1 + (n^2-1)\cos 180^\circ\left(1 - \frac{2}{n}\right) = (n^2-1)\cos 180^\circ\left(1 - \frac{2}{n}\right) - 1.$$

Problema 4497

Ce relații algebrice există între x și y dacă:

$$tg\,x\,\sin y \pm \sin x\,tg\,y = 0$$

sau dacă:

$$ctg\,x\,\sin y \pm \sin x\,ctg\,y = 0$$

C. Ionescu-Țiu

Soluție. a) Pentru ca operațiile să aibă sens trebuie să avem

$$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \text{ și } y \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}.$$

În acest caz prima relație devine:

$$\operatorname{tg} x \sin y \pm \sin x \operatorname{tg} y = 0$$
$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y (\cos y \pm \cos x) = 0$$

și deci avem: $\operatorname{tg} x = 0$ sau $x = k\pi$; $\operatorname{tg} y = 0$ sau $y = k\pi$; $\cos y \pm \cos x = 0$ sau $x \pm y = k\pi$. Înseamnă că relațiile dintre x și y sînt: $x = k\pi$ pentru orice y $\left(\text{afară de } y = (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$; $y = k\pi$ pentru orice x $\left(\text{afară de } x = (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$ și $x \pm y = k\pi$.

b) Pentru ca operațiile să aibă sens trebuie să avem $x \neq k\pi$ și $y \neq k\pi$. În acest caz a doua relație devine:

$$\operatorname{ctg} x \sin y \pm \sin x \operatorname{ctg} y = 0,$$

$$\frac{\cos x \cdot \sin^2 y \pm \cos y \cdot \sin^2 x}{\sin x \cdot \sin y} = 0,$$

$$\cos x (1 - \cos^2 y) \pm \cos y (1 - \cos^2 x) = 0,$$

$$(\cos x \mp \cos y) + \cos x \cos y (\cos x \pm \cos y) = 0,$$

$$(\cos x \pm \cos y)(1 \mp \cos x \cos y) = 0$$

și deci avem singura soluție acceptabilă: $\cos x \pm \cos y = 0$ sau: $x \pm y = k \cdot \pi$. Deoarece trebuie să avem $x \neq k\pi$ și $y \neq k\pi$ înseamnă că vom avea $\cos x \cos y \neq \pm 1$ și deci, nu putem avea $1 \pm \cos x \cos y = 0$.

— Soluții bune s-au primit de la: *Victor Olteanu*, elev București și *Nicolae Popa*, elev Focșani.

Problema E: 1581

Să se arate că:

a) $$\frac{a+b-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}{a+b} = 1 - \frac{1}{ab}$$

b) $$\frac{1+\sqrt{2}+a}{1+\sqrt{2}a-a} = 1+\sqrt{2}.$$

C. Ionescu-Țiu

Soluție dată de *Stoica Alex.*, elev cl. VII, șc. nr. 173, București.

a) Primul termen al egalității date devine succesiv:

$$E_1 = \frac{a+b-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}{a+b} = 1 - \frac{\frac{a+b}{ab}}{a+b} = 1 - \frac{a+b}{ab} \cdot \frac{1}{a+b} = 1 - \frac{1}{ab}$$

b) Egalitatea dată se poate scrie sub forma

$$(1+\sqrt{2}a-a)(1+\sqrt{2}) = 1+\sqrt{2}+a$$

Desfăcînd paranteza, primul termen al egalității, devine succesiv:

$$E = (1+\sqrt{2}a-a)(1+\sqrt{2}) = 1+\sqrt{2}a-a+\sqrt{2}+2a-\sqrt{2}a = 1+\sqrt{2}+a.$$

Olimpiada de matematică 1961, etapa finală.

Anul I școli profesionale

4915. Un rezervor cilindric culcat, cu lungimea de 8 m și diametrul interior de 2,4 m conține o cantitate oarecare de benzină. Vergeaua gradată arată că adîncimea cea mai mare a lichidului este de 1,8 m. Să se afle cîte kg de benzină conține rezervorul știind că greutatea specifică a benzinei este 0,70 kgf/dm^3.

Dumitru Nicolae, București

4916. Într-un semicerc se înscrie un patrulater $ABCD$, AD fiind diametrul. a) Se notează cu M și N proiecțiile punctelor A și D pe dreapta BC. Să se arate că triunghiurile ABM și ACD sînt asemenea ca și triunghiurile ADB și CDN. b) Să se demonstreze relația: $AB \cdot AC + CD \cdot BD = 2AD \cdot OP$, unde O este centru cercului, iar P este mijlocul segmentului BC.

Petre Cernescu, Tîrgoviște

4917. Într-o brigadă sînt 6 muncitori de categoria a 2-a de salarizare, cîțiva de categoria a 3-a și 15 de categoria a 5-a. Se știe că salariul mediu al membrilor brigăzii este salariul categoriei a 4-a și că salariile orare sînt date de tabela următoare:

categoria	2-a	3-a	4-a	5-a
salariul	3,40 lei	3,61 lei	4 lei	4,50 lei

Să se afle numărul muncitorilor de categoria a 3-a de salarizare din brigadă.

4918. Să se calculeze valoarea expresiei

$$\frac{\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}}{\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}}$$

pentru: $a = 0{,}15$; $b = 1{,}2$; $c = -2$.

Anul II — școli profesionale

4919. O bară în formă de prismă triunghiulară dreaptă are bazele ABC, $A'B'C'$ triunghiuri isoscele. Baza triunghiului isoscel ABC este $BC = a$, iar înălțimea $AD = h$. Printr-un punct V luat pe muchia CC' se duc 2 secțiuni plane, perpendiculare pe fața $BCC'B'$, care taie muchia

BB' în punctele M și M' iar muchia AA' în punctele N și N'. Unghiurile VMM' și $VM'M$ au cîte 45°. *a)* Să se afle volumul părții îndepărtate; *b)* Să se arate că dacă se suprapun cele 2 secțiuni se obține un colțar în unghi drept.

Ileana Kaflikiewicz, Arad

4920. Se dă un paralelogram $ABCD$ cu unghiul ascuțit a în A. Fie H simetricul lui B față de latura CD. Se notează cu b și c unghiurile HAB' și HDG. Să se arate că între unghiurile a, b, c avem relația: $\operatorname{ctg} a = 2 \operatorname{ctg} b - \operatorname{ctg} c$.

4921. *a)* Prețul de cost al unui articol A a fost în 1959 de 125 lei și în 1960 de 100 lei. Care a fost procentul de reducere? *b)* Prețul de cost al unui articol B a fost în 1959 de 120 lei, iar al unui articol C a fost de lei 150. În urma reducerii prețurilor de cost, cele două articole ajung să aibă prețuri egale în 1960. Care au fost procentele de reducere, știind că pentru articolul C procentul de reducere a fost dublu față de cel al articolului B. *c)* Prețul de cost al unui articol D a fost în 1959 de 120 lei. Prețul de cost a fost redus cu același procent în 1960 și în 1961, așa că prețul actual este de 86,60 lei. Care a fost procentul anual de reducere?

T. Roman

4922. O rezistență de 6 ohmi este tăiată în două bucăți R_1 și R_2. Cum trebuie făcută tăietura pentru ca legînd în paralel cele două părți să se obțină rezistența maximă R.

Indicație: Se știe de la fizică formula: $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.

Dumitru Nicolae, București

Anul II școli de maiștri și III școli pedagogice

4923. Într-o fabrică de unelte se confecționează 1000 pene de oțel egale. Baza penei este un dreptunghi cu dimensiunile $a = 10$ cm, $b = 4$ cm. Lungimea ascuțișului este $c = 12$ cm, iar distanța acestuia pînă la baza dreptunghiulară $h = 16$ cm. Ce cantitate de oțel este necesară pentru confecționarea penelor? Se va lua greutatea specifică 7,8 kgf/dm^3.

O. Sacter

4924. Se presupune Pămîntul sferic cu raza 6370 km. a) Să se afle aria porțiunii din suprafața Pămîntului ce putea fi văzută de cosmonautul sovietic *I. A. Gagarin*, în momentul cînd se afla la 300 km depărtare de suprafața planetei noastre.

b) A cîta parte din aria Pămîntului reprezintă aria porțiunii de mai sus.

4925. Într-o întreprindere, muncitorii de categoria a 5-a au salariul zilnic de 25 lei, cei din categoria a 6-a de 30 lei. Salariile categoriilor 5, 6, 7 și 8 sînt în progresie geometrică.

a) Să se calculeze salariul zilnic al cîte unui muncitor din categoria a 7-a și a 8-a. b) Într-o secție lucrează a muncitori din categoria a 5-a, b de categoria a 7-a și x de categoria 8-a. Știind că salariul mediu al muncitorilor secției este de categoria 6-a, să se determine numărul muncitorilor de categoria 8-a, cunoscînd numărul celor din categoria 5 și 7. c) Ce condiții trebuie să îndeplinească numerele a și b pentru ca problema de la punctul (b) să fie posibilă?

Să se determine cel mai mic număr de muncitori ai secției de la punctul (b). Să se verifice rezultatul obținut.

T. Roman

4926. Patru copii au următoarele sume de bani: primul 41 lei, al doilea 32 lei, al treilea 25 lei și al patrulea 14 lei. Tatăl lor le dă 160 lei pe care să-i împartă astfel încît adunînd partea ce i se cuvine fiecăruia cu suma pe care o avea înainte să capete: primul cu 12 lei mai mult decît al doilea; al doilea cu 12 lei mai mult decît al treilea; al treilea cu 12 lei mai mult decît al patrulea. Cît se cuvine fiecăruia din cei 160 lei?

Anul I școli de maiștri

4927. O foaie dreptunghiulară $ABCD$ are dimensiunile $AB = CD = 0{,}80$ m și $AD = BC = 1{,}10$ m. Se taie din această foaie un triunghi ABE (E pe latura BC), cu aria 20 dm. Să se afle distanța de la centrul dreptunghiului la dreapta AE.

* * *

4928. Într-un triunghi dreptunghi ABC se duce din vîrful unghiului drept înălțimea AD, iar din D perpendicularele DE și DF pe catetele AB, respectiv AC. Din punctele E și F se duc perpendicularele EG și FA pe BC. a) Să se calculeze segmentele AD, DE, DF, EG, EH în funcție de BC și unghiul B; b) Să se arate că $\frac{BG}{CH} = \left(\frac{BD}{CD}\right)^2$.

C. Ionescu-Țiu

4929. Prețul de cost al unui produs a fost în 1959 de 240 lei. Datorită inovațiilor și raționalizărilor efectuate de muncitori și tehnicieni prețul de cost a fost redus în 1961 cu un procent dublu față de procentul de reducere din 1960. În urma acestor două reduceri prețul actual este de 172,80 lei. Să se afle procentele de reducere la acest produs.

4930. Se dă un pătrat $ABCD$. Se prelungește latura AB cu un segment $BE = x$ și se ia pe latura CB segmentul $CF = x$ (F între C și B). Paralela dusă prin F la AB întîlnește în N paralela dusă prin E la AD și în M latura AD. Să se determine ce valori poate lua x astfel ca aria $MNCD$ să fie mai mare decît aria $AEMN$.

Gh. D. Simionescu

Anul II școli de maiștri

4931. Într-un trapez isoscel, o bază este egală cu a, fiecare latură oblică cu b, iar semidiferența bazelor cu x. a) Să se determine a pentru care trapezul are aria maximă și să se afle această arie. b) Pentru $a = 5$ și $b = 3\sqrt{2}$, aria y a trapezului de mai sus devine: $y = (5 + x)\sqrt{18 - x^2}$. Să se reprezinte curba care are această ecuație, în tot intervalul unde ea poate fi definită.

PROBLEME PROPUSE*)

4932. O cantitate de hidrogen de 0,2 kg se află în cilindrul unei pompe la presiunea de 5 atmosfere și temperatura de 27°C. Gazul este supus unei destinderi la temperatură constantă, pînă la presiunea de 2 atmosfere. a) Să se afle volumul inițial și volumul final al gazului. b) Se deschide apoi o supapă și o parte din gaz iese afară pînă cînd presiunea gazului este egală cu presiunea atmosferică. Dacă temperatura gazului a scăzut cu 2 grade să se afle cantitatea de gaz rămasă în corpul de pompă.

Maria Vanță, profesoară Petroșani

4933. Să se afle numărul de patru cifre, în care suma cifrelor sale este egală cu numărul format de primele cifre mai puțin două unități, iar diferența între ele și răsturnatul său este egală cu 270.

Ilie N. Constantinescu, lector Petroșani.

4934. O bilă cu greutatea de 0,5 kgf este aruncată în sus pe verticală și după 2 secunde atinge înălțimea maximă. Căzînd, se înfundă în pămînt moale cu 10 cm. Să se determine rezistența întîmpinată de bilă cînd a pătruns în sol.

* * *

4935. Să se arate că soluțiile sistemului

$$(4 + m - m^2)\,x + (m^2 + 2m - 4)\,y = 2m$$
$$(4 - m - m^2)\,x + (8 + 8m + m^2)\,y = 2m + 4$$

nu depind de m.

N. Mihăileanu.

4936. Asupra vîrfurilor unui triunghi dreptunghic cu catetele de 3 cm și 4 cm acționează trei forțe paralele și de același sens astfel: $F_1 = 3$ kgf cu punctul de aplicație în A, $F_2 = 6$ kgf cu punctul de aplicație în D, $F_3 = 9$ kgf cu punctul de aplicație în C, $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm. Să se determine: a) Mărimea rezultantei. b) Punctul de aplicație al rezultantei.

C. Teodorescu, profesor

4937. Se dă $f(x) = x^2 - 4x + 5$. Să se arate oricare ar fi numerele a, b, c, avem:

$$f(a) + 2f(b) + f(c) \geqslant 4f\left(\frac{a+2b+c}{4}\right), \text{ și}$$

$$mf(a) + nf(b) \geqslant (m+n)\,f\left(\frac{ma+nb}{m+n}\right)$$

m și n fiind pozitive.

*) VIII (4933, 4934, 4938, 4941); IX (4935, 4936, 4939, 4942, 4944, 4946, 4951, 4953, 4959); X (4932, 4940, 4943, 4945, 4947, 4948, 4950, 4952, 4958, 4960); XI (4937, 4949, 4954, 4955, 4956, 4957, 4961, 4962).

Dacă se înlocuiește $f(x)$ cu $g(x) = -x^2 + 4x - 5$, se schimbă semnul inegalității.

Se pot da generalizări.

C. Ionescu-Țiu

4938. Să se arate că restul diviziunii prin 18 a unui număr întreg, care se termină cu cifra 0, este același ca la numărului obținut luînd de 10 ori suma cifrelor sale.

Gr. Zapan

4939. Să se rezolve ecuația: $2x^2 - (m+3)\,x + m + 11 = 0$, astfel ca diferența dintre cele două rădăcini să fie 0,5.

R. Bîrzan, student Cluj

4940. Să se rezolve triunghiul ABC cînd se dă latura $AC = b$, unghiul A și se știe că bisectoarea interioară și cea exterioară ale unghiului A sînt egale.

Guzu Boris, profesor Sebeș

4941. Să se arate că dacă $a + b + c = 1$ avem:

$$\frac{a(a^2+1)}{bc} + \frac{b(b^2+1)}{ac} + \frac{c(c^2+1)}{ab} \geqslant 10,$$

a, b, c fiind diferite de zero.

L. N. Bădescu, elev C-lung Muscel

4942. Se consideră triunghiul ABC și un punct oarecare P în planul său. Se iau punctele M și N respectiv pe laturile AB și AC. Fie $K \equiv (CN, MP)$ și $Q \equiv (BM, NP)$. Să se arate că dreptele AP, BK și CQ sînt concurente.

Ștefan Gruian, absolvent Alba Iulia

4943. Printr-o conductă cu secțiunea variabilă curge un fluid. În două secțiuni S_1 și S_2 ale conductei se introduc tuburi manometrice. Cunoscînd denivelarea Δh a lichidului din cele două tuburi manometrice și secțiunile corespunzătoare S_1 și S_2, să se determine debitul fluidului în conductă.

* * *

4944. Să se rezolve ecuațiile:

$$\sqrt[n]{(x+2)^2} + \sqrt[n]{x^2} = 4\sqrt[n]{x(x+2)}$$

$$\sqrt[n]{x^2} + \sqrt[n]{(x-2)^2} = 4\sqrt[n]{x(x-2)}$$

* * *

4945. Să se arate că ori care ar fi numerele reale a și b, expresia:

$$E = 4a^4 + 16a^3b + 9a^2b^2 - 23\ ab^3 + 7b^4$$

nu poate fi negativă.

Făcînd $a = 1$, să se afle valoarea lui b pentru ca expresia E să ia cea mai mică valoare.

C. I. T.

4946. Fie A_1, B_1, C_1 picioarele a trei ceviene într-un triunghi oarecare ABC, iar A_2, B_2, C_2 punctele unde o transversală oarecare taie laturile BC, CA, AB. Se consideră punctele $A_3 \equiv (B_1C_2 ; BC)$, $B_3 \equiv (C_1A_2 ; CA)$, $C_3 \equiv (A_1B_2 ; AB)$. Să se arate că AA_3, BB_3, CC_3 sînt concurente.

* * *

4947. Fie ABC un triunghi. Dacă

$$a^2(-a^4+b^4+c^4)+b^2(a^4-b^4+c^4)+c^2(a^4+b^4-c^4)=3a^2b^2c^2$$

atunci ortocentrul și centrul cercului circumscris coincid.

Ilie N. Constantinescu

4948. Să se demonteze că aria dodecagonului regulat este egală cu de trei ori aria pătratului ce are ca latură raza cercului circumscris.

* * *

4949. Să se reprezinte grafic curbele:

$$x+y+1-xy=0,$$
$$x+y+1+3xy=0,$$
$$x+y=\sqrt{x+y+1-xy},$$
$$x+y=\sqrt{x+y+1+3xy}.$$

C. Ionescu-Țiu

4950. Să se arate că:

$$\frac{(2+\sqrt{3})^n+1}{(2+\sqrt{3})^n-1}+\frac{(2-\sqrt{3})^n+1}{(2-\sqrt{3})^n-1}=0.$$

* * *

4951. Într-o fază de preparare a unui minereu, acesta formează un amestec neomogen cu apa, încît densitatea amestecului crește proporțional cu adîncimea. Știind că la suprafața vasului densitatea amestecului este de 1 g/cm³, iar la adîncimea de 20 cm este de 5 g/cm³ să se determine: *a)* legea de variație a densității cu adîncimea; *b)* legea de variație a presiunii cu adîncimea; *c)* presiunea pe fundul vasului, dacă înălțimea amestecului în vas este de 0,5 m; *d)* forța de apăsare pe fundul vasului, dacă acesta este un pătrat cu latura de 1 m.

Maria Vanță, prof. Petroșani

4952. Se dă triunghiul ABC dreptunghic în A. Prin A se duce o dreaptă $\triangle$ exterioară triunghiului și fie B' și C' proiecțiile punctelor B și C pe această dreaptă. Să se determine poziția dreptei astfel ca aria $BB'C'C$ să fie maximă.

Corina Mașek, elevă Brad

4953. Să se calculeze presiunea exercitată de un curent de aer cu viteza de 10 m/s, care cade perpendicular pe suprafața unei uși. Să se determine momentul de rotație al forței de presiune față de linia balamalelor, dacă ușa este dreptunghiulară și are înălțimea de 2 m, iar lățimea de 1 m. Densitatea aerului este $\varrho = 0{,}001293$ g/cm^3.

* * *

4954. Să se exprime suprafețele și volumele a trei sfere dacă prima este tangentă fețelor unui tetraedru regulat de latură a, a doua este tangentă muchiilor acestui tetraedru, iar a treia trece prin vîrfurile tetraedrului.

I. Făgădaru, profesor Brad

4955. Un condensator plan cu suprafața plăcilor de 31,4 cm^2 și distanța dintre ele de 1 mm, este supus la o tensiune de 1 200 V. Dielectricul care umple spațiul dintre plăci are permitivitatea $\varepsilon = 4$. *a*) Ce valoare are sarcina electrică de pe armături și cum se schimbă, dacă se scoate dielectricul dintre plăci menținîndu-se tensiunea constantă; *b*) Cum variază tensiunea dintre armături, dacă condensatorul se deconectează de la sursă și apoi i se scoate dielectricul; *c*) Să se afle în ambele cazuri variația intensității cîmpului electric dintre armături.

* * *

4956. O dreaptă variabilă de direcție fixă taie latura AX a unghiului XAY în punctul B iar latura AY în punctul C. Paralele duse din B și C respectiv la laturile AY și AX taie bisectoarea interioară a unghiului XAY în D și E, iar bisectoarea exterioară în D' și E'. Să se afle locurile geometrice ale punctelor $M \equiv (CD, BE)$ și $M' \equiv (CD', BE')$.

Toma Albu, absolvent, Petroșani

4957. Un cadru dreptunghic de sîrmă cu suprafața de 25 cm^2 se află într-un cîmp magnetic uniform cu intensitatea $H = 8000$ Oe. Planul cadrului este paralel cu direcția cîmpului, lungimea sa fiind perpendiculară pe liniile cîmpului. *a*) Să se determine momentul cuplului care acționează asupra cadrului cînd acesta este străbătut de un curent de 4 A; *b*) Presupunînd că spira se poate roti, să se precizeze pînă cînd se va roti datorită cuplului de forțe și să se calculeze în acest caz variația fluxului magnetic care străbate suprafața spirei.

* * *

4958. Dacă l_n și S_n sînt respectiv lungimea laturei și aria unui poligon cu n laturi înscris în cercul cu raza egală cu unitatea, iar l_{2n} și S_{2n} lungimea laturei și aria unui poligon $2n$ laturi înscris în același cerc, avem:

$$\frac{l_n^2}{2l_{2n}^2} - \frac{S_n}{S_{2n}} = 1.$$

Ilie N. Constantinescu

4959. Să se afle valorile lui x pentru care avem pe rînd:

$$\sqrt{x+4-6\sqrt{x-5}}+\sqrt{x-1-4\sqrt{x-5}}=1$$
$$\sqrt{x+4-6\sqrt{x-5}}-\sqrt{x-1-4\sqrt{x-5}}=-1$$
$$\sqrt{x+4-6\sqrt{x-5}}+\sqrt{x-1-4\sqrt{x-5}}=-1$$
$$\sqrt{x+4-6\sqrt{x-5}}-\sqrt{x-1-4\sqrt{x-5}}=1$$

C. I. T.

4960. Să se afle valorile lui x pentru care avem pe rînd:

$$\sqrt{x+4-6\sqrt{x-5}}-\sqrt{x-1-4\sqrt{x-5}}=\sqrt{x-8}-1$$
$$\sqrt{x+4-6\sqrt{x-5}}+\sqrt{x-1-4\sqrt{x-5}}=\sqrt{x-8}+1$$

C. I. T.

4961. Să se reprezinte grafic curbele:

$$2y=\sqrt{x+y+1+3xy}+\sqrt{x+y+1-xy}, \qquad (C_1)$$
$$2y=\sqrt{x+y+1+3xy}-\sqrt{x+y+1-xy}. \qquad (C_2)$$

Folosind graficele curbelor (C_1) și (C_2) să se construiască graficele curbelor (C_3) și (C_4) care provin din curbele (C_1) și (C_2) respectiv, dacă x și y se înlocuiesc respectiv prin $-y$ și x.

C. Ionescu-Țiu

4962. Pe o suprafață metalică de cesiu cad radiații electromagnetice cu lungimea de undă $\lambda = 5$ mμ. Să se determine viteza maximă a fotoelectronilor emiși de suprafață, dacă pragul fotoelectric al cesiului este $\lambda_0 = 6600$ Å. *b)* Presupunînd că toți fotoelectronii cad pe armătura unui condensator cu capacitatea $C = 100$ cm și-l încarcă pînă la tensiunea $U = 300$ V, să se determine numărul de fotoelectroni emiși de suprafața metalică.

Maria Vanță, profesoară Petroșani

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PROPUSE PENTRU ȘCOALA DE 7 ANI*)

E: 1740. Un tată este mai în vîrstă decît fiul său cu 30 de ani. Dacă scădem trei ani din vîrsta tatălui, acesta este mai mare de $2\frac{1}{2}$ ori decît vîrsta fiului. Care este vîrsta tatălui și a fiului.

Mihai Brașoveanu, student Cluj

*) V (E: 1740, 1745, 1746); VI (E: 1742, 1743, 1747, 1748, 1749, 1752); VII (E: 1741, 1744, 1750, 1751).

E: 1741. Un paralelipiped drept are baza un pătrat, iar suprafața laterală se desfășoară într-un pătrat cu aria de 1024 dm^2. Care este volumul paralelipipedului ?

* * *

E: 1742. Viteza periferică a pietrei unui polizor este de 1000 metri pe minut, iar turația axului polizorului este de 15 rotații pe secundă. Să se afle diametrul pietrei de polizor.

* * *

E: 1743. Viteza periferică a unei roți este 60 m/s, iar diametrul roții este 25 cm. Să se afle cîte ture pe minut face roata.

P. Dobreanu, Moreni

E: 1744. Un trapez isoscel are baza mare de 140 cm, înălțimea de 120 cm și perimetrul de 440 cm. Să se afle lungimea liniei mijlocii și a unei diagonale.

* * *

E: 1745. Sînt 12 saci plini cu mere. 11 saci au mere de cîte 100 grame, iar unul are mere de cîte 110 grame fiecare. Din orice sac se pot scoate mere pentru cîntărire pentru a afla care este sacul cu mere de 110 g. Arătați cum se poate afla sacul cu mere de 110 g făcînd numai o singură cîntărire.

* * *

E: 1746. La o croitorie s-au adus 50 m de nailon și grenadin, plătindu-se 2740 lei. Să se găsească numărul metrilor de nailon și grenadin știind că 1 m de grenadin costă 18 lei iar 1 m de nailon costă 46 lei mai mult decît 1 m de grenadin.

Maglașiu Doina, elevă Deva

E: 1747. În Valea Jiului un vagonet de transportat cărbuni cîntărește, cînd este plin, 3850 kg. Umplut numai pînă la 5/7 din volumul său, cîntărește 9/11 din această greutate. Cît cîntărește vagonetul gol ?

Ciorobîtca Maria, profesoară Deva

E: 1748. Într-un laborator trebuie să se obțină o soluție de acid boric cu concentrația de 5%. Cîte grame de acid boric trebuie să se dizolve în 100 g apă pentru a obține această concentrație ? Dar într-un kilogram ?

Victor Oprișu, profesor Deva

E: 1749. Un miner, mergînd cu bicicleta urcă un drum cu viteza de 14 km pe oră ; la înapoiere, coboară cu viteza de 24 km pe oră. Care este lungimea drumului, dacă durata coborîrii este cu 10 minute mai scurtă decît durata urcării ?

Ciorobîtcă Maria, profesoară Deva

E: 1750. Să se arate că:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n},$$

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{n+1}{2},$$

$$\frac{\left(2-\frac{1}{2}\right)\left(2-\frac{1}{3}\right)\left(2-\frac{1}{4}\right)\ldots\left(2-\frac{1}{n}\right)}{\left(2+\frac{1}{2}\right)\left(2+\frac{1}{3}\right)\left(2+\frac{1}{4}\right)\ldots\left(2+\frac{1}{n}\right)}=\frac{3}{2n+1},$$

unde n este un număr întreg pozitiv.

C. Ionescu-Țiu

E: 1751. Să se arate că:

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\left(\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}\right.\cdot$$

$$\frac{\left(3-\frac{1}{2}\right)\left(3-\frac{1}{3}\right)\left(3-\frac{1}{4}\right)\ldots\left(3-\frac{1}{n}\right)}{\left(3+\frac{2}{2}\right)\left(3+\frac{2}{3}\right)\left(3+\frac{2}{4}\right)\ldots\left(3+\frac{2}{n}\right)}=\frac{5}{3n+2},$$

unde n este un număr întreg pozitiv.

* * *

E: 1752. Pentru săparea unor galerii la o mină de cupru lucrează două echipe de mineri, una formată din 15 mineri iar cea de a doua din 11 mineri.

Lucrînd cîte 8 ore pe zi prima echipă a săpat în 5 zile 148 m³ de minereu.

În cîte zile cea de a doua echipă, lucrînd cu unelte mecanizate va săpa 759 m³ de minereu dacă lucrează cîte 7 ore pe zi, știind că greutatea primei echipe se raportează la greutatea muncii celei de a doua ca 5 : 2, iar productivitatea muncii ultimei echipe la productivitatea muncii a primei echipe ca 17 : 7.

Parău Titus, elev Deva

DARE DE SEAMĂ
asupra organizării și desfășurării „Olimpiadei de matematică și fizică 1961"

Ca și în anii precedenți, în acest an Societatea de științe matematice și fizice din R.P.R. a organizat, cu sprijinul Ministerului Învățămîntului și Culturii și al sfaturilor populare, cea de-a XII-a „Olimpiadă de matematică și fizică" pentru elevii claselor VIII-XI ale școlilor medii de zi și medii seara, pentru elevii școlilor profesionale și tehnice de maiștri, precum și pentru elevii școlilor pedagogice.

În cele 11 ediții precedente, olimpiadele s-au dovedit a fi foarte bune ocazii pentru verificarea gradului de pregătire al elevilor, pentru stimularea îmbunătățirii pregătirii lor; de aceea, olimpiadele sînt urmărite cu interes, în fiecare an, de elevi și de familiile acestora, cît și de profesorii de matematică și fizică.

Popularitatea acestor concursuri, în rîndul elevilor, se oglindește în creșterea, an de an, a numărului de participanți. Astfel, în ultimii 3 ani numărul de elevi participanți s-a dublat. Dăm mai jos evoluția numărului de participanți la *etapa locală*, pe ani:

	1958	1959	1960	1961
matematică	12750	15237	19229	23005
fizică	8210	122.6	15569	16643

Organizarea acestor tradiționale întreceri constituie un important stimulent pentru pregătirea cît mai temeinică a elevilor, fiecare dintre ei aspirînd către un loc cît mai de frunte în „ierarhia" matematicienilor sau fizicienilor clasei, școlii, orașului, regiunii etc.

Aceste olimpiade au un caracter educativ, elevii participanți dovedind printr-o pregătire continuă și susținută că doresc să-și însușească cît mai multe și cît mai temeinice cunoștințe, ceea ce creează premisele pentru ca mai tîrziu, aportul lor în opera de desăvîrșire a construcției socialiste să fie cît mai important.

Pentru organizarea și desfășurarea olimpiadei, conducerea S.S.M.F. a luat din timp măsurile organizatorice corespunzătoare. În ședința sa din 4 ianuarie 1961, Biroul S.S.M.F. a numit comisiile centrale ale olimpiadelor, care au avut următoarea componență:

— *pentru matematică:* conf. univ. Gh. D. Simionescu președinte; conf. univ. T. Roman, conf. univ. O. Sacter, prof. C. Ionescu-Țiu, prof. Lucia Țene, membri.

— *pentru fizică:* lector Virgil Atanasiu, președinte; prof. Margareta Ailincăi, prof. N. Stănescu, conf. univ. N. Hangea, prof. Achim Marinescu, prof. Aurel Petrovanu, membri.

În urma indicațiilor primite din partea Biroului, filialele regionale S.S.M.F., cu sprijinul secțiilor de învățămînt și culturală regionale și raionale, au alcătuit comisiile regionale și locale. Comisiile olimpiadei au fost instruite de către filiale în legătură cu sarcinile ce le revin în organizarea și desfășurarea olimpiadei, pe baza regulamentului Olimpiadelor publicat în G.M.F.—B. și M.F.L. nr. 12/1957 și a experienței cîștigate în anii precedenți.

Ținînd o permanentă legătură cu secțiile de învățămînt și cultură, cu conducerile de școli și cu organizațiile U.T.M., comisiile locale și regionale au reușit să asigure condiții corespunzătoare desfășurării olimpiadei, ca: popularizare, antrenarea elevilor și profesorilor, săli de clasă și rechizite pentru lucrările scrise, condiții de cazare și masă pentru cei veniți din regiune, organizarea timpului liber — vizite, vizionări de spectacole — stimularea celor evidențiați prin acordarea de premii etc.

Sarcina selecționării problemelor propuse pentru olimpiadă a revenit comisiilor centrale care au stabilit subiectele lucrărilor scrise.

În acest an, comisia centrală pentru matematică a adoptat hotărîrea ca pe lîngă probleme obișnuite, să se propună la olimpiadă și unele probleme care să familiarizeze pe elevi cu unele noțiuni noi, cu necesitatea de a delimita locurile geometrice, de a rezolva probleme de construcții grafice etc., fără ca aceste probleme să aibă nevoie de cunoștințe speciale, dar să deprindă pe elevi să folosească cunoștințele lor la probleme mai puțin obișnuite, la care se cere o gîndire mai aprofundată.

Etapa locală a Olimpiadei s-a desfășurat în ziua de 5 februarie pentru matematică și în ziua de 12 februarie pentru fizică. La această etapă s-au prezentat 23005 elevi la matematică și 16643 elevi la fizică, ceea ce reprezintă o creștere de 19,64% și respectiv 6,9% față de anul 1960. Pe regiuni, numărul participanților la această etapă variază între 718 — matematică și 479 — fizică, în regiunea Hunedoara și 3322 — matematică și 1663 — fizică, în orașul București. Printre regiunile cu cea mai numeroasă participare citățm în afară de orașul București — regiunile: Banat, Ploiești și Brașov. Numărul școlilor reprezentate la această etapă a fost de 525 din 219 centre, la matematică și 484 școli din 213 centre la fizică.

Comisiile regionale au apreciat că în general subiectele propuse la această etapă au fost corespunzătoare. S-au semnalat totuși și deficiențe, ca: unele dintre problemele propuse nu puteau fi rezolvate, la data ținerii olimpiadei, deoarece necesitau cunoștințe din capitole ce încă nu se studiaseră. La stabilirea grupelor și subiectelor nu s-a putut ține cont de unele nepotriviri între programe (la secțiile de zi și cele serale sau la diferite școli profesionale). De asemenea, nu s-a ținut seama de faptul că la anul III școli pedagogice nu se studiază trigonometria. La fizică problemele au fost prea ușoare, în special la cl. a X-a.

Etapa regională a avut loc în ziua de 23 martie, cea de matematică dimineața, iar cea de fizică după amiază și s-a desfășurat la 17 centre regionale. În Capitală și orașul Constanța au funcționat cîte un singur centru, la care s-au prezentat atît elevii din orașele amintite cît și cei din regiunile București și respectiv Dobrogea, iar în regiunea Suceava au funcționat două centre.

Pentru buna desfășurare a acestei etape, Biroul S.S.M.F. a trimis în centrele de concurs delegații săi, care au dus subiectele și au supraveghiat buna desfășurare a concursului.

La această etapă au participat 2912 elevi la matematică și 3679 elevi la fizică. Pe regiuni, numărul participanților oscilează la matematici între 81 (reg. Dobrogea și oraș Constanța) și 458 (oraș București), iar la fizică între 109 (reg. București) și 452 (oraș București). Ca și la etapa locală, după Capitală, numărul cel mai mare de participanți a fost înregistrat în regiunile Banat și Ploiești, iar un număr mai mic în regiunile Dobrogea, București și Hunedoara.

În toate regiunile, această etapă s-a desfășurat în bune condiții. Secțiile de învățămînt și cultură regională au asigurat transportul la centrele de regiune al tuturor elevilor participanți, precum și cazarea și masa acestora. În timpul liber al elevilor, comisiile regionale, cu sprijinul organelor locale au organizat vizite la muzee, locuri istorice, întreprinderi, au vizionat spectacole de teatru (reg. Iași și Maramureș), sau de cinema (reg. Dobrogea și Hunedoara) etc.

Unele subiecte propuse la etapa regională au fost criticate în mai multe rapoarte ale comisiilor regionale. Astfel, unele subiecte au fost redactate confuz (cl. a X-a matematică), sau incomplet (cl. a X-a fizică). La unele clase chestiunile au fost prea dificile (cl. a IX-a matematică, subiectul de analiză de la cl. a XI-a) ori s-au referit la chestiuni scoase din programele școlare (fizica: cl. a VIII-a — supraînălțarea căii ferate la curbă, cl. a XI-a — formulele oglinzilor sferice).

Majoritatea comisiilor regionale au arătat că timpul rezervat corectării lucrărilor a fost mult prea scurt, ceea ce a făcut ca unele lucrări să fie văzute superficial.

Au fost evidențiați, la această etapă, un număr de 339 elevi la matematică și 629 elevi la fizică, cărora li s-au acordat premii în cărți și diplome. Ca și în anul trecut valoarea premiilor a variat foarte mult de la regiune la regiune, datorită sprijinului material diferit pe care secțiile de învățămînt și cultură regională l-au acordat. Aceasta se datorește atît modului diferit în care organele sfaturilor regionale au înțeles importanța olimpiadei de matematică, cît și activității depuse de filialele S.S.M.F. și comisiile regionale.

Etapa finală. Dintre elevii evidențiați au participat la etapa finală un număr de 355 elevi (165 la matematică și 190 la fizică), repartizați pe regiuni astfel: Argeș - 14, Bacău - 21, Banat - 22, Brașov - 20, oraș București - 73, reg. București - 13, Cluj - 21, Crișana - 18, oraș Constanța și reg. Dobrogea - 11, Galați - 14, Hunedoara - 15, Iași - 22, Maramureș - 8, Mureș Autonomă Maghiară - 7, Oltenia - 20, Ploiești - 31 și Suceava - 25.

Această etapă s-a desfășurat în zilele de 23—25 aprilie, în Capitală. La matematică examenul a constat din două probe scrise și una orală, la fizică adăugîndu-se și lucrări de laborator. Pentru corectarea și notarea lucrărilor scrise, precum și pentru aprecierea cunoștințelor la examenul oral, au fost constituite comisii pe clase, astfel:

La matematică: cl. a VIII-a și anul II șc. teh. de maiștri — N. N. Mihăileanu (București) — președinte; Cornel Georgescu (Craiova), Ana Gereanu (București), Traian Cohal (Iași), Dalvina Berghianu (București) și Emanoil Dogăroiu (Brăila), membri.

Cl. a IX-a, anul III șc. ped. și anul II șc. prof.: C. Ionescu-Țiu (București) — președinte: Mihai Cîrje (Bacău), Vasile David (Baia-Mare), Tiberiu Weszely (Tg. Mureș), Pavel Perebiceanu (Alba Iulia) și Teodor Teodoridis (București), membri.

— Cl. a X-a și anul I șc. prof: O. Sacter (București) — președinte; Valentina Predescu (Pitești), Elisabeta Nemeth (Tg. Mureș), Ileana Kaflikiewicz (Arad), Ilarion Zaharaciuc (Suceava) și Iancu Wais (București), membri.

— Cl. a XI-a și anul I șc. tehn. de maiștri: Gh. D. Simionescu (București) — președinte, Ioan Gligor (Timișoara), I. Grigore (Ploiești), Paul Cociorvă (Orăștie), Pater Zoltan (Baraolt), I. Mateescu (Giurgiu) și Constantin Teodorescu (Dragomirești), membri.

La fizică: cl. a VIII-a și anii I și II șc. prof.: Ion Jaliu (București) — președinte, D. Potoceanu (Vaslui), I. Constantinescu (Brașov), Georgeta Pop (București), membri.

— Cl. a IX-a și șc. teh. maiștri: Aurel Petrovanu (București) — președinte, Iulian Buzu (Roșiori de Vede) și G. Tarnoki (Oradea), membri.

— Cl. a X-a: Margareta Ailincăi (București) — președinte, N. Stănescu (București), Lucia Iordăchescu (Bacău) și Constantin Popescu (Tr. Măgurele), membri.

— Cl. a XI-a: Virgil Atanasiu (București) — președinte, Angela Negulescu (București), Nistor Gall (Oradea), Voichița Dragu (Constanța) și Emilia Gheorghiu (București), membri.

Lucrările practice s-au efectuat în laboratoarele de fizică ale școlilor medii nr. 13 și 15, sub supravegherea tov. prof. Angela Negulescu, respectiv N. Stănescu.

La etapa finală au fost premiați 52 elevi (24 pentru matematică și 28 pentru fizică), iar alții 37 au fost menționați (matematică 22 și fizică 15).

Pe regiuni, numărul celor premiați și evidențiați, se repartizează astfel: orașul București - 27; reg. Ploiești - 11; Banat - 9; Brașov - 6; Crișana și Iași cîte 5; Argeș, Cluj și Suceava cîte 4; Bacău, oraș Constanța și reg. Galați cîte 3; Oltenia - 2; reg. București, Hunedoara și Mureș Autonomă Maghiară cîte 1, iar Dobrogea și Maramureș niciunul. Lista premianților și menționaților a fost publicată în G.M.F. seria B nr. 6/1961. Premianții I au primit ca premiu și o excursie în R. P. Bulgaria.

În zilele desfășurării acestei etape, S.S.M.F. s-a îngrijit de organizarea timpului liber al elevilor. S-au vizitat piața Palatului și Muzeul de Artă, Muzeul de Istoria Partidului, Parcul de cultură și odihnă I. V. Stalin. În ziua de 24 aprilie, după-amiază s-a organizat „Turul orașului București" cu autocarele O.N.T., iar seara elevii au vizionat un spectacol la teatrul Municipal, sala Filimon Sîrbu.

Închiderea festivă a olimpiadei s-a făcut marți 25 aprilie în sala de teatru a Palatului Pionierilor.

Au luat cuvîntul tov. acad Gr. C. Moisil (președintele Societății), tov. P. Vîlcu (director în Ministerul Învățămîntului și Culturii), și elevul Diaconescu Radu în numele participanților și evidențiaților la olimpiadă, după care a urmat înmînarea premiilor.

Lucrările scrise au arătat că la matematică mulți elevi posedă temeinice cunoștințe de algebră, dar au unele lipsuri la geometrie analitică — la aplicații cu locuri geometrice și construcții grafice, care sînt prevăzute și în programele și manualele școlare (cl. a IX-a). De asemenea, s-au dat multe rezolvări incomplete la unele probleme care deși necesitau cunoștințe obișnuite, au prezentat însă un caracter diferit de cel al problemelor din manual (cl a X-a). Elevii din clasa a XI-a au dovedit unele lipsuri la chestiunile de analiză, ceea ce arată că nu s-au făcut destule aplicații pentru o mai bună aprofundare.

La fizică, chestiunile au fost tratate de majoritatea elevilor participanți, iar problemele mai dificile au fost rezolvate de un număr mai redus de elevi.

În desfășurarea olimpiadelor s-au întîmpinat și unele greutăți, în special în ceea ce privește stabilirea problemelor pentru cele trei etape ale olimpiadelor. Filialele și subfilialele S.S.M.F. nu au acordat suficientă atenție strîngerii de probleme propuse pentru olimpiadă de către profesorii de matematică și fizică din școli, îngreunînd astfel în mod considerabil activitatea comisiilor centrale, care într-un timp relativ scurt au trebuit să pregătească un mare număr de probleme pentru tipuri de școli și clase diferite. Este necesar ca pe viitor, încă din toamnă, filialele să se preocupe de strîngerea problemelor propuse, pentru a putea fi trimise din timp și în număr suficient comisiilor centrale în vederea selecționării lor.

Privită în ansamblu, cea de-a 12-a ediție a O.M.F. a dovedit interesul sporit al elevilor și profesorilor pentru această acțiune de masă a activității extrașcolare la matematică și fizică și preocuparea școlii față de nivelul în creștere permanentă al cunoștințelor științifice ale tinerei generații. S-a confirmat din nou că olimpiadele de matematică și fizică sînt o tradiție sănătoasă a învățămîntului din țara noastră, ele contribuind din plin la depistarea și stimularea celor mai talentate elemente din rîndurile tineretului școlar.

Dintre elevii claselor a X-a și a XI-a, evidențiați la olimpiada de matematică, au fost aleși, în urma unui concurs de selecție, un număr de 8 elevi, care au participat între 8—16 iulie, la cea de-a III-a ediție a Olimpiadei Internaționale de matematică, ce s-a desfășurat în orașul Veszprém din R. P. Ungară.

I. MUȘAT

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

TIRGU MUREȘ (Mureș). **Ș.m. 1. Unirea** Cl. VIII. Kancsar Marton (4499, 503, 04, 17, 19, 43, 46, 61, 77, 91, 604. E: 1618, 19, 23, 25, 29, 32, 43—47, 50, 52, 57, 60), Matei Magda (4503, 04, 09, 19, 36, 39. E: 1617—25, 27—29, 37, 38, 42, 43, 45—47).

Ș.m. 2. Papiu Ilarian. Cl. VII. Simovici Melita (E: 1583, 87—93, 95—97, 600—04, 07—09, 11, 15, 16). Stratan Valentin (E: 1592—94, 97, 99—604, 07, 08, 10, 11, 14, 16—25, 28, 31). Cl. VIII. Mărcuș Petru (E: 1599—601, 04, 06—11, 13—18, 20, 21, 23, 26, 27, 31).

TIRGU NEAMȚ (Bacău). **Ș.m. Ștefan-cel-Mare.** Cl. VIII. Drăghici Maura (E: 1599, 600, 03—05, 07—12, 14—18, 20, 21, 23, 27, 31, 37), Tăraboanță Elena (E: 1599, 600,

04, 05, 08—10, 16, 21, 23, 27), Ticu Florica (E: 1599, 600, 04, 07—10, 15, 16).

TÎRGU OCNA (Bacău). Absolvent Micadu M. Mihail (4499—509, 11, 14, 17—19, 25—28, 31, 33—43, P).

TÎRNĂVENI (Mureș). Ș.m. Alexandru Sabia. Cl. VIII. Ciurca Viorica (E: 1587, 99, 600, 05, 08, 10, 16, 21, 27, 29), Mittelman Eva (E: 1587, 99, 600, 08, 10, 15, 17, 21, 27, 29), Rusu Victor (E: 1587, 89, 99, 600, 05, 08, 10, 16, 21). Cl. X. Costea I. Viorel (4434, 43. 67, 83, 503, 04, 09, 10, 27, 41).

TRUSEȘTI (Suceava). Cl. VIII. Apostol Zina (E: 1584, 8, 991, 97, 605, 08, 10, 13, 17, 20, 23, 31), Cîrlan Veronica (E: 1584, 89, 91, 600, 08, 10, 11, 17, 20, 23), Feraru Constantin (E: 1607, 08, 10, 13, 15). Cl. X. Mutezac Elena (4432, 75, 81, 82, 84, 506, 09, 43, P).

Turda (Cluj). Ș.m. 1. Mihai Viteazul. Cl. VII. Olariu Adriana (4509. 19, 33, 36, 37, 43, 51, 52, 56, 57), Filip M. Liana (4501, 09, 18, 19, 33, 37, 43, 46, 51, 75, 77), Păcuraru Liana (4509, 19, 33, 36, 37. 43, 46, 51, 52, 56).

TULCEA (Dobrogea). Absolvent Tocu Dorin (4420, 23, 24, 29, 99, 505, 07, 09, 19, 31, 39). Cl. X. Slavov Elisabeta (4380—84, 96, 417, 72, 75, 81).

TURNU MĂGURELE (București). Ș.m. Unirea. Cl. VI. Bolan Rodica (E: 1603, 09, 11—15, (Frățilescu Oana (E: 1617, 20, 21, 26, 27, 31. 33, 36—38). Cl. VIII. Corun George (E: 1617, 18, 20, 21, 23, 29, 31, 33, 34, 37, 38, 42, 43).

TURNU SEVERIN (Oltenia). Ș.m. 1. Traian. Cl. VI. Vișan N. I. (E: 1617, 20, 22, 23, 27, 28, 34, 37, 38, 42, 48, 51, 53—55, 58).

Ș.m. 2. Cl. VI. Roată Delia (E: 1589, 91, 93, 98, 9, 601, 07, 08, 11, 14). Cl. IX. Cornea Dumitru (P). Cl. X. Mocioiu I. Doru (4483, 506, 09, 31, 36, 43), Zaharia Gheorghe (4472, 81, 83, 84, 509, 31, 36).

URZICENI (București). Cl. X. Leu Petre (4480, 84, 99, 500, 06, 09, 10, 17, 19, 20, 35, 37, 39, 40, 43).

VĂLENII DE MUNTE (Ploiești). Cl. VIII. Georgescu Liana (4543, E: 1587, 88, 97, 600, 09, 17, 18, 21, 23), Mișторică Gheorghe (E: 1583, 86, 600, 08, 15, 20, 27, 42, 44, 45), Neacșu Gheorghe (4475, E: 1585, 86, 90, 95, 600, 07, 13, 15).

VALEA LUNGĂ (Ploiești). Șc. de 7 ani. Cl. VI. Tîrcă I. Mihail (E: 1583—87. 89—98, 600, 04, 05, 07—13, 15—23, 25—29, 31).

VASLUI (Iași). Ș.m. 2. Cl. VIII. Crișan Liliana (4453, E: 1583, 84, 87, 94, 98—601, 04, 08—10, 13, 16). Cl. XI. Raica Dumitru (4419, 22, 31, 32, 43, 44, 69, 70, 95, 503—06, 09, 36, 38).

VIDELE (București). Cl. X. Purcel N. Gheorghe (4447, 52, 68, 75, 79—84, 96, 543).

ZALĂU (Cluj). Cl. VI. Urs Ioan (E: 1600, 01, 04. 07, 10, 13, 17, 20, 21, 27). Cl. VII. Elec T. Maria (E: 1596—601. 03—15, 17, 18, 20, 21). Cl. IX. Gajzago Maria (4480, 81, 83, 509, 36, 39, 43). Cl. XI. Gajzago Katalin (4462, 66, 71, 73, 500, 09, 13, 33, 36, 39, 40, 43).

Pînă la 1 mai 1961 s-au mai evidențiat ca rezolvitori de probleme de fizică din G.M.F.-B :

Vîlceanu Sabin, absolvent Tg. Jiu și Pavel N. Radu, cl. XI. Ș.m. 3. Craiova.

Pînă la 1 mai 1961 s-au mai primit soluții bune la probleme de fizică din G.M.F.-B, după cum urmează :

ABRUD (Cluj). Cl. X. Mucke Ana (4504, 27, 85, 600). Cl. XI. Neagu Petru (4503, 04, 21, 49).

AFUMAȚI (București). Cl. XI. Neiner C. Gheorghe (4319, 25, 27, 33, 52, 56, 67, 98, 99, 407, 21, 22, 37, 41—43, 67, 69—71, 78, 86—88).

AIUD (Cluj). Cl. X. Ciugudeanu Nicolae (4503, 04, 26, 27, 54, 79, 83, 85, 90, 92, 96, 600), Leția Ioan (4421, 29, 31, 34, 43, 54).

ANINA (Banat). Cl. VII. Petric Mircea (E: 1619, 25). Cl. XI. Croitoru Constantin (4487, 94, 504, 27, 28, 66, 71, 85, 96, 600), Latzko William (4422, 34, 56, 86, 88, 95, 503, 04, 27, 28). Rogobete Ilie (4422, 31, 34, 43, 56, 67, 69, 86, 88, 95, 504, 27), Timișan Gheorghe (4422, 31, 33, 34, 67, 69, 86, 88, 95, 504, 24, 27).

ARAD (Banat). Cl. X. Frent Militon (4422, 31, 34, 41, 43, 67, 69, 70, 87, 88, 503, 04, 27), Malcoci Andrei (4434, 36, 41, 43, 49, 56, 67, 70, 87, 88). Cl. XI. Macovei Rodica (4398, 43, 32, 34, 42, 43).

BAIA DE ARIEȘ (Cluj). Cl. IX. Ciura Alexandru (4477, 70, 86, 503, 28).

BAIA MARE (Maramureș). Cl. IX. Strebeli Ștefan (4516, 21, 28, 54, 55, 66, 85, 90, 96). Cl. X. Pop Arghir (4421, 22, 36, 43, 56, 67, 70, 523, 27).

BISTRIȚA (Cluj). Cl. X. Cîrcu Ioan (4503, 04, 16, 28), Galu Ioan (4469, 88, 527). Cl. XI. Olaru Grigore (4503, 04, 14, 16, 24—28, 49, 63, 66, 72), Pașca Iuliu (4467, 69, 70, 76, 869—88, 94, 504, 14, 16, 23, 26, 49, 66, 85, 89, 600).

BIRLAD (Iași). Cl. X. Bostan Maria (4398, 422, 31, 34, 41, 43, 70).

BOCȘA. Cl. XI. Florei Viorel (4422, 31, 34, 41, 43, 54, 95, 503, 04, 27).

BOLINTINUL DIN VALE (București). Cl. VIII. Andrei Georgeta (4442, 54), Deftu Teodora (4503, 04), Dumitru Florica (4434, 41, 42, 54, 503, 04), Ilie Maria (4434, 41, 503, 04), Popa Maria (4454, 503, 04), Cl. IX. Dumitrache Georgeta (4503, 04), Florescu Cornel (4503, 04), Cl. X. Badea Gheorghe

(4421, 22, 34, 41, 42, 54, 503, 04), Dinu Aneta (4434, 41, 503, 04), Dumitru Florica (4442, 54), Dumitru Ion (4434, 41, 42, 54, 503, 04), Marinescu Niculina (4434, 41, 503, 04), Mihuț Octavian (4421, 22, 34, 41, 42, 54, 58, 503, 04). Pandeli Tudor (4441, 504).

BOTOȘANI (Suceava). Cl. X. Segall Arnold (4504, 27, 85, 96, 600).

BRAȘOV. Șc. prof. An. II. Drugă Leontin (4527, E: 1619, 22, 25).

Șc. tehn. maiștri. An. I. Bunea Ionel (4421, 68—70, 88, 94, 95, 503, 04, 26, 27).

Ș.m. 1 Cl. XI. Garabedian Rodica (4476, 94, 95, 503, 04, 14, 27, 28, 49, 50, 55, 63, 66, 72, 85, 89, 600), Goșman Gheorghe (4488, 95, 503, 04, 14, 27, 49).

BREAZA (Ploiești). Cl. VIII. Gîrză Ilie (E: 1602, 19, 22, 25).

BUHUȘI (Bacău). Cl. X. Andrei Vasile (4527, 54, 63, 79, 85, 96).

BUZĂU (Ploiești). Ș.m. 1. Cl. IX. Costea Ion (4398, 999, 407, 31, 34, 42, 43, 56, 67, 70, 86), Ionescu V. Grigorian (4431, 34, 54, 56, 70). Cl. X. Rujan Dan (4503, 04, 16, 26, 27, 28, 48, 55, 63, 66, 71, 83, 85, 96, 600, 11).

BUCUREȘTI. Absolvent Popescu Andrei (4467, 69, 70, 78, 95, 503, 04, 27, 49).

Tehnician I.O.R. Drăgan St. Marin (4503, 04, 16, 27, 28, 66, 79, 85).

Ș.m. 1 Cl. X. Grunblatt Mihai (4398, 99, 421, 22, 31, 32, 34, 42, 43, 54), Răzvan Vladimir (4436, 39, 45, 56, 78, 94, 503, 04, 16, 24, 26—28), Talle Petru (4431, 34, 504), Timoșenko Alexandru (4469, 70, 87, 95, 504, 04, 16, 26—28). Ș.m. 3. Cl. IX. Ionescu N. St. (4486, 516, 28, 54, 83, 85, 90, 96, 600). Ș.m. 7. Cl. X. Radian Thea (4503, 04, 27, 28, 66, 72, 85, 96, 600), Stan Ștefan (4389, 98, 99, 407, 09, 21, 22, 31, 34, 41—43, 56, 67, 86, 87, 94). Cl. XI. Busuioc Ion (4422, 31, 34, 37, 43, 69, 88, 504). Ș.m. 11. Cl. IX. Agrocostea Mihai (4398, 99, 431, 34, 41, 54), Cancer Șerban (4503, 04, 16, 28, 48, 54, 55, 66, 79, 85, 90), Simiu Cornel (4503, 16, 28, 85, 90), Ursulescu Florin (4399, 407, 41, 54, 67, 86, 94). Cl. X. Georgescu Horia (4398, 99, 407, 21, 22, 31, 32, 34, 41, 43, 54, 67, 76, 88, 94, 503, 04), Gianni Emanuel (4389, 92, 98, 99, 407, 09, 34, 41, 67, 70, 78, 86, 94). Cl. XI. Cătănescu Vasile (4398, 99, 407, 21, 22, 31, 34, 37, 41, 43, 67, 70, 78, 88, 95), Cristescu Dragoș (4467, 69, 78, 86, 88, 93, 503, 04, 25, 27), Rotaru George (4467, 36, 41, 43, 67, 70, 86, 93, 95). Ș.m. 13. Cl. XI. Constantinescu Mircea (4421, 22, 31, 34, 37, 42, 43, 54, 57, 503, 27). Ș.m. 19. Feran Monica (4398, 99, 421, 31, 34, 41—43, 67, 70, 86, 87). Ș.m. 20. Cl. XI. Hîrșan Doru (4467, 78, 88, 95, 503, 04, 14, 503, 04, 16, 26—28), Ilie Mihai (4469, 78, 88, 95, 503, 04, 14, 27, 49, 50, 54—56), Lefterescu Olimpia (4503, 04). Ș.m. 22. Cl. X. Antoniu Gheorghe (4421, 22, 31, 34, 42, 43).

Ș.m. 34. Cl. VIII. Cernicica Petre (E: 1602, 19, 22, 25, 28, 470, 86, 503). Șc. de 7 ani nr. 23. Cl. VII. Georgescu Cosmin (E: 1619, 22, 25).

CARACAL (Oltenia). Ș.m. 1. Cl. VI. Rădulescu Sever (E: 1622). Cl. IX. Popa Emil (4467, 86, 503, 16, 54, 55, 66, 85, 90, 400).

CARANSEBEȘ (Banat). Ș.m. 1. Cl. X. Vetreș Ion (4504, 28, 63, 66, 85). Ș.m. 2. Cl. VIII. Miloș Marius (E: 1622, 28). Cl. X. Liuba Gheorghe (4422, 31, 34, 43, 54, 69, 88, 504, 27).

CÂRBUNEȘTI (Oltenia). Cl. XI. Gușiță Marcel (4503, 04, 14—16, 21, 23, 24, 26—28, 49, 50, 54, 55, 63, 66, 72).

CIMPIA TURZII (Cluj). Cl. X. Ganea Macedon (4503, 04, 27, 28, 55, 66, 79, 83, 85, 96, 600), Nemeș Mihai (4431, 34, 42, 43, 78, 87, 88, 95, 503, 04, 09, 27, 48, 66, 85, 600).

CIMPINA (Ploiești). Cl. IX. Gîrboveanu Adriana (4516, 85). Cl. X. Circiumaru Liviu (4503, 04, 16, 21, 27, 28, 48, 54, 66, 85).

CIMPULUNG MOLDOVENESC (Suceava). Cl. X. Bădescu Lucian (4333, 89, 98, 99, 421, 22, 31, 34, 42, 43, 70), Bruja Aurora (4389, 98, 99, 407, 09), Dinică Maria (4398, 99, 4 7, 09), Dimov Victor (4389, 98, 99, 407, 09), Mihaiuc Oltea (4398, 99, 407, 09), Rosner Igo (4398, 99, 407, 09).

CIMPULUNG MUSCEL (Argeș). Șc. pedagogică. An III. Ivașcu Gh. (4503, 66, 85, 600).

CLUJ. Ș.m. George Coșbuc. Cl. VII. Ronai Petru (E: 1619, 22, 24). Ș.m. Mihail Eminescu. Cl. VIII. Klein George (E: 1619, 22, 25). Ș.m. Nicolae Bălcescu. Cl. VII. Weisz Gheorghe (E: 1585, 88, 1601, 02). Ș.m. Ady Șincai. Cl. IX. Moskovitz Ioan (4467, 70, 86, 87, 503, 04, 16, 28, 55, 66, 71).

CONSTANȚA. Ș.m. 1. Cl. XI. Bădică I. Dan (4421, 22, 67, 69, 70, 76, 86, 88, 94, 95). Ș.m. 3. Cl. VII. Dinescu Gabriela (E: 1601, 02).

CORABIA (Oltenia). Cl. XI. Hărătău Ion (4524, 27, 611), Tătaru Alexandru (4469, 70, 86, 95, 503, 04, 21, 25—27, 49).

CRAIOVA (Oltenia). Ș.m. 1. Cl. X. Mărculescu Gina (4431, 34, 78).

Ș.m. 3. Cl. XI. **Pavel N. Radu** (4335, 50, 89, 92, 401, 02, 03, 07, 09, 32, 34, 36, 37, 41—43, 56, 67, 70, 76, 86—88, 94, 95, 503, 04).

DEJ (Cluj). Cl. IX. Schmolt Eugen (4431, 34, 56).

DEVA (Hunedoara). Cl. XI. Clipii Tudor (4503, 04, 16, 26—28, 49, 56), Bunea Bănică (4398, 99, 407, 42, 43, 86, 87, 503, 28).

DRĂGĂNEȘTI-OLT (Argeș). Cl. XI. Raicu Viorel (4442, 67, 70, 87, 94, 95, 503, 04, 27, 28).

FĂLTICENI (Suceava). Cl. IX. Rabinovici Silviu (4486, 87, 94, 503, 04, 28, 55, 66).

FETEȘTI (București). Cl. X. Popescu Marcel (4408, 31, 34, 504, 27), Coșug Vasile (4398, 99, 4421, 22, 31, 32, 34, 42, 54, 58).

FOCȘANI (Galați). Cl. X. Pantelimon Anton (4421, 42, 67, 94, 503, 04, 27). Cl. XI. Năstase Aurel (4398, 99, 401—03, 21, 22, 31, 34, 42, 43, 56, 57, 69, 94, 95).

GALAȚI. Cl. VIII. Marcus Sergiu (E: 1619, 22, 25), Zisu Vasile (E: 1622). Cl. IX. Rosenthal Bonica (4367, 98, 441, 43, 86, 34). Cl. X. Ender Lucian (4467, 69, 70, 76, 78, 86—88, 94, 95, 503, 04, 16, 26—28, 48, 55, 63, 66, 71, 72). Cl. XI. Gheorghiu Cristel (4422, 31, 34, 42, 43, 54, 56, 57, 69, 70, 94, 95, 503, 04, 26, 27), Spînache Dan (4421, 22, 31, 32, 34, 41, 42, 67, 69, 70, 86, 94, 95).

GIURGIU (București). Cl. IX. Mîrlogeanu Ilie (4422, 31, 34, 36, 41, 43, 54, 56, 69, 88, 503, 04, 27). Cl. X. Soare V. Dumitru (4469, 75, 88, 504, 27, 28, 66).

HUȘI (Iași). Cl. X. Creţu Petru (4421, 22, 31, 34, 69, 86, 87, 88, 503, 04, 27). Cl. XI. Bejan Gheorghe (4432, 34, 43).

IAȘI. Cl. XI. Pavel Nicolae (4398, 99, 431, 32, 34, 37, 42, 86, 503).

INEU (Crișana). Cl. XI. Condrea Vasile (4421, 22, 31, 32, 34, 36, 37, 41—43, 56, 69, 70, 77, 86, 88, 95, 503, 04, 16, 27).

LONEA (Hunedoara). Absolvent Grozavu Mihail (4422, 31, 34, 42, 43, 86, 87, 95).

LUGOJ (Banat). Cl. VIII. Doba Dan (E: 1576, 85, 88, 1601, 02, 09, 13, 14, 486), Vasiliu Dan (E: 1576, 85, 88, 601, 02, 14, 19, 22, 25, 486, 503, 48, 85, 90).

MEDIAȘ (Brașov). Cl. VIII. Brădișteanu Adrian (E: 1601, 02, 19, 22, 25, 503, 16, 21). Cl. X. Birk Hans (4422, 31, 34, 42, 43), Roth Siegfried (4422, 31, 34, 43).

MOINEȘTI (Bacău). Cl. X. Anițoaie Emil (4503, 04, 16, 21, 27, 55, 79, 83, 85, 90).

OCNA MUREȘ (Cluj). Cl. IX. Horvitz Ossi (4421, 31, 34, 41, 43, 86, 87, 503, 04, 16, 28).

ORADEA (Crișana). Cl. VIII. Davidescu Mircea (E: 1601, 02; 4467, 86). Cl. X. Viorel Dan (4503, 04, 27, 66, 85). Cl. XI. Farcaș Liviu (4467, 69, 70, 86, 88, 91, 93, 503, 04).

ORAVIȚA (Banat). Cl. VI. Florescu Florian (E: 1622, 28, 60).

PANCIU (Galați). Cl. X. Gheț Ioan (4422, 31, 34, 43, 69, 88, 95, 503, 04, 63, 66).

PETROȘENI (Hunedoara). Cl. VIII. Orlov Zinaida (E: 1585, 88, 619, 22, 25, 28, 470, 86, 516).

PITEȘTI (Argeș). Cl. X. Stancu Ion (4467, 69, 88, 503, 04, 23, 26—28, 55, 63, 66), Zamfir Cornel (4495, 503, 04, 16, 28, 63, 85, 600, 11).

PLOIEȘTI. Ș.m. 1. I. L. Caragiale. Cl. X. Brebeanu Ștefan (4422, 31, 32, 34, 42, 43, 54, 67, 69, 86, 88, 503, 04, 27), Ciornel Lucian (4422, 31, 32, 34, 42 43, 54, 67, 69, 86, 88, 503, 04, 27), Constantinescu Al. Marius (4503, 04, 16, 27, 28, 63, 66, 83, 85, 96, 600), Drăghicescu Mariana (4422, 31, 32, 34, 42, 43, 54, 67, 69, 86, 88, 503, 04, 27), Emanoil Const. (4548, 55, 63, 66, 72, 85, 96, 603, 50, 69), Popescu Cornel (4422, 31, 32, 34, 43, 54, 67, 69, 86, 503, 04, 27). Cl. XI. Doleti Ioan (4432, 42, 54, 67, 69, 76, 78, 86, 87, 94, 95, 503, 04), Ene I. Traian (4476, 78, 87, 95, 503, 04, 16, 26, 27, 48, 49, 66, 69, 85, 90).

Ș.m. 3. Cl. IX. Stăvaru Cristina (4392, 407, 34, 41, 43, 86, 503, 16, 28).

PREDEAL (Brașov). Cl. VII. Ioniță I. Maria (E: 1602, 19, 22, 25).

PUCIOASA (Ploiești). Cl. IX. Ene Ioan (4503, 16, 21, 22, 48, 54, 55, 66, 79, 83, 85, 600). Cl. X. Marin Victor (4367, 98, 99, 422, 31, 34).

REȘIȚA (Banat). Cl. X. Vuc Milan (4467, 69, 70, 88, 95, 503, 04, 16, 26, 27).

SIBIU. Absolvent That Frieden (4491, 503, 04, 14, 26—28, 66, 79, 85). Ș.m. 1 Cl. VII. Băcilă Dorel (E: 1619, 52). Cl. IX. Mihu Dumitru (4503, 66, 86). Cl. XI. Braitsch Dieter (4515, 24, 50, 55, 63, 66, 85, 96, 611). Ș.m. 2. Cl. VIII. Trif Maria (E: 1619, 22, 25). Ș.m. 3. Cl. XI. Arhir Ioan (4434, 69, 95, 503, 04, 27). Ș.m. 15. Cl. VII. Călin Venera (E: 1619, 22, 25), Munteanu Rodica (E: 1619, 22, 25), Rotaru Ioana (E: 1622, 28, 53, 660), Șerban Marieta (E: 1619, 25, 60). Șc. tehn. constr. An I. Dan Virgiliu (4470, 86, 88, 91, 95, 503, 04, 26—28).

SIGHIȘOARA (Brașov). Ș.m. 1. Cl. IX. Poștoiu Eugenia (4398, 99, 407, 41—43, 56, 70, 86, 94), Udrea Viorel (4442, 56, 67, 70, 86, 503, 09, 17, 35, 36). Cl. X. Cristea Voicu (4467, 69, 76, 88, 91, 95, 503, 04, 16, 23, 27, 28). Cl. XI. Pintea Paula (4421, 22, 31, 37, 42, 43, 67, 69, 88, 95), Popescu Gabriel (4398, 99, 407, 09, 22, 31, 32, 34, 37, 95). Ș.m. 2. Cl. X. Cornea Marius (4422, 31, 32, 42, 43, 54, 56, 503, 04), Vlăduțiu Mircea (4503, 04, 16, 21, 26—28, 66, 83, 85). Cl. XI. Engberth D. (4422, 31, 34, 37, 42, 43, 70, 77, 86, 93, 95, 503, 04, 16, 25—27).

SIMERIA (Hunedoara). Cl. XI. Novac Anghel (4496, 503, 04, 26).

SOHATU (București). Cl. VII. Decu Aurel (E: 1622, 25).

TUȘNAD (Reg. Mureș). Cl. X. Uglai Alexandru (4503, 04, 27, 85, 96).

TIRGU JIU (Oltenia). Absolvent Vîlceanu Sabin (4268, 70, 77, 85, 86, 87, 97, 98, 300, 18, 19, 23, 36, 49, 52, 58, 67, 98, 99, 401, 02, 07, 22, 31, 32, 37, 41—43, 67, 70, 95, 503, 04, 27, 50, 54, 63, 66).

TIMIȘOARA (Banat). Abs. Zăgreanu Nicolae (4555, 63, 66, 72, 79, 96). Ș.m. 1. Cl. X. Munteanu Dan (4421, 22, 31, 32, 39, 41—43, 45, 56, 67, 70, 87, 94, 504, 26—28, 55, 66, 71). Ș.m. 7. Cl. X. Gora Horațiu (4469,

88, 95, 504, 27). Ş.m. muzică. Cl. VIII. Penţia Mircea (E: 1619, 22, 25, 53).

TIRGOVIŞTE (Ploieşti). Ş.m. N. Bălcescu. Cl. X. Frîncu Zaharia (4504, 26—28, 48, 55, 63, 66, 72, 79, 83, 85, 90, 92, 96, 98, 600, 11).

TISAU (Ploieşti), Şc. de 7 ani nr. 1 Haleş. Cl. VII. Zîrnea Elena (E: 1602, 19, 22, 25), Cîmpeanu Angela (E: 1619, 22, 25).

TIRGU MUREŞ (Mureş). Autonomă Maghiară. Ş.m. Al. Papiu Ilarian. Cl. VIII. (E: 1619, 24, 25, 60). Ş.m. Unirea. Cl. VIII. Hancsar Marton (4548, 54, 79).

TIRGU NEAMŢ (Bacău). Ş.m. Ştefan cel Mare. Cl. X. Grimberg Raimond (4421, 31, 34, 42, 43, 67, 69, 70, 88, 94).

TULCEA (Galaţi). Abs. Ţocu Dorin (4421, 22, 31, 34, 67, 503, 04).

TURDA (Cluj). Ş.m. 1. Cl. IX. Păcuraru Liana (44 7, 32, 34, 43, 56, 67). Cl. X. Olar Iacob (4467, 69, 70, 86—88, 503, 04, 27, 48, 55, 66).

TURNU MĂGURELE (Bucureşti). Şc. tehn. contabilitate agricolă, An. I. Eremia Dinu (4503, 04, 14, 16, 26—28, 49, 79, 85).

TURNU SEVERIN. Ş.m. 2. Cl. X. Mocioiu Doru (4422, 42, 43, 54, 503, 04, 26, 27), Sitaru Ion (4467, 69, 70, 86—88, 93, 503, 04, 26, 27), Zaharia Gh. (4467, 69, 70, 86—88, 503, 04, 26, 27).

ZALĂU (Cluj). Ş.m. Ady Endre. Cl. IX. Gajzago Maria (4486, 87, 516).

*

Pînă la 1 august 1961, s-au evidenţiat ca rezolvitori de probleme de matematică, din localităţile care încep cu literele A—F, următorii:

1. Popa Nicolae, cl. XI, ş.m. 1 Unirea, Focşani; **2. Grădeanu Gheorghe**, cl. XI, ş.m. 1 Focşani; **3. Zegheanu Petre**, cl. X, şcoala internat Breaza; **4. Popa Alexandru**, cl. XI, ş.m. 20 Bucureşti; **5. Săbăilă Aurel**, cl. X, ş.m. 22 Bucureşti; **6. Rujan Dan**, cl. X, ş.m. 1 Buzău; **7. Stănescu Cicerone**, cl. XI, Drăgăşani-Argeş; **8. Gladcenko Gheorghe**, student Inst. Politehnic Braşov; **9. Ilie Mihai**, cl. XI, ş.m. 20 Bucureşti; **10. Drigă M. Gh.**, cl. X şcoala internat Breaza; **11. Buiculescu Doina**, cl. X, ş.m. 8 Bucureşti; **12. Garabedian Rodica**, cl. XI. ş.m. 1 Braşov; **13 Bîrză I. Ilie**, cl. VIII, şcoala internat Breaza; **14. Georgescu Stelian**, cl. X, ş.m. 10 Bucureşti; **15. Necula P. Mihai**, cl. VIII, ş.m. 13 Bucureşti; **16. Ferenţ Militon**, cl. X, Arad; **17. Negreanu Mircea**, cl. VIII, ş.m. 1 Călăraşi; **18. Tomuţă Liviu**, cl. X, ş.m. 5 Cluj; **19. Mihu Răzvan**, cl. X, ş.m. 11 Bucureşti; **20. Crăciun Viorel**, cl. X, ş.m. 11 Bucureşti; **21. Danciu P. Iulian**, cl. XI, ş.m. 2 Brăila; **Martiş George** cl. X, S.m. 4 Buc 23. **Băluţă Gheorghe**, cl. XI, Adjud; **24. Zamfirescu Tudor**, cl. XI, ş.m. 22 Bucureşti; **25. Ozum Cezar**, cl. VIII, Bechet (Oltenia); **26. Druţă M. Gheorghe**, cl. XI, Drăgăşani (Argeş); **27. Moţit M. Horia**, cl. XI, ş.m. 2 Brăila; **28. Răzvan Vladimir**, cl. X, ş.m. 1 Bucureşti; **29. Vodă Viorel**, cl. X, ş.m. 12 Bucureşti; **30. Frangu Octavian**, cl. VII, şc. de 7 ani nr. 18, Brăila; **31. Piscupescu Gabri I**, student I.P.-G.G. Bucureşti; **32. Constantin Martiana**, cl. VIII, ş.m. 8 Bucureşti; **33. Munteanu Gh. Mircea**, cl. VIII, ş.m. 5, Braşov; **34. Ceicu Mihaela**, cl. XI, ş.m. 22, Bucureşti; **35. Man Eugeniu**, cl. VIII, ş.m. 5, Cluj; **36. Purghel Florian**, cl. VIII, ş.m. 4, Braşov; **37. Munteanu Gh. Mihai**, cl. IX. ş.m. 5 Braşov; **38. Popa I. Ion**, cl. X, Făgăraş; **39. Anitescu Maria**, cl. VIII, ş.m. 1, Craiova; **40. Cristescu Mărgărit**, cl. VIII, ş.m. 1, Craiova; **41. Segal Zeilic**, cl. X, ş.m. 2. Focşani; **42. Bolborea Petre**, cl. VIII, Corabia; **43. Pavel Marin**, cl. VIII, Brăneşti; (Bucureşti); **44. Enăceanu Dan**, cl. VII, ş.m. 17, Bucureşti; **45. Anghel Mioara**, cl. VIII, ş.m. 16, Bucureşti; **46. Petrescu Corneliu**, cl. V, şc. de 7 ani nr. 20, Bucureşti; **47. Barbu M. Dorin**, cl. VI, şc. de 7 ani nr. 124, Bucureşti; **48. Motoi V. Marin**, cl. VI, şc. de 7 ani nr. 135, Bucureşti; **49. Malidi Nela**, cl. VII, Burdujeni (Suceava); **50. Cristudor Elena**, an I, şc. ped. de învăţători Buzău; **51. Rotko Ioan**, cl. VI, Buziaş (Banat); **52. Zăgreanu Marius**, cl. VIII, ş.m. 2, Cluj; **53. Marian Iuliu**, cl. VIII, ş.m. 5, Cluj; **54. Brînzănescu Maria**, cl. VI, şc. de 7 ani, Constanţa; **55. Boicescu Vlad**, cl. VIII, ş.m. 4, Craiova.

Pînă la 1 august 1961, s-au mai primit cel puţin 10 soluţii bune la probleme de matematică propuse în G.M.F.-B, după cum urmează:

ABRUD (Cluj), ş.m. Horia, Cloşca şi Crişan, cl. X. Nuck Ana (4509, 19, 33, 36, 39, 43, 56, 61); cl. XI. Furdui Dorel (4499, 500, 03—06, 09, 19, 31, 36, 39, 49, 62, 73); Neagu Petru (4503—06, 09, 10, 19, 21, 36, 39, 49, 62, 72, 93, 607).

ADJUD (Bacău), ş.m. A. Vlăhuţă, cl. XI, **Băluţă Gheorghe** (4546, 51, 52, 59, 61, 62, 66, 68, 70, 75, 80, 84—86, 89, 91, 93, 95, 602, 04, 07, 14—33, 38, 46, 58, 59, 63); Spulber Toader (4509, 10, 12, 31, 38, 62, 73, 75, 77, 80).

AGNITA (Braşov), ş.m. cl. VIII. Alexandru Elena (4468, E: 1637, 42, 44, 53—57, 68, 70); Anghel Marcel (E: 1627, 31, 48, 49, 53, 54, 56—60); Avram Eleonora (E: 1621, 31, 33, 37, 38, 42, 44, 46, 49, 50, 52, 56, 59); Bonea Radu (E: 1637, 42, 44, 53—57, 68, 70); Drugă Adela (E: 1620, 23, 27, 29, 31, 35, 38, 43, 46, 87); Gheorghiu Liviu (E: 1648—53, 56—60); Majan Doina (4468, E: 1637, 42, 52—56, 67, 70); Rotaru Remus (E: 1637, 42, 50, 52, 54—57,

58, 60); Stoican Tudorel (E: 1620, 27, 37, 52, 54, 57, 59, 60).

AIUD (Cluj), ş.m. **Avram Iancu,** cl. X. Iancău Horaţiu (4614, 15, 17—20, 26, 27, 38. 44, 48, 70); Leţia Ioan (4575, 81, 82, 84, 91, 99, 603, 04, 07, 10, 12, 36, 38, 44, 46, 48. 59. 62, 63, 70).

ALEXANDRIA (Bucureşti), ş.m. **Al .I. Cuza,** cl. IX. Boştenaru I. Livius (4575, 66, 85, 91, 604, 10, 14, 15, 24, 26, 33, 50, 63, 68).

ARAD (Banat), ş.m. 1 **I. Slavici,** Abs. Vărşăndanu Ioan (4544, 62, 75, 77, 80, 84, 93, 600, 05, 07, 10, 21—23, 38, 44, 46, 61, 75, 76, 79, 89. 91, 97, 706, 08); cl. VII. Than Francisc (E: 1633, 37, 44, 53—56, 62, 68, 70); cl. VIII. Blaga A. (4601, 14, E: 1653, 56, 57, 68, 70, 77, 80, 81); Vicol Vilianu (E: 1648—60, 66—68, 70, 72—74, 76, 77, 80, 81, 83); cl. IX. Olariu Ştefan (4564, 70, 75, 77, 84, 88, 601, 04, 14—17, 24—30, 32, 33, 46, 63, 88, 93, 701, 02); Silvestru Aurelia (4577, 79, 83, 85, 90, 96, 600, 85, 94, 700—05, 08, 10); cl. X. Ciurea Sorin (4546, 52, 56, 75, 81, 84, 91, 95. 99, 614, 24—31, 33, 63, 70, 604, 07, 10); **Ferenţ Militon** (4506, 19, 22, 31, 33, 35, 36, 39, 40, 42, 75, 77, 81, 84, 603, 07, 14—20, 24—33, 38, 58. 59, 62, 77, 79, 81, 83, 93, 97, 701—03, 13—15); cl. XI. Popescu A. Dorel (4500, 13, 16, 17, 25—28, 37, 47, 51, 52, 54, 56, 62, 68, 606, 07); Stoenescu Marina (4575, 84, 604, 14, 15, 26, 27, 72, 89, 704); ş.m. O. Bancic. cl. VII, Stana E. Mircea (E: 1617. 18, 20. 21, 23, 26, 28, 31, 53. 55), cl. VIII. Ancateu Dan (E: 1617, 18, 20, 21, 23, 28, 53, 55. 58); Tiurbe Codruţa (E: 1648, 50—60, 62, 64—68, 70, 71, 73—75), cl. XI. Hulea Ioan (4505, 17, 22. 36. 39, 40, 43, 75, 80, 89); ş.m. 3, cl. VIII. Quit Rodion (E: 1648, 50, 52, 53, 55—60, 67, 68, 70).

ARADUL NOU, ş.m. 4, cl. VIII. Mihalca Cornelia (4547, E: 1637, 42, 43, 46, 53—57, 59, 66—68); **Grunul şcolar G. Dimitrov,** cl. VIII, Eudresz Mihai (E: 1637, 38, 52, 53, 56, 59, 68, 70, 77); Pidor Ladislau (4533, 43, 617, 20, 23, 27, 28, 37, 42. 73).

BACĂU. ş.m. 2, cl. IX. Vasiliu Florin (4575, 77, 614, 17, 26—29, 97, 702, 04).

BAIA DE ARAMĂ (Oltenia). ş.m. Abs. Bratiloveanu Const. (4556, 75, 618—22, 26, 33, 63); Doandea Ioan (4499, 500, 05, 09, 10, 19, 33, 39, 42, 61, 62. 86, 618—22, 26, 28—30. 33. 63, P); cl. VIII. Crăciunescu Laurian (E: 1637, 38, 42, 43, 47, 48, 52, 53, 57, 59, 67, 68, 70), cl. X, Boeţ Nicolae (4499, 500. 10, 19, 32, 39, 42, 43, 56, 618), Gurgu Ion (4499, 500, 05, 09, 10, 17, 19, 31, 32, 39, 42, 43, 56, 75, 80, 618—22, 26—30, 33, 63), cl. XI. Răcănel C. Ion (4500, 05, 09, 10, 15, 33, 39, 42, 43, 56, 61, 62, 75, 80, 93, 618—22. 26, 28—30, 32, 63).

BAIA DE ARIEŞ (Cluj), cl. XI. Totolici Gabriel (4509, 75, 80, 86, 614, 15, 18, 63).

BAIA MARE (Maramureş), ş.m. 1, cl. VIII. Gamenoczy Iudita (E: 1652. 53, 56, 57, 59, 67, 68, 70, 77, 80, 81, 83), Gheţie Mircea (7414, E: 1648, 49, 51—57, 59, 62, 64, 67—70, 73, 76, 77, 80, 81, 83), Goldstein Berta (E: 1648, 52—54, 56, 57, 59, 62, 67—70, 73, 76, 80, 81, 83), Petreanu Liviu (E: 1649, 50, 52, 56, 64, 66, 70, 77, 80, 81), Vida Gh. (E: 1648, 52, 53, 55—57, 59, 67—70, 73, 76, 81, 83), cl. IX. Ghiman Vasile (4561, 75. 84, 88, 95, 614, 18, 25—28, 30, 33), Hairic Margareta (4575, 80, 84, 99, 610, 14—16, 24—26, 28, 29, 33, 63, 93, 97, 701, 03, 04), Purcel Justin (4580, 4601, 14, 25, 26, 33, 63, 714), Valiu Marian (4585, 601, 09, 10, 14, 17, 25, 26, 33, 57, 63, 700).

BECHET (Oltenia), cl. VIII. **Ozum Cezar** (4614, 24—26. 29, 33, 63, 702, E: 1648—70, 73, 76—84).

BICAZ (Bacău), ş.m., cl. VII. Ciucanu Aurel (E: 1618, 19, 21, 23, 25, 31, 37, 45, 47, 48, 52, 60).

BISTRIŢA (Cluj), ş.m. Abs. Ţîra Grigore (4575, 77, 80, 81, 86, 89, 605, 06, 09, 14), cl. X. Cîrcu Ioan (4499, 505—08, 10, 19, 39), cl. XI. Paşca Iuliu (4499, 500, 20, 36; 38, 75, 80, 81, 91, 607).

BIRLAD (Iaşi), **Complexul şcolar,** cl. VII. Dumitriu Florin (4697, E: 1648, 51, 53—60), cl. VIII. Apostoleanu Maria (E: 1653, 56, 57, 59, 68, 70), Artene Viorel (E: 1647, 48, 53, 56—59, 67, 68, 70), Boidache Gavrilă (4561, E: 1634, 37, 38, 42, 43, 45—47, 49, 50, 52—60), Bălan Eugenia (E: 1617, 20, 21, 23, 26—28, 31, 34, 37), Bugeag Veronica (4591, 601, E: 1649, 52—54, 56, 57, 70), Coatu Aurica (E: 1637, 47, 48, 53, 55—57, 59, 68, 70), Chirică Gachi (E: 1618, 20, 21, 23, 27, 31, 37, 47, 56, 57), Chivulescu Cristian (4629, E: 1648, 51, 53—60, 65, 69, 70, 71, 73), Cornea Jan (E: 1614, 48, 53, 56, 57, 59, 67—71), Epstein Max (4700, 02, 03. 14, E: 1656, 57, 60, 77, 80—83). Gradu Mihai (E: 1537, 42, 44, 53—56, 69—71, 88), Grama Olimpia (4601, 14, E: 1591, 615, 54—58), Lişman Geta (E: 1591, 601, 52, 54, 55, 57, 58, 60, 69), Mihăilă Ioan (4601, 10, E: 1637, 53—56, 68), Mosaroceanu Neculai (E: 1637, 42, 44, 53—56, 68—70), Munteanu Odeta (4601, E: 43—47, 59, 61, 91), Mocanu Geta (4614, 15, E: 1649, 52, 57, 60, 61), Mihoci Teodor (4614, E: 1627, 65—67, 70, 76, 78, 80, 81), Mocanu Dumitra (4601, E: 1623, 26, 31, 34, 37, 43, 54—56, 59) Nadă Ionel (4591, 601. 14, 15, E: 1648, 51, 53—55, 59), Oprişan Gina (E: 134, 37, 42, 43, 47, 48, 51—59, 65, 67, 68, 70), Popa Valerica (4591, 601, 14, 15, E: 1649, 52, 57), Pucheanu Ion (4625, E: 1648, 53—55, 57—

59, 68, 80), Scurtu Aurica (4591, 601, E: 1649, 54, 55, 57, 58, 60), Stanciu Maria 4543, 91, 604, E: 1634, 37, 38, 53—56), Stoica Viorel (E: 1610, 37, 43, 47, 49, 52, 54, 55, 68, 81), cl. IX. Iordan Dumitru (4614, 24, 26, 29, 30. 33, 705, 10), cl. X. Feraru M. Ioan (4603, 07, 18, 20, 26, 29, 33, 35, 38, 63, 701).

BLAJ (Braşov), **Ş.m. Iacob Mureşan,** cl. IX. Berar Aurel (4624, 26—29, 33, 63).

BOTOŞANI (Suceava), **Ş.m. A. T. Laurian** cl. VIII. Ciuraru Moretz (E: 1621, 23, 26, 27, 31, 33, 37, 44, 52, 56, 59), Litman Any (E: 1649, 52, 56, 57, 64, 68, 70, 77, 80, 81), Pincu Iosepf (E: 1617, 20, 21, 23, 27, 37, 38, 42, 44, 48, 49, 52, 53, 56, 57, 59, 67, 68, 70, 77, 80, 81), cl. IX. Cojocaru Otylia (4591, 601, 04, 10, 58, 59, 63). Constantin Radu (P); **Ş.m. 2 M. Eminescu,** cl. VIII. Ciuraru Raşela (E: 1652, 53, 57, 617, 18, 20, 23, 27, 43, 45—47), Cohn Şona (E: 1621, 23, 29, 43, 45—47, 52, 57, 60), Cohn Rela (E: 1617, 20, 27, 37, 38, 48, 50, 52, 56, 57), Gutman Tauba (E: 1618, 21, 43, 46, 47, 52, 53, 57, 59, 60), Kettner Carol (E: 1620, 21, 31, 37, 42, 54, 55, 56. 58, 59), Leizerovici Ariana (E: 1618, 20, 21, 37, 43, 45, 47, 52, 53. 57, 59, 60), cl. X. Segall Arnold (4505, 06, 09, 10, 19, 40, 75, 80, 84, 95, 601, 07).

BORCA (Bacău) **Ş.m. M. Sadoveanu,** cl, IX, Manolache Ion (4575, 77, 84, 614, 25, 26, 28, 29, 33, 46, 63, 93, 701—03).

BRĂNEŞTI (Bucureşti) **Ş.m. cl. VIII.** Dinescu Elena (E: 1662, 64, 65, 67, 68, 70, 71, 76, 77, 80, 81, 83, 89, 92, 95, 700), Ionescu Ion (E: 1652—57, 59—61, 68, 70, 72), **Pavel Marin** (4614, 25, 26, 33, 68, E: 1629—34, 45, 47—62, 64, 68, 70, 72), Şerban Paul (4672, 73, 95, 701, E: 1652, 53, 59, 60, 67, 68, 70, 71, 77, 80, 81, 83, 89), cl. IX. Niţulescu Dumitru (4614, 17. 24—26, 26, 28, 32, 33, 58, 701), cl. X. Balica Sergiu (4614, 17, 24—26, 28, 33), Răducanu D. (4584, 603. 14, 20, 24—30, 33, 63).

BREAZA (Ploieşti) **Ş.m. internat D. Cantemir** cl. VIII, Bîrză I. Ilie (4547, 61, 90, 91, 614—25, 28, 33, 45, 48, 49, 59, E: 1633—38, 41—45, 47, 48, 50—60, 62, 66—67, 68, 70, 74), Diaconu V. Jean (E: 1637, 38, 42—44, 46, 51, 53—60, 62, 64, 65, 67. 68, 70, 74), Diaconu V. Jean (E: 1637, 42, 48, 52—56, 58, 59, 62, 68, 70), Zaharia Iftimie (4614, 24, 25, 33, 68, E: 1634, 37, 38, 42—44, 47, 48, 51, 53—60, 62, 65, 67, 68, 71, 73), cl. X. **Drugă M. Gh.** (4499, 503—06, 09, 10, 15, 19, 24, 26, 27, 33, 35—40. 43. 47, 48, 54, 59, 61, 63, 65, 72, 75, 77, 80, 84, 88, 90, 91, 96, 611, 14, 15, 17—20, 24—33. 45, 63, 68—70), **Zegheanu Petre** (4505, 06, 09, 19, 31, 33, 37—40, 43, 52, 61, 65, 77, 80—85, 88, 90—92, 95 96, 99, 600, 04, 07, 11, 14, 20, 24—33, 35—38, 41, 45—48, 50, 52. 59, 62, 63, 68—70, 72, 75, 76, 79, 81, 86, 90, 93, 97—705, 07—12), cl. XI. Fill Petru (4500, 05, 06, 09. 37, 39, 43), Lewki Mihai (4500, 03—06, 09, 10, 19, 20, 22, 28, 29, 33, 35, 39, 43).

BRĂILA (Galaţi). **Ş.m.1,** cl. IX, Gherguş Felicia (4509, 19, 36, 37, 43, 46, 61, 75, 81, 86, 604, 10, 14—17, 25—29, 33, 46, 63). **Ş.m. 2 N. Bălcescu** cl. X. Frecuş D. C. (449, 500, 03—06, 08—10, 16, 17, 19, 26—28, 31, 33, 35—37, 39, 40, 43, 63, 66), cl. XI. **Danciu P. Iulian** (4499, 501, 03, 04, 06, 07, 09, 10, 19 22, 23, 26—31, 33, 35—41, 43, 44, 46, 52, 56—58, 61, 64—66, 68, 70, 84. 88, 91, 95, 603), **Moţit M. Horia** (4499, 500, 03, 04, 09, 10, 16—19, 26—28, 31, 33—37, 39, 43, 46, 48, 52, 54, 55, 61, 66, 75, 77, 79, 81—85, 88, 90, 91, 96, 600, 10, 12), **Ş.m. 3** cl. VIII. Taganea Dora (E: 1618, 19, 22, 25, 27, 51, 53—56, 59, 60), cl. IX Ebramovici Ella (4503, 09, 16, 19, 28, 36, 39, 66, 75, 85, 601), cl. X, Andronescu Irina (4499, 504, 06, 09, 10, 26, 27, 31, 36, 43, 75, 80, 85, 91, 96, 610), Şvarţ Zizi (4503, 04, 06. 09, 16, 19, 27, 28, 31, 36, 39, 66, 75, 84, 85, 96, 601, 07), cl. XI, Rosman Izu (4499, 500, 03—06, 09, 16, 19, 27, 28, 31, 36, 39, 62, 66, 73, 80, 85, 96, 607), Spiratos Antoniu (4463, 72, 73, 81, 83, 84, 95, 96, 99, 503—06, 09, 19, 27, 31, 36, 39), **Şc. 7 ani nr. 14,** cl. VII. Loescher Vandal (E: 1634, 36—38, 42, 53—56, 62, 68, 70), Mihai V. Ion (E: 1617, 18, 23, 26, 42, 43, 48, 51, 53—60), Racicovici Nicoleta (E: 1624, 29, 1648—51, 53, 56, 58—60, 67, 68, 70, 73), **Ş. 18,** cl. VII, **Frangu Octavian** (4543, E: 1602, 03, 12, 15, 17—29, 31—34, 37—40, 42—47, 49, 50, 52, 54—57, 59).

BRAŞOV, **Student** Gladcenko Gh. (Inst. Polit.) (4499, 500, 05, 07, 09, 17, 19, 22, 31, 33, 35—40, 43), **Ş.m. 1,** cl. XI. **Garabedian Rodica** (4561, 88, 91, 97, 602, 05, 07, 13—33, 38, 41—44, 46, 48, 51, 52, 61, 63, 65, 68—70, 77, 79, 90, 91, 93—95, 97, 711), Ş.m. 3, cl. VIII. Găzdoiu Marcela (E: 1620, 21, 23, 27, 37, 49, 50, 52, 58), **Ş.m. 4 Ştefan Gheorghiu,** cl. VIII. Cioca Mircea (4701, E: 1648. 49, 52—55, 57, 59, 60, 64, 68, 70, 71, 77, 80, 81), Corpade Maria (4614, 15, E: 1614, 52—54, 56, 57, 59, 63, 70), Crăciun Viorica (E: 1643, 48, 52—54, 56, 57, 63, 68, 70), Darolţi Viorel (4514, 24, 54, 61, 624—26, 29, 33, 47, 48, 59), Ghilea Rodica (E: 1642, 52, 53, 56, 57, 60, 63, 68, 70), Micu Doina (E: 1637, 38, 48, 52—54, 57, 67, 68, 70), Mihai Vasile (E: 1637, 48, 52—55, 57, 63, 68—70), Munteanu Dana (4519, 43, 6163, E: 1637, 43, 46, 47, 49, 52, 53, 55, 57, 59, 62, 66, 70, 71, 73, 75, 77, 80, 81), Manolescu Rodica (E: 1617, 18, 20, 23, 27, 38, 31, 37,

43, 47), Pincovici Matei (4516, 43, E: 1619, 24, 25, 29, 37, 38, 49, 51—55, 57—59, 70, 77, 80, 81), Purghel Florian (4702, 09, E: 1617, 19, 20, 22, 25, 42, 43, 44, 47, 48, 50, 52—55, 57—59, 64, 67, 77, 80, 81, 604, 26, 60, 68, 701, 28, 33), Taulescu Maria (E: 1617, 23, 26, 27, 37, 42, 52, 56, 57, 59), cl. IX. Cazan Gheorghe (4503, 06, 09, 16, 43, 65, 75, 96, 600), Grovu Mihai (4481, 503, 06, 09, 16, 66, 75, 85, 96, 600, 24, 26—29, 33, 45, 50, 68, 701), Klasner Eugen (4503, 06, 09, 16, 66, 75, 85, 96, 600), Nicolau Ioan (4503, 06, 09, 16, 19, 43, 66, 85, 96, 600), Voicu Cornelia (4503, 06, 09, 16, 43, 66, 85, 96, 600), Vulpe Victor (4503, 06, 09, 16, 17, 66, 71, 85, 96, 600, 10), cl. XI. Noidin Monica (4573, 77—79, 81, 86, 93, 97, 602, 07), Simu Ioan (4503, 05, 09, 19, 27, 33, 35, 39, 43, 73), Ş.m. 5 cl. VIII. Munteanu G. Mihai (4503, 04, 09, 16, 27, 43, 54, 63, 65, 75, 77, 91, E: 1618—22, 24, 33, 38, 42—50, 52, 53, 55, 57, 58, 60), cl. IX. Munteanu G. Mircea (4503—06, 09, 14, 16, 22, 23, 27, 28, 33, 39, 42, 43, 48—50, 54, 63, 66, 72, 75, 77, 79, 80, 84, 85, 92, 96, 99, 602, 11, 12, 24—27, 59), cl. X. Todor Nicolae (4575, 84, 88, 91, 95, 615, 17, 18, 26, 27, 30, 38, 48, 63, 70), Şc. 7 ani nr. 6, cl. VI, Vătui Florin (E: 1617, 20—22, 26, 28, 31, 34, 37, 38, 48, 51, 53—56. 59, 62, 67—70).

BICAZ (Bacău), cl. VI, Banyay Ildika (E: 1648, 51, 55, 58, 82, 84), cl. VIII, Banyai Zehida (E: 1053, 56, 57, 60, 68, 77, 80, 81).

BUCUREŞTI, **Studenţi:** Dobrescu N. Dan (fac. mat. fiz.), (4540, 51, 61, 63, 74, 84, 85, 87, 91, 99, 614, 15, 17, 18, 20—33, 38, 44, 59, 61, 68, 69, 2 P), **Piscupescu Gabriel** (I.P.G.G.) (4576, 81, 88, 601, 30—32, 38, 46, 48, 51—53, 57, 59, 61—64, 66, 70, 89—91, 93, 95, 97, 701, 03, 08), **Absolvenţi,** Călţaru Ovidiu (4506, 10, 33, 38, 39, 42, 43, 62, 68, 618, 21, 22, 26, 79, 89, 2 P), Drăgan Şt. Marin (4547, 59, 68, 75, 77, 80, 81, 91, 607, 14, 15, 17—20, 24—32, 38, 63, 70), Ghiţă R. Teodor (4521, 25, 27, 30, 75, 80, 84, 88, 602, 05, 07, 12, 14, 17, 18, 21, 22, 25, 26, 31, 62, 63), Macovei Cicerone (4505, 09, 27, 80, 84, 85, 89, 614, 25, 31, 33), Popescu Andrei (4517, 22, 35, 35, 38, 40, 43, 44, 46, 51, 52, 60—62, 77, 81, 601, 10, 14, 15, 17), Ş.m. 1 N. Bălcescu, cl. VIII, Ţilenschi S. Mircea (E: 1633, 37, 42, 47, 48, 53—56, 59), cl. IX, Grigorescu Şerban (4614—17, 19, 25, 26, 31, 33, 46, 57, 58, 63, 70), cl. X, Cristea Dan (4575, 77, 81, 85, 91, 95, 99, 600, 04, 07, 09—12, 14, 15, 18—20, 24, 26), **Răzvan Vladimir** (4546, 61, 75, 77, 84, 88, 91, 95, 99, 601, 03, 07, 09, 10, 14, 15, 17—20, 24—34, 41, 46, 48, 52, 58, 59, 63, 72, 93, 708), Sterescu Anton (4614, 15, 20, 24, 26, 27, 29, 32, 33, 41), Stoian N. Nicolae (4546, 61, 75, 77, 81, 84, 91, 600, 03, 04, 07, 10, 12, 35, 45, 47, 50, 57, 63, 68, 69, 70), Timoşenko Al. (4584, 88, 99, 607, 14, 15, 17—20, 25, 34, 38, 52, 70, 72, 81, 83, 89, 93, 97, 704, 08, 16, 22—24, 39, 53, Toth Petru (4577, 80—82, 84, 85, 91, 95, 600, 10, 14, 15, 18—20, 26—29, 33), Ş.m. 2 T. Vladimirescu cl. IX, Grigoriu Mihai (4575, 84, 99, 604), cl. X. Paiachin Al. (4583, 614, 15, 18—20, 24, 25, 38, 44, 70), Ş.m. 3 I. Neculce, cl. V, Mladin Gabriela (E: 1633, 34, 48, 53, 58, 59, 67—70), Nadler Silvia (E: 1648, 53, 58, 59, 67—70), Nicolescu M. Corneliu (E: 1662, 65, 67, 68, 70, 71, 73, 76, 77, 80—82, 84, 91, 93, 95, 700), cl. IX Ionescu Nicşor Ştefan (4614, 15, 17, 20, 24, 26—30, 33, 63), cl. X. Sucitu I. Gh. (4544, 46, 51, 52, 61, 70, 77, 82, 84, 88, 91), Ş.m. 4 A. Vlaicu, cl. VIII, Maiovski Aurel (4614, 29, E: 4631, 34, 37, 38, 42, 47, 67, 68, 70), Oprescu I. Const. (4559, 61, 75, 77, 88, 91, 604, 14, 15, 28, 29, 46, E: 1549, 57, 59, 70, 71, 76—81), cl. X Martiş George (4575, 77, 85, 600, 04, 14, 24, 26, 28, 33, 35, 45, 50, 68, 72, 73, 85, 98, 702, 09, 10, 29—31, 33, 35, 47—49), Ş.m. 5 M. Sadoveanu, cl. VIII, Dianu Mihai (4604, 702, E: 1637, 4344, 47— 49, 52, 53, 56, 57, 60, 64, 67, 68, 70, 71, 74), Ş.m. 6 cl. X. Vasilache Mihai (4614, 17—20, 24—31, 33, 63, 93, 97, 702), cl. XI, Buţă Apostol (4577, 86, 97, 619—23, 26—33, 38, 59, 61, 63, 89, 91, 708), Ş.m. 7 I. L. Caragiale, cl. VIII Racoveanu Dragoş (E: 1621, 23, 29, 31, 32, 54—57, 59), cl. IX, Vlad Virgiliu (4517, 19, 43, 46, 51—53, 75, 85, 90, 600, 04, 14, 16, 17, 25, 28, 29, 33, 35, 45, 50, 59, 63, 68, 72), cl. X, Havas Robert (Progresie artitm-dublă). Şc.m. 8 Racoviţă cl. VI, Catrina Ruxandra (E: 1648, 50—60), Cristolereanu Liana (E: 1621, 27, 28, 37, 42, 48, 51—60, 64, 66, 68), Leroi Roger (E: 1637, 38, 42, 47, 48, 53—56, 58, 60, 62, 65, 67, 68, 70, 76, 77, 80, 81, 84), Popescu Manuela (E: 1600, 07, 08, 11, 15, 20, 27, 38, 46, 50, 51, 53, 55, 56, 59, 62, 67, 68, 70, 76, 77, 81), Toma Mihai (E: 1636, 48, 51, 53—60, 62, 65, 67, 70—73, 77, 81), cl. VIII, Busuioc Mihaela (4520, 39, 46, 84, 88, 91, E: 1632, 38, 42, 45—47), Ciobanu Doina (E: 1634, 36, 42, 48—51, 53—56, 58, 59), **Constantin Martiana** (4519, 604, 14, 26, 28, 29, 33, 59, E: 1629, 31, 32, 37, 38, 46—57, 59, 62—71, 76, 77, 79—84), Ionescu Elena (E: 4509, 19, 20, 36, 43, 1617, 18, 20, 23, 27, 29, 32), Petroniu Doina (4520, 39, 46, 84, 88, 604, E: 1629, 32, 45, 50, 52, 57), cl. IX. Ţenea Maria (4509, 17, 19, 20, 36, 38, 43, 46, 61, 84, 88), cl. X **Buiculescu Doina** (4566, 75, 77, 79, 82, 83, 99, 600, 03, 10, 11, 14—20, 24—35, 38, 42, 45. 46, 52, 58, 59, 63, 68—

70, 72, 77, 81, 83, 93, 97—99, 701—05, 08—12, 14, 15), Ş.m. 10 cl. VI Fianu Cristina (E: 1637, 42, 51, 54—56, 59, 62, 65, 67), Popescu Radu (E: 1515, 37, 42, 45, 46, 53—56, 58), Salzman Ariana (E: 1646, 53, 58, 59, 62, 68, 69, 70, 80, 81, 83, 85), Văitus Anca (E: 1653, 55, 56, 58, 60, 67, 68, 70, 77, 80, 81), cl. VIII, Ivan Florina (4519, 75, 611, 24, 25, 28, 68, E: 1621, 29, 44, 64, 67, 68, 70), cl. X Georgescu Stelian (4548—50, 54, 55, 57, 59, 61, 63, 66, 75, 77, 79—82, 85, 88, 90, 91, 99, 600, 07, 09, 14, 15, 17—20, 24—33, 45, 46, 49, 56—58, 69, 70), Marinescu Emil (4544, 46, 52, 70, 75, 84, 604, 14, 25, 63), Ş.m. 11 D. Cantemir cl. V, Marcovici Alexandru (E: 1653, 53, 68, 69, 73, 77, 80, 81), cl. VI. Cristescu Eugenia (E: 1637, 42, 48, 54—56, 62, 65, 67, 68), Rădulescu Dorin (E: 1661, 62, 65, 67, 68, 70, 76, 77, 80—82), cl. VII. Ursulescu Octavian (E: 1634. 36—38, 42—59, P), cl. IX, Ştefan Silviu (4584, 626, 703), Ursulescu Florin (4546, 75, 77, 610, 14. 24, 26—30, P), cl. X, Crăciun Viorel (4499, 503—06, 09, 10, 17, 19, 26, 27, 31, 35—40, 43, 46, 61. 63, 66, 71. 77, 80, 81. 83, 88, 95, 600, 04, 07, 10, 11, 14, 20, 24—27, 29, 33), Georgescu Horia (4499, 501, 05, 06, 09, 10, 17, 19, 31, 35, 38, 40, 42, 43, 46, 52, 61, 75. 77, 81, 82, 88, 95, 604, 07, 10, 14. 15, 24—28), Mihu Răzvan (4503—06, 10, 17, 26, 31, 35, 36, 38, 42, 46, 52, 54, 61, 63, 66, 72, 75, 77, 80, 81, 83, 85, 88, 90, 95, 96, 600, 04, 07, 10, 11, 14, 15, 18—20, 24—29, 33, 38), Văiteanu Dan (4561, 88, 95, 607, 10, 14, 15, 24—28, 28), cl. XI. Cristescu Dragoş (4507, 62, 73, 75, 78, 80. 86, 93, 15, 25), Ş.m. 12 Sp. Haret cl. VIII, Hajos Ladislau (E: 1617, 18, 21, 23, 31, 37, 46, 47, 56, 57), Petrescu Antoniu (E: 1617, 18, 21, 23, 27, 29, 31, 34, 36—38, 41—43, 45—48, 50—57, 59, 60), Varujan A. Zakregian (4575, 77, 81, 615, 25—30, 33, P). Vodă Viorel (4537, 47, 52, 54, 55, 57, 61, 62, 66, 75, 80, 85, 89, 91, 604, 09, 14, 21, 25, 34, 35, 38, 40, 41, 43, 46, 48—52, 54, 55, 62, 63, 65, 70, P.N.A.), Ş.m. 13 M. Viteazu cl. VIII. Cristea Valentin (4614. 15, 24, 29, 33, E: 1623, 43, 46, 49, 50, 57, 64, 66, 71, 75), Flondor Paul (4575, 614, 15, 24—26, 33. 716, 17, E: 1679), Necula P. Mihai (4500, 03, 09, 17, 43, 77, 610, 14, 15, E: 1617. 31, 34, 36—38, 42—45, 47—50, 62, 64—71, 75), cl. IX. Aldea N. Ion (4544, 46, 52, 61, 70, 75, 77, 86, 91, 610), Guţă Cristian (4509, 19, 35, 38, 39, 61, 75, 614, 26, 29, 33), cl. X. Dogaru I. Anton (4506, 09, 19, 22, 39, 43, 75, 614, 15, 17—20, 24—33, 51, 59, 63, 81, 97, 702), Stan Lucian (4499, 506, 09, 17, 19, 20, 30, 31, 33, 39, 40, 42, 43, 75, 77, 80, 81, 91, 604, 10), Ş.m. 15 El. Sîrbu cl. VIII Vlodinger Jaqueline (4575, E: 1643, 44, 49, 50, 52, 53, 57—60), Paidin V. Ion (4584, 91, 99, 604, 14, 15, 26, 27, 30, 34—36, 46, 54, 58, 63), Sigler Goldiţa (4575, 77, 85, 614. 24, 25. 28, 29, 33, 45), Ş.m. 16 G. Coşbuc, cl. VIII Anghel Mioara (4519, 20, 37, 43, 61. E: 1617, 18, 20, 21, 23, 26—32, 33, 34, 36—38, 40—44, 46. 47, 50, 53, 54, 57, 59, 60), cl. IX, Moscovici Cornel (4584, 85, 614—16, 24—26, 58, 59, 63), Ş.m. 17 M. Basarab cl. VII, Enăceanu Dan (4519, E: 1617—34, 36—38, 41—60). cl. IX. Dimitriu Cornelia (4575, 614—17, 24—29, 33, 63), Ştefănescu Corneliu (4582, 617, 18, 26—29, 72, 73, 97), cl. X. Ştefănescu Alex. (4561, 75, 77, 81, 84, 95, 603, 14, 15, 20), cl. XI Pîrşan Liviu (4602, 04, 09, 14, 33, 59, 63, 89, 701, P). Ş.m. 19 I. Creangă cl. IX Ferau Monica (4555, 75, 81, 85, 88, 90, 96, 600, 35, 45, 47, 50, 68, 614, 15—17, 26, 28, 33, 63, 63, 95), Ş.m. 20 Gh. Şincai cl. IV, Petrescu Corneliu (E: 1617, 20, 26, 34. 35, 37, 42, 44, 51, 54, 55), cl. X. Perianu Dan (4499, 503, 04, 09, 26, 27, 33, 35, 39, 46, 43, 65), cl. XI. Aebrucht Alex. (4509, 10, 21, 37, 39, 40, 43, 46, 49, 75, 77, 78), Dumitrescu Lucian (4575—81, 90), Hîrşan Dan (4562, 73, 75, 80, 85, 97, 607, 10, 38, 46, 58, 59, 61, 63, 75), Ilie Mihai (4575—78, 80—82, 84—91, 93, 95, 97, 99, 600, 03, 04, 06, 07, 14—23, 25—32, 34, 36, 38, 40, 44, 46. 51—55, 57—59, 61—63, 67—70), Popa Alexandru (4599—607, 09—12, 14, 15, 17—33, 35, 38, 39, 44—46. 48—50, 54, 54, 57, 59, 61, 63, 66—70, 72, 73—87, 89—91, 93—98, 700, 03, 05, 09, 11, 12), Ş.m. 22 Gh. Lazăr cl. VIII, Iliescu Martha (E: 1648, 53, 56, 57, 59, 64, 68, 77, 80, 81), cl. X. Rădulescu P. Nicolae (4509, 10, 17. 19, 33—35, 39, 46, 56, 61, 75, 614, 18, 25, 33, 38, 59), Săbăilă Aurel (4499, 507, 09, 10, 17, 19, 31, 33—40, 42, 43, 46, 56, 61, 65, 75, 77, 80—82, 84, 88, 91, 15, 603, 04, 07, 09, 10, 14, 15, 17—20, 24—31. 33, 34, 38, 46, 48, 51, 52, 58, 59, 62, 63, 70, 72, 75, 81, 93. 97, 701—04, 07, 08), cl. XI, Craicu Mihaela (4575, 77, 78, 80—82. 84, 91, 97, 614—33, 38, 41, 46, 48, 51, 52, 59, 61, 63, 67, 70), Iliescu Mihaela (4517, 22, 33, 39, 43, 46, 56, 71. 75. 77, 88, 615—17, 24, 26, 28—30, 33, 63, 73, 701, 02), Tudor Ella (4614, 41, 48, 90, 724, 33, 51, 53, 62, 64, 75), Zamfirescu Tudor (4544, 46, 51, 52, 56, 59, 60—62, 64, 4614—24, P), Ş.m. 25 cl. IX, Dumitrescu Dan (4506, 09, 19, 36, 43, 46, 52. 75, 77, 80. 81, 604), Ş.m. 26 Al. I. Cuza cl. X, Bolocan Gabriel (4614, 15, 17—20, 23, 25—28. 30, 31, 35, 40, 41, 46, 48, 51, 52, 57, 59, 61, 63), ş.m. 28, cl. VIII. Lichtig Agneta (E: 1637, 50, 52, 55—57, 59, 62, 65, 67), ş.m. 32 Filimon Sîrbu, cl. VIII. Cepoiu Valentin (E: 1648, 51—58, 60, 62, 65, 67, 68), Florea George

(E: 1633, 38, 41—47), Nicolescu Manuela (4509, 19, 20, 37, 43, 61, E: 1617, 18, 20, 26, 27, 38, 43—46, 57, 59, 60), **ş.m. 34 C. A. Rosetti,** cl. VIII. Cernicica Petre (4517, 19, 33, 37, 43, 45, 52, 62, E: 1617, 18, 20, 21, 23, 24, 25, 27, 29, 31, 33—35, 37, 38, 42, 43, 46), Zissu Ana (4579, 614, 15, 26, 28, 45, 68, E: 1633, 43, 46, 47, 49, 50, 52, 57, 64, 66), **ş.m. 36,** cl. VIII. Stoian C. Emil (4514, 35, 45, 68, E: 1648, 53—57, 59, 60. 70, 80, 81, 87, 702 09), **ş.m. 33,** cl. VII. Ivan Gabriel (E: 1648—59), **şc. de 7 ani nr. 3,** cl. VI. Becea Aurel (E: 1661, 62, 65, 67—69, 74, 76, 77, 80, 82, 84, 87), Vasiliu Şerban (E: 1636—38, 41, 42, 47, 48, 53, 54), **şc. de 7 ani nr. 20,** cl. V. Petrescu Corneliu (E: 1648, 53, 56, 58, 59, 62, 65, 67—70, 73, 76—78, 80, 82, 84, 85), **şc. de 7 ani nr. 56,** cl. VI. Mărculescu Berry (E: 1617, 20—23, 27, 31, 37, 42, 47, 48, 51, 59), **şc. de 7 ani nr. 64,** cl. VII. Coman Cornel (E: 1637, 38, 43, 44, 48, 50, 54, 57, 59, 60, 70, 71), **şc. de 7 ani nr. 119,** cl. VII. Beca M. Florin (4629, 33, E: 1648, 50—60, 62, 64, 67, 70), **şc. de 7 ani nr. 124,** cl. VI. Barbu M. Dorin (E: 1636—38, 42, 51, 53—56, 58, 59, 62, 65. 67—70, 72, 82), **şc. de 7 ani nr. 130,** cl. V. Sima Nicolae (E: 1617, 26, 27. 48, 53, 58, 68, 70, 73, 77, 81), cl. VI. Eftimie Florica (E: 1627, 53—55, 62, 67, 68, 70, 77, 81), Georgescu Gabriela (E: 1648, 51, 53—55, 62. 67, 68, 70), Moroiu Alexandru (E: 1642, 48, 54—56, 62, 65, 67, 68, 70), **şc. de 7 ani nr. 135,** cl. VI. **Moţoi V. Marin** (E: 1662, 65—70, 73, 74, 76—87), **şc. de 7 ani nr. 145 Ghencea,** cl. VI. Ciochinocu Lucica (E: 1600, 01, 04, 08, 10, 14, 20, 23, 26), Dincă Elisabeta (E: 1600, 01, 04, 08, 10, 14, 20, 23, 26), **şc. de 7 ani nr. 150,** cl. VI. Brezeanu P. Alex. (E: 1617, 20, 21, 26—28, 31, 34, 37, 47).

BUHĂEŞTI (Iaşi), cl. X. Vieru Corneliu (4575, 77, 617, 20, 26—30, 63, 81, 93, 704).

BUHUŞI (Bacău), cl. X. Andrei Vasile (4506, 38, 51, 59, 75, 77, 82, 84, 91, 95, 99, 601, 07, 09. 10, 12).

BURDUJENI (Suceava), cl. VII. **Malidi Nela** (E: 1617, 18, 20, 21, 23, 27, 28, 31, 34—38, 41, 42, 44, 45, 47, 52, 53, 57, 58).

BUŞTENI (Ploieşti), cl. X. Albu Gr. Gh. (4499, 506, 09, 31, 40, 46, 75, 77, 81, 95).

BUZĂU (Ploieşti), **şc. ped. învăţ.,** an. I. **Cristudor Elena** (4591, E: 1617, 18, 20, 21, 23, 26—28, 31, 37. 42, 44, 53—59, 62, 67, 70, 77, 81), Manole I. Maria (4517, 19, 91, E: 1618, 23, 27. 31, 32, 36, 43, 45, 46), **şc. prof. C.F.R.,** an II. Crestez T. Laurian (4575. 626—29, 33, 701—03, 17), **ş.m. 1 B. P. Haşdeu,** cl. VII. Plătănea Cornel (E: 1652—56, 59, 64, 65, 67—69, 71), cl. VIII. Popescu Dorin (E: 1642. 52, 57, 60, 64, 66), cl. X. Ionescu V. Gregorian (4575, 610, 24—29, 33, 701—03, 17), **Rujan Dan** (4499, 503, 04, 06, 09, 10, 16, 19, 26—28, 31, 33, 35—37, 39, 40, 43, 48, 55, 66, 71, 77, 81, 83—85, 91, 96, 614, 16—20, 24—30, 32—35, 41, 43, 45, 47, 48, 50, 51, 55, 56, 58, 59, 62, 63, 66, 68, 69, 70, 71, 75, 77, 81, 84, 85, 93, 97, 700, 01—03, 05, 09—11), **ş.m. 2 M. Eminescu,** cl. VI. Ciobotaru Ion (E: 1617, 20—22, 28, 31, 31, 42, 48, 51, 54, 55 60), Frînculescu Cristina (E: 1620—22, 28, 51, 53—56), Ioniţă Sabin (E: 1620, 22. 30, 31, 37, 42, 44, 51, 53, 54—56, 61, 62, 65, 67, 68), Miron Nicolae (E: 1620—22, 28, 30, 42, 47, 48, 51, 54—56, 61. 62, 65, 67—70), Paxina Mariana (E: 1648, 54—56. 58, 60, 62, 63), Penea Tudor (E: 1620, 21, 27, 28. 31, 42, 48, 53—55, 60). Rotaru Ana (E: 1636, 51, 54—56), Suten C. Dumitru (E: 1648, 53—56, 58, 65, 67—69, 73), cl. XI. Calotescu C. Georgeta (4419, 20. 44, 63, 72, 75, 81, 83 84, 96, 97), **şc. de 7 ani nr. 4,** cl. V. Iordache T. Gheorghe (E: 4617, 20, 26, 27, 31, 44, 53—56). cl. VII. Ionescu Constanţa (E: 1648, 51, 62, 65, 67, 70, 76, 77, 80. 81).

BUZIAŞ (Banat) cl. VI. Andras Aurelia (E: 1638, 48, 53—55, 61, 62, 76, 68, 70), Adamescu Ana (E: 1648, 53, 54, 56. 62, 67—70), Buha Maria (E: 1648, 51, 54, 55, 62, 65, 67, 68, 70), Drăgănescu Ion (E: 1647, 48, 53, 54, 56, 61, 67—69), Drăgănescu Marioara (E: 1642, 48, 53—55, 62, 67—70), Gălescu Ion (E: 1642, 48, 53 54, 62, 67, 70), Lăreţu Ioan (E: 1637. 42, 47, 48, 53, 54, 61, 67—70), Griş Viorel (E: 1617, 20, 22, 26, 27, 33, 36, 37, 42, 51, 53—55, 60—62, 67, 68, 70), Prodan Aurelian (E: 1617, 20, 22, 26, 27, 28, 31, 33, 37, 42, 48, 51, 53—55, 60—62, 67, 68), **Rotko Ioan** (E: 1617, 20—22, 26, 27, 31, 33, 35, 37, 38, 42, 48, 51, 54, 55, 61, 62, 65, 67, 68, 70), cl. VIII. Faure Ioan (E: 1620, 44, 53—55, 57, 60, 68, 70, 77, 80, 81), Foale Titi (E: 1633, 34, 37, 38, 40, 42—44, 47—62, 64, 65, 67, 68, 70), Gagea Dorica (E: 1648, 54, 55, 57, 59, 60, 67, 68, 70, 77, 78, 80, 81), Jurjuţ Ionel (E: 1637, 43, 44, 47, 48, 52, 53, 55, 56, 60, 61, 66—68, 70), Mişca Aurel (E: 1617, 21—23, 27, 28, 31, 37, 38, 42—44, 48, 51, 53, 54, 56, 57, 60), Mişca Viorel (E: 1653, 55, 59, 64, 67, 68. 70. 76. 77, 80, 81), Popescu Viorel (E: 1637, 38, 42—44, 46—48, 53, 57—60, 67, 70, 77. 80. 81, 91), cl. XI. Şandru Dorina (4590, 91, 604, 14, 24, 30, 32, 68, 69, 711).

CĂLĂRAŞI (Bucureşti), **ş.m. 1 N. Bălcescu,** cl. VIII. Negreanu Mircea (4575, 614, 15, 24, 26, 28, 29, 33. 45, 59. 68. 700, 02, 09, E: 1648—60, 62, 64—68, 70, 71, 75, 77—83), Petruş C. Valentina (4591, 614, 15, 25, 28, 33, E: 1634, 37, 42, 47, 48—50,

52—55. 57, 59, 64, 67, 68, 70), cl. X. Cotruţ Marica (4584, 85, 90, 600—02, 04, 14, 15, 25, 28, 38, 45, 50, 68), ş.m. 2, cl. X, Istrate M. Const. (4575, 88, 91, 601, 14, 17—20, 24—30, 32, 33, 38, 72, 97, 701—03).

CARACAL (Oltenia), ş.m. 1, cl. VI. Rădulescu Sever (E: 1658, 60, 62, 65, 67—70, 73, 76), cl. IX. Popa C. Emil (4546, 53, 61, 67, 70, 75, 81, 84, 91, 604, 10, 14—18, 24—26, 28, 29, 33, 46, 59, 63), şc. prof., an. III, Damian Iguat (E: 1617, 19, 20, 25, 27, 50—55, 57).

CARANSEBEŞ (Banat), ş.m. 1, cl. VIII. Berzeanu Ana (E: 1620, 21, 23, 27, 31, 37, 44 51, 52, 58, 59), Jicmon Maria (E: 1620, 21. 23, 31, 37, 44. 48. 53—57, 59, 77), cl. X. Damian Ion (4575, 95, 614—20, 26—30, 33), Vetres Ion (4509, 19, 33, 36, 43, 75), cl. XI. Băneanu Dana (4573, 75, 78, 80, 81, 614, 15, 21, 22, 25, 26), ş.m. 2, cl. VIII. Popescu Adrian (E: 1643, 47, 48, 54, 55, 57, 60, 62, 67, 68, 75), Sabescu Georgeta (E: 1621, 20, 23, 27, 31, 37, 44, 49, 51, 53).

CIMPIA TURZII (Cluj), cl. X. Ganea Macedor (4500, 09, 10, 22, 33, 43, 62, 75, 81, 84, 88, 91, 95, 99, 604, 14, 15, 17—20, 24, 26, 30, 33, 38), Suciu Ioan (4503—06, 09, 10, 27, 28. 31, 33, 43, 55, 62, 66, 75, 80, 81, 84, 85, 88, 91, 95, 96, 99, 600, 04).

CIMPINA (Ploieşti), ş.m. internat D. Cantemir, cl. IX. Drugă M. Gh. (4507, 16, 32, 46, 51, 55, 95. 600, 04, 07, 14, 35, 38, 41, 45—48, 50, 52, 59, 72, 75, 76, 81, 85, 86, 90, 93, 97—703, 05, 07—12), ş.m. 1 N. Grigorescu, cl. VIII. Brezeanu I. (E: 1661. 62. 64—68, 70, 72, 76, 77, 80—82), Dima T. Constantin (E: 1650, 59, 62, 64, 65, 67—70, 79). Dumitrescu Constantin (E: 1649—51, 56, 59, 62, 65, 67, 68, 70), Gruia Constantin (4542, E: 1649—59), Moldoveanu Grigore (E: 1657, 59, 62, 64, 65, 67—71), Nichifor Mihai (4614. E: 1662, 64, 65, 68, 70). Rusu Marian (E: 1648, 58, 60—62, 64—66, 68, 70, 72, 77, 80—82), Seciu V. Gh. (E: 4543, E: 1648—60), Sverjiski Eugen (E: 1648, 50—60, 62, 64, 67—71), ş.m. 2 Ilie Pintilie, cl. VIII. Duda Grigore (E: 1620, 28, 31, 43, 44, 48, 52, 53, 57, 59), Iliescu Marta (E: 1620, 22, 28, 37, 43, 44. 52—54, 59), Mocanu Maria (E: 1621, 27, 31, 43. 44, 47, 48, 50. 53, 59), Plămădeală Luiza (E: 1620, 28, 37, 43, 44, 48, 52—54, 59), Stoica Octavia (E: 1620, 22, 28, 43, 44, 48, 53, 54), cl. X. Teodorescu Viorel (4503—05, 09, 27, 30, 31, 34, 40, 43. 59, 66), şc. tehn. energ. electr., an III, Nicorescu D. (4556, 61. 63. 65. 66. 71, 614, 19, 24—33, 35, 59).

CIMPULUNG MOLD. (Suceava), lic. mil. Ştefan cel Mare, cl. X. Albu Vasile (4509, 10, 17, 19, 31, 33, 35, 40, 42, 44), cl. X, Cataia Vasile (4507, 09. 10, 19, 31, 33, 35, 37, 40, 44, 46, 61, 77, 88, 91, 99, 604, 14—18, 20, 25, 26, 36, 44, 58, 70, 81, 89, 701, 08), Ciurezu Nicolae (4614, 15, 17, 18, 24, 26, 27, 30—32, 36, 38, 51, 58, 63, 70, 72, 81, 97, 704, 08), Constantin Gh. (4588, 91, 99, 604, 07, 14, 15, 18, 19, 34, 36, 44, 46, 54, 57, 58, 63, 65, 87, 93, 715, 22, 29, 38, 43, 44, 51, 54, 55), Ieflea Mircea (4575, 88, 91, 99, 604, 07, 14, 15, 17—19, 44, 46, 57. 58, 63), Nicolau Petru (4500, 03, 04, 06, 07, 09, 10, 17, 19, 22, 23, 27, 28, 31, 33, 35—37, 39, 40, 42—44, 46, 61, 66, 70). cl. XI. Ştrul Alex. (4551, 59, 73. 75, 77, 80, 86, 91, 95, 97, 99, 602, 04, 05, 07, 614, 16—19, 21, 23, 38. 44, 46. 59, 61—63. 70), ş.m. Dragoş Vodă, cl. VIII. Cornescu Cinthie (4614, 15, 33, E: 1634, 36—38, 42, 43, 47), cl. X. Bruja Aurora (4503—07, 10, 16, 17, 19, 21, 22, 24, 27, 28, 33, 36, 39, 43), Maidaniuc Olga (4506, 09, 10, 17, 19, 22, 31, 33, 37, 39, 43), Manea Oxana (4507, 09, 10, 17, 19, 21, 22, 33, 37, 39, 40, 43).

CIMPULUNG MUSCEL (Argeş), Şc. ped an III, Ivaşcu Gh. (4509, 12, 56, 75. E: 1618, 36, 37, 46, 48, 53, 57—59), ş.m. Dinicu Golescu, cl. X. Poştoacă Moise (4614, 20, 24, 25, 27, 28, 30. 32, 33, 63, 701—03, 06), Sindilaru Tudor (4546, 47, 61, 71, 75, 88, 91, 99, 603, 04, 14, 15, 25, 27), Voiculescu Anca (4546, 67, 71, 75, 77, 80, 81, 85. 91, 617—20, 24, 25, 33, 63, 69).

CIMPENI (Cluj), cl. VII. Burz Nicolae (E: 1633, 37, 38, 42—45, 48, 52—58).

CLUJ. Studenţi: Bică Emilian (Inst. polit.)) (P), Bîrzan Romanel (Inst. polit.), (4578, 615—18, 25, 26, 28, 30, 57, 72, 701—04), Gabău Alexandrina (P), Lelijeh Ambrozie (an III matem.) (P, N), Mărgineanu C. (P), Moldovan Grigor (P), Szasz Carol (an III mat.) (P), Inst. ped. Fărcas Viorica (E: 1648 53, 57—60, 63, 67, 70, 71, 75), Mureşan Sidonia (E: 1648, 53, 57—60, 63, 67, 68, 70, 71, 75), ş.m. 2 G. Coşbuc, cl. V. Surdu Dănuţ (E: 1620, 26. 27, 30, 33, 37, 41, 56—59), cl. VIII. Feneşan Monica (E: 1636, 37, 52—55, 62, 67, 68, 70), Liviu Miron (4614, 24, 28, 68, E: 1649. 64, 68, 70, 72, 77, 80, 709). Lupşa Ileana (E: 1648, 50, 52—59), Mocanu Rodica (E: 1651, 57, 64, 76—80, 82, 83), Petruţa Viorica (E: 1618, 26, 44, 48, 52—56, 59), Zăgreanu Marius (4575, 84, 85, 91, 99, 600, 14, 17, 18, 20, 24, 26, 29, 30, 33, 52, 54, 58, 65, 72, 93, 99—701, 03, 05, 09), ş.m. 4 E. Racoviţă, cl. VI. Marfievici Andrei (E: 1620—23, 26—28, 36—38, 42, 43, 47, 48, 51, 53, 58, 59), cl. VIII. Kadnagy Vasile (E: 1649. 52—57, 59, 60, 68, 70), Pavu Florin (4591, 658, E: 1656, 68, 70, 75, 77, 80, 81), Stepu Virgil (4519, 43, E: 1617, 18, 21, 23, 26, 27, 31, 32), cl. IX.

Peteanu Lelia (4544, 52, 64, 614—16, 24—27, 29, 33, 46), Tăpălagă Livia (4575, 84, 614, 17, 25, 33, 60, 72), cl. X. Neagoe Dumitru (4575, 77, 81, 84, 91, 614, 15, 17—20, 24, 26—31, 33, 63, 70, 93, 701—03), ş.m. 5 Gh. Bariţiu, cl. VIII. Călugăreanu Grigore (4561, 91, 601, 45, 68, E: 1637, 42, 48, 51—56, 59, 60, 62, 64, 65, 68, 70, 74), Man Eugeniu (4610, 59, E: 1633, 37. 38, 42, 46—49, 51—60, 62, 64—67, 70, 76—82, 84, P), Marian Iuliu (4591, 604, E: 1633, 34, 36—59), Tonuţă Liviu (4575, 75, 81, 82, 84, 83, 91, 95, 99, 609, 07, 614—20, 24—34, 41, 46, 48, 51, 58, 59, 62, 63, 72, 73, 77, 79, 88, 90, 93, 97, 701—03, 08), cl. XI. Iosipescu Dan (4500, 03—06, 09, 24, 26—28, 33, 43, 49, 50, 62, 66, 68, 75, 85, 93, 602), ş.m. 8 N. Bălcescu, cl. VII. Perl Toma (E: 1635—38, 42—44, 53—57, 62—68—71, 74, 76, 78, 80—82), Herman Sonia (4575, 84, 615, 19, 20, 24, 26—33, 75, 81, 708), ş.m. 13, cl. VII. Iancu Elena (E: 1648, 51, 52—60), şc. medie muzică, cl. VIII. Far-Kaş Petru (E: 1658, 62, 65, 67, 68, 70, 77, 80, 81).

CODLEA (Braşov), Student Gladenko Gh. (Inst. polit. Braşov), (4575—78, 80, 81, 84, 86, 88, 71, 93, 95, 97, 99, 602, 04, 06, 07, 09, 10, 14—20, 23—33, 38, 41, 44, 46, 48, 51, 57—59, 61—63, 70).

CONSTANŢA. Ş.m. 1 Mircea cel Bătrîn, cl. VIII. Florescu Gh. (4501, 19, 61, E: 1620, 23, 27, 31), Palade Georgeta (4536, 61, E: 1605, 10, 20, 21, 43, 45), ş.m. 2, cl. VII. Mărunţelu Nicolae (E: 1637, 43, 45, 46, 53—55, 57, 59, 60), cl. IX. Baldovin Mirela (4575, 91, 614—16, 24—26), Brînzănescu Vasile (4546, 51, 75, 77, 80, 604, 14—17, 24, 29, 33, 46, 59, 63), Mihăescu Elena (4522, 77, 84, 91, 604. 07, 52, 80), cl. X. Fătu C. (1561, 84, 83, 91, 95, 604, 14, 25, 33, 62, 70, 72, 77, 79, 95, 97—99, 702, 07, 08), ş.m. 3, Abs. Coman Dragoş (4575, 77, 80, 84, 91, 603, 04, 07, 10, 14, 63), Ionescu Virgil (4505, 05, 33, 35, 40, 52, 73, 80, 84, 97, 606, 16, 21, 44, 72, 81, 89, 91, 95, 97, 99, 702, 03, 07, 08), cl. VII. Cojoc Lucreţia (4505, 61, E: 1624, 27, 32, 50, 52, 54, 55, 60), cl. IX. Dinescu Ruxandra (4575, 91. 614—16, 24—26), Popovici Beatrice (4575, 614, 24, 25), şc. de 7 ani, cl. VI. Brînzănescu Maria (E: 1617, 20, 22, 27, 23, 31, 34, 37, 38, 47, 48, 51, 53—56. 58—60, 62, 65, 67—70), Cosmiceanu Valentin (E: 1651, 54, 55, 60, 62), cl. VII. Mălaia I. (E: 1652, 53, 57, 59, 60, 64, 68, 70), Mavrodin Olimpia (4625, E: 1637, 55—57, 59, 60, 63, 70).

CORABIA (Oltenia). Abs. Florescu Ion (4575, 76, 80, 86, 88, 91, 95, 602, 04, 07, 14, 15, 17, 20, 24—33, 63), Stoica Marina (E: 1617, 13, 20, 21. 23, 31, 37, 42, 68, 70, 71), cl. VI. Ene Gheorghe (E: 1648, 53, 54, 56, 58, 68, 70, 77, 81, 82), Enescu D. Alex. (E: 1595, 610, 20, 27, 48, 54, 55, 62, 70), Filip Nicolae (E: 1648, 51, 54, 55, 60, 62, 65, 67), cl. VIII. Bolborea Petre (4499, 503, 04, 614, 701, 702, E: 1622, 23, 29, 36—38, 42, 44, 46, 48, 53—57, 59, 70, 71, 76—81), Stoica Rodica (E: 1617, 18, 20, 31, 37, 42, 68, 70, 71).

COSTEŞTI (Argeş), ş.m. cl. X. Ion I. Marin (4499, 509, 19, 37, 75, 77, 81, 82, 604, 10).

CRAIOVA. Grupul şcolar Electro-putere. Catrina Dumitru (4503—07, 09, 16, 17, 21, 26, 23, 31, 33, 35, 37, 39, 40, 43), ş.m. 1 N. Bălcescu, cl. VII. Popescu St. Felicia (E: 1618, 20, 21, 52, 54—60), cl. VIII. Aniţescu Maria (4503, 09, 39, 43, 52, 61, 75, 77, 81, 91, 604, E: 1617, 32, 34, 37, 38, 42—47, 50—60), ş.m. 3, cl. V. Mogoş Marina (4614, 17, 19, 20, 26—30, 33, 63, 69), cl. VI. Pavel N. Radu (4506, 07, 09, 10, 17, 19, 40, 43), Popescu St. Mariana (4641, 46, 48, 54, 90, 93, 97, 99, 701—03, 08), Ţurcanu Gabriela (4566, 75, 83—85, 88, 91, 95, 600, 14, 19, 25, 29, 33, 35, 98, 700, 05, 09, 11, 17, 27, 29, 31, 33, 34), şc. pedag. înv., an I, Barbu D. Gh. (E: 1600, 04, 05, 08, 10, 11, 13, 17, 20, 27, 31, 37, 38, 44), Brebea Toma (E: 1600, 04, 05, 08, 10, 11, 13, 17, 20, 27, 31, 37, 38, 44), Cişmaru Ştefan (E: 1600, 04, 05, 08, 10, 11, 13, 17, 20, 27, 31, 37, 38, 44), Islaru Geafer (E: 1600, 04, 05, 08, 10, 11, 13, 17, 20, 27, 31, 38, 44). Purcărelu Alex. (E: 1600, 04, 05, 08, 10, 11, 13, 17, 27, 31, 38, 44), Sander Alexandru (E: 1600, 04, 05, 08, 10, 11, 13, 17, 27, 31, 38, 44), Vîlcu Gh. (E: 1600, 04, 05, 08, 10, 11, 13, 17, 27, 31, 38, 44), Cojocaru Gheorghiţă (E: 1600, 04, 05, 09—11, 13, 17, 20, 26, 27), Georgescu Gh. (E: 1646, 48, 50—57, 60, 64, 66—68, 70), Giorgi Ion (E: 1600, 04, 05, 09—11, 13, 17, 20, 26, 27), Mihăilescu Mihai (E: 1600, 04, 05, 10, 11, 13, 17, 20, 21, 27, 31, 37, 33, 42), Stoian Maria (44, 16, 5, 43, E: 1587, 96, 600, 05, 09—11, 13, 17, 20, 21, 26), ş.m. 4, cl. VII. Danciu Veronica (E: 1620, 27, 38, 42, 53—56, 67. 68, 70, 71), Nicolcioru Veronica (E: 1637, 42, 49, 52—56, 67, 68, 70, 77), cl. VIII. Băloiu Veronica (E: 1620, 37, 38, 42, 53—56, 67, 70), Boicescu Vlad (4503, E: 1609, 18—25, 27, 29, 31, 34, 37, 38, 42, 46, 47, 48—60), Calangiu Nicolae (E: 1648, 51, 53—57, 62, 67, 68, 70), Ciurel Gheorghiţa (E: 1636—38, 48, 53, 57, 58, 67, 70), Cristescu Mărgărit (4614, 26, 28, 33, 702, E: 1621, 23, 34—36, 43, 47, 48, 50—60, 67, 68, 70, 71, 73, 76—78, 80, 81, 87), Florescu Dan (4658, E: 1650, 52, 54, 55, 57—59, 64, 70, 71), Lazăr Traian (E: 1623, 42, 48, 51, 53—48, 60, 62), Munteanu Ionică (E: 1642, 48, 51—54, 46—58,

60, 77, 80, 81), Popescu Marinela (E: 1643, 48, 52—58, 60, 64, 68), cl. IX. Corîci Antonie (4501. 03, 08, 09, 16, 19, 38, 43, 44, 46, 51, 52, 56), **şc. de 7 ani nr. 9**, cl. VI. Hadîrcă Daniela (E: 1653—56, 62, 67, 68, 70, 77, 80, 81).

CUGIR (Hunedoara), **ş.m. serală**, cl. IX. Băluţiu Andrei (4503, 09, 39, 45, 52, 63, 70, 75, 84, 85, 614, 15. 17, 24, 26—29 48, 63).

CURTEA DE ARGEŞ (Argeş), **ş.m. cl. VIII.** Ghiţescu Mircea (4614, 15, 26, 28, 33, 59, E: 1662, 64, 65, 67, 70, 75, 79—81, 83, 84), Miu Constantin (E: 1617, 18, 22, 28, 33, 37. 38, 42—44, 47—60).

DEJ (Cluj), cl. VIII. Lazăr Ioan (4614, E: 1600, 10, 11, 17, 20, 21, 31, 33, 37, 44, 48, 49, 54, 56, 57. 67, 68, 70), Nassa Delia (E: 1637. 43, 49, 52, 54—57, 62, 68, 70), Ţapu Petre (E: 1636—38, 44, 48, 54, 55, 57, 59, 62, 67, 68, 70), Vaida Ana (E: 1617, 18, 20—27, 28, 31, 37), Zărman Elena (4614, E: 1627, 49, 52, 54, 55. 57, 67, 70), cl. X. Mateianu Nicolae (4420, 33, 44, 75, 80. 81, 83, 84).

DEVA (Hunedoara), **ş.m. Decebal, cl. VI.** Molnar Margareta (E: 1574, 83, 84, 98, 600), cl. VII. Răgălie Ştefan (E: 1617—23, 25, 26, 30, 33, 35), cl. XI. Caraman Dan (4499, 503, 05, 06, 09, 38, 39, 12, 43).

DEVESEL (Oltenia), cl. VI. Alfirii Cristina (E: 1648, 51, 53—56, 58, 60, 62, 67, 68, 70), Alca C. Gh. (E: 1648, 51, 53—56, 58, 60, 62, 67, 68, 70), Căpăţînă Teodor (E: 1648, 51, 53—56, 58, 60, 62, 67, 68, 70), Cîrjoi I. Rodica (E: 1648, 51, 53—56, 58, 60, 62, 68, 70), Coracea Angela (E: 1648, 51, 53—56, 58, 60, 62, 67, 68, 70), Cuţitoi Margareta (E: 1648, 51, 53—56, 58, 60, 62, 67, 68, 70), Gîlcă Ana (E: 1648, 51, 53—56, 58, 60, 62. 67, 68, 70), Giurcă Elisabeta (E: 1648, 51, 53—56, 58, 60, 62, 67, 68, 70), Vladimirescu Ion (E: 1648, 51, 53—56, 58, 60, 62, 67, 68, 70), cl. VII. Alca Dumitru (E: 1648, 51, 53—56, 58, 60, 62, 67, 68, 70), Ghiciu I. D. (E: 1648, 51, 53—56, 58, 60. 62, 67, 68, 70), Iacobescu D. (E: 1648, 51, 53—56, 58, 60, 62, 67, 68, 70), Jijireu Vasile (E: 1648, 51, 53—56, 58, 60, 62, 67, 68, 70), Marincu Elena (E: 1648, 51, 53—56, 58, 60, 62, 67, 68, 70).

DOROHOI (Suceava), cl. VIII. Ciornea Elena (E: 1623, 48, 53, 56, 57, 59, 60), cl. X. Ciornea D. (4499, 617, 18, 26, 28, 31, 32, 38, P), Mariu Marina (4505, 06, 09, 10, 31, 75, 80, 81, 95).

DRĂGĂŞANI (Argeş), cl. X. Gornitu Gh (4503, 04, 06, 09, 10, 17, 19, 27, 33, 43), cl. XI. Blidaru Ion (4505, 06, 09, 10, 19, 31, 33, 36—40, 43, 52, 59, 62, 73, 75, 77, 80, 81, 84, 86, 91, 93, 95, 97, 602), Druţă M. Gheorghe (4503—06. 09, 10, 19, 24, 26, 27, 33, 36—40, 43, 48, 49, 52, 55, 62, 63, 66, 72, 73, 75, 77, 79—81, 83—85, 91, 93, 95—97, 600, 02, 11), Rîmniceanu Dan (4504—06, 09, 10, 15, 27, 33, 36, 43, 62), Stănescu I. Cicerone (4559, 61, 63, 75, 77, 79, 80, 81, 84, 88, 95, 96, 600, 01, 04, 07, 09, 11, 12, 14—20, 24—36, 41, 45, 46, 48, 50, 54, 58, 59, 63, 68—70, 72, 73, 81, 85, 86, 90, 93—709, 11).

— Elevii claselor IX—XI nu vor trimite soluţii la problemele propuse pentru şcoala de 7 ani. Problemele rezolvate trebuie să fie din ultimele trei numere apărute ale G.M.F.-B şi vor fi trimise numai odată în cursul unei luni. Problemele de matematică vor fi expediate într-un singur plic şi vor fi însoţite de un borderou cu numerele problemelor, scrise în ordine crescîndă. Idem pentru problemele de fizică. Pe plic se va scrie localitatea, şcoala şi clasa pe care o urmează rezolvitorul. La rubrica rezolvitorilor nu se va anunţa decît cel puţin 10 probleme bine rezolvate. Problemele incomplet rezolvate, care conţin erori, sau sînt copiate de la alţi rezolvitori, nu sînt anunţate şi eventual pot fi subliniate la poşta redacţiei; iar rezolvitorii respectivi nu mai pot fi evidenţiaţi. Problemele propuse să fie însoţite de una sau mai multe soluţii.

Rezolvitorii de probleme care au fost evidenţiaţi cel puţin de două ori în nr. 1—10 din G.M.F.—B, sînt rugaţi să trimită redacţiei cîte o fişă din care să reiese totalul problemelor anunţate în această revistă la rubrica rezolvitorilor. La premierea rezolvitorilor pe anul 1961 se mai ţine seamă de clasa pe care a urmat-o rezolvitorul, de modul de redactare şi de calitatea soluţiilor trimise. Se va mai menţiona pe fişa trimisă, dacă elevul sau studenul evidenţiat a trimis în 1961 probleme propuse, note, dări de seamă sau articole şi pagina la care s-au publicat.

•

Şcolile medii care participă la întrecerea pe anul 1961 sînt rugate să trimită fişa cu totalizarea punctelor obţinute pînă în prezent, conform regulamentului publicat în G.M.F.—B pag. 97, nr. 2, 1961. Se va mai specifica şi numărul de clase a VIII-a, a IX-a, a X-a reală şi a XI-a reală care au funcţionat în anul şcolar 1960—61 în şcoală. Fişa poate fi întocmită de profesorii sau elevii conducători de cercuri.

CĂTRE REZOLVITORII DE PROBLEME

Corespondenții care ne trimit probleme rezolvate trebuie să redacteze fiecare problemă separat, însoțind-o de toate calculele necesare și de figuri desenate cu îngrijire. Nu se vor trimite soluțiile mai multor probleme pe aceeași foaie. Problemele rezolvate de fizică se vor trimite separat, iar pe plic se va scrie : *Pentru redacția de fizică.*

Se primesc lunar cel puțin zece soluții numai la problemele și exercițiile din ultimele trei numere apărute. Pe plic se va scrie localitatea și școala pe care o urmează rezolvitorii, pentru a se evita confuzii la întocmirea rubricii rezolvitorilor de probleme și a listei celor evidențiați. Soluții la problemele propuse pentru școala de 7 ani se primesc numai de la elevii claselor V—VIII, sau ai școlilor profesionale.

Problemele care se propun de către colaboratorii revistei să fie clar alcătuite și însoțite de soluții, să fie personale, iar nu luate din cărți sau reviste. Elevii sînt sfătuiți să înceapă a propune probleme numai după ce au rezolvat un număr destul de mare de exerciții și probleme. Problemele propuse, dar necorespunzătoare, nu se pot publica. Dacă un corespondent constată că unele probleme propuse au fost publicate în cărți sau reviste, este rugat să ne arate precis volumul și pagina unde a mai apărut enunțul sau soluția problemei respective.

Corespondentul nostru care a citit și a înțeles deplin multe din soluțiile publicate, a rezolvat multe din problemele propuse, poate și este îndemnat să încerce să schițeze cîte o notă rezultată dintr-o observație făcută cu ocazia rezolvării unei chestiuni mai grele. Aceste note să fie *refăcute de mai multe ori înainte de a fi trimise*, pentru ca redactarea lor să fie *cît mai clară și concisă*. Figurile să fie făcute separat. In redactare se vor evita prescurtările. Nu se va scrie : $\parallel$ = ; $\sim$; $\ast$ $\ast$ $\ast$; $\perp$; $\parallel$; Tr., etc. iar trecerea de la un calcul la altul să fie explicată pentru a se putea urmări ușor desfășurarea unei demonstrații. Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

La publicarea problemelor rezolvate se vor menționa rezolvitorii care au dat o bună redactare și o soluție interesantă, sau mai multe metode de rezolvare.

Tovarășii colaboratori elevi sînt rugați să ne trimită date asupra activității lor extrașcolare la matematică și la fizică, asupra activității cercurilor de matematică și de fizică la care iau parte, pentru ca apoi, prin revistă, să se poată realiza cu succes un schimb de experiență. Dările de seamă concrete se vor publica în G.M.F.-B.

Autorii sînt rugați ca la întocmirea articolelor și notelor să țină seama de următoarele : articolele sau notele să fie scrise clar cu cerneală sau dactilografiate la două rînduri și pe o singură parte a foii, figurile să fie desenate îngrijit și pe o foaie separată. Problemele propuse să fie însoțite de una sau mai multe soluții.

Autorul să semneze clar lucrarea personală pe care o trimite pentru publicat, de asemenea să scrie adresa și data trimiterii lucrării.

— Materialele care nu corespund profilului G.M.F.-B, nu vor fi publicate.

Colecții și numere din anii precedenți

Societatea de Științe Matematice și Fizice din R.P.R., posedă exemplare mai vechi din G.M.F.-B, și G.M.F.-A.

Cititorii noștri își pot procura colecții ca și numere dispărate, depunînd banii la poștă prin mandat poștal pe numele Societății de Științe Matematice și Fizice, strada Academiei nr. 14, contul 070.004 la B.R.P.R., filiala Lenin.

Prețul unui exemplar este de lei 3 pentru G.M.F.-A și de lei 1,50 pentru G.M.F.-B. Cheltuielile de transport sînt de 0,20 lei de exemplar.

ABONAMENTE — Societatea de Științe Matematice și Fizice din R.P.R. primește abonamente la oricare din publicațiile sale.

a) Pentru instituții, școli, biblioteci la prețul de lei 60 anual, pentru fiecare din periodicile sale : G.M.F.-A, G.M.F.-B, M.F.L., Bulletin Mathématique și 40 lei anual la „Mathematica".

b) Pentru profesori și elevi la prețul de 18 lei la G.M.F.-B sau M.F.L. de 36 lei la G.M.F.-A, de 60 lei la Bulletin Mathématique și de 40 lei la „Mathematica".

— Fiecare abonat este rugat să facă cunoscută G.M.F.-B și altor colegi, pentru a face abonamentele din vreme în vederea planificării tirajului lunar.

— Abonamentele se pot face individual sau colectiv prin oficiile poștale locale sau prin factorii poștali.

Litografia și Tipografia Învățămîntului. — c. 1933

Lei 1,50

E 1426

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE
DIN R. P. R.

GAZETA MATEMATICĂ ȘI FIZICĂ

(SERIA B)

PUBLICAȚIE LUNARA PENTRU TINERET

Anul XII noiembrie 1961

11

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

(SERIA B)

Anul XII, nr. 11, noiembrie 1961

SUMARUL

	Pag.
1. In pragul comunismului de Gh. Rulea	641
2. Introducerea în teoria relativităţii restrînse de Teodor Leca	643
3. Un model de geometrie de Iosif Fuchs	656
4. Noţiuni despre natura magnetismului de Mircea Bostan	663
5. Observarea Pămîntului de către un cosmonaut de Ioan Tudoran	669
6. Compararea rădăcinilor ecuaţiilor de gradul II cu numere date de C. Borş şi C. Lindenstein	672
7. Notă matematică de Lucian Bădescu	675
8. Determinarea coeficientului de vîscozitate la gaze de D. Grosu	678
9. Probleme rezolvate (4102, 4351, 4400, 4432, 4451, 4454, 4456, 4462, 4463, 4467, 4468, 4471, 4477, 4479)	679
10. Chestiuni de examen (4963—4981)	689
11. Probleme propuse (4982—5014)	692
12. Exerciţii şi probleme propuse pentru clasele V—VIII (E: 1753—1762)	699
13. Rubrica rezolvitorilor de probleme	700

ANUL XII **11** NOIEMBRIE

COMITETUL DE REDACŢIE

Ailincăi M., profesoară; *Atanasiu V.*, conf. univ, redactor pentru fizică; *Boiangiu D.*, lector; *Ionescu-Bujor C.*, prof. univ.; *Ionescu-Ţiu C.*, profesor, redactor pentru matematică; *Manolescu St.*, profesoară; *Muşat I.*, profesor; *Petrovanu A.*, profesor; *Sacter O.*, conf. univ., redactor şef; *Simionescu D. Gh.*, conf. univ.; *Csiki Zoltan*, asistent.

R E D A C Ţ I A: Str. Academiei, 14 — Tel. 14.46.53 — Bucureşti 1

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar putea interesa redacţia noastră se vor trimite pe adresa de mai sus.

GAZETA MATEMATICĂ ȘI FIZICĂ
(SERIA B)
PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET
Anul XII, nr. 11 noiembrie 1961

ÎN PRAGUL COMUNISMULUI

GH. RULEA
decanul Facultății de Electronică și Telecomunicații
a Institutului Politehnic, București

Tinerețea este vîrsta visurilor îndrăznețe, a planurilor măreț de viitor, a entuziasmului. Epoca noastră, a trecerii de la capitalism la socialism este plină de tinerețe, de planuri grandioase ce se înfăptuiesc sub ochii noștri, într-un ritm nemaiîntîlnit, printr-un efort eroic a tot ce are omenirea mai bun.

Scriitorii cu imaginația înaripată și iubitori de știință și tehnică vesteau lumii neîncrezătoare, de acum cîteva decenii, ce cuceriri nemaiauzite va aduce viitorul, omenirii.

Astăzi nu numai că multe din aceste povestiri, fantastice pe vremea lor, au devenit lucruri obișnuite, dar au apărut noi realizări care pun adesea în umbră multe visuri îndrăznețe.

În țara în care se ivesc zorii comunismului oamenii au reușit să pătrundă în cosmos, să deschidă în fața lumii uimite noi domenii de cercetare pe care omul le bănuia dar nu le văzuse niciodată.

Construirea comunismului este nedespărțită de dezvoltarea rapidă și multilaterală a științei, a tehnicii. Știința a devenit un sprijin nemijlocit al producției. Documentele celui de-al XXII Congres al P.C.U.S. au deschis în fața matematicienilor, fizicienilor, a tuturor oamenilor de știință perspective excepțional de largi, a pus în fața lor sarcini demne de generația de cercetători, constructori ai comunismului.

În fața matematicienilor, a fizicienilor, a inginerilor și tehnicienilor se ridică printre primele, problema transformării directe a diferitelor forme de energie în energie electrică.

Aceasta înseamnă o uriașă cotitură în energetică.

În prezent au o largă răspîndire centralele termoelectrice în care turbogeneratoarele transformă energia calorică în energie cinetică și apoi în energie electrică. Sursa este energia chimică a combustibililor. Sistemul cazan — turbină — generator electric este complex și costisitor, iar randamentul de transformare global este destul de redus.

Se știe că la transformarea energiei calorice în lucru mecanic, cînd conform cu principiile termodinamicii, sînt prezente două surse de căldură, cu temperaturile absolute T_2 și T_1, randamentul transformării e dat de

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

De obicei, T_2 este temperatura sursei mai reci ($T_2 < T_1$) și în majoritatea cazurilor T_2 este temperatura mediului ambiant. Cum randamente mari sînt obținute la temperaturi T_2 mici, rezultă că principial în transformările în care intră energia calorică nu se pot obține randamente de valori ridicate.

Una din formele de energie care prezintă un mare interes pentru transformarea ei directă în energie electrică este energia solară care este ieftină și se găsește răspîndită pe toată suprafața pămîntului. La un hectar puterea solară radiată se ridică la 10 000 kW dacă se consideră o transformare integrală. Soluția aplicabilă pentru a transforma energia solară în energie electrică cu randament industrial va fi dată de utilizarea semiconductorilor. Aceasta înseamnă că în afară de studiile tehnologice pe care le vor face chimiștii și metalurgiștii, fizicienii și matematicienii vor continua să studieze proprietățile și structura corpului solid.

O altă sursă importantă de energie va fi energia termonucleară. Studiile privitoare pentru obținerea reacției termonucleare dirijate vor aduce importante contribuții la rezolvarea problemei surselor de energie.

Reacția termonucleară de fuziune prezintă un interes excepțional, deoarece necesită un „combustibil" practic inepuizabil „apa" și pentru că este mai puțin periculoasă prin radiații. În această direcție fizicienii sovietici au obținut succese importante. În prezent ei dispun de instalații speciale în care plasma la temperatura de milioane de grade este înlănțuită într-un cîmp magnetic ce îi servește de înveliș.

În domeniul comunicațiilor la distanțe foarte mari (cosmice) o perspectivă extrem de interesantă este deschisă de studiile întreprinse de savanții sovietici în legătură cu radiația electromagnetică în spectru vizibil, comandată. Experiențele s-au făcut cu cristale de rubin. Se știe că dacă un atom este excitat, adică i se dă energie din exterior, electronii trec pe nivele energetice mai mari. Dacă se excită un număr mare de atomi și apoi sînt puși toți să elibereze energie în același moment, se obțin radiații luminoase în fascicule înguste de intensitate care depășește de mii de ori pe aceea a soarelui.

În automatică și telecomandă, în studiul structurii mașinilor de calcul și în programare, matematicienii și fizicienii au deschis un larg cîmp de acțiune. Stabilitatea sistemelor automate și neautomate de sinteză a rețelelor automate și neautomate, de logică matematică, de teoria circuitelor cu contacte și relee în care contribuția școlii românești de matematică e remarcabilă, de teoria programării, formează o prezentare foarte sumară a unora din problemele care vor fi amplu studiate în viitorul apropiat.

Succesele științei și tehnicii sovietice sînt asigurate de largile posibilități ale orînduirii socialiste, de sprijinul partidului și al întregului popor. Cercetătorii, oamenii de știință sovietici, inginerii și tehnicienii, muncitorii sînt însuflețiți de mărețele sarcini ce stau în fața lor: construirea comunismului visul de secole al omenirii.

INTRODUCERE ÎN TEORIA RELATIVITĂȚII RESTRÎNSE

de prof. *Leca Teodor*, C. de Argeș

Teoria relativității s-a constituit în două etape: prima se numește teoria relativității restrînse stabilită în anul 1905 de Einstein. Ea decurge cu necesitate din experiență și consecințele ei au fost confirmate prin cele mai delicate experiențe, precum și prin realizarea betatroanelor moderne. Pe baza teoriei relativității restrînse, Einstein a elaborat în anul 1915 teoria relativității generale, care este în același timp o teorie a gravitației.

Teoria relativității s-a născut din contradicțiile experimentale de la sfîrșitul secolului al XIX-lea cu privire la problemele eterului luminos. Problemele legate de această teorie decurg din cercetarea fenomenelor electromagnetice în diferite sisteme de referință. În mecanica clasică Galilei a ajuns la principiul relativității, în baza căruia legile mecanicii rămîn aceleași cînd trecem de la un sistem inerțial de referință la altul, schimbîndu-se numai coordonatele și vitezele.

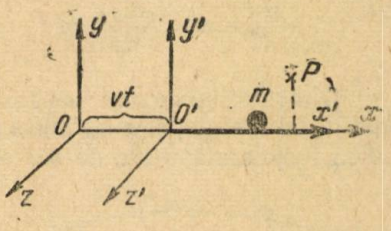


Fig. 1

Noțiunea de mișcare prin însăși definiția ei are un caracter relativ, deoarece mișcarea unui punct (corp) se concepe întotdeauna raportată față de un reper rigid de care presupunem legat un sistem de 3 axe rectangulare. Distanțele punctului considerat la cele 3 plane se numesc coordonate și se notează prin x, y, z. Dacă reperul se schimbă, caracteristicile cinematice ale mișcării se vor schimba în general. Să presupunem un vagon mobil pe pămînt, iar în vagon se poate deplasa o bilă m. Pentru a putea studia mișcarea bilei, fie în raport cu pămîntul, fie în raport cu vagonul, vom considera un sistem de axe de coordonate $O\ x\ y\ z$ solidar cu pămîntul și un sistem de axe $O'\ x'\ y'\ z'$ solidar cu vagonul (fig. 1). În cele ce urmează vom căuta legătura dintre vitezele și accelerațiile bilei m față de cele două sisteme de referință în mișcare rectilinie și uniformă unul față de altul. Considerăm mișcarea vagonului spre dreapta cu viteza constantă v de-a lungul axei Ox. La timpul $t = 0$ originile coincid. După t secunde O' se află la distanța vt față de O. Între coordonatele bilei m față de cele două sisteme avem relația evidentă $x = x' + vt$. Pentru un punct oarecare P din interiorul vagonului vom avea:

$$x = x' + vt; \quad y = y'; \quad z = z' \tag{I}$$

Aceste relații se numesc formulele de transformare ale lui Galilei. Să derivăm prima relație în raport cu timpul:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + v,$$

unde $\frac{dx}{dt}$ este viteza mobilului față de sistemul $O\ x\ y\ z$, pe care o vom

nota cu $u = \frac{dx}{dt}$, iar $\frac{dx'}{dt}$ este viteza mobilului față de sistemul $O'\ x'\ y'\ z'$, pe care o vom nota cu $u' = \frac{dx'}{dt}$.

Deci: $u = u' + v$. (II)

Aceasta este regula compunerii vitezelor în mecanica clasică. Viteza u' se mai numește viteză relativă, iar viteza v viteză de transport (antrenare), viteza u față de sistemul presupus fix, viteză absolută.

Să derivăm relația (II) în raport cu timpul ținînd seama că v este constantă:

$$\frac{du}{dt} = \frac{du'}{dt} \text{ sau: } a = a' \text{ sau: } ma = ma' = f = f'.$$

Din relațiile de mai sus rezultă că accelerațiile bilei au aceeași valoare; înmulțind mai departe cu masa corpului în mișcare obținem $f = ma = ma' = f'$. adică forțele măsurate de doi observatori din sistemele O și O' sînt egale; deoarece forțele sînt egale, pentru amîndouă sistemele, se poate afirma că legile mecanicii sînt aceleași pentru două sisteme de referință în translație uniformă unul în raport cu celălalt.

Fig. 2

Ceea ce este adevărat pentru legea de mișcare a corpului m, este adevărat pentru orice fel de lege mecanică. Dintre toate legile mecanicii care rămîn invariabile cea mai însemnată este legea inerției (cît și legea $f = ma$). Din această cauză sistemele de referință care au o mișcare rectilinie uniformă se numesc sisteme inerțiale, toate echivalente din punct de vedere mecanic, neexistînd nici un sistem privilegiat.

În rezumat ecuațiile mecanicii newtoniene sînt invariante în raport cu transformările lui Galilei.

Această propoziție constituie principiul relativității în mecanica clasică. În formulele de transformare ale lui Galilei se subînțelegea de la sine, egalitatea absolută a timpului măsurat în cele două sisteme de referință, adică: $t = t'$. Newton considera „timpul absolut și matematic în sine însuși care se scurge în mod uniform, fără a fi în funcție de ceva exterior". În grupul de transformare clasică durata între două evenimente date, are aceeași valoare pentru toți observatorii: $t_2 - t_1 = t'_2 - t'_1$, deci simultaneitatea are un înțeles absolut.

Întrebarea pe care o ridicăm acum este următoarea: principiul relativității clasice (cu expresia lui matematică, formulele de transformare Galilei) se aplică și fenomenelor nemecanice, de exemplu, fenomenelor electromagnetice?

Să ne imaginăm un dirijabil deplasîndu-se cu o viteză constantă v într-o atmosferă absolut calmă (fig. 2).

Un observator din nacela A lansează un semnal sonor pe care îl primește observatorul din nacela B; apoi B emite un semnal sonor pe care îl primește observatorul A. Evident că observatorii vor găsi viteze

diferite pentru sunet. Pentru unda sonoră care se propagă în sensul BA se găsește o viteză mai mare ($u' = 340 + v$), pentru că nacela A merge către unda sonoră. Pentru unda sonoră care se propagă în sensul AB, se găsește o viteză mai mică ($u' = 340 - v$), deoarece nacela fuge înaintea undei. Dar dacă am executa experiența de mai sus cu o undă electromagnetică (de exemplu lumină care are viteza în vid de $c = 300\,000$ km/s ? Pentru ca erorile de măsură să fie cît mai mici, ne vor trebuie viteze v cît mai mari ; vom înlocui diriibilul prin globul pămîntesc care fuge pe orbită cu 30 000 m/s. În cazul acesta aerul cald și nemișcat ni-l vom închipui înlocuit prin ipoteticul eter, suportul de propagare al vibrațiilor luminoase. În cazul cînd o experiență oarecum asemănătoare s-ar putea efectua, regula adunării vitezelor rămîne valabilă și pentru lumină ? Răspunsul îl vom da în cele ce urmează.

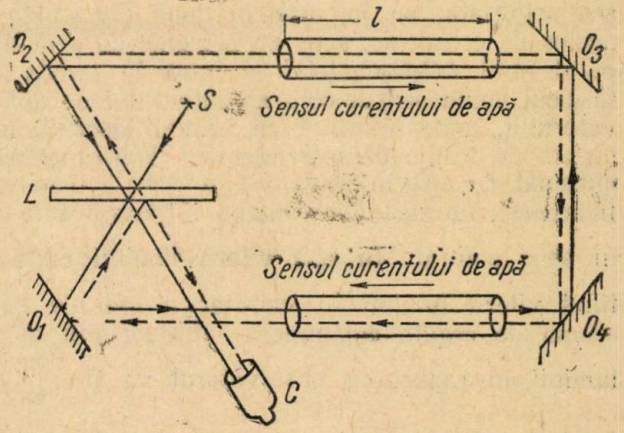


Fig. 3

Studiul radiațiilor luminoase prezintă o deosebită însemnătate, nu numai pentru fenomenul în sine, dar și pentru faptul că lumina face legătura dintre observator și lumea înconjurătoare. Pentru a se explica propagarea vibrațiilor luminoase în spațiu, spre sfîrșitul secolului al XVII-lea, Huyghens presupune existența unui mediu numit de el eter care umple tot universul. La începutul secolului XIX-lea, Fresnel, fondatorul opticii ondulatorii, fiind nevoit să găsească un substantiv care să joace rolul de subiect pentru verbul „a vibra", reia ipoteza eterului introdusă de Huyghens. Fresnel reușește astfel să explice perfect fenomenele de propagare, interferență, difracție, polarizare. În teoria lui, Fresnel admite pentru lumină vibrații transversale, iar pentru eter un coeficient de elasticitate constant și o densitate variabilă ; de asemenea teoria ondulatorie a lui Fresnel duce la o concluzie interesantă : un corp în mișcare, antrenează eterul numai parțial după relația :

$$\alpha = 1 - \frac{1}{n^2}, \qquad \text{(III)}$$

unde α este coeficientul de antrenare al eterului și n indicele de refracție al corpului în mișcare. După Fresnel apa trebuie să aibă un coeficient de antrenare de $\alpha = 1 - \frac{1}{1{,}33^2} = 0{,}438$; iar aerul cu $n \simeq 1$, nu exercită nici o antrenare. În anul 1851 fizicianul francez Fizeau a făcut o experiență în scopul de a elucida problema antrenării eterului și a se verifica formula lui Fresnel (III). În principiu experiența

lui Fizeau s-a făcut în felul următor: prin cele două tuburi (legate între ele) poate curge un curent de apă în sensul arătat de săgeți (fig. 3). O rază de lumină ce vine de la o sursă S, trecînd prin lama de sticlă L semiargintată, se împarte în două fascicule: unul mergînd în sensul acelor de ceasornic, sens ce coincide cu sensul curentului de apă, merge pe drumul $LO_2O_3O_4O_1LC$ și intră în luneta observatorului C; celălalt fascicul avînd sensul contrar curentului de apă intră tot în luneta observatorului, unde interferă cu primul fascicul, în lunetă observîndu-se un sistem de franje de interferență. Să presupunem că eterul ar fi complet antrenat de apa în mișcare; în acest caz viteza luminii față de apă va fi aceeași, fie că lumina merge în sensul curentului de apă, fie că merge în sens contrar. În apă viteza luminii după cum se știe va fi $\frac{c}{n}$, c fiind viteza luminii în vid, iar n indicele de refracție al apei. Ținînd seama de regula compunerii vitezelor din mecanica clasică (II), viteza luminii în raport cu observatorul va fi $\frac{c}{n} + v$ pentru fasciculul de lumină avînd același sens cu mersul apei și $\frac{c}{n} - v$ pentru celălalt fascicul avînd sens contrar cu mersul apei. Am notat cu v viteza curentului de apă în tuburi. Rezultă că cele două fascicule întrebuințează durate de timp diferite pentru a străbate același drum și anume:

$$t_1 = \frac{2l}{\frac{c}{n} + v},$$

pentru raza care se propagă în sensul cursului apei și $t_2 = \frac{2l}{\frac{c}{n} - v}$, pentru raza care se propagă în sensul contrar mișcării apei. Pentru ambele fascicule, diferența de timp va fi

$$\Delta t = \frac{4lv}{\left(\frac{c}{n}\right)^2 - v^2}. \qquad \text{(IV)}$$

Această diferență de timp se poate controla și măsura cu ajutorul franjelor de interferență în raport cu poziția lor, cînd apa este imobilă. Experiența lui Fizeau a demonstrat că aceste franje nu corespund de loc relației (IV), care rezultă din ipoteza eterului complet antrenat. Din deplasarea franjelor de interferență Fizeau a dedus că viteza luminii corespunde relației: $\frac{c}{n} \pm \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) v$ (pentru raza de lumină care merge în sens contrar cursului apei, considerăm semnul minus în fața parantezei). Aceasta înseamnă că la viteza $\frac{c}{n}$ pe care lumina o are în apa imobilă, nu se adaugă integral viteza v a apei, ci numai o fracțiune din ea, coeficientul $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ fiind tocmai coeficientul de antrenare de care am vorbit la început. Valoarea dedusă experimental de Fizeau (și de alți experimentatori care au repetat experiența) a fost apropiată

de cifra 0,438. Concluzia experienței Fizeau: eterul este parțial antrenat de apa în mișcare. Formula lui Fresnel a fost astfel confirmată. Deși teoria lui Fresnel, avînd la bază elasticitatea eterului a repurtat succese frumoase în cele mai importante fenomene din optică, totuși fizicienii nu se puteau împăca cu caracterul atît de contradictoriu al eterului: pe de o parte eterul trebuia să se comporte ca un fluid perfect, lăsîndu-se traversat fără rezistență de către astrele și corpurile în mișcare: pe de altă parte și în același timp, trebuia să se comporte ca un solid, mai rigid decît oțelul pentru a putea transmite oscilațiile transversale ale luminii. Aceste contradicții, precum și marile descoperiri făcute în electricitate de către Faraday, au pregătit terenul pentru apariția teoriei electromagnetice a luminii creată de Maxwell în jurul anului 1870. Din sistemul de ecuații al lui Maxwell, rezultă propagarea cîmpului electromagnetic în vid cu viteza luminii, lumina avînd deci aceeași natură ca și undele electromagnetice. Teoria electromagnetică a lipsit eterul de cea mai mare parte a proprietăților mecanice, nelăsîndu-i decît proprietatea cinematică de a constitui un sistem de referință absolut. Fizicianul olandez Lorentz dezvoltă teoria lui Maxwell ținînd seama și de structura microscopică a substanței. În teoria lui Lorenz, eterul apare ca un mediu continuu, imobil, care poate servi drept sistem de referință absolut. Toate astrele și corpurile în mișcare nu antrenează eterul, ele mișcîndu-se în raport cu eterul așa cum s-ar deplasa o sită prin aer. Atunci mișcarea pămîntului în raport cu eterul ar putea fi definită ca o mișcare absolută a pămîntului. După teoria lui Lorentz, rezultă că prin experiențe optice de înaltă precizie, s-ar putea pune în evidență mișcarea pămîntului față de eter. Fizicianul care și-a luat sarcina să dovedească experimental mișcarea pămîntului față de eter printr-o experință epocală se numea Albert Michelson. Experiența a fost efectuată în anul 1881.

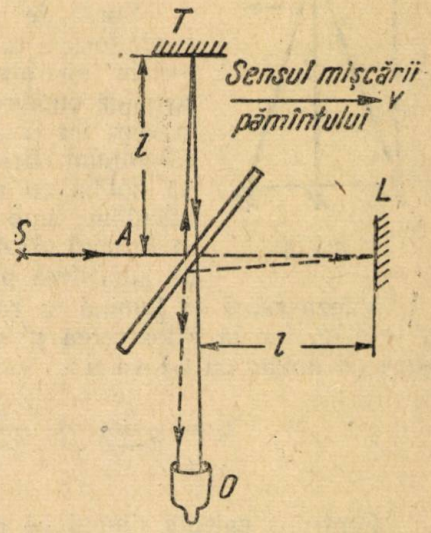


Fig. 4

Iată pe scurt principiul experienței: Un fascicul de lumină monocromatic, izvorît dintr-o sursă *S* cade la 45° pe o lamă de sticlă semiargintată *A* (fig. 4). O parte din fasciculul luminos (50%) se reflectă spre o oglindă *T*, pe cînd cealaltă parte (aprox. 50%) traversează lama, și ajunge la o a doua oglindă *L*. După reflexia normală pe *T* și *L*, razele revin spre lama *A*: prima rază traversează lama *A* și intră în luneta *O*; a doua rază se reflectă parțial pe partea dindărăt a lamei și intră de asemenea în luneta *O*.

Se realizează astfel suprapunerea a două unde luminoase, plecate de la același izvor, care au drumuri diferite: *SATAO* și *SALAO*. În

lunetă va trebui să se observe franje de interferență, datorită diferenței de drum a celor două raze. Brațele aparatului sînt egale $AL = AT$. Dacă timpurile de parcurgere a brațelor AL și AT sînt diferite, atunci evident se realizează diferența de drum a razelor luminoase, deci apariția franjelor de interferență. Din examinarea franjelor de interferență se poate compara timpul dus-întors al luminii pe cele două direcții perpendiculare. Să arătăm că cele două timpuri pe drumurile egale ALA și ATA sînt diferite.

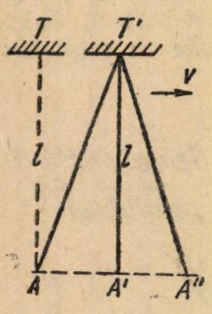


Fig. 5

Sursa de lumină, oglinzile, luneta, sînt așezate pe o platformă ce plutește într-o baie de mercur. Presupunem aparatul orientat astfel încît brațul AL să coincidă cu direcția mișcării de translație a pămîntului în eter, iar brațul AT să fie perpendicular pe mișcarea pămîntului. Brațele aparatului sînt egale $AL = AT = l$. Să notăm cu v viteza de translație a pămîntului. Să calculăm timpul total dus-întors al razei luminoase pe drumul ALA, presupunînd eterul imobil, neantrenat de atmosfera pămîntului.

Viteza razei de lumină în raport cu aparatul, la ducere AL, va fi: $u' = c - v$, iar la întoarcerea $u' = c + v$. Timpul întrebuințat pe drumul ALA (îl notăm cu t_l) va fi:

$$t_l = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} = \frac{2l}{c} \cdot \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Pentru a calcula timpul pe parcursul AT, vom presupune un observator imobil în eter: în timp ce raza de lumină merge de la A la T, oglinda T se deplasează în sensul mișcării pămîntului cu viteza v (fig. 5). Să notăm cu t timpul necesar luminii să ajungă din A la T'. Avem: $AT' = c.t$; $AA' = v.t.$; $A'T' = l$.

În triunghiul dreptunghic $AA'T'$ avem:

$$c^2t^2 = v^2t^2 + l^2,$$

de unde:

$$t = \frac{l}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Timpul t_t dus-întors va fi:

$$t_t = \frac{2l}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Făcînd raportul dintre cele două timpuri diferite găsim:

$$\frac{t_t}{t_l} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < 1,$$

adică duratele celor două parcursuri sînt inegale $t_t < t_l$, deși brațele sînt egale. Prin această metodă se putea înregistra diferența de viteză între

cele două fascicule luminoase, chiar dacă pămîntul s-ar fi mișcat în spațiu de 10 ori mai încet. Rezultatul experienței lui Michelson a produs uimire în lumea fizicienilor: nu s-a observat nici un efect produs de interferență. Experiența a fost repetată în diferite ore din zi și noapte, în toate epocile anului, atît cu lumină artificială, cît și cu lumină solară, obținîndu-se mereu același rezultat negativ. Dezacordul dintre speranță și realitate a fost complet. Rezultatul negativ al experienței Michelson duce la cele mai contradictorii concluzii: 1) pămîntul este imobil în spațiu, lucru inadmisibil, 2) eterul este complet antrenat de atmosfera pămîntului, dar lucrul acesta este în contradicție cu experiența lui Fizeau.

Cum se poate ieși din acest impas? Admițînd existența eterului, ne găsim în imposibilitate de a explica în același timp experiența lui Fizeau și Michelson. Dar dacă legea compunerii vitezelor este greșită? Dacă mecanica clasică ne înșeală? Rezultatul neașteptat al lui Michelson a pus un semn de întrebare atît asupra teoriei lui Lorentz cu privire la imobilitatea eterului, cît și asupra raționamentelor științifice bazate pe mecanica lui Newton.

Pînă la apariția teoriei relativității, experiența lui Michelson era privită de oamenii de știință ca un paradox inexplicabil.

În rezumat experiența lui Michelson demonstrează că viteza luminii în direcția mișcării pămîntului, precum și în direcția perpendiculară, este aceeași, adică viteza luminii într-un sistem inerțial nu depinde de direcția mișcării sistemului respectiv.

În anul 1905, Einstein analizînd experiențele lui Fizeau și Michelson, precum și alte experiențe referitoare la fenomenele electromagnetice în medii în mișcare (aberația stelelor, fenomenul Doppler, experiențele lui Trouton și Noble (1903)), a elaborat o concepție nouă cuprinsă în teoria relativității restrînse (în cadrul acestui articol, noi nu vom da decît cîteva aspecte din teoria relativității restrînse).

La baza teoriei relativității restrînse Einstein a pus două legi fundamentale.

1. *Principiul relativității,* care se poate enunța astfel: legile fenomenelor fizice electromagnetice, mecanice etc., sînt independente de sistemul de referință inerțial; prin nici o experiență făcută în interiorul unui sistem inerțial nu putem pune în evidență mișcarea acelui sistem. După cum vedem, Einstein a extins principiul relativității mecanice la toate legile fizice și în special la cele electromagnetice.

2. *Principiul constanței vitezei luminii:* lumina se propagă în vid cu aceeași viteză în raport cu toate sistemele de referință inerțiale. Această viteză nu depinde de starea de repaus sau de mișcare a izvorului de lumină. (Acest principiu este în contradicție cu mecanica clasică).

Experiențele lui Kennedy-Thorndyke și Thornaschek și observațiile lui de Sitter, au arătat că propagarea undelor electromagnetice se face absolut cu aceeași viteză în raport cu toți observatorii posibili în mișcare uniformă.

După cum vedem, Eistein a ridicat rezultatul negativ al acestor experiențe la înălțimea unui postulat. El atribuie un caracter absolut vitezei luminii, considerată pînă atunci dependentă de alegerea coordonatelor.

Partea esențială a teoriei relativității restrînse este constituită din patru ecuații care dau transformarea coordonatelor și a timpului în trecere de la un sistem de referință la alt sistem de referință.

În lumina celor două principii de mai sus, să vedem cum se poate ajunge la aceste relații de transformare.

Fie două sisteme de referință $O\ x\ y\ z$, presupune fix și $O'\ x'\ y'\ z'$ mobil avînd axele paralele (fig. 6). Sistemul O' se deplasează cu viteza v de-alungul axei comune $O\ x$ și $O'\ x'$. Să presupunem ca moment inițial ($t = 0$ și $t' = 0$), pentru ambele sisteme, momentul cînd originile O și O' coincid. În acest moment să presupunem că din punctul O s-a lansat un semnal luminos. Pentru un observator din sistemul $O\ x\ y\ z$, lumina se propagă cu viteza constantă c în toate direcțiile. După un timp t (și t' în sistemul O') vibrația electromagnetică plecată din O, se află pe o suprafață sferică de rază $r = c.\ t$.

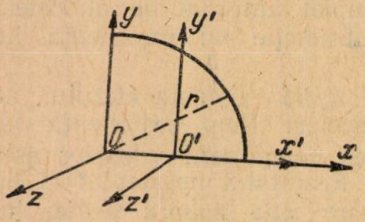


Fig. 6

Evident, orice punct de pe această undă sferică trebuie să satisfacă relația: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ sau $x^2 + y^2 + z^2 - c^2\ t^2 = 0$ (a). Dar observatorul din sistemul O' va scrie pentru orice punct de pe suprafața de undă o relație asemănătoare:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$$

sau

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2\ t'^2 = 0 \quad (a')$$

Raza sferei fiind $r = ct'$. Lumina propagîndu-se cu aceeași viteză în ambele sisteme, ne face să admitem că unitățile de timp nu mai pot fi egale în cele două sisteme. Observînd figura 6 putem scrie:

$$y' = y\ ;\ z' = z.$$

Să luăm în considerație punctul care corespunde originii sistemului mobil; coordonata lui este $x' = 0$, iar în sistemul $O\ x\ y\ z$ la momentul t este $x = vt$. De asemenea luînd punctul corespunzător originii sistemului $x\ y\ z$, coordonata lui este $x = 0$, iar în sistemul mobil la momentul t' (măsurat în sistemul $x'\ y'\ z'$), coordonata este $x' = -vt'$. Pentru că x' trebuie să fie nul cînd $x = vt$ și x trebuie să fie nul cînd $x' = vt'$, se demonstrează matematic că egalitatea $x'^2 - c^2\ t'^2 = x^2 - c^2\ t^2$ dedusă din (a) și (a') este satisfăcută, cînd $x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$ și $t' = \dfrac{t - \dfrac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$

Se poate scrie deci:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}, \qquad \begin{matrix} y' = y \\ z' = z \end{matrix} \qquad \text{și} \qquad t' = \frac{t - \dfrac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \quad (A')$$

Rezolvat în raport cu x, y, z, și t, sistemul (A') se scrie:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad \begin{matrix} y = y' \\ z = z' \end{matrix} \qquad \text{și} \qquad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (A)$$

Cu aceste formule putem scrie expresia coordonatelor și a timpului în sistemul mobil cu ajutorul coordonatelor și a timpului din sistemul presupus imobil și invers. Dacă considerăm sistemul $x'y'z'$ fix, atunci presupunem sistemul $x\ y\ z$ mobil cu viteza v. Formulele (A'), (A) poartă numele, „transformarea Einstein-Lorentz", deoarece au fost stabilite și de către Lorentz care însă nu le-a dat interpretarea cuvenită. Einstein consideră că orice fenomen fizic poate fi raportat la fel de bine fie la unul, fie la celălalt de cele două sisteme de referință $x\ y\ z$ sau $x'y'z'$, cu alte cuvinte legile fenomenelor sînt invariante în raport cu „transformarea Lorentz-Einstein". Formulele (A') subsistă cu condiția ca $v < c$, deci viteza relativă v nu poate fi mai mare decît viteza luminii în cîmp. În teoria relativității viteza maximă în univers, este viteza luminii c, constantă în mod real, independent de experiențe.

Viteza luminii este o constantă universală. În formulele (A), dacă considerăm pe v foarte mic în raport cu c, obținem tocmai formulele de transformare ale mecanicii clasice; de aici tragem concluzia că mecanica clasică este justă în prima aproximație în cazul vitezelor mici față de viteza luminii. Chiar vitezele avioanelor supersonice sau ale rachetelor sînt foarte mici față de viteza luminii așa că mecanica clasică își păstrează toată valabilitatea în viața noastră obișnuită. Fiecare locomotivă, avion sau rachetă se construiește azi tot după mecanica clasică a lui Newton. Mecanica einsteniană se aplică la calcularea sincrotroanelor moderne și în studiul fizicii nucleare, cînd particulele au viteze apropiate de viteza luminii. Formulele de transformare (A) explică experiența Michelson, pentru că tocmai această experiență a fost luată ca punct de plecare în teoria relativității (în cele două direcții ale aparatului Michelson viteza luminii fiind aceeași, nu se va produce fenomenul de interferență). Einstein a avut intuiția genială să ia rezultatul paradoxal al experienței Michelson, ca pe un fapt experimental sigur și fundamental.

În teoria relativității se explică perfect nu numai experiența Michelson, dar și experiența Fizeau, fără a fi nevoie să mai facem apel la eterul luminos; în felul acesta dispar toate contradicțiile pe care eterul le ridica. În teoria relativității nu mai este necesară prezența eterului.

O consecință importantă a formulelor de transformare este noul mod de a compune vitezele. Să considerăm un mobil m în mișcare cu viteza u' față de sistemul $x'\ y'\ z'$. Mobilul se mișcă de-a lungul axei Ox'. Sistemul $x'\ y'\ z'$ se mișcă cu viteza v de-a lungul axei comune Ox față de sistemul $x\ y\ z$ (v. fig. 1). Viteza mobilului în sistemul de referință $x\ y\ z$ va fi $u = \frac{dx}{dt}$, unde x este abscisa corespunzătoare și t timpul corespunzător.

În sistemul $x'y'z'$, viteza va fi: $u' = \frac{dx'}{dt'}$. Expresiile acestor viteze observăm că se mai pot scrie:

$$u = \frac{dx}{dt'} \cdot \frac{dt'}{dt} \text{ (V) și } u' = \frac{dx'}{dt} \cdot \frac{dt}{dt'} \text{ (VI)}$$

Să derivăm în raport cu timpul t' relațiile (A) prima și ultima:

$$\frac{dx}{dt'} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \text{ și } \frac{dt}{dt'} = \frac{1 + \frac{v}{c^2} \cdot \frac{dx'}{dt'}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

sau

$$\frac{dx}{dt'} = \frac{u' + v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \text{ și } \frac{dt}{dt'} = \frac{1 + \frac{v}{c^2} \cdot u'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

În mod asemănător derivînd în raport cu timpul t relațiile (A') corespunzătoare, vom obține:

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{u - v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \text{ și } \frac{dt'}{dt} = \frac{1 - \frac{v}{c^2} u}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Ținînd seama de (V) și (VI) obținem:

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{v}{c^2} \cdot u'} \text{ (B) și } u' = \frac{u - v}{1 - \frac{v}{c^2} \cdot u} \text{ (B')}$$

Am ajuns la un rezultat foarte interesant și anume: în mecanica relativistă, vitezele nu se mai compun ca în mecanica clasică ($u = u' + v$), ci se compun după relația (B). Pentru viteze mici se observă că termenul $\frac{v}{c^2} u'$ se poate neglija și în acest caz se poate întrebuința cu destulă exactitate relația $u = u' + v$.

În domeniul vitezelor mici (în raport cu viteza luminii) relația (B) coincide cu relația din mecanica clasică.

Teorema compunerii vitezelor (B) ne mai arată imposibilitatea obținerii unei viteze rezultante u mai mare decît viteza luminii c în vid; în adevăr, presupunînd că punctul m ar atinge în cazul extrem viteza maximă c (am văzut la grupul Einstein-Lorenz condiția $v \leqslant c$), atunci:

$$u = \frac{c + v}{1 + \frac{v}{c^2} \cdot c} = c.$$

Chiar dacă în același timp $v = c$ se obține tot:

$u = \dfrac{c + c}{1 + \frac{c}{c^2} \cdot c} = c$. Deci, *viteza luminii este limita superioară a vitezelor de translație.*

Cinematica relativistă explică în modul cel mai simplu experiența lui Fizeau: să notăm cu n indicele de refracție al apei și cu $u' = \dfrac{c}{n}$ viteza relativă a luminei în apă, cu v viteza apei. După relația (B) viteza u a luminii în raport cu instalația va fi:

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{v}{c^2} \cdot u'} = (u' + v)\left(\frac{1}{1 + \frac{v}{c^2} \cdot u'}\right).$$

Paranteza a doua se poate scrie:

$$\frac{1}{1 + \frac{v}{c^2} \cdot u'} \simeq 1 - \frac{v}{c^2} \cdot u'$$

(făcînd împărțirea se observă să se pot păstra numai primii doi termeni).

Avem:

$u = (u' + v)\left(1 - \frac{v}{c^2} \cdot u'\right) = u' + v - \frac{v}{c^2} \cdot u'^2$ (termenul $\frac{v^2}{c^2} \cdot u'$ se poate neglija).

Sau:

$u = \frac{c}{n} + v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$, adică tocmai relația găsită experimental de Fizeau.

Să vedem acum cîteva concluzii aparent paradoxale, care se desprind din transformările Einstein-Lorentz.

Măsura experimentală a timpului, a lungimilor în diferite sisteme în mișcare, nu se poate face decît prin intermediul undelor electromagnetice (luminii) care se propagă cu o viteză finită. In general o măsurătoare, o experiență, se reduce la observarea anumitor coincidențe (o coincidență în timp și în spațiu se poate numi, un eveniment). De exemplu într-un loc dat capătul unei bare coincide cu o anumită diviziune de pe o riglă gradată, în timp ce în același loc și în același moment, arătătorul unui ceasornic coincide cu o anumită diviziune pe cadran. Evenimentele (fenomenele) care au loc într-un sistem, spunem că sînt simultane, dacă timpurile arătate de ceasornicele din dreptul fiecărui eveniment sînt aceleași. Pentru aceasta trebuie ca ceasornicele să funcționeze identic, sincron. Cum se poate verifica aceasta? Să verificăm de exemplu mersul a două ceasornice A și B la distanță mare unul de altul. Pentru aceasta ne vom așeza la jumătatea distanței AB, unde cu ajutorul unui televizor sau cu ajutorul unei oglinzi vom primi semnalele electromagnetice (luminoase) trimise de ceasornicele A și B. Ne putem astfel da seama imediat, dacă cele două ceasornice merg în același ritm

(sînt sincrone), adică indică același timp în mod simultan. În mecanica clasică, două evenimente simultane într-un sistem de referință, erau simultane pentru toți observatorii din toate sistemele inerțiale. În mecanica relativistă, două evenimente simultane într-un sistem de referință, pot să nu mai fie simultane în alt sistem de referință. Să considerăm doi observatori atașați de două sisteme inerțiale; cei doi observatori primind lumina cu aceeași viteză, ei nu pot măsura la fel intervalul de timp care separă două evenimente și nici distanța în spațiu dintre aceste două evenimente. Dimensiunile spațiale și duratele (dimensiunile temporale) devin relative, ele depind de viteza relativă a observatorului. Să vedem de exemplu cum s-ar putea măsura lungimea l a unei bare AB aflată într-un sistem inerțial, de către un observator aflat în alt sistem inerțial. Pentru aceasta, observatorul (folosind semnalele luminoase) va trebui să marcheze în propriul său sistem de referință două repere A' și B' care să corespundă simultan capetelor A și B.

Distanța $l' = A'B'$ poate să fie mai mică decît $l = AB$ și cu atît mai mică cu cît viteza relativă v este mai mare. Fie o bară de lungime l așezată de-a lungul axei Ox în sistemul (presupus imobil) $O\ x\ y\ z$. Lungimea barei va fi egală cu diferența absciselor $l = x_2 - x_1$. Să măsurăm acum lungimea barei în sistemul inerțial $x'y'z'$, care se mișcă de-a lungul axei Ox cu viteza v. Pentru aceasta va trebui să luăm abscisele extremităților barei x'_2 și x'_1 în sistemul mobil la același moment. Ținînd seama de formulele de transformare Einstein-Lorentz (A) obținem:

$$x_2 = \frac{x'_2 + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}} \text{ și } x_1 = \frac{x'_1 + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \beta^2 = \frac{v^2}{c^2}.$$

Atunci: $l = x_2 - x_1$ sau $l = \frac{x'_2 - x'_1}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

Notînd cu $l' = x'_2 - x'_1$ lungimea barei în sistemul mobil, avem: $l' = l\sqrt{1-\beta^2}$, deci $l' < l$.

Față de sistemul mobil bara este mai scurtă. Rezultatul este general: orice corp aparținînd unui sistem inerțial este contractat față de un alt sistem inerțial, contractarea avînd loc numai în sensul mișcării (dacă cele două poziții ale extremităților barei sînt simultane pentru unul din observatori, nu mai sînt simultane pentru celălalt). Relația de mai sus este reciprocă: o bară de lungime l' imobilă față de sistemul $x'y'z'$ (se face calculul asemănător celui de mai sus), va avea față de sisitemul $x\ y\ z$ lungimea $l = l'\sqrt{1-\beta^2}$, adică ea este de asemenea contractată. Bara are lungimea maximă în sistemul de față de care ea este în repaus (lungimea proprie). Să ne imaginăm două trenuri de aceeași lungime egală cu lungimea peronului, în stare de repaus. Dacă trenurile s-ar mișca uniform pe două linii paralele cu viteze mari, călătorii fiecărui tren ar observa contractarea celuilalt tren, de asemenea și contractarea peronului. Călătorii însă nu vor constata nici o contractare a propriului tren în care călătoresc, deci lungimea măsurată este întotdeauna aceeași, oricare ar fi viteza de translație a trenului.

Să arătăm acum că durata unui fenomen oarecare (de exemplu durata oscilațiilor unui pendul, ceasornic etc.) se dilată (încetinește) în raport cu un sistem, față de care ceasornicul se află în stare de mișcare uniformă. Să considerăm durata oscilațiilor unui orologiu imobil (pe abscisă x) în sistemul de referință $x\ y\ z$.

Perioada pendulului va fi: $T = t_2 - t_1$, unde t_1 este momentul inițial al oscilației și t_2 momentul final al oscilației. Acestor momente t_1 și t_2 le vor corespunde în sistemul mobil $x'y'z'$ momentele t'_1 și t'_2, date de relațiile (A'):

$$t'_2 = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}} \text{ și } t'_1 = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

$$T' = t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{sau:} \quad T' = \frac{T}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

deci $T' > T$.

Pentru observatorul din sistemul inerțial $x'y'z'$, ceasornicul din celălalt sistem pare că a rămas în întîrziere, și a încetinit ritmul.

Putem presupune tot atît de bine că orologiul se află în sistemul mobil $x'y'z'$. Făcînd același calcul de mai sus, obținem o relație asemănătoare:

$$T = \frac{T'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

deci acum $T > T'$

Față de sistemul $x\ y\ z$ ceasornicul din celălalt sistem e în întîrziere. Încetinirea este aceeași, chiar dacă în locul unui ceasornic cu arc, s-ar folosi unul cu nisip, sau orice alt ceasornic natural, de exenplu oscilațiile atomului de hidrogen. Fizicienii Ives și Stilwell (1938—1941), folosind metode spectroscopice, au verificat încetinirea duratelor pentru atomii de hidrogen, care au jucat rolul de mici ceasornice în mișcare. Din cele expuse pînă aici putem spune că mărimile fundamentale din fizică, lungimea și durata sînt relative, valoarea lor depinzînd de sistemul în care se găsește corpul (evenimentul) și de sistemul de referință.

Dar nu numai în domeniul spațiului și timpului formulele Einstein-Lorentz au modificat concepțiile noastre. Masa, un atribut general al materiei, era considerată în mecanica clasică absolut invariabilă. In mecanica relativistă, față de două sisteme în mișcare unul în raport cu celălalt nu i se poate atribui unui corp dat aceeași masă. Einstein a demonstrat că legea fundamentală a dinamicii $\triangle (mv) = f\triangle t$, poate rămîne invariantă față de grupul de transformare Einstein-Lorentz, dacă se admite că masa corpului variază cu viteza după relația:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad \text{(VII)}$$

unde m este masa de repaus a corpului pentru $v = 0$ într-un sistem de referință dat, iar v este viteza corpului. Relația de mai sus ne arată că masa crește odată cu viteza corpului și tinde către infinit cînd viteza se apropie de viteza luminii c.

Pentru viteze mici, termenul $\frac{v^2}{c^2}$ se poate neglija, deci $m = m_0 = \text{constant}$. Am ajuns la invariabilitatea masei din mecanica clasică. Deci mecanica clasică este cazul limită al teoriei relativității cînd $\frac{v}{c} \ll 1$ (viteza corpului respectiv cu mult mai mică decît viteza luminii). Prin urmare mecanica clasică este o aproximație a mecanicii relativiste. In cazul vitezelor foarte mari, mecanica clasică nu se mai poate aplica. Exactitatea relației (VII) a fost confirmată prin numeroase experiențe efectuate asupra razelor catodice și razelor β, unde electronii pot ajunge la viteze de aproximativ $2{,}94.10^{10}$cm/s.

O consecință importantă a relației (VII) este legătura dintre masa corpului și energia lui :

$$\Delta W = c^2 \Delta m.$$

Masa și energia sînt două însușiri fundamentale ale materiei, iar între ele există o relație de interdependență ; variația uneia atrage după sine o variație corespunzătoare a celeilalte. In reacțiile nucleare, legea interdependenței dintre masă și energie și-a găsit o confirmare deplină.

Ne oprim la aceste aspecte. In încheiere subliniem următoarele : teoria relativității restrînse dă formulele de trecere de la un sistem inerțial la altul, stabilind invarianța legilor naturii în toate sistemele inerțiale. Extinderea principiului clasic al relativității asupra fenomenelor electromagnetice a însemnat în același timp o revizuire a noțiunilor de spațiu și timp. In fizica clasică aceste noțiuni erau concepute izolat, independente de materie, fără legătură cu mișcarea materiei. Teoria relativității, în concordanță cu materialismul dialectic, a dezvăluit legătura dintre spațiu și timp, precum dintre acestea și materie. Spațiul ca și timpul sînt forme obiectiv reale de existență a materiei în mișcare, independente de conștiință. In teoria relativității apare confirmată concepția materialist-dialectică a interdependenței tuturor laturilor realității și a unității materiale a luminii.

UN MODEL DE GEOMETRIE

de *IOSIF FUCHS*, profesor S. m. 1 Seral Timișoara

Obișnuința milenară de abstractizare, a făcut ca sub noțiunea de punct, noi să ne închipuim ceva „ce nu are dimensiuni", iar noțiunea de linie o legăm în logica cotidiană imediat de cea a lungimii.

De aici pornind, s-a crezut mult timp că nu poate exista decît geometria care se bazează tocmai pe acest conținut consacrat noțiunilor de bază.

Acum, la 100 ani de la moartea lui Bolyai, lucrurile stau evident altfel.

Edificiul geometriei are ca fundament un mănunchi de adevăruri — cunoscutele axiome — aplicate noțiunilor primare, din care rezultă un sistem de proprietăți și teoreme, logic deduse și fără contradicții.

Orice alt edificiu cu alte noțiuni de bază, și axiome bine precizate, care nu duc la contradicții în logica lor dezvoltare, trebuie deci admis ca fiind o geometrie.

Vom prezenta în cîteva trăsături modelul unei astfel de geometrii arătînd:

A) existența și posibilitatea acestei geometrii.

B) legătura ei cu geometria euclidiană.

Rezervînd denumirea de *plan R*, planului euclidian, denumim această geometrie *Geometria în planul R*, sau pe scurt *Geometria R*, și ne vom limita la geometria plană, extinderea pentru spațiu, cu analogiile respective, rămînînd tot atît de valabilă.

★

Mai întîi, vom reaminti unele propoziții din transformarea prin inversiune.

Fiind dat un punct O (polul inversiunii) și o constantă r (modulul inversiunii) putem face ca oricărui punct A din plan să-i corespundă un punct A' astfel ca $OA \cdot OA' = r^2$.

Punctul A' astfel obținut se cheamă inversul lui A în raport cu (O,r). Punctele A,A' și O se află pe aceeași dreaptă.

Relația $OA \cdot OA' = r^2$ este satisfăcută în figura A.

O (polul inversiunii) este centrul cercului de inversiune (ω) cu raza egală cu r (modulul inversiunii).

TA este perpendiculară pe OA', iar $A'T$ tangentă în T la cercul de inversiune, conform teoremei catetei: $OA \cdot OA' = r^2$.

De aici rezultă construcția punctului invers, dat fiind cercul de inversiune (ω) cu centrul O și raza r.

Se vede de aici că inversul unui punct din interiorul cercului de inversiune este un punct din afara lui și reciproc inversul unui punct din exteriorul cercului (ω) un punct în interiorul lui. Un punct de pe cercul de inversiune este propriul său invers. Așa fiind orice figură din interiorul cercului (ω) se transformă într-o figură din afară lui și reciproc.

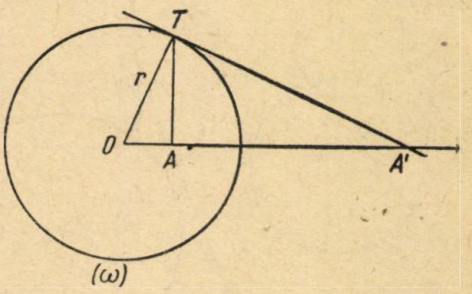


Fig. A

Din complexul de teoreme și proprietății privind inversiunea vom aminti numai pe acelea, de care avem nevoie pentru a transforma figura din R' în R și reciproc, vezi articolul: *Inversiunea* în R.M.F. nr. 9/1953 sau capitolul respectiv din *Elemente de transformări geometrice* de C. Ionescu — Bujor.

1. Prin inversiune o dreaptă se transformă într-un cerc care trece prin pol.

2. Un cerc care nu trece prin pol se transformă în cerc care nu trece prin pol.

3. O dreaptă care taie cercul de inversiune se transformă în cerc ce trece prin pol și punctele de intersecție ale dreptei cu cercul de inversiune.

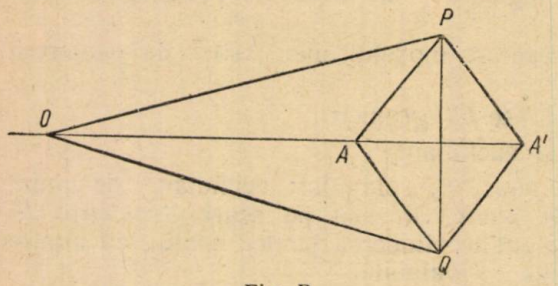


Fig. B

Pe baza acestor teoreme dreptele se transformă în cercuri care trec prin pol și cercurile se transformă în cercuri, menținînd proprietățile de intersecție, paralelism, perpendicularitate etc.

Iată deci posibilitatea de a transforma orice figură din R' în R și invers.

Pentru efectuarea acestor transformări există chiar aparate simple dintre cari descriem inversorul lui P e a u c e l l i e r. Fig. B.

Aparatul constă din 6 bare articulate.

$$A'P = A'Q = QA = AP \text{ și } OP = OQ.$$

Punctele O, A' și A fiind respectiv egal depărtate de P și Q sînt coliniare. Pentru A' să fie inversul lui A trebuie să avem.

$$OA' \cdot OA = \text{constant} = r^2.$$

Condiția este îndeplinită dacă $OP^2 - PA^2 = r^2$.

Deci: dacă A' descrie un arc de cerc ce trece prin O punctul A va descrie un segment de dreaptă, iar dacă A se mișcă de-a lungul unui segment de dreaptă, A' va descrie un arc de cerc.

1. Considerăm în planul euclidian R un punct O și definim planul R' astfel:

a) „Punctele" din R' sînt aceleași cu punctele din R și coincid cu ele, în afară de punctul O pe care spațiul R' nu-l conține.

b) Numim „drepte" cercurile și dreptele care trec prin O.

c) Cercurile și dreptele care nu trec prin O sînt „cercuri" și în R'.

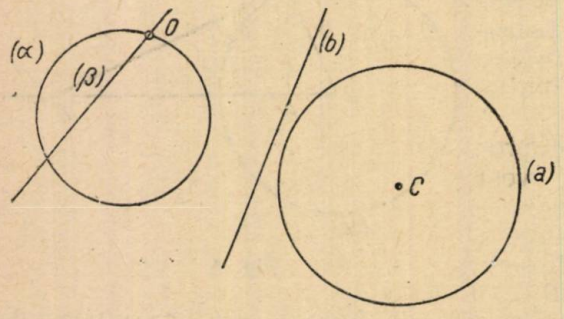


Fig. 1

În fig. 1, (α) și (β) sînt „drepte" iar (*a*) și (*b*) sînt „cercuri.

2. Să ne convingem, prin cîteva verificări, că geometria R' admite aceleași axiome ca și geometria R (euclidiană) cu toate că noțiunile de bază sînt evident altele.

Primele axiome ale lui Hilbert sînt:

I. 1. Două puncte diferite A și B determină o dreaptă.

Această axiomă este valabilă și în R'.

„Dreapta" (α) este bine determinată de punctele A și B. În limbajul euclidian: Cercul (α) este bine determinat de trei puncte (A,B și O).

II. 1. Dacă $A,B,C,$ sînt puncte pe o dreaptă (α) și B se află între A și C atunci B se află între C și A.

II. 2. Dacă A și C sînt punctele unei drepte (α) există cel puțin un punct B între A și C.

Pe cercul (α) din R propozițiunile nu sînt adevărate.

Pe „dreapta" (α) din R' axiomele sînt valabile, deci O nu face parte die ea (fig. 2 și 3).

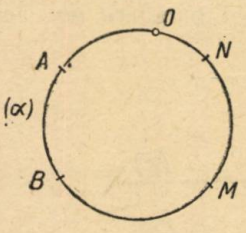


Fig. 2

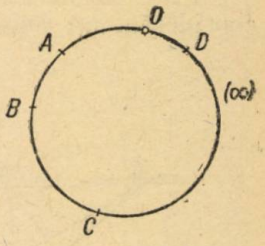


Fig. 3

II. 3. Dacă A,B,C sînt trei puncte necoliniare și (a) o dreaptă care are un punct comun cu segmentul AB atunci (a) are un punct comun și cu unul din segmentele AC sau BC (fig. 4).

O dreaptă prin punctul P de pe AB intersectează neapărat ori segmentul BC ori segmentul AC.

Nu este cazul să cercetăm aici toate axiomele valabile atît în R cît și în R'. Menționăm în special că postulatul paralelelor lui Euclid rămîne în vigoare în planul R'.

Paralelele se definesc ca două drepte care nu au nici un punct comun.

Să arătăm că în geometria R' printr-un punct exterior unei „drepte" nu putem duce decît o singură „paralelă" (fig. 5).

„Dreapta" (b) care trece prin P, este paralelă cu „dreapta" (a) neavînd comun nici un punct cu ea și este evident unică după cum rezultă din interpretarea euclidiană:

Există un singur cerc tangent altuia în punctul O și care trece prin punctul P.

3. În geometria euclidiană, vorbind de segmente egale se întrebuințează noțiunea de suprapunere, făcînd apel la anumite mișcări pentru a o efectua. Cum și aici noțiunea de mișcare este străină raționamentului pur geometric și în geometria R' ea trebuie evitată complet.

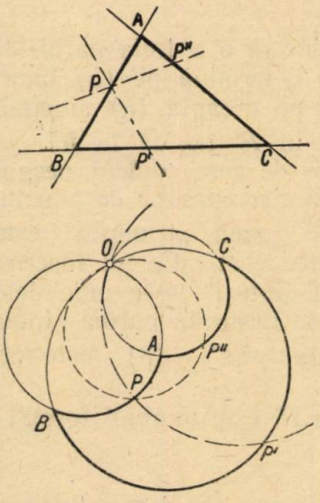


Fig. 4

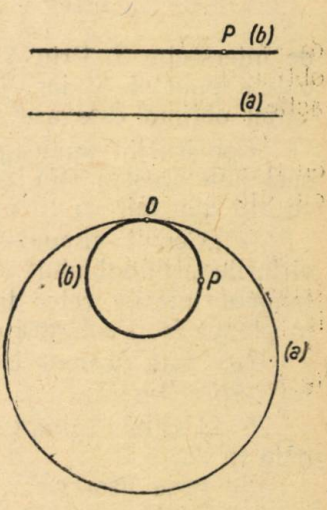


Fig. 5

Ne propunem următoarea problemă:

Să se construiască pe dreapta definită prin punctele A și B un segment egal cu cel determinat de A și B avînd un capăt într-un punct dat A'.

Pentru aceasta ne folosim în R de construcția din fig. 6.

Pe o paralelă arbitrară (β) la o dreaptă (α), determinată de A și B considerăm un segment oarecare ab. Trasînd Aa și Bb obținem punctul

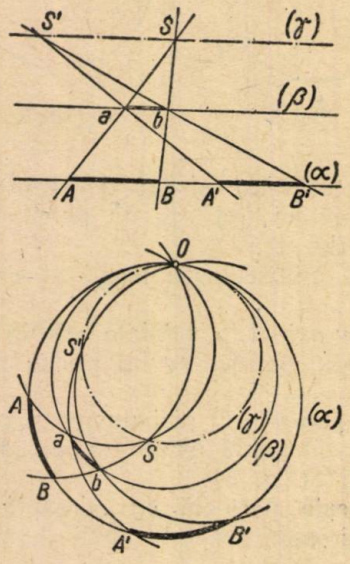


Fig. 6

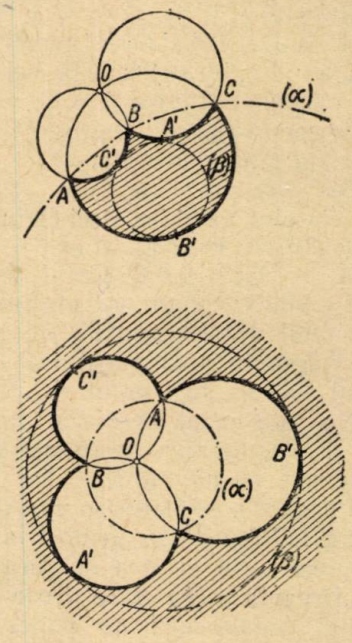


Fig. 7

de intersecție S. Prin S ducem o a treia paralelă (γ). Unind A' cu a se obține punctul S' iar $S'b$ determină pe (α) punctul B'. Segmentul $A'B'$ astfel obținut este așezat pe dreapta (α) și egal cu segmentul dat AB.

Construcția analoagă în R' ne dă la fel „segmente" egale. Privite euclidian acestea sînt arce de cerc evident neegale. Unul dintre ele este cu atît mai mic cu cît este mai aproape de punctul exclus O.

4. „Cercul circumscris" unui „triunghi" este unic determinat prin vîrfurile „triunghiului" considerat. „Cercul înscris" unui „triunghi" adică tangent interior celor trei „laturi", este unic determinat. Să le desenăm în planul R'. Pe figură este hașurată partea „interioară" a „triunghiului".

(α) este „cercul circumscris", (β) este „cercul înscris triunghiului" ABC (fig. 7).

5. „Unghiul" drept în R' este unghiul format de două cercuri ortogonale în R.

Se vede ușor că:

a) printr-un punct exterior unei drepte trece o singură perpendiculară. Cercul ortogonal față de cercul (α) dat, care trece prin P este unic.

Prin punctul P trece deci o singură „perpendiculară" la „dreapta" dată (a).

b) Două „drepte perpendiculare" pe a treia sînt paralele între ele.

c) Într-un punct al dreptei se poate ridica o singură perpendiculară. Cercul (a) este ortogonal cu (b), (c) este ortogonal cu (b). Deci (a) și (b) sînt tangente în O.

În R' deci „dreptele" (a) și (b) sînt perpendiculare. La fel (a) și (b). Rezultă că „dreptele" (a) și (b) sînt paralele (fig. 8).

6. Să revenim asupra segmentelor egale, punînd problema găsirii mijlocului unui segment dat. Evident că nu vom avea de a face cu arce

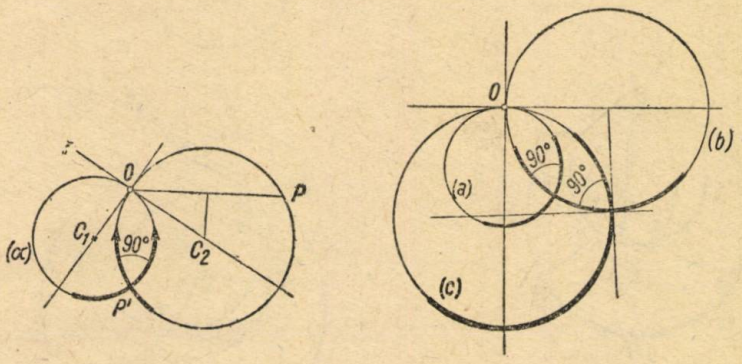


Fig. 8

de cerc egale, cu toate că în R' „segmentele de dreaptă", formate de mijlocul segmentului dat sînt egale, precum rezultă din construcție.

Considerăm în geometria euclidiană teorema:

Dreapta care unește punctul de intersecție a laturilor neparalele a unui trapez cu punctul de intersecție al diagonalelor taie laturile paralele la mijlocul lor — și o transpunem în planul R'.

7. Pe baza acestei proprietăți a trapezului se poate construi o paralelă printr-un punct dat în afara ei la o dreaptă dată V.

8. Putînd duce o „paralelă" la o „dreaptă" printr-un punct dat posedăm procedeul de a determina pe orice „dreaptă" „segmente egale" cu un „segment" dat (fig. 9).

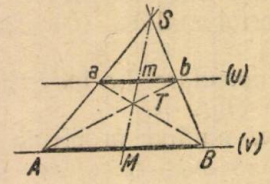
În planul R dreptele (d) și (d') se intersectează în C. CM este egal cu CM' fiind raze, dreptele AA' și BB' sînt paralele cu MM' și determină segmentul AB egal cu $A'B'$. Construcția analogă pentru R' rezultă din figura 10.

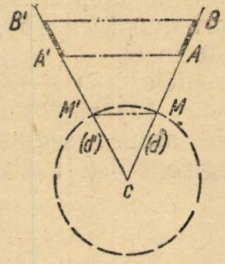
9. Construcțiile de figuri bazîndu-se pe construcții de segmente egale și unghiuri egale în diferite poziții și sub anumite condiții, nu ne rămîne decît a indica o metodă pentru construcția unor unghiuri egale cu un unghi dat, ca să putem afirma că și în R' construcțiile grafice cunoscute în R, sînt la fel posibile.

Scoatem în relief o singură problemă.

Să se construiască un unghi egal cu un unghi dat avînd vîrful într-un punct dat.

Fie în planul R unghiul α și punctul S'. Prin S și S' se duce un cerc (C) oarecare. Laturile unghiului determină arcul AB. Unghiul β





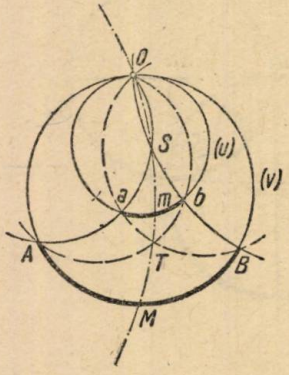


Fig. 9

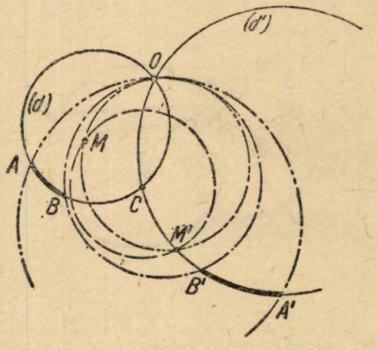
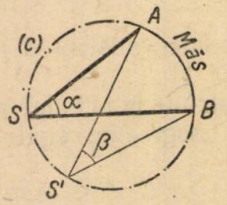


Fig. 10



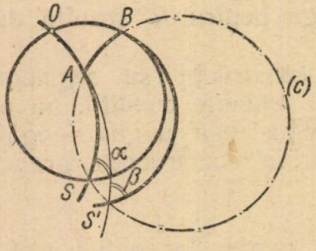
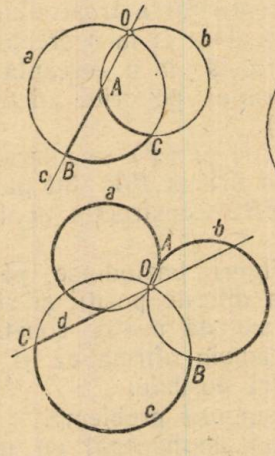


Fig. 11



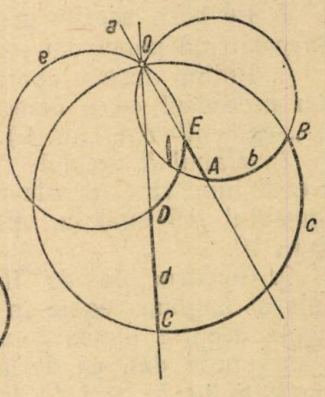


Fig. 12

este egal cu unghiul α conform teoremei cunoscute despre măsura unghiurilor (fig. 11).

10. Pentru o mai ușoară pătrundere în construcția figurilor geometrice în R dăm cîteva exemple de figuri compuse din „drepte". Un triunghi, un patrulater și un pentagon (fig. 12).

Am demonstrat că geometria R' există, avînd noțiunile primare definite și clădite pe axiomele lui Hilbert.

*

În concluzie: unui punct din spațiu R îi corespunde un punct din spațiu R'.

Unei drepte din R îi corespunde o „dreaptă" în R'.

Unui cerc din R îi corespunde un „cerc" în R'.

Relațiile între elementele unei figuri din R rămîn aceleași și în R'.

NOȚIUNI DESPRE NATURA MAGNETISMULUI

de *MIRCEA BOSTAN*, prof. Galați

Clasificarea corpurilor magnetice

Prin magnetism se înțelege proprietatea pe care o au unele minereuri de a atrage pilitura de fier. Această proprietate se observă în general la minereurile ce conțin oxizi de fier ($Fe\ O + Fe_2O_3$) sau sulfuri ($6\ Fe\ S + Fe_2O_3$) și se cunoaște din timpurile cele mai îndepărtate.

La începutul secolului XX s-au găsit și corpuri care deși nu conțin de loc fier în constituția lor — au totuși proprietăți magnetice, cum sînt de exemplu, aliajele de tip Heusler.

Pe cale experimentală, se poate arăta că însușirile magnetice ale unui corp, se pot transmite prin contact direct sau prin influență,

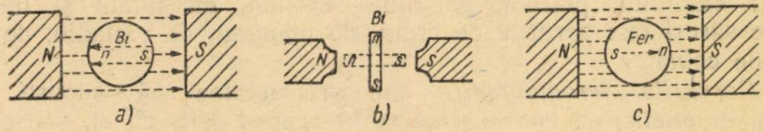


Fig. 1

anumitor metale sau aliaje putînd deveni ele însele magneți într-o măsură mai mare sau mai mică.

Faraday a observat că, dacă într-un cîmp magnetic se introduc diferite corpuri, ele vor prezenta proprietăți magnetice diferite, ceea ce l-a condus la ideea clasificării corpurilor în trei grupe: 1° corpuri diamagnetice — 2° corpuri paramagnetice și 3° corpuri feromagnetice.

1° *Corpurile diamagnetice* se vor caracteriza prin aceea că, introduse într-un cîmp magnetic omogen, magnetizarea lor este de sens contrar cîmpului magnetic inductor, în sensul că în fața nordului inductor apare polul nord indus, iar în fața sudului inductor apare sudul indus al corpului (Fig. I-a).

Magnetizarea corpurilor diamagnetice se manifestă numai cînd sînt supuse influenței unui cîmp magnetic, păstrîndu-și această proprietate atît timp cît cîmpul magnetic inductor nu s-a anulat.

Dacă corpurile diamagnetice cu formă simetrică (o sferă) sînt introduse în cîmpuri magnetice neuniforme, ele se vor deplasa în regiunile unde intensitatea cîmpului magnetic este mai mică. Dacă în același cîmp magnetic se vor introduce corpuri diamagnetice — la care lungimea e mai mare decît celelalte două dimensiuni — se constată că ele capătă o mișcare de rotație în cîmp, tinzînd să se orienteze perpendicular pe liniile cîmpului magnetic (Fig. 1, b).

Din grupa diamagneticelor fac parte următoarele corpuri: bismutul, cuprul, aurul, argintul, toate metaloidele afară de oxigen, substanțele organice, apa, hidrogenul și altele.

Fizicianul francez, P. Curie studiind experimental proprietățile magnetice ale acestor corpuri, reușește în 1895 să stabilească legile de bază ale diamagnetismului, care pot fi enunțate astfel:

— diamagnetismul este aproape întotdeauna independent de temperatură și de valoarea cîmpului magnetic;

— diamagnetismul este independent de starea fizică a substanței, excepție făcînd numai bismutul.

2°. *Corpurile paramagnetice* se vor caracteriza prin aceea că introduse într-un cîmp magnetic uniform, se vor magnetiza în sensul cîmpului fizic. La aceste corpuri proprietățile magnetice sînt foarte slabe din care cauză se deosebesc de corpurile feromagnetice. Prin introducerea corpurilor paramagnetice într-un cîmp magnetic neuniform se constată că ele se vor deplasa spre regiunea cea mai intensă a cîmpului, orientîndu-se — cu lungimea — pe direcția liniilor de cîmp. Studiindu-se experimental proprietățile magnetice ale corpurilor paramagnetice, s-a stabilit că magnetizarea lor depinde de temperatură și anume: magnetizarea scade atunci cînd temperatura crește.

Din categoria corpurilor paramagnetice fac parte corpurile gazoase ca: Oxigenul (O_2), ozonul (O_3), oxidul de azot (NO), corpurile metalice ca: aluminul, platina, paladium, cromul, manganul și un număr mare de săruri ca: sărurile de crom, de mangan, de vanadiu, de fier, de nichel, de cobalt.

3°. *Corpurile feromagnetice* au proprietatea că supuse acțiunii cîmpului magnetic, se vor magnetiza în același sens cu el, deosebindu-se de corpurile paramagnetice prin aceea că magnetizarea lor este mai mare atunci cînd intensitatea cîmpului inductor este mică. Substanțele feromagnetice — odată magnetizate — își vor păstra acest magnetism chiar după ce cauza care l-a determinat dispare — devenind astfel magneți permanenți.

Din categoria substanțelor feromagnetice fac parte: fierul, cobaltul, nichelul, unii oxizi cristalizați de fier, unele sulfuri de fier, aliajele Heusler, gedolinium și altele.

Din cercetări experimentale a reieșit că proprietățile magnetice ale acestor corpuri depind de cîmpul magnetic, de temperatură și în unele cazuri chiar de starea fizică a substanței.

O caracteristică esențială a substanțelor feromagnetice constă în existența unei temperaturi la care feromagnetismul dispare, purtînd

numele de punct Curie. Astfel proprietățile feromagnetice ale fierului dispar la 750°C, pentru nichel la 358°C, iar pentru cobalt la 1120°C.

De asemenea se constată tot pe cale experimentală, că magnetizarea corpurilor feromagnetice se mărește o dată cu mărirea cîmpului magnetic, ajungînd la o valoare maximă care poartă numele de magnetizare de saturație.

Ipoteza lui Ampère

Proprietățile magnetice ale corpurilor se cunosc din cele mai vechi timpuri, dar explicarea științifică a acestor fenomene datează abia de la începutul secolului trecut.

În primele încercări de a explica magnetismul, fizicienii au apelat la existența unor sarcini magnetice speciale, de semne opuse. Încercările experimentatorilor de a separa sarcinile magnetice au fost cu neputință, încît au considerat ca particulă elementară sistemul de două sarcini magnetice egale ca mărime și de semne contrarii, căruia i-au dat denumirea de dipol magnetic.

Mărimea caracteristică a unui dipol magnetic îl constituie momentul său magnetic, care se definește prin produsul dintre „o sarcină magnetică" m și vectorul „lungime" $\vec{l}$ al dipolului.

$$\vec{M} = m \cdot \vec{l}. \tag{1}$$

În 1821 Oersted observă că la trecerea unui curent electric printr-un conductor — în jurul său apare un cîmp magnetic. Ampère — pornind de la această constatare — face ipoteza că și reciproca este adevărată: adică, orice cîmp magnetic este generat de un curent electric. După Ampère — dipolii magnetici elementari ar fi cauzați de niște curenți circulari, pe care i-a denumit curenți moleculari. Se cunoaște că, dacă printr-o spiră circulară se trece un curent electric, aceasta se comportă ca un magnet sub formă de bară — pentru care o față a spirei se consideră polul nord, iar celălaltă polul sud, de unde rezultă că axa polilor este perpendiculară (fig. 2).

Putem considera că același lucru se întîmplă și în cazul curenților moleculari, iar pentru ca să existe o echivalență între dipolii magnetici elementari și curenții moleculari trebuie ca momentele lor magnetice să fie egale.

Se poate demonstra că pentru un curent circular momentul său magnetic este dat de relația:

$$\vec{M} = i \cdot S \cdot \vec{n_0} \tag{2}$$

unde i — este intensitatea curentului, S — aria cuprinsă de curent, iar $\vec{n_0}$ — este un vector unitar normal la această arie, care ne va ajuta să-i determinăm direcția și sensul.

Pentru a avea o echivalență trebuie ca relațiile (1) și (2) să fie egale.

Ipoteza lui Ampère — referitoare la existența curenților electrici moleculari — trebuia verificată. Cercetările efectuate în structura atomului, au stabilit că atomul este compus dintr-un nucleu greu, încărcat pozitiv, în jurul căruia se rotesc sarcini electrice negative, numite electroni, pe anumite orbite bine determinate. Dar, se știe că electronii în mișcare determină un curent electric, astfel că, în cazul de față, rotirea electronilor în jurul nucleului va produce curenți circulari, care vor avea toate efectele curentului electric.

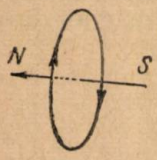


Fig. 2

Prin convenție, sensul curentului electric — determinat de rotirea electronului în jurul nucleului — se ia de sens contrar sensului de mișcare al electronului. De aici rezultă că, curentul molecular — care a fost considerat ipotetic de către Ampère — își găsește realitate în mișcarea electronului în jurul nucleului.

Curenții moleculari pot fi puși în evidență și pe cale experimentală prin experiența lui Einstein și de Haas (1915) și prin aceea a lui Barnatt (1914).

Experiența lui Einstein — De Haas constă în următoarele: Un cilindru de fier se suspendă printr-un fir de cuarț subțire în interiorul unei bobine (fig. 3). Pe firul de cuarț se găsește o mică oglindă care servește la măsurarea rotirei cilindrului de fier. Se lasă să treacă prin bobină curent într-un anumit sens, deci cilindrul se va magnetiza. Se schimbă apoi sensul curentului prin bobină și se constată că cilindrul de fier capătă o mișcare de rotație.

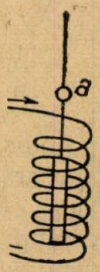


Fig. 3

Din această constatare experimentală se poate deduce existența curenților moleculari astfel:

În momentul cînd prin bobină trece curent electric cilindrul de fier se va magnetiza — astfel că un capăt al său devine polul nord, iar capătul opus devine polul sud. Dacă în interiorul cilindrului de fier există curenți, aceștia sub influența cîmpului magnetic din exterior se vor orienta în așa fel încît momentele lor magnetice să aibă aceeași direcție și același sens. În cazul de față direcția momentelor magnetice va fi dată de direcția nord-sud a axului cilindrului de fier. De aici se trage concluzia că, curenții moleculari se vor dispune în plane paralele, perpendiculare pe axul amintit mai sus, avînd același sens de mișcare.

Admițînd existența curenților moleculari, trebuie să admitem de fapt existența unor particule electrizate în mișcare, care vor genera acești curenți elementari. Notînd cu m masa particulei electrizate, iar cu v viteza ei, produsul mv ne va da impulsul pe care îl posedă particula în timpul mișcării sale pe orbita de rază r. Produsul dintre impulsul mv și raza r ne va da momentul impulsului, care va căuta să se conserve.

La schimbarea sensului curentului electric prin bobină, cilindrul de fier își va schimba polaritatea, ceea ce înseamnă că, curenții moleculari trebuie să-și modifice momentele lor magnetice cu 180°. Aceasta echivalează cu a spune că, curenții electrici moleculari își schimbă sensul mișcării — rămînînd totuși în același plan. De aici rezultă că și mo-

mentul impulsului se va schimba, iar pentru a se conserva, moleculele se vor opune acestei schimbări, producînd un moment mecanic ce va tinde să rotească cilindrul de fier în sens invers sensului de deplasare a curenților moleculari.

Cum experimental se constată rotirea cilindrului de fier — atunci cînd prin bobină se schimbă sensul curentului — rezultă că în interiorul corpului există curenți moleculari și deci ipoteza lui Ampère corespunde realității.

Verificarea ipotezei lui Ampère se mai poate face și prin experiența fizicianului american Barnett, care este de fapt reciproca experienței lui Einstein-De Hass care constă în următoarele:

Un cilindru de fier este rotit foarte repede în jurul axului longitudinal. Se constată că extremitățile sale devin polii unui magnet. Aceasta se explică prin aceea că rotația corpului se transmite moleculelor, iar acestea vor căuta să se orienteze în așa fel încît curenții moleculari să se găsească în plane paralele cu planul de rotație al corpului și atunci vor determina cei doi poli ai cilindrului de fier.

Astăzi se cunosc și alte experiențe prin care ipoteza lui Ampere se verifică, încît toți fizicienii recunosc că proprietățile magnetice ale corpurilor sînt o consecință a structurii atomice a lor.

Explicația fenomenelor magnetice.

O teorie completă a fenomenelor magnetice trebuie să explice existența celor trei categorii de corpuri: diamagnetice, paramagnetice și feromagnetice, precum și fenomenele de variație a magnetizării corpurilor în raport cu temperatura, cu cîmpul magnetic sau cu alți factori care intervin.

Luîndu-se în considerare structura atomului, se poate da astăzi o explicație a proprietăților magnetice ale corpurilor, care să fie de acord cu cercetările experimentale — pornind de la existența curenților elementari produși de electroni în mișcare. Rotirea electronilor în jurul nucleului se caracterizează printr-un moment magnetic care va fi perpendicular pe planul orbitei descris de sarcina electrică în mișcare. De asemenea s-a constatat că electronul pe lîngă mișcarea sa în jurul nucleului, mai are și o mișcare de rotație în jurul unui ax ce trece prin centrul său. Intr-o oarecare măsură putem considera că mișcarea electronului în jurul nucleului, este asemănătoare mișcării Pămîntului în jurul Soarelui. Rotirea electronului în jurul unui ax propriu în fizică se cunoaște sub denumirea de efect de spin, căruia îi va corespunde un moment magnetic

Momentul magnetic provenit din rotirea electronului în jurul nucleului și cu momentul magnetic provenit din efectul de spin — fiind mărimi vectoriale — se vor compune obținîndu-se momentul magnetic al electronului.

Dar într-un atom sau moleculă, există un număr de cîțiva electroni care se vor roti pe orbite diferite, astfel că momentele lor magnetice — adunîndu-se vectorial — vor determina momentul magnetic al atomului sau moleculei, care poate fi zero sau diferit de zero.

Considerînd că momentul magnetic al atomului sau al moleculei este nul — se poate ajunge la unele concluzii teoretice — care vor explica constatările experimentale din cazul corpurilor diamagnetice.

Dacă atomii sau moleculele sînt lipsite de moment magnetic, rezultă că toate corpurile care vor avea în structura lor astfel de atomi sau molecule vor fi lipsite de proprietăți magnetice. Aplicînd un cîmp magnetic unui astfel de corp, moleculele din cauză că n-au moment magnetic nu-și vor putea modifica orientarea lor în spațiu, dar din cauză că asupra electronilor acționează forța electromagnetică, ei își vor modifica viteza unghiulară astfel că apare un moment magnetic suplimentar — pentru fiecare moleculă în parte de sens contrar cîmpului magnetic inductor.

Din această cauză corpul se va magnetiza de sens contrar cîmpului aplicat, ceea ce de fapt se constată experimental.

În expresia matematică a acestui moment magnetic suplimentar, intervine intensitatea cîmpului magnetic aplicat corpului, de unde rezultă că el va exista numai atît timp cît asupra lui va acționa cîmpul magnetic. De îndată ce cîmpul magnetic inductor se anulează va dispare și momentul magnetic suplimentar, încît corpul își pierde proprietățile magnetice.

Din aceeași expresie a momentului magnetic suplimentar se deduce că magnetizarea unor astfel de corpuri nu depinde de temperatură, astfel că din punct de vedere științific se poate da o teorie a diamagnetismului care să corespundă constatărilor experimentale.

Paramagnetismul se explică astăzi prin admiterea că există atomi sau molecule cu moment magnetic ce nu se anulează.

Din cauza agitației termice, o substanță constituită din astfel de molecule sau atomi nu se poate polariza în lipsa unui cîmp magnetic exterior. Dacă asupra substanței acționează un cîmp magnetic exterior, magnetizarea începe să apară din cauză că moleculele se vor orienta astfel încît momentul lor magnetic să fie îndreptat în sensul cîmpului aplicat. Aici trebuie făcută o remarcă și anume: la aplicarea cîmpului magnetic electronii își vor modifica viteza unghiulară din care cauză va apare un moment magnetic indus, de unde rezultă că magnetizarea corpului este mică.

Ca substanța să fie paramagnetică trebuie ca momentul propriu al moleculei să fie mai mare decît momentul magnetic indus. Moleculele avînd un moment magnetic propriu înseamnă că cel mai mic cîmp magnetic aplicat corpului îl va aduce la starea de saturație. Aceasta însă nu se întîmplă din cauza agitației termice care strică mereu orientarea moleculelor. Teoria arătată că magnetizarea unor astfel de substanțe este proporțională cu intensitatea cîmpului magnetic — dacă acesta nu este prea mare — și invers proporțională cu temperatura, concluzii ce sînt de acord cu rezultatele experimentale.

Explicația proprietăților feromagnetice ale corpurilor a căpătat un caracter definitiv abia în ultimii ani pe baza mecanicii cuantice. Primul care a încercat să dea o explicație feromagnetismului a fost fizicianul francez Pierre Weiss. El considera că în interiorul substanțelor feromagnetice ar exista un cîmp interior numit cîmp molecular — care ar produce forțe destul de puternice ce ar orienta momentele magnetice

ale moleculelor, chiar dacă cîmpul magnetic exterior este nul. În felul acesta se putea explica magnetizarea substanțelor în lipsa unui cîmp exterior.

Weiss consideră cîmpul magnetic interior destul de puternic, pentru a se opune agitației termice care ar strica orientarea moleculelor.

Trebuie amintit că în teoria lui Weiss nu se face nici o ipoteză despre natura acestui cîmp interior.

Teoria feromagnetismului concepută de Weiss explică multe proprietăți ale substanțelor feromagnetice, iar pentru ca teoria să fie în concordanță cu cercetările experimentale trebuie considerat cîmpul interior de ordinul de mărime: 10^6 Gauss.

În 1927 J. D. Dorfman studiind difracția electronilor prin substanțe feromagnetice, n-a constatat existența cîmpurilor interne așa de puternice, ceea ce l-a determinat să creadă că ele nici nu există.

Din cercetările efectuate de Dorfman rezultă că forțele care stau la baza feromagnetismului nu sînt de natură magnetică.

Mai tîrziu fizicianul german Heisenberg reușește să arate că forțele care orientează momentele proprii ale moleculelor sînt forțe de schimb pe care le preconizează mecanica cuantică. După Heisenberg magnetizarea corpurilor feromagnetice este cauzată de momentul magnetic al spinului și nu de mișcarea orbitală a electronului.

Pe baza celor expuse, rezultă că toate corpurile care ne înconjoară au proprietăți magnetice și că purtătorii elementari ai magnetismului, sînt particulele elementare ale materiei care posedă un moment magnetic propriu

Teoria modernă a magnetismului nu se poate face decît numai în cadrul mecanicii cuantice, care este una din cele mai importante realizări a secolului nostru.

OBSERVAREA PĂMÎNTULUI DE CĂTRE UN COSMONAUT

IOAN TODORAN, profesor Cluj

În ultimii patru ani, astronomia și astronautica au înregistrat succese din în ce mai mari, succese care au dus la realizarea celui mai măreț vis al omenirii — zborul omului în cosmos.

În cele ce urmează ne propunem să evaluăm suprafața Pămîntului pe care o poate vedea un observator de la mari înălțimi.

Vom deosebi trei cazuri:

1. observatorul este lansat pe verticală pînă la o înălțime dată,
2. observatorul este plasat pe orbită în jurul Pămîntului și efectuează o singură rotație,
3. observatorul este plasat pe orbită în jurul Pămîntului și efectuează mai multe rotații într-un interval de timp mai mare de 24 ore.

Cazul I. Observatorul este lansat pe verticală pînă la o înălțime dată. Fie R raza Pămîntului presupus sferic și d distanța de la suprafața Pămîntului pînă la punctul C, punctul cel mai înalt la care a ajuns observatorul respectiv (fig. 1). Ducînd din C tangentele la suprafața Pămîntului, se obține un con care va delimita suprafața terestră vizibilă de observatorul din punctul C. Această suprafață va fi o calotă sferică cu aria

$$A_1 = 2\pi \cdot R \cdot h,$$

unde $h = DF$ este înălțimea calotei.

Din figura 1, avem:

$$DO = \frac{R^2}{R+d} \quad \text{și} \quad h = \frac{R \cdot d}{R+d}$$

Punînd valoarea lui h în expresia ariei calotei sferice, obținem:

$$A_1 = 2\pi R^2 \frac{d}{R+d}$$

Cazul II. Observatorul cosmonaut este plasat pe orbită și efectuează o singură rotație în jurul Pămîntului.

Cînd observatorul se mișcă în jurul Pămîntului, arcul AB din figura 1 va mătura aria unei zone sferice. Suprafața terestră pe care o poate observa cosmonautul, va consta din aria sferei întregi minus aria calotelor $AC'A'D'A$ și $BC''B'D''B$. De aici rezultă:

$$A_2 = 4\pi R^2 - 2 \cdot 2\pi R \cdot C'D'$$

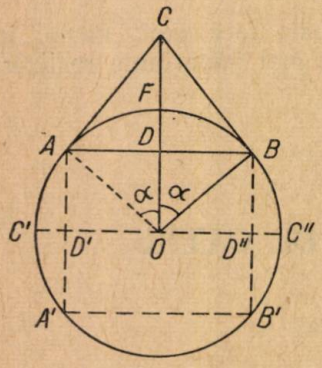


Fig. 1

Din figura 1 obținem:

$$C'D' = R - AD = R - \sqrt{DO \cdot DC}$$

și apoi:

$$C'D' = R - \frac{R \cdot d}{R+d}\sqrt{\frac{d+2R}{d}}.$$

Punînd valoarea lui $C'D'$ în expresia lui A_2, obținem:

$$A_2 = 4\pi R^2 \frac{d}{R+d}\sqrt{\frac{d+2R}{d}} \qquad (2)$$

Din expresiile (1) și (2) se vede că pentru $d = \infty$ ($A_1 = 2\pi R^2$, $A_2 = 4\pi R^2$), observatorul lansat pe verticală va putea vedea jumătate din suprafața Pămîntului, iar observatorul care se rotește în jurul Pămîntului, în timpul unei rotații, poate observa întreaga suprafață a globului pămîntesc.

Cazul III. Observatorul cosmonautic efectuează mai multe rotații în jurul Pămîntului într-un interval de timp mai mare de 24 ore.

Dacă orbita cosmonautului este paralelă cu ecuatorul ($i = 0°$), atunci el va observa în fiecare rotație aceeași zonă sferică, indiferent de numărul de rotații pe care le efectuează în jurul Pământului. Dacă planul orbitei este perpendicular pe planul ecuatorului ($i = 90°$), atunci, datorită mișcării Pământului în jurul axei sale, fiecare punct de pe suprafața Pământului va trece prin zona de vizibilitate a cosmonautului. Astfel, după un număr oarecare de rotații, cosmonautul, lansat pe orbita polară, va putea observa toată suprafața Pământului.

Dacă planul orbitei are o înclinare $0 < i < 90°$, suprafața pe care o poate observa cosmonautul respectiv, depinde numai de înălțimea la care a fost lansat. În acest caz putem deosebi iarăși două moduri de a pune problema:

a) fiind dat unghiul $0 < i < 90°$ și distanța de la suprafața Pământului pînă la cosmonaut, să se calculeze aria maximă pe care el o poate observa în cursul mai multor rotații, și

b) fiind dat unghiul $0 < i < 90°$, la ce distanță minimă trebuie lansat un cosmonaut pentru ca în cursul mai multor rotații să poată observa toată suprafața Pământului.

Vom încerca să răspundem pe rînd la aceste probleme:

a) Să reprezentăm în figura 2 o secțiune plană a globului pămîntesc. Fie P și P' polii prin care trece axa de rotație a Pământului, E și E' ecuatorul și $ABB'A'A$ zona pe care cosmonautul o poate observa în timpul unei rotații.

Din figura 1 avem:

$$\sphericalangle AOF = \sphericalangle FOB = \alpha,$$

unde

$$\cos \alpha = \frac{R}{R + d} \tag{3}$$

De aici se cunoaște unghiul α.

Datorită mișcării de rotație a Pământului de la E spre E', punctul A va descrie în mod aparent un cerc în jurul lui P, iar suprafața calotei $APA''P''A$ rămîne neobservată; o calotă de aceeași mărime va rămine neobservată și în jurul lui P'. În acest caz, suprafața maximă pe care o poate obseava cosmonautul respectiv în cursul mai multor rotații, va avea expresia:

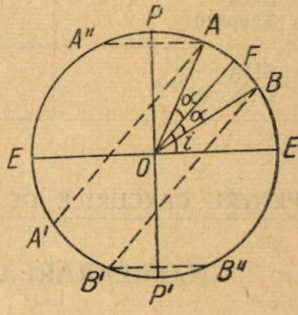


Fig. 2

$$A_3 = 4\pi R^2 - 2 \cdot 2\pi R \cdot PP'',$$

unde PP'' este înălțimea unei calote care rămîne neobservată. Din figura 2 rezultă:

$$PP'' = R - OP'',$$

unde

$$OP'' = R \sin (i + \alpha).$$

Punînd valoarea lui PP'' în expresia lui A_3, obținem:

$$A_3 = 4\pi R^2, \sin (i + \alpha). \tag{4}$$

b) Pentru calcularea distanței minime de la care un cosmonaut ar putea obseava, în cursul mai multor rotații, întreaga suprafață a

Pământului, pornim de la figura 2 unde A va trebui să coincidă cu P. În acest caz avem:

$$i + \alpha = 90°,$$

de unde

$$\alpha = 90° - i$$

Punînd această valoare a lui α în (3) obținem:

$$d_{minim} = \frac{1 - \sin i}{\sin i} \cdot R \qquad (5)$$

Aplicație practică.

Cu ajutorul expresiilor (1), (2), (4) și (5) am calculat suprafața maximă — A_{max} — pe care au putut s-o observe cosmonauții și observatorii respectivi și distanța minimă — d_{minim} — de unde ei ar fi putut observa toată suprafața Pământului. Rezultatele sînt date în ultimele două coloane ale tabelei alăturate; în primele trei coloane fiind date numele observatorului, înălțimea maximă și înclinarea orbitelor respective.

În toate cazurile am utilizat pentru raza pământului valoarea medie care a rezultat din semisuma celor două semiaxe ale elipsoidului terestru:

$$R = \frac{6378 + 6357}{2} = 6367$$

Observator	l_{km}	i	A_{max} %	d_{minim} km
URSS Gagarin	302	64°04′	30	∞
URSS Titov	257	64°56′	99	662
SUA Shepard	180	—	1,37	imposibilitate
SUA Grissom	187	—	1,43	imposibilitate

PENTRU CERCURILE DE ELEVI

COMPARAREA RĂDĂCINILOR ECUAȚIILOR DE Gr. II CU NUMERE DATE

C. BORȘ și *C. LINDESTEIN*, prof. Piatra Neamț

Această problemă este veche. Reluarea ei este justificată prin interpretări geometrice elementare în legătură cu raportul simplu a trei puncte coliniare și cu biraportul (raportul anarmonic) a patru puncte coliniare, vezi articolul de M. Iosifescu din G.M.F.-B nr. 10/1955.

1. *Poziția unui număr m față de rădăcinile ecuației de gr. II.*

Fie ecuația $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ (1)

cu rădăcinile reale $x_1 < x_2$ și m un număr real considerînd x_1, x_2, m ca abcise ale punctelor M_1, M_2, M, valorile raportului simplu

$$k = M_1M_2M = \frac{m - x_1}{m - x_2} \tag{2}$$

precizează poziția numărului m față de rădăcinile ecuației (1):

1. Dacă avem $k <$ o punctul M se află între M_1 și M_2, adică avem poziția

$$x_1 ; m ; x_2 \tag{3}$$

2. Dacă avem $k > 0$, punctul M se află în exteriorul segmentului M_1M_2: la stînga lui M_1 dacă $0 < k < 1$; la dreapta lui M_2 dacă $1 < k < +\infty$.

Pozițiile corespunzătoare ale numărului m față de x_1, x_2 sînt respectiv

$$m ; x_1 ; x_2 \tag{4}$$

$$x_1 ; x_2 ; m \tag{5}$$

Precizarea poziției numărului m față de rădăcinile ecuației (1) se reduce la calculul raportului simplu (2) în funcție de coeficienții ecuației. Din (2) deducem

$$\frac{k-1}{k+1} = \frac{x_2 - x_1}{2m - (x_1 + x_2)}$$

Folosind relațiile cunoscute între rădăcini și coeficienți, efectuînd calculele se obține

$$k = \frac{2am + b + \sqrt{\delta}}{2am + b - \sqrt{\delta}} = \frac{b'(m) + \sqrt{\delta}}{b'(m) - \sqrt{\delta}} \tag{6}$$

în care $\delta = b^2 - 4ac > 0$, semnul din fața radicalului fiind precizat în $x_2 - x_1 = \frac{1}{a}\sqrt{\delta}$ prin presupunerea făcută inițial că $x_1 < x_2$.

Scriind relația (6) sub forma

$$k = \frac{4a\, f(m)}{[f'(m) - \sqrt{\delta}]^2} \tag{6'}$$

se obține că raportul simplu k este de același semn cu $a \cdot f(m)$; rezultă o justificare geometrică simplă, intuitivă (ușor de reținut) a regulii semnului trinomului de gr. II.

2. *Poziția unei perechi de numere $m < n$ față de răd. ec. de gr. II.*

Fie punctele M_1, M_2, M și N de abscise x_1, x_2, m și n; aportul anormonic (biraportul) al acestor puncte

$$\lambda = \frac{k_m}{k_n} = \frac{(m - x_1)(n - x_2)}{(m - x_2)(n - x_1)} \tag{7}$$

în care $k_m = (M_1M_2M)$ și $k_n = (M_1M_2N)$, precizează poziția numerelor reale m, n față de rădăcinile ecuației (1).

1. Dacă $\lambda < 0$ perechile de puncte M_1, M_2, M, N se separă și există posibilitățile

$$m\,;\, x_1\,;\, n\,;\, x_2 \quad \text{sau} \quad x_1\,;\, m\,;\, x_2\,;\, n \tag{8}$$

iar dacă $\lambda < 0$, perechile de puncte M_1, M_2, și M, N nu se separă și deci avem posibilitățile:

$$m\,;\, n\,;\, x_1\,;\, x_2\,; \quad x_1\,;\, x_2\,;\, m\,;\, n\,; \quad m\,;\, x_1\,;\, x_2\,;\, n\,; \quad x_1\,;\, m\,;\, n\,;\, x_2. \tag{9}$$

Precizarea poziției este dată (ca în paragraful precedent) de raportul simplu (6)

$$k_m = \frac{4a\, f(m)}{[f'(m) - \sqrt{\delta'}]^2}\,;\; k_n = \frac{4a\, f(n)}{[f'(n) - \sqrt{\delta}]^2}$$

și de biraportul (7) din care, înlocuind pe k_m și k_n, rezultă că

$$\lambda = \frac{f(m)\,[f'(n) - \sqrt{\delta}\,]^2}{f(n)\,[f'(m) - \sqrt{\delta}\,]^2}$$

în care $f'(m)$ este rezultatul înlocuirii lui x prin m în derivata $f(x)$ a funcției $f(x) = ax^2 + bx + c$, adică $f'(m) = 2am + b$.

Formula (7′) arată că λ are același semn cu produsul $f(m) \cdot f(n)$ regăsindu-se astfel rezultatele cunoscute de la studiul trinomului de gr. II.

3. *Compararea rădăcinilor a două ecuații de gr. II.*

Fie ecuațiile:

$$f_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1 \quad (\delta_1 > 0) \tag{10}$$

$$f_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2 \quad (\delta_2 > 0) \tag{10'}$$

ale căror rădăcini sînt respectiv $x_1 < x_2$ și $x_3 < x_4$.

Valoarea biraportului (7)

$$\lambda = \frac{(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)}{(x_2 - x_3)(x_1 - x_4)},$$

se poate calcula cu ajutorul coeficienților ecuațiilor (10) și (10′). În adevăr, calculînd din relația precedentă expresia

$$\frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} = \frac{2(a_1c_2 + a_2c_1) - b_1b_2}{\sqrt{\delta_1\delta_2}}$$

obținem pentru λ expresia

$$\lambda = \frac{2(a_1c_2 + a_2c_1) - b_1b_2 + \sqrt{\delta_1\delta_2}}{2(a_1c_2 + a_2c_1) - b_1b_2 - \sqrt{\delta_1\delta_2}}$$

Raționalizînd numitorul rezultă că

$$\lambda = \frac{4[(a_1c_2 - a_2c_1)^2 - (a_1b_2 - a_2b_1)(b_1c_2 - c_2c_1)]}{[2(a_1c_2 + a_2c_1) - b_1b_2 - \sqrt{\delta_1\delta_2}]^2} \tag{11}$$

Valoarea (11) a biraportului λ are unele consecințe remarcabile:

1. Făcînd în (11), $\lambda = -1$ regăsim condiția ca rădăcinile ecuațiilor (10) și (10′) să se separe armonic: $2(a_1 c_2 + a_2 c_1) = b_1 b_2$.

2. Făcînd în (11), $\lambda = 0$ regăsim condiția ca ecuațiile (10) și (10′) să aibă o rădăcină comună

$$(a_1 c_2 - a_2 c_1)^2 - (a_1 b_2 - a_2 b_1)(b_1 c_2 - b_2 c_1) = 0$$

3. Relația (11) arată că dacă $\lambda < 0$ perechile (x_1, x_2) și (x_3, x_4) se separă și deci avem una din pozițiile (8) și dacă $\lambda > 0$ avem una din pozițiile (9) (rădăcinile ecuațiilor nu se separă).

Aplicații. 1. În problema propusă la examenul de admitere în Institutul Politehnic București din septembrie 1959[1]) se cerea să se determine α astfel ca una din rădăcinile ecuației,
$f(x) = x^2 - 2\alpha x + 5 - 3\alpha^2 = 0$ să fie cuprinsă între -1 și $+1$.

Folosind formula (6) se obține că semnele rapoartelor simple (2) $k_{+1} = (x_1, x_2, 1)$; $k_{-1}, (x_1, x_2 - 1)$, sînt date respectiv de expresiile:

$$y_1 = -3\alpha^2 - 2\alpha + 6 \text{ și } y_2 = -3\alpha^2 + 2\alpha + 6.$$

Soluțiile problemei sînt date de valorile lui α pentru care avem $y_1 \cdot y_2 < 0$.

2. Pentru ce valori ale lui α rădăcinile ecuațiilor:

$$f_1(x) = x^2 - 3x - 4 = 0 \text{ și } f_2(x) = x^2 - 2\alpha x - \alpha = 0 \text{ se separă}^2)$$

Rădăcinile ecuației $f_2(x) = 0$ sînt reale dacă $\alpha < -1$, $\alpha > 0$, iar semnul lui λ, așa cum arată (11), este dat de semnul expresiei $y = -9\alpha^2 + 7\alpha + 16$.

Rădăcinile se separă pentru soluțiile inegalităților $y < 0, \alpha < -1$. $\alpha > 0$. Pentru $\alpha = -1$ și $y = 0$ avem $x_1 = x_3 = x_2 < x_4$ și pentru $m = \frac{16}{9}$, $x_3 < x_1 < x_4 = x_2$.

NOTE MATEMATICE

ASUPRA PROBLEMELOR 4641, 4648, 4738

În G.M.F. seria B din ultimii ani au apărut multe identități algebrice în care se dădea condiția ca suma tuturor cantităților să fie nulă. Ca exemplu:

Fie $a + b + c = 0$ și să notăm $S_k = a^k + b^k + c^k$. Din ecuația de gradul III $x^3 + px + q = 0$ cu rădăcinile a, b, c.

conform relațiilor între rădăcini și coeficienți, avem:

$a + b + c = 0$ (tocmai condiția dată), iar

$$ab + bc + ca = p, \tag{1}$$

$$abc = -q, \tag{2}$$

---

[1]) Textul integral al problemei în G.M.F.-B nr. 2/1960.

[2]) Ecuațiile sînt luate din „Culegerea de probleme de algebră de A. Ioachimescu

Să calculăm S_2, S_3.... Avem:

$$S_2 = a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = -2p.$$

Pentru calculul lui S_3 adunăm egalitățile:

$$a^3 + pa + q = 0 \quad (3)$$

$$b^3 + pb + q = 0 \quad (4)$$

$$c^3 + pc + q = 0 \quad (5)$$

și obținem:

$$a^3 + b^3 + c^3 + p(a + b + c) + 3q = 0, \text{ sau: } S_3 = -3q.$$

Pentru calculul lui S_4, S_5 ..... ne folosim de o formulă de recurență pe care o vom stabili acum:

Înmulțim relațiile (3), (4), (5) respectiv cu a^{n-3}, b^{n-3}, c^{n-3} și prin adunare se obține:

$$a^n + b^n + c^n + p(a^{n-2} + b^{n-2} + c^{n-2}) + q(a^{n-3} + b^{n-3} + c^{n-3}) = 0, \text{ sau:}$$

$S_n + pS_{n-2} + qS_{n-3} = 0$. Aceasta este relația (6) care ne dă pe S_n în funcție de S_{n-2} și S_{n-3}. Așadar, pentru a-l afla pe S_4 facem în această relație pe $n = 4$ (cunoaștem pe S_2 și S_1). Pentru calculul lui S_5 facem în relația de recurență pe $n = 5$ ș.a.m.d.

Dacă în relația (6) introducem valorile lui p și q din relațiile (1) și (2) avem:

$$a^n + b^n + c^n + (ab + bc + ca)(a^{n-2} + b^{n-2} + c^{n-2}) - abc(a^{n-3} + b^{n-3} + c^{n-3}) = 0$$

tocmai problema nr. 4738 din G.M.F. seria B nr. 5—1961.

La fel se procedează cînd se dă condiția: $a + b + c + d = 0$, numai că se pornește de la ecuația de gradul 4: $x^4 + px^2 + qx + r = 0$.

Se obține relația de recurență:

$$S_n + pS_{n-2} + qS_{n-3} + rS_{n-4} = 0 \quad (7)$$

Aplicație: Dacă $a + b + c + d = 0$ să se arate că $5(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) = 6(a^5 + b^5 + c^5 + d^5)$ adică problema 4648 din G.M.F. seria B.

Din ecuația: $x^4 + px^2 + qx = r = 0$, cu rădăcinile a, b, c, d, avem:

$$a + b + c + d = 0,$$

$$ab + ac + ad + bc + bd + cd = p \quad (8)$$

$$abc + abd + acd + bcd = -q \quad (9)$$

$$abcd = r \quad (10)$$

$$S_2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (a + b + c + d)^2 - 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd) = -2p$$

Pentru calculul lui S_3 împărțim relațiile:

$$a^4 + pa^2 + qa + r = 0, \; b^4 + pb^2 + qb + r = 0, \; c^4 + pc^2 + qc + r = 0,$$

$$d^4 + pc^2 + qc + r = 0,$$

respectiv cu a, b, c, d, care adunate ne dau:

$$a^3+b^3+c^3+d^3+p(a+b+c+d)+4q+r\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)=0, \text{ sau}$$

$$S_3+4q+r\,\frac{abc+abd+acd+bcd}{abcd}=0.$$

Ținînd seamă de relațiile (9) și (10) avem:

$$S_3+4q+r\,\frac{-q}{r}=0, \text{ de unde } S_3=-3q.$$

In relația (7) facem pe $n=5$. Avem:

$$S_5+pS_3+qS_2+r(a+b+c+d)=0, \text{ sau:}$$

$$S_5+p(-3q)+q(-2p)=0;\ S_5=5pq.$$

Relația de demonstrat este: $5S_2S_3=6S_5$.
Inlocuind cu valorile lor, obținem o relație evidentă:

$$5(-2p)(-3q)=6\cdot 5pq.$$

Să tratăm acum cazul mai general cînd avem condiția $a_1+a_2+\ldots a_n=0$, adică n cantități.
Pornim de la ecuația:

$$x^n+b_2x^{n-2}+\ldots b_{n-1}x+b_n=0$$

care are ca rădăcini pe $a_1, a_2, \ldots a_n$.

Scriem relațiile între rădăcini și coeficienți:

$$\sum a_1=P_1=0;\ \sum a_1a_2=P_2=b_2;\ \sum a_1a_2a_3=P_3=-b_3;\ldots$$

$$a_1a_2\ldots a_k=P_k=(-1)^k\cdot b_k;\ldots$$

$$a_1a_2\ldots a_n=P_n=(-1)^n\cdot b_n.$$

Mai avem relațiile:

$$a_1^n+b_2\cdot a_1^{n-2}+\ldots+b_{n-1}a_1+b_n=0,$$

$$a_2^n+b_2\cdot a_2^{n-2}+\ldots+b_{n-1}a_2+b_n=0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_k^n+b_2a_k^{n-2}+\ldots+b_{n-1}a_k+b_n=0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_n^n+b_2a_n^{n-2}+\ldots+b_{n-1}a_n+b_n=0$$

Aceste relații înmulțite respectiv cu $a_1^{m-n}, a_2^{m-n}\ldots a_n^{m-n}$ $(m\geqslant n)$ și adunate ne dau:

$$S_m+b_2S_{m-2}+\ldots b_{m-1}S_{m-n+1}+bA_{m-n}=0.$$

Aceasta este relația de recurență în cazul general. Ea se mai poate pune sub altă formă ținînd seamă de relațiile anterior stabilite:

$$S_m + P_2 S_{m-2} - P_3 S_{m-3} + \ldots + (-1)^k P_k S_{m-k} + \ldots +$$
$$+ (-1)^{n-1} P_{n-1} S_{m-n} + (-1)^n P_n S_{m-n} = 0$$

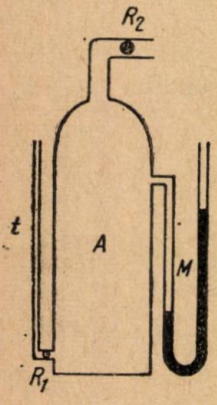
O altă notă tratînd aceiași chestiune a mai trimis și Mihail Moise, absolvent, Tg. Ocna, Bacău.

Bădescu Lucian, elev C-lung Muscel

PENTRU CERCURILE DE FIZICĂ

DETERMINAREA COEFICIENTULUI DE VISCOZITATE LA GAZE

In cărțile de lucrări practice sînt descrise metode pentru determinarea coeficientului de vîscozitate la lichide, nu se prezintă însă nici o metodă pentru determinarea coeficientului de viscozitate la gaze. Legea de curgere a unui fluid printr-un tub capilar stabilită de Poiseuile este dată de relația:



$$q = \frac{v_0}{t} = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{r^4}{\eta} \cdot \frac{p - p_0}{l}, \qquad (1)$$

în care: — q este debitul de fluid; v_0 volumul gazului ce se scurge prin tubul capilar de lungime l și rază r în timpul t; $p - p_0$ diferența dintre presiunile gazului la cele două capete ale tubului capilar; η coeficientul de vîscozitate dinamică.

Ca aparat se folosește un vas de sticlă A la care se sudează un manometru cu mercur M și un tub capilar t prin intermediul unui robinet R_1; prin intermediul robinetului R_2 se pune vasul în legătură cu un rezervor în care se află gazul de studiat la o presiune p mai mare decît presiunea atmosferică p_0. Avînd gazul de studiat în vasul A la presiunea p, se deschide robinetul R_1 și se așteaptă un timp t după care se închide robinetul. Presiunea gazului din vas scade de la p la p_1.

Dacă notăm cu V volumul vasului A și cu V_0 volumul de gaz ce trece prin tubul capilar în timpul t, aplicînd legea lui Boylle-Mariotte căpătăm:

$$p(V - V_0) = p_1 V$$

din care:

$$V_0 = \frac{p - p_1}{p} \cdot V. \qquad (2)$$

Introducînd valoarea lui V_0 în relație (1) căpătăm pentru coeficientul de viscozitate η expresia:

$$\eta = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{p(p + p_1 - 2p_0)}{p - p_1} \cdot \frac{r^4}{V} \cdot \frac{t}{l} \quad \ldots \quad (3)$$

În relația (1) în locul presiunii p am luat valoarea medie $p_m = \frac{p+p_1}{2}$, deoarece robinetul R_2 fiind închis în timpul t presiunea gazului din vas se modifică (scade) de la p la p_1.

Determinînd experimental presiunile p, p_1 și p_0, timpul t și cunoscînd dimensiunile tubului capilar și al vasului A se poate determina coeficientul de vîscozitate în valoare absolută.

Observații: În lucrările de laborator se folosesc aerul comprimat cu ajutorul unei pompe de biciclete sau cu o pară dublă de cauciuc. Este de asemenea comod să se lucreze cu oxigenul preparat prin încălzirea permanganatului de potasiu, după ce mai întîi s-a făcut vid atît în vasul A cît și în rezervorul de oxigen.

Dimensiunile vasului A și ale tubului capilar ca și timpul de lucru trebuie alese așa fel ca presiunea finală p_1 din vasul A să nu difere mult pe presiunea inițială p.

Dumitru Grosu, Iași

PROBLEME REZOLVATE

Problema 4102

Un satelit artificial străbate orbita sa în 120 min. Presupunînd această orbită circulară să se calculeze viteza satelitului și distanța sa la Pămînt. Accelerația la suprafața Pămîntului se va lua 10 m/s², iar raza Pămîntului 6 400 km.

Alexandru Stoenescu

Soluție dată de *Mircea Stan*, elev București. Dacă notăm cu v_1 viteza satelitului, cu h înălțimea de la suprafața Pămîntului și cu R raza Pămîntului, vom avea $r = R + h$, unde r este raza orbitei circulare a satelitului. Accelerația centripetă g a satelitului va fi $g = \frac{v_1^2}{r}$, de unde $v_1 = \sqrt{rg}$.

Însă: $g = g_0 \cdot \frac{R^2}{r^2}$, unde $g_0 = 10$ m/s². Înlocuind în relația precedentă obținem:

$$v_1 = R\sqrt{\frac{g_0}{r}} = R\sqrt{\frac{g_0}{R+h}}.$$

Dar, pe de altă parte se știe de la mișcarea circulară că: $v_1 = r\omega = (R+h)\omega$, în care ω este viteza unghiulară și $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (T fiind perioada de revoluție). Prin egalare:

$$v_1 = R\sqrt{\frac{g_0}{R+h}} = (R+h)\,\omega = (R+h)\cdot\frac{2\pi}{T}.$$

Ridicînd la patrat obținem: $R^2 \frac{g_0}{(R+h)^3} = \frac{4\pi^2}{T^2}$, de unde:

$$R + h = \sqrt[3]{\frac{R^2 g_0 T^2}{4\pi^2}} \text{ și } h = \sqrt[3]{\frac{R^2 g_0 T^2}{4\pi^2}} - R = \sqrt[3]{\frac{6400000^2 \cdot 10 \cdot 200^2}{4 \cdot 10}} - 6400000$$

În formula de mai sus am exprimat raza Pămîntului în metri, perioada $T = 7200$ în secunde și am luat cu aproximație $\pi^2 = 10$. Efectuînd toate calculele se ajunge la $h = 1696{,}950$ km.

Din relația $v_1 = (R + h) \cdot \frac{2\pi}{T}$ în care $R + h = 8096{,}950$ km scoatem: $v_1 = 809696 \cdot \frac{2 \cdot 3{,}14}{7200} \approx 7065{,}971 \text{m/s}$, deci, $v_1 \approx 7{,}1 \frac{km}{s}$.

Problema 4351

Volumul unei piramide patrulatere regulate este de 1280 cm³, iar aria totală de 800 cm². Să se afle latura bazei și înălțimea piramidei.

Mircea Pavelescu, profesor, Tg. Jiu

Soluție. Însemnînd lungimea laturii bazei cu x și a înălțimii piramidei cu y, pe baza datelor problemei, se ajunge inițial la sistemul de ecuații:

$$\frac{x^2 y}{3} = 1280\,; \quad \frac{4x\sqrt{y^2 + \frac{x^2}{4}}}{2} + x^2 = 800.$$

și apoi sistemul echivalent:

$$x^2 y = 3840\,; \quad x\sqrt{4y^2 + x^2} + x^2 = 800.$$

În prima etapă se transformă ecuația a 2-a într-o ecuație rațională:

$$4x^2y^2 + x^4 = 640000 - 1600x^2 + x^4\,; \quad x^2y^2 = 160000 - 400x^2.$$

Se elimină apoi necunoscuta y între această ecuație și prima ecuație, după care se obține:

$$x^2 \cdot \frac{3840^2}{x^4} = 160000 - 400x^2\,; \text{ sau } x^4 - 400x^2 + 36864 = 0.$$

Rezolvînd ecuația bipătrată, reținem soluțiile pentru problema noastră $x_1 = 12$ cm, $x_2 = 16$ cm, iar apoi aflăm, pentru înălțime, valorile corespunzătoare $y_1 = \frac{80}{3}$ cm, $y_2 = 15$ cm.

Se găsesc deci două piramide: una cu latura bazei de 16 cm și înălțimea de 15 cm, iar alta cu latura bazei de 12 cm și înălțimea de $26\frac{2}{3}$ cm.

Problema 4400

Fie un triunghi oarecare ABC și trei ceviene AA', BB', CC' concurente într-un punct P. Paralela dusă prin A la BC este intersectată de CC' și BB' în A_1, respectiv A_2; paralela dusă prin B la AC este intersectată de AA' și CC' în B_1, respectiv B_2; paralela dusă prin C la AB este intersectată de BB' și AA' în C_1 și respectiv C_2. Să se demonstreze relația:

$$\frac{AA_1}{A_1A_2}\cdot\frac{BB_1}{B_1B_2}\cdot\frac{CC_1}{C_1C_2}=\frac{AB'}{AA_2}\cdot\frac{BC'}{BB_2}\cdot\frac{CA'}{CC_2}$$

Emilian Moflic, elev Moreni

Soluție dată de *Păncescu Paul*, elev Odobești. Aplicăm teorema lui *Menelaus* în triunghiul AA_1C cu transversala $PB'A_2$:

$$\frac{A_2A_1}{AA_2}\cdot\frac{AB'}{B'C}\cdot\frac{CP}{PA_1}=1.$$

dar, $\frac{CP}{PA_1}=\frac{CA'}{AA_1}$ deci: $\frac{A_2A_1}{AA_2}\cdot\frac{AB'}{B'C}\cdot\frac{CA'}{AA_1}=1.$ (1)

Aplicăm aceeași teoremă în triunghiul AA_2B cu transversala $PC'A_1$:

$$\frac{A_1A_2}{AA_1}\cdot\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BP}{PA_2}=1, \quad \text{dar:} \quad \frac{BP}{PA_2}=\frac{BA'}{AA_2},$$

deci: $$\frac{A_1A_2}{AA_1}\cdot\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{AA_2}=1.$$ (2)

Înmulțim relațiile I și II și obținem egalitatea:

$$\frac{A_1A_2^2}{AA_1^2}\cdot\frac{AB'\cdot CA'\cdot AC'\cdot BA'}{B'C\cdot C'B\cdot AA_2^2}=1 \text{ sau: } \frac{AA_1^2}{A_1A_2^2}=\frac{AB'\cdot CA'\cdot AC'\cdot BA'}{B'C\cdot C'B\cdot AA_2^2},$$

Prin permutări circulare mai obținem:

$$\frac{BB_1^2}{B_1B_2^2}=\frac{BC'\cdot AB'\cdot BA'\cdot CB'}{C'A\cdot A'C\cdot BB_2^2}, \quad \frac{CC_1^2}{C_1C_2^2}=\frac{CA'\cdot BC'\cdot CB'\cdot AC'}{A'B\cdot B'A\cdot CC_2^2}$$

Înmulțind aceste trei relații și folosindu-ne de teorema lui *Ceva* în partea a doua a egalității obținem:

$$\frac{AA_1^2}{A_1A_2^2}\cdot\frac{BB_1^2}{B_1B_2^2}\cdot\frac{CC_1^2}{C_1C_2^2}=\frac{AB'^2}{AA_2^2}\cdot\frac{BC'^2}{BB_2^2}\cdot\frac{CA'^2}{CC_2^2}$$

Extragem rădăcina pătrată din ambii membri ai egalității și obținem relația cerută, adică:

$$\frac{AA_1}{A_1A_2}\cdot\frac{BB_1}{B_1B_2}\cdot\frac{CC_1}{C_1C_2}=\frac{AB'}{AA_2}\cdot\frac{BC'}{BB_2}\cdot\frac{CA'}{CC_2}$$

Observare. Nu s-a ținut seama de semnul fiecărui segment.

Soluții bune s-au mai primit de la *Viorel Vodă* elev București, *D. Catrina* absolvent București, *C. Niță* elev Pucioasa, *V. Olteanu* elev București și *N. Cupcea* elev Buzău.

Problema 4432

O roată motrice care făcea 300 rot/min, lăsată liberă s-a oprit după 30 s. Care este încetinirea unghiulară și cîte rotații pe minut a făcut pînă la oprire?

(La admiterea în Fac. Matem.-Fizică București 1960)

Soluție dată de N. Popa, elev Focșani. Viteza unghiulară a roții era $\omega = 2\pi\nu = 2\pi \cdot 5\,\text{rad/s} = 10\pi\,\text{rad/s}$.

Viteza unghiulară a scăzut în 30 secunde de la 10π rad/s la zero. Încetinirea unghiulară este deci: $\text{a ungh.} = \frac{10\pi\,\text{rad/s}}{30\,\text{s}} = \frac{\pi}{3}\,\text{rad/s}^2$.

Numărul N de rotații este: $n = \frac{\pi\text{rad} \cdot 900\text{s}^2}{6\text{s}^2} = 150\pi\,\text{rad}$, deci, numărul de rotații $V = 300$ rot/min.

Problema 4451

Să se reprezinte grafic, funcțiile:

$$y_1 = \cos x \sqrt{1 - \cos^2 x} + \sin x \sqrt{1 - \sin^2 x}$$
$$y_2 = \cos x \sqrt{1 - \cos^2 x} - \sin x \sqrt{1 - \sin^2 x}$$
$$y_3 = \sin x \sqrt{1 - \cos^2 x} + \cos x \sqrt{1 - \sin^2 x}$$
$$y_4 = \sin x \sqrt{1 - \cos^2 x} - \cos x \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

Se va ține seamă că $\sqrt{1 - \cos^2 x} = |\sin x|$.

C. Ionescu-Țiu

Soluție. Prima ecuație se poate scrie:

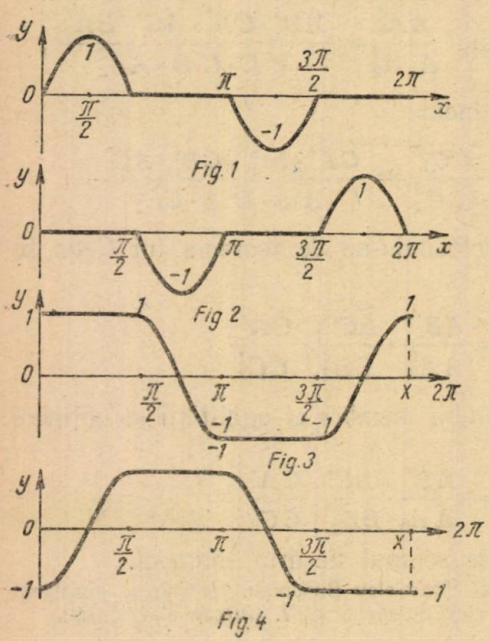


Fig. 1

Fig. 2

Fig. 3

Fig. 4

$$y_1 = \cos x\,|\sin x| + \sin x\,|\cos x|$$

Cînd $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, $y_1 = \cos x \cdot \sin x + \sin x \cdot \cos x = \sin 2x$.

Cînd $\frac{\pi}{2} \leqslant x = \pi$, $y_1 = \cos x \cdot \sin x - \sin x \cdot \cos x = 0$.

Cînd $\pi \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$, avem:

$$y_1 = -\sin 2x,$$

iar cînd $\frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant 2\pi$, $y_1 = 0$.

Graficul va fi cel din fig. 1.

Analog avem a doua ecuație:

$$y_2 = \cos x\,|\sin x| - \sin x\,|\cos x|$$

$0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \cdot y_2 = 0; \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi, y_2 = \sin 2x; \pi \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}, y_2 = 0,$

iar cînd $\frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant 2\pi, y_2 = -\sin 2x.$

Graficul va fi cel din fig. 2.

A treia ecuație devine: $y_3 = \sin x \mid \sin x \mid + \cos x \mid \cos x \mid.$

$0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, y_3 = 1; \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi, y_3 = -\cos 2x, \pi \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}, y_3 = -1;$

$\frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant 2\pi, y_3 = \cos 2x,$ iar graficul este cel din fig. 3.

A patra ecuație este: $y_4 = \sin x \mid \sin x \mid - \cos x \mid \cos x \mid.$

$0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, y_4 = -\cos 2x; \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi, y_4 = 1; \pi \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2},$

$y_4 = \cos 2x,$ iar dacă $\frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant 2\pi, y_4 = -1.$ Graficul este cel din fig. 4.

Soluție bună s-a primit de la *N. Popa*, elev, Focșani.

Problema 4454

O întreprindere industrială care produce energie electrică în regie proprie a fost planificată pentru o perioadă oarecare cu o producție de energie electrică de 8 000 000 kWh.

Știind că pentru un kWh produs se consumă 0,6 kg combustibil convențional, iar combustibilul folosit este un amestec de 35% lignit și 65% rumeguș și deșeuri de lemn, să se determine în kilograme cantitățile folosite din fiecare fel de combustibil.

Se dau cunoscute: puterea calorică a lignitului 3150 kcal/kg, iar a rumegușului și deșeurilor lemnoase 2450 kcal/kg.

Sfichi Romulus, prof. Fălticeni

Soluție. Cantitatea de combustibil convențional folosită este:

$$0{,}6 \times 8000000 = 4800000 \text{ kg}.$$

Coeficienții de transformare a combustibilului natural lignit și deșeuri lemnoase sînt:

$$\alpha_1 = \frac{2450}{7000} = 0{,}35; \quad \alpha_2 = \frac{3150}{7000} = 0{,}45.$$

Coeficientul amestecului de lignit cu rumeguș și deșeuri lemnoase este:

$$\alpha_3 = \alpha_1 \frac{65}{100} + \alpha_2 \frac{35}{100} = 0{,}35 \cdot \frac{65}{100} + 0{,}45 \frac{35}{100} = 0{,}385.$$

Cantitatea de amestec echivalentă cu 4 800 000 kg combustibil convențional, rezultă a fi:

$$\frac{4800000}{0{,}385} = 12\,000\,000 \text{ kg.}$$

Cantitatea de lignit este: $\frac{35}{100} \cdot 12\,000\,000 = 4\,200\,000$ kg.

Cantitatea de rumeguș și deșeuri lemnoase este:

$$\frac{65}{100} \cdot 12\,000\,000 = 7\,800\,000 \text{ kg.}$$

Problema 4456

Pe un strung revolver se strunjește un volan cu diametrul $D=2000$ mm și cu diametrul găurii butucului $d = 175$ mm. Cîte rotații pe minut trebuie să facă volanul la strunjirea obadei și a butucului pentru ca viteza strunjirii să fie de 150 mm/s?

Soluție: Cunoscînd viteza circulară și raza de rotație trebuie să determinăm numărul rotațiilor pe minut.

Formula $v = \omega.r$, va deveni:

$v = \frac{\pi N}{30} \cdot \frac{D}{2}$, de unde vom găsi numărul rotațiilor pe minut:

$$N = \frac{2 \cdot 30 \cdot v}{D}.$$

Înlocuind pe v cu 150 mm/s, iar pe D într-un caz cu 2000 mm, și în altul cu 175 mm, vom avea:

$$N_1 = \frac{2 \cdot 30 \cdot 150}{2000} = 1{,}43 \text{ rot/min.}$$

(strunjirea obadei)

$$N_2 = \frac{2 \cdot 30 \cdot 150}{175} = 16{,}36 \text{ rot/min.}$$

Problema 4462

1. *Să se construiască curba $xy^2+x^2-y^2=0$*
2. *O paralelă la axa x-lor taie această curbă în două puncte M_1 și M_2; să se arate că segmentul M_1M_2 este văzut din origină sub un unghi drept.*
3. *Să se găsească locul geometric al mijlocului segmentului M_1M_2 cînd paralela se deplasează.*

E. Morțun

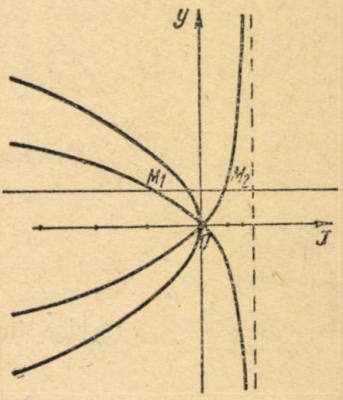
Soluție dată de *N. Popa*, elev Focșani. 1. Curba este

$$y^2 = \frac{x^2}{1-x} \text{ sau: } y = \pm \frac{x}{\sqrt{1-x}}. \text{ Deci } x \in (-\infty, 1)$$

$y(0) = 0$ și $y = 0$ dă $x = 0$.

Derivata întîi este: $y' = \pm \frac{2-x}{(1-x)\sqrt{1-x}}$. Deci, $x=2$ valoare în afara intervalului. N-avem nici maxim, nici minim. Derivata a două este: $y'' = \pm \frac{-2x^2+x+4}{2(1-x)^3\sqrt{1-x}}$, care dă pentru $x=-1$ un punct de inflexiune.

Curba e simetrică față de axa x-ilor și e cea din figura alăturată.



2. Fie $y = \lambda$ paralela. M_1 are coordonatele.

$x = \frac{-\lambda^2 - \lambda\sqrt{\lambda^2+4}}{2}$ și $y = \lambda$, iar M_2 are coordonatele:

$x = \frac{-\lambda^2 + \lambda\sqrt{\lambda^2+4}}{2}$ și $y = \lambda$

Dreapta OM_1 are ecuația

$y = -\frac{2}{\lambda + \sqrt{\lambda^2+4}}\,x$, iar dreapta OM_2 este $y = \frac{2}{-\lambda + \sqrt{\lambda^2+4}}\,x$.

Deci dreptele O_1M_1 și OM_2 sînt perpendiculare, fiindcă

$$-\frac{2}{\lambda + \sqrt{\lambda^2+4}} = -\frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2+4}}{2}.$$

3. Fie M mijlocul lui M_1M_2. Coordonatele lui sînt: $x = -\frac{\lambda^2}{2}$ și $y = \lambda$. Deci avem $x = -\frac{y^2}{2}$ și $y^2 = -2x$. Locul geometric e o parabolă cu vîrful în O și avînd ca axă, axa x-ilor.

Problema 4463

Se consideră pe axa Ox punctele fixe A,B,C. Prin C se duce o dreaptă variabilă care întîlnește prima bisectoare a axelor în M și axa Oy în N. Să se afle locul geometric al intersecției dreptelor AM, BN.

Să se determine abscisa punctului C(A și B fiind date) astfel ca locul geometric să fie o a doua bisectoare a axelor.

Gh. D. Simionescu

Soluție dată de *N. Popa,* elev Focșani. Fie punctele A(a,o), B(b,o) și C(c,o).

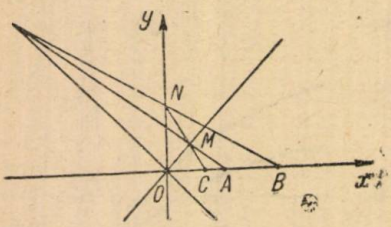
Fie dreapta variabilă $y=m(x-c)$ și prima bisectoare $x=y$. Deci $M\left(\frac{mc}{m-1}, \frac{mc}{m-1}\right)$ și N (o, — mc).

Deci ecuația dreptei AM este:

$y = \frac{mc(x-a)}{m(c-a)+a}$, iar a dreptei BN este:

$y = \frac{mc(x-b)}{b}$. De aici rezultă că $m = \frac{by}{c(x-b)}$ și înlocuind în prima ecuație obținem: $y^2 = \frac{c(b-a)}{b(c-a)} xy$ sau:

$y = \frac{c(b-a)}{b(c-a)} x$.



Deci locul geometric este o dreaptă ce trece prin origine.

Pentru ca locul geometric să fie a doua bisectoare trebuie ca:

$\frac{c(b-a)}{b(c-a)} = -1$ sau $bc-ac=-bc+ab$ sau: $2bc-ac=ab$ și deci:

$c = \frac{ab}{2b-a}$. Abscisa lui C este $\frac{ab}{2b-a}$.

Problema 4467

O sanie care alunecă pe o pantă de 60° are o greutate de 100 kgf. Știind că înălțimea de la care alunecă sania este de 5 m, iar coeficientul de frecare este 0,01, să se determine:

a) accelerația cu care alunecă sania; b) viteza pe care o are sania la terminarea pantei; c) timpul în care a fost străbătută panta; d) distanța pe care o parcurge sania pe planul orizontal pînă se oprește. Coeficientul de frecare cu planul orizontal este 0,03.

* * *

Soluție: a) Deoarece asupra saniei acționează forța $R = mg \sin 60° - mg\,\varrho_1 \cos 60°$, înseamnă că accelerația cu care se mișcă sania pe pantă este:

$$a_1 = g(\sin 60° - \varrho_1 \cos 60°) = 8{,}45 \text{ m/s}^2$$

b) Viteza pe care o are sania la terminarea pantei este dată de relația lui Toricelli:

$$v = \sqrt{2a_1 s} = \sqrt{2a_1 h \cos 60°} = 9{,}88 \text{ m/s}.$$

c) Timpul necesar ca sania să ajungă jos este dat de relația:

$$t = \frac{v}{a_1} = 1{,}17 \text{ s}.$$

d) Deoarece pe planul orizontal acționează forța de frecare $F = mg\,\varrho_2$, înseamnă că sania se va mișca uniform încetinit avînd viteza $v = 9{,}88$ m/s

și fiind acționată de accelerația $a_2 = -g\varrho_2$. Spațiul parcurs pînă la oprire va fi:

$$s_2 = -\frac{v^2}{2a_2} = \frac{v^2}{2g\varrho_2} = 165{,}7 \text{ m}.$$

S-au primit soluții bune de la *V. Olteanu*, elev București, *N. Popa*, elev Focșani, *Catrinel Teodorescu*, elevă București.

Problema 4468

Fiind dat un triunghi ABC prin vîrful A se duc două drepte izogonale AY, AZ, prin B izogonalele BZ, BX și prin C izogonalele CX, CY.

Fie X', Y', Z' proiecțiile punctelor X, Y, Z respectiv pe BC, CA, AB. Să se demonstreze că dreptele AX', BY', CZ' sînt concurente.

D. Bătinețu

(Enunț generalizat)

Soluție dată de *I. Tomescu*, student București.

Deoarece *AY* și *AZ* sînt izogonale față de *AB* și *AC* rezultă că

$$\sphericalangle YAC = \sphericalangle ZAB = \alpha$$

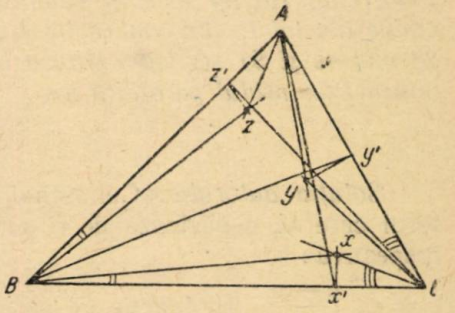
În mod analog notăm

$$\sphericalangle ZBA = \beta = \sphericalangle XBC \quad \text{și} \quad \sphericalangle XCB = \gamma = \sphericalangle YCA$$

Din triunghiurile dreptunghice *BXX'*, *CXX'* deducem:

$BX' = XX' \operatorname{ctg}\beta$; $CX' = XX' \operatorname{ctg}\gamma$; rezultă că

$$\frac{BX'}{X'C} = \frac{\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\gamma}$$



În mod analog mai obținem relațiile:

$$\frac{CY'}{Y'A} = \frac{\operatorname{ctg}\gamma}{\operatorname{ctg}\alpha}; \quad \frac{AZ'}{Z'B} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\beta}$$

Deci $\frac{BX'}{X'C}\cdot\frac{CY'}{Y'A}\cdot\frac{AZ'}{Z'B} = \frac{\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\gamma}\cdot\frac{\operatorname{ctg}\gamma}{\operatorname{ctg}\alpha}\cdot\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\beta} = 1$ ceea ce probează conform reciprocei teoremei lui Ceva că *AX'*, *BY'*, *CZ'* sînt concurente. În cazul enunțului inițial al problemei 4468 propuse de *D. Bătinețu*, dreptele *AY*, *AZ*; *BZ*, *BX*; *CX*, *CY* erau respectiv trisectoarele unghiurilor *A,B,C* ale triunghiului *ABC* și evident erau două cîte două izogonale. S-au mai primit soluții bune de la *V. Olteanu*, elev București, *Catrinel Teodorescu*, elevă București, *Dorel Popescu*, elev Arad, *Valeriu Iorga*, elev Lugoj și *Stelian Georgescu*, elev București.

Problema 4471

Pe parabola $y^2=2px$ se consideră un punct M variabil. Să se afle locul geometric al intersecției tangentei în punctul M la parabolă, cu paralela dusă prin mijlocul dreptei FM la axa parabolei (F fiind focarul).

* * *

Soluție. Fie $M\left(\frac{y_0^2}{2p}, y_0\right)$ și $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$. Fie N mijlocul dreptei FM. Ordonata lui N este $\frac{y_0}{2}$. Deci paralela la abscisă dusă prin N are ecuația $y=\frac{y_0}{2}$.

Ecuația tangentei în M la parabolă este:

$$yy_0=\frac{2px+y_0^2}{2} \quad \text{sau:} \quad 2px-2y_0y+y_0^2=0.$$

Înlocuind aici pe $y=\frac{y_0}{2}$. Deducem $x=0$.

Deci locul geometric al punctelor Q de intersecție dintre tangentă și paralelă este axa Oy.

S-au primit multe soluții bune.

Problema 4477

În jurul datei de 20.VI.1960, cînd Jupiter este în opoziție cu Soarele, două intrări succesive ale satelitului Io în umbra lui Jupiter se produc la un interval de 42 ore 28 minute și 36 secunde, iar în jurul datei de 17.IX. 1960, cînd Jupiter este în cuadratură estică cu Soarele, două ieșiri succesive ale lui Io din umbra lui Jupiter se produc la un interval de 42 ore 28 minute și 51 secunde. Viteza luminii fiind de 300 000 km/s, să se afle viteza Pămîntului pe orbita sa.

C. Bukovski, Sighișoara

Soluția autorului. Cunoscînd efectul Doppler-Fizeau pentru observatorul care se depărtează de o sursă luminoasă imobilă, aplicăm formula respectivă:

$v=v_0\frac{c-v}{c}$. În funcție de perioadă, formula devine $T=T_0\frac{c}{c-v}$

Scoțînd valoarea vitezei v, avem: $v=\frac{T-T_0}{T}c$.

Înlocuim cu datele obținute din observații:

$$T=42\,h\,28\,m\,51\,s=152\,931\,s,\ T_0=42\,h\,28\,m\,36\,s=152\,916s,$$
$$c=300\,000\ \text{km/s}.$$

$$\text{Deci } v=\frac{152\,931-152\,916}{152\,931}\cdot 300\,000;\ v=29{,}4\ \text{km/s}.$$

Problema 4479

Sferele S_1 și S_2 trecînd prin vîrfurile A,B,C ale unui tetraedru ABCD, dreptele DA, DB, DC, întîlnesc aceste sfere K_1, L_1 M_1 și respectiv în K_2, L_2, M_2. Să se demonstreze că triunghiurile K_1, L_1, M_1 și $K_2 L_2 M_2$ sînt asemenea.

(Journal de Mathématiques, 1960)

Soluție. Ținînd seama de puterea punctului D față de sfera S_1 avem:

$$DK_1 \cdot DA = DL_1 \cdot DB = DM_1 \cdot DC;$$

iar puterea punctului D în raport cu sfera S_2 ne dă:
$DK_2 \cdot DA = DL_2 \cdot DB = DM_2 \cdot DC$.

Împărțind cele două relații obținem:

$$\frac{DK_1 \cdot DA}{DK_2 \cdot DA} = \frac{DL_1 \cdot DB}{DL_2 \cdot DB} = \frac{DM_1 \cdot DC}{DM_2 \cdot DC} \quad \text{sau:} \quad \frac{DK_1}{DK_2} = \frac{DL_1}{DL_2} = \frac{DM_1}{DM_2}.$$

Acest lucru ne arată că planele $K_1L_1M_1$ și $K_2L_2M_2$ sînt paralele.

Dar se știe că două plane paralele taie într-un tetraedru două triunghiuri asemenea și deci: triunghiurile $K_1L_1M_1$ și $K_2L_2M_2$ sînt asemenea.

CHESTIUNI DE EXAMEN *)

4963. — Se dou două cercuri exterioare de raze neegale R' și R''. Se notează cu d distanța centrelor $O'O''$ și se raportează cele două cercuri la sistemul de axe de coordonate format de linia centrelor, ca axă a absciselor și de axul lor radical, ca axă a ordonatelor. Să se scrie în raport cu acest sistem de coordonate:

a) ecuațiile celor două cercuri; b) ecuațiile tangentelor comune celor două cercuri; *c)* rapoartele în care tangentele comune celor două cercuri împart segmentul $O'O''$.

(Facultatea de matematică și fizică București 1961)

4964. — Se dă un trapez dreptunghic $ABCD$ în care poate fi înscris un cerc; fie A', B', C' și respectiv D' punctele de contact ale cercului cu laturile AB, BC, CD și respectiv DA, unghiurile din A și D fiind presupuse drepte.

a) Să se stabilească în ce caz este posibil să se înscrie un cerc într-un trapez dreptunghic. *b)* Să se calculeze în funcție de baza mare B și de baza mică b, perimetrul patrulaterului $A'B'C'D'$ și lungimea diagonalei sale $B'D'$.

c) În funcție de aceleași mărimi, să se calculeze aria și volumul corpului născut prin rotația triunghiului $B'C'A'$ în jurul dreptei $A'C'$.
d) Dacă punctele A și D rămîn fixe, iar punctele B și C se deplasează pe

*) La problemele 4963—5014 se primesc soluții pînă la 1 martie 1962.

direcțiile paralele AB și DC, astfel ca BC să rămînă tangentă la cercul înscris, să se determine cazul în care perimetrul și aria patrulaterului $A'B'C'D'$ devin maxime.

(Facultatea de matematică și fizică București 1961)

4965. — Să se găsească valorile maxime și minime ale funcției $f(x) = \sin^2 x + p \sin x + q$ pe segmentul $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

(Facultatea de matematică și fizică București 1961)

4966. — Să se rezolve inecuația $\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4(x+1)} > 1$.

(Facultatea de matematică și fizică București 1961)

4967. — Să se reprezinte grafic funcția $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$

(Facultatea de matematică și fizică București 1961)

4968. — Să se rezolve inecuația $\sqrt{\frac{3x-7}{x-1}} < x - 1$.

(Facultatea de matematică și fizică București 1961)

4969. — Se consideră o elipsă de centru O și de focare F și F'. Pentru fiecare punct M al elipsei se duce normala în M la elipsă, care intersectează axa y-ilor într-un punct P. Se cere: *a)* Să se calculeze expresia $\frac{MP^2}{FM \cdot F'M}$, cînd punctul M se mișcă pe elipsă. *b)* Să se găsească locul geometric descris de centrul cercului înscris triunghiului MFF' cînd M descrie elipsa dată.

(Facultatea de matematică și fizică București 1961)

4970. — Fie ABC un triunghi cu $AB = AC$. Se notează prin P puncut de intersecție al bisectoarei unghiului BAC cu mediatoarea segmentului BC. Un cerc care trece prin punctele A și P intersectează dreapta AB în punctele A și M și dreapta AC în punctele A și N. Se cere: *a)* Să se arate că patrulaterul $PCAB$ este inscriptibil; *b)* Să se găsească locul geometric descris de mijlocul segmentului MN cînd cercul ce trece prin A și P variază; *c)* Să se calculeze lungimea segmentului AP și lungimea proiecțiilar acestui segment pe dreptele AC și AB în funcție de laturile triunghiului ABC.

(Facultatea de matematică și fizică București 1961)

4971. — Un mobil de masă m este lăsat din punctul H să alunece fără frecare pe o curbă semicirculară. Să se determine cos x, unde x este unghiul format de direcția verticalei cu dreapta ce trece prin origina O

și prin punctul în care mobilul părăsește porțiunea de cerc pe care a parcurs-o. Viteza sa depinde de înălțimea de cădere prin formula lui Galilei. Să se calculeze distanța OA de pe orizontală la care ajunge mobilul la sol. Care va fi energia mobilului la pământ?

(Facultatea de matematică și fizică București 1961)

4972. — Un mobil de masă m este lăsat să cadă fără viteză inițială de la marginea superioară a unui plan înclinat cu înălțimea h și unghiul de înclinație x. Fiind dat coeficientul de frecare k să se calculeze:

a) unghiul x_2 sub care alunecarea nu e posibilă; b) viteza cu care mobilul ajunge la pământ și durata căderii pentru un $x > x_2$; c) energia consumată prin frecare; d) presupunînd că lansăm mobilul pe planul înclinat de jos în sus cu o viteză inițială egală cu cea atinsă cînd a ajuns la sol, să se determine înălțimea H pînă la care se ridică din nou. Să se calculeze H pentru $x = 45$, $h = 1$ m și $k = 0{,}5$.

(Facultatea de matematică și fizică București 1961)

4973. — Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$|x - y| + 2|y| = 2$$
$$px + 2y = 2p$$

unde p este un număr real.

Olimpiada matematică Praga 1961

4974. — Să se demonstreze că $2^{4^n} + 5$ se divide cu 21, unde n este număr natural.

Olimpiada matematică Praga 1961

4975. — Să se arate că:

$$1 - \cos^2 x - \cos^2 y - \cos^2 z + 2\cos x \cdot \cos y \cdot \cos z =$$
$$= 4 \sin \frac{x+y+z}{2} \sin \frac{x+y-z}{2} \sin \frac{x-y+z}{2} \sin \frac{-x+y+z}{2}$$

Olimpiada matematică Varșovia 1961

4976. — Să se arate că dacă între numerele reale a,b,c, avem inegalitățile: $a + b + c > 0$; $ab + bc + ca > 0$; $abc > 0$,

atunci $a > 0$ $b > 0$, și $c > 0$.

Olimpiada matematică Varșovia 1961

4977. — Să se arate că numărul

$$220^{119^{69}} + 69^{220^{119}} + 119^{69^{220}}$$

se divide prin 102.

(Matematyka, Varșovia)

4978. — Dacă $x+y+z = 0$, atunci

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{2} \cdot \frac{x^5+y^5+z^5}{5} = \frac{x^7+y^7+z^7}{7}$$

(The American Mathematical Monthly)

4979. — Să se rezolve ecuația:

$$\sqrt[4]{\frac{a-x}{b+x}} - \sqrt[4]{\frac{b+x}{a-x}} = 2.$$

Matematica v școle, Moscova 1961

4980. — Să se demonstreze că suma: $7+7^2+7^3+\ldots+7^{4^n}$, n fiind număr natural, se divide prin 100.

Matematica v școle, Moscova 1961

4981. — Să se demonstreze inegalitatea:

$$(\sec^{2n} x - 1)(\operatorname{cosec}^{2n} x - 1) \geqslant (1+2+3\ldots+n)^2$$

Matematica v școle, Moscova 1961

PROBLEME PROPUSE*)

4982. Să se determine $P(x)$ și $Q(x)$, astfel ca să avem identitatea:

$$(1+x)^2 \cdot P(x) + (1-x)^3 \cdot Q(x) \equiv 16.$$

Aplicație pentru $P(x) = ax^2 + bx + c$ și $Q(x) = Ax + B$.

I. Teodorescu, profesor Galați

4983. În planul unui cerc de rază R se ia un punct exterior P. Diametrul ce trece prin P, taie cercul în A și B, unde $PA < PB$. Din P se duce tangenta PT și se notează $PT = a$, $BT = b$, $PB = c$.

Să se exprime R în funcție de a, b, c.

Angel Postelnicu, profesor Galați

4984. Fie dat un tub Melde de sticlă închis la un capăt, de lungime l și de secțiune S. O coloană de mercur închide în acest tub un volum de aer cu lungimea h. Tubul este fixat cu capătul închis de axul vertical

---

* VIII (4983, 4984, 4995, 4996, 4998 ; IX (4987, 4990, 4992, 4994, 5006, 5007, 5011, 5014); X (4982, 4985, 4986, 4989, 4991, 4993, 4997, 5003, 5004, 5012, 5013); XI (4988, 4999, 5000, 5001, 5002, 5005, 5009, 5010).

al unei centrifuge astfel că tubul să se rotească într-un plan orizontal. Cunoscînd presiunea atmosferică H, iar coloana de mercur de lungime x, să se determine viteza unghiulară a tubului, astfel ca mercurul să nu iasă din tub.

M. Bostan, profesor Galați

4985. *a)* Pentru care valori ale lui x cuprinse între $0°$ și $36°$, avem: $\sqrt{1-\cos 4x}-\sqrt{1+\cos 4x}=\sqrt{2(1+\sin 4x)}$. Verificare.

b) Pentru care valori ale lui x cuprinse între $0°$ și $360°$, avem: $\sqrt{1+\sin 4x}+\sqrt{1-\sin 4x}\geqslant\sqrt{2(1-\cos 4x)}$, și să se arate în ce caz avem numai egalitate.

C. Ionescu-Țiu

4986. *a)* Să se afle valorile lui x cuprinse între $0°$ și $360°$ pentru care $\operatorname{tg} x<\sec x$.

b) Care este cel mai mic unghi ascuțit care verifică ecuația $\sin(2x+45°)=\cos(30°-x)$

* * *

4987. Să se rezolve sistemul

$$xyz(y+z-2x)=a$$
$$xyz(z+x-2y)=b$$
$$xyz(x+y-2z)=c$$

* * *

4988. Să se rezolve în numere întregi sistemul:

$$x-2y+z=0$$
$$x^3+y^3+z^3-axyz=0,\quad y\neq 0$$

unde a este un parametru întreg.

Dacă x, y, z sînt coordonatele unui punct $M(x, y, z)$ dintr-un sistem de axe $Oxyz$ care formează un triedru tridreptunghic, să se afle valorile întregi ale lui a pentru care coordonatele punctului M sînt numere întregi, soluții ale sistemului dat.

Gh. Cezar, student București

4989. Se notează $a_n=3s^{2n}-2s^n-1$, $b_n=4s^{2n}+4s^n$, $c=5s^{2n}+2s^n+1$, unde s și n sînt numere naturale, $s>1$.

a) Să se arate că a_n, b_n, c_n pot fi laturile unui triunghi dreptunghic și apoi să se arate că pentru valori suficient de mari ale lui n, unghiurile triunghiului cu laturile a_n, b_n, c_n diferă oricît de puțin de unghiurile triunghiului cu laturile 3, 4, 5.

b) Incercați să găsiți o problemă analoagă care să conducă la triunghiuri dreptunghice cu laturi numere întregi „aproape asemenea" cu triunghiul cu laturile 5, 12, 13.

(Traducere din limba rusă)

4990. Pentru care valori pozitive raționale ale lui m, avem:

$$\frac{\log\left(1+\frac{1}{m}\right)^m}{\log\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}}=\frac{\left(1+\frac{1}{m}\right)^m}{\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}}$$

Verificare pentru $m=2$ și pentru $m=4$

* * *

4991. Să se demonstreze că:

$$[3(10^k+10^{k-1}+\ldots+10^2+10+1)n+1]^2\equiv$$

$$\equiv n^2(10^{k+1}+10^2+\ldots+10^{k+1})+(6n-n^2)(10^k+10^{k-1}+\ldots+10+1)+1.$$

* * *

4992. Fie pentagonul stelat, oarecare $ABCDE$ și punctele:

$M\equiv(BC;DE)$; $N\equiv(CD;EA)$; $P\equiv(DE;AB)$; $Q\equiv(EA;BC)$ și $R\equiv(AB;CD)$.

Să se demonstreze relația:

$$\left(\frac{AN\cdot BP\cdot CQ\cdot DR\cdot EM}{AR\cdot BM\cdot CN\cdot DP\cdot EQ}\right)^3=\frac{AP\cdot BQ\cdot CR\cdot DM\cdot EN}{AQ\cdot BR\cdot CM\cdot DN\cdot EP}$$

Masgras Vasile, elev Iași

4993. Să se demonstreze că dacă n este un număr întreg impar și pozitiv de forma $n=2p+1$, există relația

$$(n+1)\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}C_n^{2k}=2^n$$

Stănescu I. Cicerone, elev Drăgășani

(În legătură cu problema 4530).

4994. Fie P, Q, R, S proiecțiile intersecției I a diagonalelor AC, BD ale patrulaterului $ABCD$ pe laturile AB, BC, CD, DA. Să, se arate că dacă AC, BD sînt perpendiculare una de pe alta atunci PQ și RS se întîlnesc pe AC iar PS și QR se întîlnesc pe BD.

Gh. Buicliu

4995. Să se arate că dacă $a+b+c$ divide pe $am+bn+cp$, atunci divide și pe $a(n+p)+b(m+p)+c(m+n)$; a, b, c, m, n, p fiind numere întregi.

George Dincă, student București

4996. Să se construiască un triunghi oarecare, cunoscînd poziția în plan a centrului de greutate, a centrului cercului înscris și poziția punctului de contact a cercului înscris cu una din laturi.

Florescu Dan, elev București

4997. Să se demonstreze că orice număr, diferit de un număr prim N ridicat la puterea $\frac{N-1}{2}$ este un multiplu de N plus sau minus unu.

Alex. Ioachim, elev S. M. 1 București

4998. Pe o dreaptă $(\triangle)$ sînt situate două segmente $AB=a$ și $CD=b$, care nu au puncte comune. Se duc arcele de cerc (Γ) și (Γ'), capabile de același unghi α, construite pe segmentele AB și CD, de aceeași parte a dreptei $(\triangle)$.

Să se construiască arcele de cerc (Γ) și (Γ') în cazul cînd ele sînt tangente exterioare.

Gh. D. Simionescu

4999. Să se arate că

$$S=k!+\frac{k!\,k}{1!}+\frac{(k+1)!\,k}{2!}+\ldots+\frac{(p-1)!\,k}{(p-k)!}=\frac{p!}{(p-k)!}$$

unde p și k sînt două numere naturale astfel încît $p>k$.

Radu Eftimie, student București

5000. Doi observatori A și B situați pe același meridian, execută în același moment o observație la Lună — ce se află în meridian.

Pentru observatorul A, Luna este la zenit; pentru observatorul B, unghiul format între verticala locului și tangenta la bordul superior al Lunei este α.

Se cunosc: latitudinile celor 2 observatori ϱ_1 și ϱ_2 R = raza Pămîntului, r = raza Lunei.

Se cere distanța între centrul Lunei și centrul Pămîntului, printr-o formulă calculabilă prin logaritmi.

C. V. Costăchescu, Constanța

5001. Se dă $f(x)=x^2+Ax+B$ și $g(x)=-x^2+Ax+B$.

Să se arate că:

$$f(a)+f(b)+f(c)\geqslant 3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right),$$

$$g(a)+g(b)+g(c)\leqslant 3g\left(\frac{a+b+c}{3}\right),$$

$$mf(a)+nf(b)+pf(c)\geqslant (m+n+p)f\left(\frac{ma+nb+nc}{m+n+p}\right)$$

$$mg(a)+ng(b)+pg(c)\leqslant (m+n+p)g\left(\frac{ma+nb+pc}{m+n+p}\right)$$

m, n, p fiind numere pozitive.

Se poate generaliza.

C. Ionescu-Țiu

5002. Să se calculeze limitele laterale ale expresiei

$$E = \left[\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}\right]^{\sec^2 2x}$$

cînd x tinde către $\frac{\pi}{4}$.

* * *

5003. Se dă polinomul: $P(x) = x^{n+1} + ax + b$.

a) Să se determine a și b astfel ca $P(x)$ să se dividă cu $Q(x) = x^2 - 2x + 1$; *b)* Să se afle cîtul împărțirii; c) Pe baza rezultatului obținut la (*b*) să se calculeze suma primelor n numere din șirul: 1; 4; 13; 40; 121; ... unde se observă că un termen oarecare este egal cu triplul precedentului plus unitatea.

T. Dăneț, profesor Fetești

5004. Dacă i_a, i_b, i_c sînt bisectoarele unui triunghi oarecare, atunci există relația: $i_a^2 + i_b^2 + i_c^2 \geqslant 27\, r^2$, unde r este raza cercului înscris în triunghi.

C. Năstăsescu, elev Pucioasa

5005. S-au construit din sîrmă de nichelină ($\varrho = 0{,}4$) două rezistențe R_1 și R_2. Funcționînd în serie sub tensiunea de 200 V, ele absorb din rețea o putere de 2,5 kW; funcționînd în paralel la aceeași tensiune absorb 400 W. Se cere:

a) Valoarea în ohmi a celor două rezistențe; b) Lungimea sîrmei întrebuințate pentru confecționarea fiecăreia, știind că secțiunea este de 0,1 mm²; c) Cîți litri de apă vor încălzi pînă la fierbere, funcționînd în condițiile problemei, legate în paralel în timp de 15 minute, randamentul fiind 80%; d) Ce putere ar absorbi un montaj compus din 2 rezistențe R și două rezistențe R_2 legate: R_1 și R_2 în serie cu derivația R_1, R_2.

I. Bobolea, profesor Cugir

5006. Dacă M este un punct oarecare pe ipotenuza BC a unui triunghi dreptunghic ABC, avem relația: $MC^2 . AB^2 + MB^2 . AC^2 = AM^2 . BC^2$.

V. Gh. Vodă, elev București

5007. Un automobil patinează pe zăpadă (rulează pe loc) timp de $2^{min}\, 5^{s}$.

a) Ce cantitate de zăpadă se topește sub roțile automobilului dacă puterea motorului este de 41,8 *CP*, dar numai 80% din puterea lui este folosită la învîrtirea roților? Temperatura zăpezii este de 0°*C* și nu ținem seama de coborîrea punctului de topire datorită presiunii.

b) Ce cantitate de vapori de apă la 100°C este necesară ca să topească o cantitate de zăpadă egală cu aceea topită sub roțile automobilului și să ridice temperatura apei provenite din zăpadă la 64°C? Se neglijează căldura absorbită de vasul în care s-a pus zăpadă.

c) Care va fi temperatura finală dacă se va folosi o cantitate de vapori de 4 ori mai mică? Să se explice rezultatul obținut.

d) Ce cantitate de vapori va fi necesară ca să topească toată cantitatea de zăpadă fără să-i ridice temperatura?

Se dau: căldura de topire a gheții $C_\lambda = 80$ cal/g, căldura de vaporizare a apei $C_L = 540$ cal/g.

N. Hangea

5008. a) Să se reprezinte grafic curbele:

$$2x - 3y = \sqrt{\frac{4x^3}{3} - \frac{9y^3}{2}},$$

$$2x + 3y = \sqrt{12x - 18y + 6xy},$$

$$\frac{2(3-x)}{3y} - \frac{3(2+y)}{2x} = 1.$$

b) Să se afle punctele de pe aceste curbe ale căror coordonate sînt numere întregi.

c) Ce devin ecuațiile și curbele respective după schimbarea $x = 3u$ și $y = 2v$.

C. Ionescu-Țiu

5009. a) Să se rezolve sistemul:

$$x = x\cos\theta - y\sin\theta + a,\quad y = x\sin\theta + y\cos\theta + b$$

b) Să se verifice că:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{ay - bx}{x(x-a) + y(y-b)}$$

c) În planul axelor coordonate perpendiculare Ox, Oy fie O' (a, b). Mediatoarea segmentului OO' taie arcul de cerc dus prin O, O' capabil de unghiul θ, în punctul K, ales astfel ca rotația de centru K să aducă în sens direct originea O în punctul O'. Să se arate că x, y sînt coordonatele centrului de rotație K.

N. Mihăileanu

5010. Se dă o sferă cu centrul O și se consideră un triedru tridreptunghic avînd ca vîrf un punct P al sferei și ale cărui muchii înțeapă sfera în punctele A, B, C.

a) Să se arate că distanța punctului O la fețele PBC, PCA, PAB ale triedrului sînt egale respectiv cu $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$ (s-a notat $a = PA$, $b = PB$,

$c = PC$). Să se deducă de aici că punctul G în care dreapta OP înțeapă planul triunghiului ABC este centrul de greutate al acestui triunghi.

b) Presupunînd punctul P fix și triedrul mobil în jurul acestui punct, să se arate că planul ABC trece printr-un punct fix.

c) În aceleași condiții ca la b), să se determine locul geometric al ortocentrului triunghiului ABC.

d) Să se calculeze în funcție de a, b, c raza cercului circumscris triunghiului ABC.

C. Coșniță

5011. Pe un primus cu benzină cu randamentul de 40% se topește zinc cu temperatura inițială de $0°C$ într-un vas de fier de 1 kg. Se cere: a) să se calculeze ce cantitate de zinc se poate topi, dacă se ard 160 grame benzină avînd puterea calorică $1100\frac{kcal}{kg}$; b) să se calculeze ce cantitate de gheață cu temperatura inițială de $-20°C$ se poate ridica la $100°C$ (fără să se vaporizeze), dacă se toarnă zincul pe gheață.

V. Teodorescu, elev P. Neamț

5012. Într-un vas, avînd 5 kg apă la temperatura de 10°C și o rezistență de 4,5Ω aplicată la o tensiune de 200 V, se introduce un cub de gheață de muchie $a = 10$ cm și temperatura de $-10°C$ și un alt cub de fier la temperatura de 550°C de aceeași mărime.

Se cere: a) Temperatura finală înainte de a închide circuitul; b) Timpul necesar pentru a ridica temperatura apei la 100°C; c) Valoarea rezistenței ce trebuie legată în paralel cu prima, pentru a lungi durata de încălzire a apei cu x secunde.

Se neglijează capacitatea calorică a vasului și pierderile.

Spătaru Ion, elev, Panciu

5013. Dîndu-se o prismă cu unghiul $A = 60°$ și indicele de refracție $n = 1,5$ se cere: a) unghiul de incidență minim sub care trebuie să cadă raza incidentă pentru ca razele emergente să se reflecte total; b) Deviația totală în cazul acesta; c) Deviația minimă.

Gușiță Marcel, elev Cărbunești

5014. a) Să se afle forța de tracțiune a motorului unui tractor care ară cu o viteză de 5,4 km/oră și are o putere de 54,4 CP.

b) Să se afle timpul necesar pentru a ara 1 ha și cîți litri de benzină s-au consumat știind că se cheltuiesc 50 kW la hectar și motorul are randamentul 43%.

Se dă puterea calorifică a benzinei $q = 10.000$ kcal/kg.

Pavel N. Radu, elev Craiova

EXERCIŢII ŞI PROBLEME PROPUSE PENTRU CLASELE V–VIII*)

E : 1753. Dacă p este invers proporţional cu $q + 2$ iar dacă $p = 1$, atunci $q = 4$. Să se afle care este valoarea lui p pentru $q = 1$.

* * *

E : 1754. Să se verifice egalitatea

$$a + \frac{a}{a^n - 1} = a^n \cdot \frac{a}{a^n - 1}$$

pentru $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, oricare ar fi a diferit de unu.

Încercaţi să arătaţi egalitatea pentru un n oarecare.

* * *

E : 1755. Să se arate că :

$$\left(a + \frac{1-x}{1+x}\right) : \left(a - \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}}\right) = \left(a - \frac{1-x}{1+x}\right) : \left(a + \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}}\right) =$$

$$= \left(a + \frac{1+x}{1-x}\right) : \left(a - \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}}\right) = \left(a - \frac{1+x}{1-x}\right) : \left(a + \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}}\right) = 1$$

C. Ionescu-Ţiu

E : 1756. Să se arate că :

$$\left[2 : \left(\frac{1-x}{1+x} - \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}}\right)\right] \times \left[2 : \left(\frac{1+x}{1-x} - \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}}\right)\right] = 1$$

$$\frac{1-x}{1+x} + \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{1+x}{1-x} + \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = 0$$

(În legătură cu exerciţiul precedent).

C. Ionescu-Ţiu

---

* V (E : 1757, 1758, 1759,) ; VI (E : 1751, 1761, 1762) ; VII (E : 1754, 1755, 1756, 1760).

E : 1757. Pe unul din talerele unei balanțe a fost așezat un săculeț cu făină ; iar pe celălalt taler $^1/_5$ din greutatea primului săculeț și încă $^4/_5$ kg pentru a se face echilibru. Cît cîntărește săculețul cu făină.

* * *

E : 1758. Jumătate din drum calul a tras căruța goală cu viteza de 10 km pe oră. Restul drumului l-a făcut cu căruța încărcată cu viteza de 6 km pe oră. Care este viteza medie, adică cu ce viteză constantă ar fi trebuit să meargă calul pentru ca să fi străbătut drumul în același timp ?

* * *

E : 1759. O lădiță conține 9 kg struguri. Cu 3 cîntăriri, cu o balanță și două greutăți una de 50 g și alta de 200 g, trebuie să se formeze o grămadă de 2 kg struguri. Arătați cum trebuie procedat.

* * *

E : 1760. Să se afle centrul unui cerc folosind un echer negradat și un creion ascuțit subțire.

* * *

E : 1761. Fie două numere diferite. Dacă scădem din fiecare jumătatea celui mic atunci restul numărului mai mare devine de trei ori mai mare decît retstul numărului mai mic. De cîte ori a fost mai mare numărul cel mare decît cel mic ?

E : 1762. Un strungar premiat sporind viteza de așchiere a fontei cu 1690 m/min, timpul necesar pentru prelucrarea unei piese a scăzut de la 35 minute la 2,5 minute. Cu ce viteză de așchiere rapidă lucrează strungarul ?

* * *

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

(urmare)

FĂLTICENI (Suceava), ş.m. 2, cl. V. Gîtmaru Maria (E: 1637, 42, 62, 69, 70, 80), Purnichi Viorica (E: 1638, 42, 62, 70, 77, 80, 81, 82, 85), Racoviță Mariana (E: 1632—34, 41, 42, 48, 62, 63, 68—70, 73, 77, 81, 85, 90, 97, 701—03), cl. IX. Rabinovici Silviu (4575, 77, 81, 83—85, 90, 91, 96. 600, 10, 14, 16, 17, 25—30, 35, 45, 47, 50, 68, 85, 94, 98, 709, 10. 25).

FĂGĂRAȘ (Brașov), ş.m. 1, cl. VIII. Frustok Ștefan (4624, 28, 45, 47, 59, 63, 68, E: 1660, 62, 66, 68), cl. X. Popa I. Ion (4575, 79, 80, 83—85, 88, 91, 95, 96, 99—601, 03, 04, 10—12, 14, 15, 17—20, 24—33, 35, 45, 50. 68, 69, 77, 78, 81), Stănească Leonte (4585, 96, 600, 11, 35, 45, 49, 50, 69, 79, 83).

FĂGET (Banat), cl. VI. Costea S. Margarina (E: 1653, 62, 65, 67—70, 77, 80), Abs. Costea Dumitru (4614, 17, 24—29, 31—33, 58, 61, 63. 89, 91, 93, 724, 38, 42, 43, 51, 53, 62, 63—65).

FETEȘTI (București), cl. VIII. Chizinski Elena (E: 1637, 38, 42, 44, 48, 51—58, 60, 62, 67, 71, 76, 77, 80, 81, 87), Ionescu Lelia (E: 1604, 14, 15, 28, 48, 51—57, 59, 60, 62, 67—71, 76, 77, 80, 81, 84, 87), Nedelcu Gh. (E: 1637, 38, 42, 44, 48, 51—58, 60, 62, 67—71, 76, 77, 80, 81, 87). Pavel Maria (E: 1604, 14, 15, 28, 48, 51, 57, 59, 60, 62, 67—71, 76, 77, 80, 81, 84, 87), Stănescu Doru (E: 1637, 38, 42. 44, 48, 51—58, 60, 62, 67, 71, 76, 77, 80, 81, 87), cl. X. Coşug Vasile (4575, 77,

80, 84, 88, 95, 607, 14, 15, 17, 19, 20, 24—30, 32, 33, 41, 48, 52, 63, 65).

FOCȘANI (Galați), ș.m. 1 Unirea, cl. IX. Ionescu Mihai (4575, 84, 614, 16, 17, 63, 72, 75, 76, 701, 03, 04), cl. XI. Grădeanu Gh. (4500, 02, 08, 10, 11—16, 22—26, 28, 29, 32, 33, 37, 41, 42, 44—57, 59—65, 68—70, 72—78, 80—93, 95—97, 99, 600, 02—05, 07—17, 19—36, 41, 42, 45, 48, 50, 51, 54, 59, 61—64, 68—70, 90, 91, 93, 95, 97, 98, 701, 03. 05, 07—09, 11), Popa I. Nicolae (4499, 500—02, 05—11, 17, 19, 31—33, 35—40, 42—44, 51—53, 56, 59, 61, 65, 68, 69, 73—93, 95—99, 600, 02—07, 11, 13—33, 36, 38—42, 44—46, 48—52, 59, 61—64, 66—70, 72, 74, 77, 79, 81, 84—86, 88, 89, 91, 93—95, 97—99, 700—05, 07—12, 14, 15), ș.m. Al. I. Cuza, cl. X. Segal Zeilic (4423, 27, 44, 47, 52, 53, 61, 72, 73, 75, 80—84, 89, 97, 99, 509, 10, 17, 19, 35, 38, 39, 42, 43, 46, 51, 52, 59, 62, 70).

EVIDENȚIAȚI*)

Evidențiați pînă la data de 15 sept. 1961 la probleme de matematică din G.M.F.-B:

1. **Tănăsescu Miron** (cl. XI ș.m. Horezu-Argeș), 2. **Sîrghie Mircea** (absolvent Rădăuți), 3. **Stancu M. Ion** (cl. X ș.m. 1 Pitești), 4. **Popescu S. Gheorghe** (absolvent Pucioasa), 5. **Matei C. Gheorghe** (cl. VIII ș.m. Pucioasa), 6. **Sfetcu Ioan** (cl. XI ș.m. 1 Lugoj), 7. **Scarlat Nicolae** (student Timișoara), 8. **Grozavu Mihai** (cl. XI seral Lonea-Hunedoara), 9. **Pavel H. Nicolae** (cl. XI ș.m. 3 Iași), 10. **Banu Gheorghe** (cl. X Pucioasa), 11. **Lustig Gheorghe** (cl. X ș.m. 5 Timișoara), 12. **Diaconescu C. Radu** (absolvent Pucioasa), 13. **Gurămultă V. Ion** (student Iași), 14. **Daba Dan** (cl. VIII ș.m. 1 Lugoj), 15. **Ender Lucian** (cl. X ș.m. 1 Galați), 16. **Tărăbuță P. Mihai** (cl. IX ș.m. 1 Pitești), 17. **Matei Dragoș** (absolvent Iași), 18. **Popa Dorina** (cl. XI ș.m. 1 Lugoj), 19. **Păncescu Paul** (cl. XI Odobești), 20. **Ionescu V. Marcel** (cl. VIII ș.m. 3 Pitești), 21. **Șerban Longin** (cl. XI Pucioasa), 22. **Drugea I. Gheorghe** (cl. XI ș.m. 1 Ploiești), 23. **Bălan George** (cl. VIII ș.m. 3 Galați), 24. **Gaigniski Radu** (cl. XI ș.m. 3 Iași), 25. **Wald Robert** (cl. VIII ș.m. 1 Oradea), 26. **Tîrcă I. Ion** (cl. XI Pucioasa), 27. **Popa Alexandru** (cl. IX Pucioasa), 28. **Zamfir Cornel** (cl. X ș.m. 2 Pitești), 29. **Cuș Ioan** (cl. X Hunedoara), 30. **Popa Radu** (cl. VIII Petroșani), 31. **Popovici I. Mariana** (cl. VIII ș.m. 1 Lugoj), 32. **Paxino I. Gheorghe** (cl. X Sinaia), 33. **Dolteanu Temistocle** (absolvent Huși), 34. **Vasiliu Dan** (cl. VIII ș.m. 1 Lugoj), 35. **Popa Lucia** (cl. V Petroșani), 36. **Pupăzan Nicolae** (Lt. Major, Lugoj), 37. **Dragomir Toma** (cl. IX ș.m. 1 Oradea), 38. **Boldea Ion** (cl. X ș.m. 1 Lugoj), 39. **Ionescu Alina** (cl. VIII ș.m. 4 Oradea), 40. **Cimponeriu Traian** (cl. VIII ș.m. 1 Lugoj), 41. **Gîlmeanu Vasilaș** (student Iași), 42. **Vlăduțu Mircea** (cl. X ș.m. 2 Sighișoara), 43. **Pop Ioan** (absolvent Suceava), 44. **Hurduc Dan** (cl. VIII ș.m. 1 Pitești), 45. **Cîrțiha Anghel** (cl. VIII ș.m. 3 Tg. Jiu), 46. **Negruțiu Vasile** (cl. VII Săcădat), 47. **Crețu D. Gheorghe** (cl. X Tîrgoviște), 48. **Calistrate D. Ion** (cl. IX ș.m. 2 Tg. Jiu), 49. **Frandeș Leonard** (cl. VIII Tg. Mureș), 50. **Ceapă Alexandru** (cl. VIII ș.m. 3 Tg. Jiu), 51. **Eremia Dinu** (an. I șc. contabilitate Tr. Măgurele), 52. **Brinda Rodica** (cl. VII Lugoj), 53. **Petric Maria** (cl. V Gura Humorului), 54. **Mitran Maria** (cl. VIII ș.m. 5 Iași), 55. **Diaconu I. Nicolae** (cl. IX ș.m. 2 Pitești), 56. **Thirer Nonel** (cl. VIII ș.m. 6 Iași), 57. **Ioniță Maria** (cl. VIII Predeal).

*

— Elevii claselor IX—XI nu vor trimite soluții la problemele propuse pentru școala de 7 ani. Problemele rezolvate trebuie să fie din ultimele trei numere apărute ale G.M.F.-B și vor fi trimise numai odată în cursul unei luni. Problemele de matematică vor fi expediate într-un singur plic și vor fi însoțite de un borderou cu numerele problemelor, scrise în ordine crescîndă. Idem pentru problemele de fizică. Pe plic se va scrie localitatea, școala și clasa pe care o urmează rezolvitorul. La rubrica rezolvitorilor nu se va anunța decît cel puțin 10 probleme bine rezolvate. Problemele incomplet rezolvate, care conțin erori, sau sînt copiate de la alți rezolvitori, nu sînt anunțate și eventual pot fi subliniate la poșta redacției; iar rezolvitorii respectivi nu mai pot fi evidențiați. Problemele propuse să fie însoțite de una sau mai multe soluții.

*) Pentru clasificarea anuală și distribuirea de premii și mențiuni, toți rezolvitorii de probleme din G.M.F.-B care au cel puțin două evidențieri în numerele 1—11 din anul 1961 sînt rugați să trimită de îndată o fișă menționînd numărul total de probleme anunțate la rubrica rezolvitorilor în 1961 pînă în prezent, precum și adresa unde li se pot expedia premiile ce se vor acorda.

* * *

Pînă la 15 sept. 1961 s-au mai primit soluții bune la problemele de matematică din G.M.F.-B, după cum urmează:

GĂEȘTI (Argeș). Cl. VIII. Bogoi Nicolae (4625, 33, 58, E: 1648, 53—58, 64, 67, 68, 70, 71, 74), Cl. IX. Alexandrescu Petruș (4516, 33, 36, 38, 39, 46, 51, 52, 75, 77, 84, 91, 99, 610, 15, 17, 18, 24, 26, 33, 44, 58, 59, 63), Ciobanu Viorel (4356, 68, 75, 88, 614, 16, 17, 24—26, 58, 65). Cl. X. Ion Alexandru (4575, 77, 81, 84, 604, 10, 17, 24—28, 33, 58, 63).

GALAŢI. Ş.m. 1. Cl. VIII. Herşcovici Lucian (4614, E: 1629, 31, 37, 45, 46, 49, 52, 53, 57, 59), Reichman S. (4561, E: 1618, 20, 21, 27, 33, 37, 44, 45). Cl. X. Ender Lucian (4575, 77, 81, 82, 84, 86, 88, 91, 95, 99, 603, 04, 07, 09, 10, 14, 15, 17—20, 24, 26, 27, 29, 31, 33, 36, 41, 44, 46, 48, 51, 55, 57—59, 63, 64, 70, 72, 79, 81, 87, 93, 97, 701—04, 07, 14—17, 22—24, 38, 41, 43, 44, 51, 53, 54, 57, 62—65, P), Solomon L. (4575, 84, 610, E: 1425—28, 33, 62). Cl. XI. Felea A. Victor (4419, 21, 22, 24, 31, 32, 34, 43, 56, 57, 63, 69, 70, 75, 78—83, 86, 88, 92, 94, 95).

Ş.m. 2. Cl. VIII. Costescu Constantin (E: 1648, 50, 52, 54—56, 58—60, 62, 64—68, 76, 77, 82, 83). Cl. IX. Grigore Elena (4575, 610, 14, 17, 24—28, 33, 46).

Ş.m. 3. Cl. VII. Pşegalinski Alecse (E: 1617—29). Cl. VIII. Bălan George (4575, 79, 601, 14, 15, 26, 28—32, 45, 63, 68, 702, 09, E: 1600, 33, 36—38, 42—47, 50—59, 62, 65—68, 70, 75—77, 79—81, 83, 84), Duda Gabriela (4614, 15, E: 1652, 57, 62, 67, 68, 70, 71, 75, 81), Marcus Sergiu (4575, 604, E: 1607, 18, 20, 21, 23, 24, 29—31, 48—60), Penciu Fănel (4624, 28, E: 1648, 51—56, 60, 62, 65, 67, 69, 70), Zisu Vasile (4614, 28, 33, E: 1637, 42, 48, 52, 54, 55, 57, 59, 62, 67, 71). Cl. X. Ivănescu Al. (4499, 506, 07, 09, 10, 19, 32, 38, 39, 43), Selinger Diana (4449, 506, 09, 17, 22, 33, 36, 39, 40, 43, 59, 75, 82), Tuchel Sanda (4509, 17, 31, 38—40, 43, 44, 68, 75, 77, 81, 84, 91, 95, 604, 07, 14, 18—20, 59, 63).

Şc. de 7 ani nr. 17. Cl. V. Corciovei Cecilia (E: 1654—56, 68—70, 73, 77, 80, 81, 83).

Şc. de 7 ani nr. 21. Cl. VI. Hoha Felicia (E: 1642, 43, 47, 48, 56, 62, 65, 67—69), Nicolescu Dan (E: 1617, 20, 23, 27, 37, 42). Cl. VII. Dobrea Mariana (E: 1620—22, 42, 48, 51, 53—57, 59). Luchian Lucia (E: 1634, 37, 38, 41—46, 55, 57), Mocanu Anica (E: 1648, 50, 52—57, 59, 68), Niunim Emil (E: 1637, 38, 42, 43, 46—48, 51, 53—55, 59), Vaisman Mirel (E: 1642, 47, 48, 51, 55—60).

GILORT (Oltenia). Absolvent Guşiţă Marcel (4576, 80, 86, 614, 16, 17, 20, 21, 24, 25, 27, 31—33).

GIURGIU (Bucureşti). Absolvent Jugureanu Rodica (4575, 77, 79, 81, 86, 91, 93, 99, 603, 07, 18—23, 30, 32, 34, 38, 44, 61, 67, 89, 91, 95, 97, 99, 701—03, 07, 09). Cl. VIII. Daia Emilia (E: 1621, 23, 27, 31, 47, 48, 57, 62, 67, 68, 70, 71), Perşoiu Geraldina (4575, E: 1633, 34, 37, 42—44, 46, 49—60, 62, 64—68, 70, 71, 77, 81), Velcea Nicolae (E: 1618, 20, 23, 26, 27, 31, 34, 36—38, 43, 47, 48, 53, 57). Cl. X. Soare Dumitru (4575, 77, 81, 82, 91, 95, 604, 12, 14, 15, 17, 18).

GRADIŞTE (Bucureşti). Cl. VII. Ţintea Ştefan (E: 1637, 48, 54, 55, 59, 62, 67, 68, 70, 75).

GURA HUMORULUI (Suceava). Cl. V. Mitric Maria (E: 1617, 23, 26, 27, 31, 33, 34, 37, 38, 41, 48, 53, 58, 59, 62, 65, 67—70, 73, 76, 77, 80—85). Cl. VIII. Duicu Adrian (E: 1661, 62, 65, 67—69, 73, 76, 77, 80—83), Juni Peter (E: 1618, 20, 21, 23, 26, 27, 37, 42, 52, 56), Prelicz Carol (E: 1617, 18, 20, 21, 23, 27, 28, 31, 37, 42, 44, 48, 51, 54—56, 58, 60). Cl. X. Coroliuc Vasile (4503, 04, 06, 09, 10, 27, 56). Cl. XI. Duicu Mărgărit (4435, 45, 50, 68, 69, 615, 24—26, 28, 29, 32, 33, 53, 62, 65, 73, 705, 09, 10, 11).

HALEŞ (Ploieşti). Şc. de 7 ani nr. 1. Cl. V. Mazilu Iancu (E: 1600, 04, 10, 13, 17, 26, 27, 31, 53, 55). Cl. VI. Stanciu Cornelia (E: 1634, 42, 48, 51, 54—56, 58—70). Cl. VII. Cîmpeanu Angela (E: 1620, 48, 53—55, 62, 65, 67, 68, 70). Lovin Georgeta (E: 1620, 38, 42, 54, 62, 65, 68—71), Mazilu Elena (E: 1647, 53, 54, 59, 62, 65, 67—70), Negulescu Elena (E: 1637, 42, 47, 57, 59, 62, 65, 57—70), Nistor Viorica (E: 1607, 11, 17, 18, 20, 22, 26—28, 31, 37, 44), Stanciu Nicoleta (E: 1649, 53, 59, 62, 65, 67—70, 73), Vişan Victoriţa (E: 1652—57, 59, 62, 65, 67, 68, 70), Zîrnea Elena (E: 1648, 53—57, 59, 62, 65, 67—70).

HÎRLĂU (Iaşi). Cl. VII. Colbu Cornelia (E: 1617, 18, 20, 21, 23, 31, 42—44, 48, 55—58).

HAŢEG (Hunedoara). Cl. V. Maftei Nicolae (E: 1617, 26, 27, 31, 37, 42, 44, 48, 53, 58). Cl. VIII. Petriu Emil (4516, 19, 75, E: 1617—29, 48—60).

HOREZU (Argeş). Cl. VI. Popa Gheorghe (E: 1617, 20, 22, 30, 37, 43, 53—56, 60, 62, 65, 68, 69). Cl. VIII. Bălan Valerian (4614, E: 1637, 38, 42—44, 52, 53, 57, 62, 67—70), Cîrstoiu Victoria (E: 1637, 41, 47—49, 52, 53, 57, 59, 64, 68, 70), Cojocaru Justin (E: 1617, 27, 31, 33, 34, 37, 41, 48, 53, 68), Costescu Ion (4604, 14, E: 1637, 43, 50, 52, 53, 55, 57, 59, 60, 64, 66—68, 77, 79, 80, 81), Desrobitu Simion (E: 1642—44, 47, 52, 53, 55—59, 67, 68, 70, 73), Dobre Elisabeta (E: 1637, 44, 48, 49, 52, 54, 55, 62—64, 68, 70), Filip Ileana (E: 1637, 44, 49, 52, 57, 62, 64, 68, 70, 71), Moţa Constantin (E: 1632, 42—44, 52, 59, 63, 64, 68, 70), Neacşu Paraschiva (E: 1637, 44, 48, 49, 52—54, 57, 62—64, 68, 70, 71), Presura Bircu (4614, 15, 17—20, 24—28, 31, 33), Rachieru Veronica (E: 1637, 44, 48, 49, 52, 53, 57, 59, 62—64, 68, 71), Rădoi Gh. (E: 1637, 42, 43, 48, 53, 57, 59, 67, 68, 70, 71), Sîrdărescu Gh. (E: 1656, 57, 59, 62, 64, 67, 68, 70, 71,

77, 80, 81), Ştefan Petre (E: 1617, 21, 37, 38, 42—44, 52, 57, 59, 67, 68, 70). Cl. X. Cocioabă Vintilă (4505—07, 09, 10, 17, 19, 22, 31, 33, 36—43, 56), Frumuşelu Emil (4505, 06, 09, 10, 39, 62, 75, 80, 84, 603), Iliescu Ion (4503—06, 09, 10, 16, 18, 19, 22, 23, 27, 31, 34, 40, 614—16, 18, 20, 24, 26, 28, 29, 31, 33, 46, 75, 80, 85), Răbocică Ion (4614—19, 24—28, 31, 33). Cl. XI. Tănăsescu Miron (4503—07, 09, 10, 13, 16—19, 22—24, 26—28, 30, 31, 33, 36—43, 45, 49—51, 55—57, 59, 61—63, 66, 68, 71—75, 77, 80, 81, 83—85, 91—93, 95, 96, 600, 02—08, 10, 14—33, 35, 38, 44, 46, 49, 50, 59, 61—63, 67—70, 72, 77, 79, 83, 84, 86, 89, 91, 93, 97—99, 701—03, 05, 08—11, 14, 16—19, 25—27, 29—35, 39—41, 43, 47—49, 53, 55, 58, 64, 65, 67—70).

HUEDIN (Cluj). Cl. VIII. Jichici Sinişa (4614, E: 1651, 53—55, 67, 70, 76, 77, 80, 81), Pozar Ioan (4625, E: 1637, 43, 49, 53, 62, 65, 67, 68, 70).

HUNEDOARA. Cl. VI. Pascu Petru (E: 1648, 53—56, 62, 67, 68, 70, 77, 81). Cl. X. Cuş Ioan (4546, 52, 63, 66, 70, 72, 75, 77, 79—83—85, 90, 91, 96, 98, 600, 04, 07, 10, 11, 14, 15, 17—20, 24—33, 35, 38, 45, 50, 63, 68—70).

HUŞI (Iaşi), Absolvent Dolteanu Temistocle (4503, 05, 06, 09, 10, 17, 20, 22, 29—31, 33, 35, 36, 38—40, 42, 43, 47, 75, 77, 80, 82, 84, 91, 95, 603, 05, 07, 10, 12, 14, 15, 17, 18, 20, 22, 24—30, 32, 33, 38). Cl. XI. Estate Mihai (4500, 09, 10, 22, 33, 40, 43).

IABLANIŢA (Banat). Cl. VI. Blidaru Stana (E: 1633, 37, 41, 48, 51, 53—56, 58, 59).

IANCA (Galaţi). Cl. IX. Ionel Ecaterina (4577, 81, 604, 10, 14—16, 24, 25, 31).

IAŞI. Studenţi: Gîlmeanu Vasilaş (4614, 15, 17—21, 23, 24, 26—28, 30—33, 35, 36, 38, 40, 41, 45, 46, 48, 50, 51, 57, 61, 63, 68), Gurămultă V. Ion (4419, 20, 23, 24, 28, 29, 35, 44, 47, 52, 53, 55, 59—61, 63, 64, 71—75, 78, 80, 82—84, 90, 96, 9, 500, 02, 05—07, 09, 10, 17—19, 23, 30, 31, 33, 37—40, 42, 43, 46, 47, 51, 56, 59, 61, 70, 73, 75—78, 80, 81, 86, 88, 91, 93, 97, 601, 02, 04, P).

Absolvent Matei Dragoş, (4499. 505, 06, 09, 10, 17, 19, 22, 31, 33, 35, 37, 40, 42, 43, 46, 61, 62, 65, 68, 73—76, 78, 80—82, 84, 86, 91, 95, 97, 602, 04, 06, 07, 14, 15, 17, 19—22, 24—33, 36, 38, 44, 46, 51, 61—63). Ş.m. 1 Mihail Sadoveanu. Cl. VII. Cernea Gigi (E: 1642, 47, 48, 52—58, 60). Cl. IX. Iţicescu Lazaroni (4575, 77, 601, 04, 15, 24—29, 33, 59, 63, 72, 701). Cl. XI. Banacovski Ioan (4501, 03, 04, 10, 11, 22, 39, 49, 55, 59, 61—63, 66, 75, 85, 96, 97, 631, 38, 39, 58, 59, 62, 63), Caceaunov Claudia (4501, 03, 04, 10, 19, 27, 39, 43, 49, 55, 61—63, 66, 75, 79, 85, 96, 607, 11, 33, 38, 59, 63). Ş.m. 3 C. Negruzzi. Cl. V. Liacu Mihai (E: 1617, 20, 27, 77, 81), Popa Eugen (E: 1617, 20, 27, 31, 37, 48, 56, 57, 59, 60). Cl. VI. Simionescu Bogdan (E: 1637, 47, 48, 51, 53—56, 67, 68, 70). Cl. IX. Ganciu Teohari (4500, 01, 07, 09, 17, 19, 33, 35, 39, 43, 44, 46, 47, 52, 61, 64, 70, 73, 84, 604), Pintilie Ioan (4508, 09, 17, 30—35, 37—39, 42, 43), Serţer (4500, 01, 06, 17, 19, 33, 38, 39, 41, 43). Topan Emil (4500, 01, 08, 09, 17, 33, 35, 37, 39, 43, 46, 51, 52, 56, 61, 75, 77, 80, 84, 91). Cl. XI. Gaigniski Radu (4499—501, 05—07, 09, 17, 18, 31, 33, 37—40, 43, 62, 73—76, 78, 80—82, 84, 86, 93, 97, 602, 06, 10, 14, 15, 17, 20—28, 30—33, 61). Meglei Vasile (4575, 78, 80, 81, 84, 86, 99, 602, 10, 14, 15, 17, 24, 25, 33), Pavel H. Nicolae (4575—78, 80—82, 84, 86—88, 91, 93, 95, 97, 99, 601, 02, 06, 07, 09, 10, 14—34, 36—41, 43, 44, 46, 48, 51, 52, 54, 55, 57—59, 61—63, 65, 66, 70, 72, 73, 75, 81, 87—91, 93, 95—97, 99, 701—04, 07, 08. 13—15). Ş.m. 4 G. Ibrăileanu. Cl. VIII. Georgescu Marieta (4516, 17, 19, 43, E: 1617—25, 25—31). Ş.m. 5 Mihail Eminescu. Cl. VIII. Matran Maria (4601, 04, 14, 24, 25, 58, 59, E: 1637, 38, 43, 47—49, 52, 53, 56—60, 64, 67, 68, 70, 71, 75—77, 81, 83). Rogobete Gabriela (E: 1600, 05, 08, 10, 11, 16—18, 20, 21), Zamfirescu Silvia (4604, E: 1648, 52, 53, 56, 57, 59, 67, 68, 70). Ş.m. 6 Vasile Alecsandri. Cl. VIII. Schwartz Jerry (4614, 15, 59, E: 1645—47, 50, 52, 56, 57, 60, 64, 66, 71, 75), Thirer Nonel (4519, 614, 15, 25, 28, 33, 59, 701, 02, 14, E: 1648—60 62, 70, 76—84). Ş.m. 7. Al. Ion Cuza. Cl. V. Burduja Gh. (E: 1651, 54, 55, 58—60, 68—70, 73). Cl. VIII. Apetrei Aurica (4575, 91, 614, 15, 25, 26, 29, 33, 59, 63, 70, 93), Joandrea Adrian (4575, 91, 614. 15, 25, 26, 29, 33, 59, 63, 93, 701), Melinte Elena (4575, 91, 614, 24, 25, 26, 29, 33, 59, 63, 93, 701, E: 1668, 70), Mocranski Geta (4575, 91, 614, 24—26, 29, 33, 59, 63, 68, 70, 93, 701), Cl. IX. Grimberg Ilie (4575, 81, 83, 85, 90, 610, 14, 15, 17, 26, 28, 35, 45, 46, 50, 63, 68), Sulimovici Z. (4575, 614, 25, 26, 29, 33, 59, 63, 93).

Şc. de 7 ani nr. 19. Cl. V. Popa Eugen (4625, 33, E: 1641, 51, 54, 55, 62, 67, 68, 70, 73). Cl. VI. Baraboi Adrian (E: 1637, 38, 42, 44, 48, 53, 56, 65, 68, 70).

INEU (Crişana). Ş.m. Cl. XI. Condrea Vasile (4551, 75, 97, 602, 05, 26, 59, 61, 63, P).

LIPOVA (Banat). Ş.m. Cl. XI. Mihalca Ioan (4547, 49, 62, 73, 75, 77, 84, 602, 14, 21).

LONEA (Hunedoara). Cl. IX. Teleancă Pavel (4509, 33, 36, 37, 39, 43, 61, 75,

84, 604). Cl. XI. seral. **Grozavu Mihai** (4499—501, 05, 06, 08—11, 17, 22, 23, 33, 35, 38, 39, 41—43, 45, 46, 48, 49, 54—56, 60—63, 66, 68, 72—75, 77, 78, 80, 81, 86, 88, 91, 95, 97, 99, 601. 02, 05, 10, 12, 14—17, 19—28, 30—33, 35, 38, 39, 44, 58, 59, 61—63, 65—67).

LUGOJ (Banat). Lt. Major **Pupăzan Nicolae** (4581, 84, 91, 93, 99, 602, 04, 07, 10, 14, 15, 17, 18, 20, 21, 24—29, 31, 33, 36, 38, 41, 43, 44, 46, 48, 51, 57, 61—63, 65, 73, 75, 90).

Ş.m. 1. Cl. VII. **Brînda M. Rodica** (E: 1600, 02—05, 07, 09, 10, 15—29, 31, 34, 36, 38, 41—46, 48, 49, 51, 53—60). Cl. VIII. **Cimponeriu Traian** (4519, 601, 04, E: 1617—23, 25, 28, 29, 31, 34, 37, 38, 41—56, 58—60), Daba Dan (4503, 17, 19, 20, 43, 45, 48, 56, 61, 75, 77, 84, 88, 90, 91, 601, 04, 10, 14, 24—26, 28. 29, 33, 46, 58, 63, 72, 73, 93, 97, 700, 02, 08, 18, 74, E: 1617—25, 27—29, 31, 32, 37, 38, 42—44, 46—50, 52—71, 75—77, 79—81, 83, 85, 86), Lăzărescu Mircea (4568, 69, 708, E: 1648—60, 62, 64, 67—70, 70, 71). Muraru Ioan (E: 1617, 18, 20, 21, 23, 28, 31, 37, 42, 43, 47, 50, 51, 54—56, 60), **Popovici I. Mariana** (4575, 77, 81, 614, 24—26, 28, 629, 63, 72, 73, 700, E: 1638, 41, 43—45, 51, 53—60, 62—68, 70, 71, 73, 75—81), **Vasiliu Dan** (4517, 19, 20, 43, 56, 61, 75, 77, 84, 88, 91, 601, 04, 14, 15, 24—26, 28—30, 32, 33, 36, 46, 59, 63, 72, 73, 93, E: 1617, 18, 20, 21, 23, 24, 26, 27, 29, 31, 32, 34, 37, 38, 42—44, 47, 50, 53—60, 62—64, 66—68, 70, 71, 75, 77, 80, 81, 85). Cl. X. Boldea Ion (4535, 41, 44, 46, 50, 52, 55, 56, 59, 61—65, 70, 72, 75, 77, 79—85, 88, 90, 91, 95, 96, 99, 600, 03, 04, 07, 10, 12, 14, 15, 17, 18, 25, 38). Cl. XI. **Popa Dorina** (4499, 500, 04—07, 09, 16, 19, 27, 31, 35, 37, 39, 43, 46, 48, 52, 55, 62, 64, 66, 70, 73, 75, 77, 78, 80—82, 84—86, 91, 97, 600, 01, 04, 07, 10, 14, 15, 17—33, 72, 88, 91, 93, 95, 97, 701—03, 05, 09, 11, 18, 31, 34, 35, 42), **Sfetcu Ioan** (4403, 16, 21, 22, 24—27, 37, 38, 41—45, 47, 48, 52—57, 61, 67, 69, 70, 72, 74, 75, 77—79, 83, 84, 86—88, 90, 91, 93, 95, 97, 99, 502—11, 14, 16, 20, 23, 24, 26—28, 31—33, 35, 37, 38, 40, 43, 44, 46, 48—50, 52, 54—56, 60, 62, 63, 66, 70, 72, 73, 75—83, 85, 86, 88, 92, 93, 95, 97, 600, 02, 03, 05—07, 10—13, P).

MEDIAŞ (Braşov). Cl. VIII. **Brădişteanu Adrian** (E: 1636, 37, 42, 48, 52—60, 67—71, 77, 80, 81, 89, 92). Cl. X. Pancu Adrian (4546, 56, 61, 62, 68, 75, 77, 84, 95, 614, 38). Cl. XI. Ifrimela Ştefan (4546, 56, 61, 68, 75, 77, 81, 95, 603, 07, 12, 14, 17, 25, 38, 41, 54, 59, 63, 70, 87, 93, 97, 99).

MOINEŞTI (Bacău). Cl. X. **Aniţoaiei Emil** (4499, 506, 08, 09, 19, 22, 39, 75, 81, 610).

NĂSĂUD (Cluj). Ş.m. **George Coşbuc**. Cl. IX. Acu Dumitru (4546, 75, 84, 614, 17, 25, 26, 28, 29, 33).

OCNA MUREŞ. Cl. IX. **Horovitz Ossi** (4575, 81, 84, 614, 17, 26, 27, 29, 33, 701—03).

ODOBEŞTI (Galaţi). Cl. VII. **Păncescu Adriana** (E: 1618, 20, 23, 37, 43, 47, 48, 50, 52, 53, 56, 60). Cl. XI. **Păncescu Paul** (4499, 503, 06—10, 17, 19, 22, 31, 33, 35, 38, 40, 43, 46, 56, 59, 68, 84, 85, 87, 88, 91, 99, 604, 07, 09, 10, 12, 14, 15, 17—20, 24, 26, 38, 40, 41, 48, 54, 62, 63, 72, 73, 90, 701—03, 14, 15, 20—22, 24, 25, 29, 34, 55, P).

ODORHEI (M.A.M.). Ş.m. **Dr. Petru Groza** Cl. IX. Venczel Andras (4519, 21, 28, 37, 38, 43).

OLTENI (Bucureşti). Ş.m. cl. VIII. Ionescu M. Ion (E: 1648, 53, 54, 58—60, 67, 68, 77, 80, 81, 84).

ONEŞTI (Bacău). Ş.m. Cl. IX. **Andrei Iulia** (4537—39, 43, 46, 52, 61, 70, 75, 77). Cl. X. Popa Octavian (4575, 80, 81, 84, 91, 601, 12, 14, 15).

ORADEA (Crişana). Ş.m. 1. Cl. VII. **Borcia Sorin** (E: 1617—23, 25, 27, 28, 31). Cl. VIII. **Wald Robert** (4575, 85. 614, 15, 17, 24, 26, 28, 29, 33, 35, 47, 58, 59, 68, 72, 86, 94, E: 1648—60, 62—70, 72—77). Cl. IX. **Dragomir Toma** (4604, 10, 14, 20, 24—29, 31—33, 35, 36, 40, 41, 46, 48, 52, 57—59, 63, 65, 68, 90. 93, 97, 701—04, 09, 15, 17, 20, 38, 49, 51, 63). Cl. X. Romocea Teofil (4575, 77, 81, 614, 17, 20, 25—30, 33, 63). Cl. X seral, Prodan Vasile (4614, 15, 17, 18, 20, 24, 26—32, 72, 75, 81). Cl. XI. Pascu Nicolae (4575, 78, 80, 81, 84—86, 89, 600, 14, 15, 21, 26—29, 32, 33, 38, 63, 68, 69, 86, 702, 05, 09, 11).

Ş.m. 4. Cl. VIII. **Ionescu Alina** (4614, 32, E: 1600, 21, 23, 27, 37, 46, 52—54, 56—71, 77, 80, 81, 83).

ORŞOVA (Banat). Ş.m. Cl. VI. **Muraria** Ion (E: 1617, 20—22, 24, 26, 28, 37, 42, 51, 55).

OŢELUL ROŞU (Banat). Ş.m. Cl. VII. Năvligu I. Vasile (E: 1617, 20, 21, 23, 31, 37, 38, 42, 48, 54—59), Roibu Emilian (E: 1617, 43, 45, 47, 54. 56, 65, 68, 70, 71).

PANCIU (Galaţi). Ş.m. Cl. XI. Spătaru Ion (4510, 601, 14, 15, 24—29, 33, 38, 63, 72, 73, 97, 701—03, 08).

PAROŞENI (Hunedoara). Cl. VIII. **Pătraşcu Romeo** (4614, 15, 17, 24, 26—28, 63, 68, E: 1637, 43, 45, 47, 57, 59, 66, 68, 70, 75). Cl. IX. Calcup Ioan (4552, 66, 75, 77, 600, 600, 11).

MUZEUL NATIONAL SZÉKELY DE ETNOGRAFIE 1883

PAȘCANI (Iași). Ș.m. C. Burcă. Cl. X. Croitoru Mihai (4575, 603, 14, 15, 18—20, 24, 27—30, 32, 33, 33, 40, 63), Rusu Mircea (4575, 603, 14, 15, 18, 20, 24, 27—30, 32, 33, 38, 41, 63), Tverdohleb Virgil (4575, 81, 84, 614, 15, 17, 18, 24—29, 32, 33). Șc. de 7 ani Bălțați. Cl. VII. Azoiței Vasile (E: 1642, 43, 48, 49, 51—60, 67, 68, 70, 71), Ciobanu Elena (E: 1643. 52—57, 62, 67, 68, 70).

PETROȘANI (Hunedoara). Cl. V. Popa Lucia (E: 1617, 20, 23, 26, 27, 31, 34, 36—38, 42, 48, 51, 53, 54, 56, 58—60, 62, 65, 67—70, 73, 76—78, 80, 81), Lepădatu Ion (E: 1618, 21, 23, 27, 29, 31. 32, 33, 37, 43, 45—47, 57), Popa Radu (4503, 09, 16, 19, 27, 43, 81, 85, 91, E: 1585, 88, 600, 17—32, 34, 36—38, 41—43, 45—48, 50—60).

PIATRA NEAMȚ (Bacău). Ș.m. 1 Petru Rareș. Cl. VII. Todicescu Georgeta (E: 1618, 23, 24, 27, 32, 45—48, 52, 57, 59, 60). Cl. VIII. Gașparie Călin (E: 1633, 38, 43, 45, 47, 50, 52—59, 66, 91). Cl. IX. Braște Ștefan (4505, 06, 08, 09, 33, 43, 61, 75, 77, 80, 81, 84, 91, 610, 14, 26, 27, 33, 63).

Olimpiada de matematică și fizică 1962 pentru elevii școlilor medii, profesionale, tehnice de maiștri și pedagogice se desfășoară astfel:

Etapa locală: 11 februarie 1961 la matematică și 18 februarie la fizică,

Etapa regională: 23—25 martie la matematică și fizică,

Etapa finală: 10—13 iunie, în București.

Rezolvitorii de probleme care au fost evidențiați cel puțin de două ori în nr. 1—11 din G.M.F.-B, sînt rugați să trimită redacției cîte un tabel din care să rezulte totalul problemelor anunțate în această revistă la rubrica rezolvitori. La premierea rezolvitorilor pe anul 1961 se va mai ține seamă de clasa pe care a urmat-o rezolvitorul, de modul de redactare și de calitatea soluțiilor trimise. Se va mai menționa pe fișa trimisă, dacă elevul sau studentul evidențiat a trimis în 1961 probleme propuse, note, dări de seamă sau articole și pagina la care s-au publicat.

Școlile medii care au avut evidențiați sau cercuri de elevi, pot participa la întrecerea pe anul 1961 și sînt rugate să trimită fișa cu totalizarea punctelor obținute pînă în prezent, conform regulamentului publicat în G.M.F.-B, pag. 97, nr. 2, 1961. Se va mai specifica și numărul de clase a VIII-a, a IX-a, a X-a reală și a XI-a reală care au funcționat în anul școlar 1960—61 în școală.

Fișa poate fi întocmită de profesorii sau elevii responsabili de cercuri.

Școlile medii pot procura pentru bibliotecile lor cîte 100 exemplare diferite din G.M.F.-B începînd cu anul 1952, trimițînd prin mandat poștal suma de 170 lei pe numele S.S.M.F. din Str. Academiei 14, contul 070 004 la B.R.P.R., filiala Lenin, București.

ERATA — La nota din GMF-B nr. 9/1961, pag. 536 și 537, în loc de pi, ai, ni, $n1$ se va scrie p_i, α_i, n_i, n_1.

La pag. 535 rîndul 8 de jos, în loc de x^{α_i} se va scrie x^{α_i}.

— La problema 4625 în loc de $-2ax$ se va scrie $+2ax$

— La problema 4690 în loc de $abcd : 6$ se va scrie $abcd : 3$

— La problema 4812 în loc de $3^{2n} \cdot 5^{2n}$ se va scrie $3^{4n} \cdot 5^{2n}$.

— La problema 4864 în loc de $A + B$ se va scrie $A - B$; și se va adăoga: unde $N = \mathfrak{M}\, A - B$.

— Fiecare abonat este rugat să facă cunoscută Gazeta matematică și Fizică seria B și altor colegi care nu sînt abonați, îndemnîndu-i să se aboneze pe anul 1962.

— Pentru ca abonații să poată primi la timp numărul 1 din 1962 al G.M.F.-B, sînt rugați să se aboneze pînă la 30 noiembrie 1961. Costul unui abonament este de 18 lei pe anul 1962 (12 numere) pentru elevi și profesori.

Abonamentul se poate face prin oficiile poștale locale, prin factorii poștali sau prin difuzorii voluntari.

CĂTRE REZOLVITORII DE PROBLEME

Corespondenții care ne trimit probleme rezolvate trebuie să redacteze fiecare problemă separat, însoțind-o de toate calculele necesare și de figuri desenate cu îngrijire. Nu se vor trimite soluțiile mai multor probleme pe aceeași foaie. Problemele rezolvate de fizică se vor trimite separat, iar pe plic se va scrie: *Pentru redacția de fizică.*

Se primesc lunar cel puțin zece soluții numai la problemele și exercițiile din ultimele trei numere apărute. Pe plic se va scrie localitatea și școala pe care o urmează rezolvitorii, pentru a se evita confuzii la întocmirea rubricii rezolvitorilor de probleme și a listei celor evidențiați. Problemele rezolvate de matematică se vor trimite separat, pe adresa: G.M.F.B., *Redacția de matematică*, altfel nu vor mai fi trecute la rubrica rezolvitorilor.

Problemele care se propun de către colaboratorii revistei să fie clar alcătuite și însoțite de soluții, să fie personale, iar nu luate din cărți sau reviste. Elevii sînt sfătuiți să înceapă a propune probleme numai după ce au rezolvat un număr destul de mare de exerciții și probleme. Problemele propuse, dar necorespunzătoare, nu se pot publica. Dacă un corespondent constată că unele probleme propuse au fost publicate în cărți sau reviste, este rugat să ne arate precis volumul și pagina unde a mai apărut enunțul sau soluția problemei respective.

Corespondentul nostru care a citit și a înțeles deplin multe din soluțiile publicate, a rezolvat multe din problemele propuse, poate și este îndemnat să încerce să schițeze cîte o notă rezultată dintr-o observație făcută cu ocazia rezolvării unei chestiuni mai grele. Aceste note să fie *refăcute de mai multe ori înainte de a fi trimise*, pentru ca redactarea lor să fie *cît mai clară și concisă*. Figurile să fie făcute separat. În redactare se vor evita prescurtările. Nu se va scrie: $\| = ; \sim ; *^* ; \perp ; \| ;$ Tr., etc. iar trecerea de la un calcul la altul să fie explicată pentru a se putea urmări ușor desfășurarea unei demonstrații. Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

La publicarea problemelor rezolvate se vor menționa rezolvitorii care au dat o bună redactare și o soluție interesantă, sau mai multe metode de rezolvare.

Tovarășii colaboratori elevi sînt rugați să ne trimită date asupra activității lor extrașcolare la matematică și la fizică, asupra activității cercurilor de matematică și de fizică la care iau parte, pentru ca apoi, prin revistă, să se poată realiza cu succes un schimb de experiență. Dările de seamă concrete se vor publica în G.M.F.B.

Autorii sînt rugați ca la întocmirea articolelor și notelor să țină seama de următoarele: articolele sau notele să fie scrise clar cu cerneală sau dactilografiate la două rînduri și pe o singură parte a foii, figurile să fie desenate îngrijit și pe o foaie separată.

Autorul să semneze clar lucrarea personală pe care o trimite pentru publicat.

— Materialele care nu corespund profilului G.M.F.-B. nu vor fi publicate.

Colecții și numere din anii precedenți

Societatea de Științe Matematice și Fizice din R.P.R., posedă exemplare mai vechi din G.M.F.-B. și G.M.F.-A.

Cititorii noștri își pot procura colecții ca și numere disparate, depunînd banii la poștă prin mandat poștal pe numele Societății de Științe Matematice și Fizice, strada Academiei nr. 14, contul 070.004 la B.R.P.R., filiala Lenin.

Prețul unui exemplar este de lei 3 pentru G.M.F.-A și de lei 1.50 pentru G.M.F.-B. Cheltuielile de transport sînt de 0,20 lei de exemplar.

Din G.M.F.-B. se pot procura complet anii: 1952, 1953, 1955, 1957—1960.

ABONAMENTE — Societatea de Științe Matematice și Fizice din R.P.R. primește abonamente la oricare din publicațiile sale.

a) Pentru instituții, școli, biblioteci la prețul de lei 60 anual, pentru fiecare din periodicele sale: G.M.F.-A, G.M.F.-B, M.F.L., Bulletin Mathématique și 40 lei anual la „Mathematica".

b) Pentru profesori și elevi la prețul de 18 lei la G.M.F.-B sau M.F.L. de 36 lei la G.M.F.-A, de 60 lei la Bulletin Mathématique și de 40 lei la „Mathematica".

— Fiecare abonat este rugat să facă cunoscută G.M.F.-B și altor colegi, pentru a face abonamentele din vreme în vederea planificării tirajului lunar.

În cursul lunii noiembrie a.c. se poate face abonamente la G.M.F.-B pe anul 1962 începînd cu nr. 1.

— Abonamentele se pot face individual sau colectiv prin oficiile poștale locale sau prin factorii poștali.

Litografia și Tipografia Învățămîntului. — c. 2068

Lei 1,50

E 1426

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE
DIN R. P. R.

GAZETA MATEMATICĂ ȘI FIZICĂ

(SERIA B)

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul XII decembrie 1961

12

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

(SERIA B)

Anul XII, nr. 12 decembrie 1961

SUMARUL

	Pag.
1. Din istoria calculului diferenţial şi integral de H. Riemer.	705
2. Fenomene şi principii care stau la baza opticii geometrice, de N. Stănescu	713
3. Probleme de maxim şi minim în fizică şi tehnică de E. Deutsch	723
4. Note matematice de Ghica Anton şi A. Deutsch . . .	734
5. A treia olimpiadă internaţională de matematică de Gh. D. Simionescu	736
6. Olimpiada de matematică şi fizică 1962	739
7. Concursul de matematică, mecanică şi fizică pentru studenţi 1961	742
8. Probleme rezolvate (4490, 4498, 4508, 4515, E: 1613 1615, 1628)	743
9. Chestiuni de examen (5015—5029)	748
10. Probleme propuse (5030—5066)	750
11. Exerciţii şi probleme propuse pentru clasele V—VIII (E: 1763—1774)	756
12. Rubrica rezolvitorilor de probleme	757
13. Tabla de materii a G.M.F.—B pe anul XII, 1961 . . .	763

ANUL XII **12** DECEMBRIE

O parte din materialele publicate în acest număr a fost asigurată de către filiala Suceava a Societăţii de ştiinţe matematice şi fizice din R.P.R.

COMITETUL DE REDACŢIE

Atlincăi M., profesoară; *Atanasiu V.*, conf. univ., redactor pentru fizică; *Boangiu D.*, lector; *Ionescu-Bujor C.*, prof. univ.; *Ionescu-Tiu C.*, profesor, redactor pentru matematică; *Manolescu St.*, profesoară; *Muşat I.*, profesor; *Petrovanu A.*, profesor; *Sacter O.*, conf. univ., redactor şef; *Simionescu D. Gh.* conf. univ.; *Csiki Zoltan*, asistent.

REDACŢIA: Str. Academiei, 14 — Tel. 14.46.53 — Bucureşti 1

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar putea interesa redacţia noastră se vor trimite pe adresa de mai sus.

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ
(SERIA B)
PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET
Anul XII, nr. 12 decembrie 1961

DIN ISTORIA CALCULULUI DIFERENŢIAL ŞI INTEGRAL

de *H. RIEMER*, profesor Suceava

1. Etape mari în istoria matematicii. După periodizarea istoriei matematicii făcută de A. D. Alexandrov *, în istoria matematicii distingem cîteva etape importante. Prima, care începe încă din orînduirea comunei primitive şi durează pînă prin secolul V î.e.n. este perioada acumulării primelor noţiuni matematice şi a constituirii matematicii ca ştiinţă autonomă. Aceste noţiuni s-au format printr-un început de abstractizare, sub imperiul unor necesităţi materiale ale omului, în procesul muncii, adică în cadrul acţiunii omului asupra mediului înconjurător. În această perioadă, se obţin o serie de cunoştinţe de geometrie în legătură cu măsurarea pămîntului şi cu anumite construcţii, precum şi unele elemente de calcul aritmetic, de asemenea strîns legate de măsuri geometrice. Propoziţiile matematice nu se demonstrează ; ele nu formau un sistem închegat, deductiv.

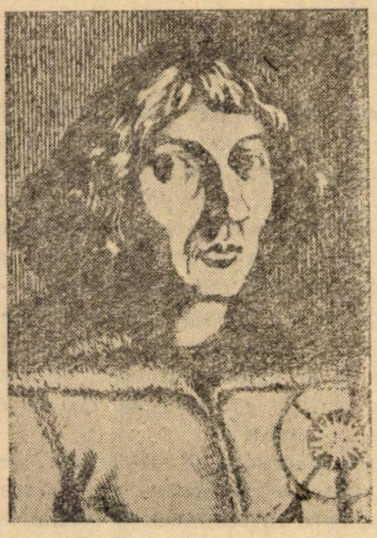
Perioada cuprinsă între secolul V î.e.n. şi secolul XVII (cca. 2 milenii) este perioada constituirii treptate a aşa numitelor matematici elementare (aritmetica, algebra, geometria şi trigonometria care se studiază în şcoala medie). Obiectul matematicilor din această perioadă îl constituie mărimile constante, mulţimile de obiecte şi figurile geometrice. În secolul V î.e.n., geometria realizează un progres însemnat ; adevărul geometric se demonstrează pe cale logică ; prin „Elementele lui Euclid" (sec. III î.e.n.) geometria devine un sistem închegat. Propoziţiile se prezintă într-o înlănţuire în care fiecare este pregătită de altele. Primele propoziţii, axiomele, fiind admise ca adevărate pe baza experienţei multimilenare a omenirii. Începînd chiar de aici, se observă că dezvoltarea acestei matematici este determinată pe de o parte de problemele ridicate de necesităţile materiale ale societăţii, pe de altă parte de nevoile interne de dezvoltare a ştiinţei matematice, care se cere mereu completată şi judicios închegată.

Spre sfîrşitul evului mediu, înlocuirea treptată a orînduirii feudale prin noul mod de producţie, cel capitalist, a fost însoţită de mari explorări şi descoperiri geografice. Descoperirea Lumii Noi de către Columb în 1492 a extins considerabil lumea cunoscută pe atunci şi a produs o revoluţie în mintea oamenilor luminaţi. Pe lîngă succesele uluitoare în artă ale lui Leonardo da Vinci, Rafael, Michel Angelo, asistăm şi la creaţii epocale în ştiinţă. Dezvoltarea navigaţiei de cursă lungă cerea cunoştinţe ample de astronomie. Opera lui Copernic[1]) „Despre revoluţiile sferelor

* Academia de Ştiinţe a U.R.S.S., Matematica — conţinutul, metodele şi importanţa ei, Ed. Ştiinţifică 1960.

[1]) Nicolai Copernic (1473—1543).

cerești", publicată în 1543, a modificat radical aspectul astronomiei. Lucrările lui Kepler[2]) „Noua Astronomie" (1609) și „Armonia lumii" (1618) cuprindeau legile mișcării planetelor în jurul soarelui, care arătau între altele că traiectoriile mișcărilor sînt niște elipse. Făcînd observații cu luneta pe care și-a construit-o singur, Galilei[3]) a descoperit fapte noi și importante în astronomie, cu privire la Lună, Venus, Jupiter, Calea Lactee. Tot Galilei a stabilit în mecanică, că traiectoriile centrelor de greutate ale corpurilor aruncate, fie că sînt pietre sau ghiulele de tun sînt parabole (bineînțeles,



Nicolai Copernic (1473—1543).

Galileo Galilei (1563—1642).

într-o primă aproximație, făcînd abstracție de rezistența aerului); Pascal[4]) a dovedit că presiunea atmosferică descrește cu altitudinea, a studiat presiunea lichidelor, a făcut descoperiri în geometrie și cinematică etc.

În legătură cu problemele de dinamică cercetate de oamenii de știință din acest secol, au apărut atunci în matematică noțiunile de variabilă și funcție, ca o reflectare a mărimilor variabile și a dependențelor din realitatea înconjurătoare (timpul, spațiul, viteza, aria măsurată de un vector într-o mișcare).

În acest proces de abstractizare distingem două etape importante: 1) de la funcții concrete ca $s = v_0 t + s_0$ (drumul parcurs s funcție de timpul t în mișcarea uniformă), $l = l_0 (1 + \alpha t)$ (lungimea l a unei bare funcție de temperatura t de încălzire) etc., la funcția generală $y = ax + b$ și 2) de la funcții generale ca $y = ax + b$, $y = kx^2$, $y = \sin x$ etc., la noțiunea generală de funcție $y = f(x)$ *sau* $f(x, y) = 0$, unde y este o funcție oarecare de x.

Formarea noțiunii de mărime variabilă e legată de apariția în secolul XVII, a două discipline matematice complet noi: întîi geometria analitică,

[2]) Jean Kepler (1571—1630).
[3]) Galileo Galilei (1564—1612).
[4]) Blaise Pascal (1623—1662).

apoi calculul diferențial și calculul integral. Acestea au schimbat calitativ aspectul matematicilor. Ele au constituit instrumente matematice puternice cu ajutorul cărora s-au putut rezolva, destul de ușor, probleme ce erau abordabile mai înainte numai cu ajutorul aritmeticii, al algebrei și geometriei. Începe astfel a treia perioadă în istoria matematicii: perioada matematicii mărimilor variabile.

În ce privește geometria analitică, creatorul ei René Descartes[5]) a avut ideea ingenioasă de a îmbina algebra, geometria și noțiunea generală de mărime variabilă (îmbinarea algebrei cu geometria fusese făcută încă de Arhimede). Astfel de exemplu, într-o ecuație de forma $y^2=ax$, Descartes nu mai consideră pe x și y ca necunoscute care trebuie determinate, cum se făcea pînă atunci, ci le ia drept variabile. În aceste condiții, ecuația $y^2=ax$ devine o „relație" între variabilele x și y. Stabilind o corespondență biunivocă între punctele planului și perechile de valori numerice date lui x și y (coordonatele punctului), Descartes a izbutit să dea relației $y^2 = ax$, semnificația de ecuație a unei curbe anumite; deoarece prin variația valorilor lui x și y (valorile luate trebuind să satisfacă doar condiției $y^2=ax$), punctul corespunzător se mișcă în plan descriind o anumită curbă (în exemplul nostru, o parabolă).

Metoda lui Descartes a avut o influență uriașă asupra dezvoltării ulterioare a matematicii. Engels a subliniat-o spunînd: „mărimea variabilă carteziană[6]) constituie în evoluția matematicii, un punct esențial: datorită ei s-a introdus în matematică, mișcarea și dialectica".

Dar, în timp ce obiectul geometriei analitice continuă a rămîne la figurile geometrice, mărimile variabile însile, funcțiile constituie obiectul de studiu al analizei matematice ale cărei prime două ramuri: calculul diferențial și calculul integral au apărut, după cum am arătat mai sus, în secolul XVII.

2. Probleme mari care au condus la calculul diferențial și integral.

Calculul diferențial și calculul integral au apărut în cursul rezolvării unor anumite probleme. Astfel, problema aflării vitezei la un moment dat, într-o mișcare neuniformă (problemă pusă de mecanică), probleme asemănătoare referitoare la viteza de variație a unor mărimi, precum și problema construirii tangentei la diferite curbe (problemă pusă de geometrie), problema aflării minimului unei funcții, au constituit grupa de probleme care au condus la crearea calculului diferențial.

Problema aflării drumului total parcurs într-o mișcare neuniformă (problemă pusă de mecanică), probleme asemănătoare referitoare la rezultatul global al acțiunii unei mărimi care variază continuu, precum și problema aflării ariilor figurilor curbilinii (problema cuadraturii pusă încă de geometria antichității, dar nerezolvată decît în foarte puține cazuri), au constituit grupa de probleme care a condus la crearea calculului integral.

Se constată că în fiecare grupă de probleme este o problemă de mecanică (aflarea vitezei, respectiv drumului și analoagele lor) și una de geometrie (construcția tangentei, respectiv aflarea ariei). Matematicieni de frunte ai secolului XVII ca Kepler, Descartes, Galilei, Fermat[7]), Cava-

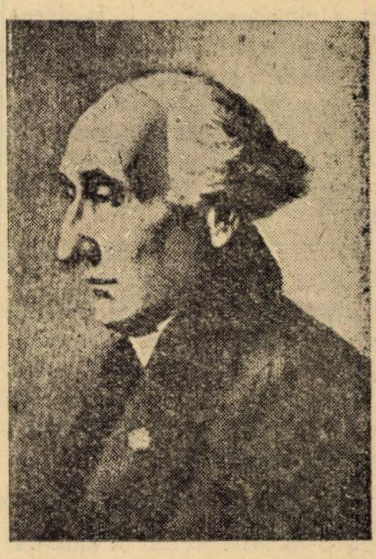
[5]) René Descartes (1596—1650).
[6]) De la Cartesius, numele latin al lui Descartes.
[7]) Pierre Fermat (1601—1665).

lieri[8]). Pascal, Roberval[9]), Toricelli, Huyghens au rezolvat separat problemele de mecanică și separat pe cele de geometrie. Newton[11]) și Leibniz[12]) au meritul uriaș de a fi găsit că un același procedeu, derivarea, servește la rezolvarea tuturor problemelor din prima grupă și că un alt procedeu, integrarea, servește la rezolvarea tuturor problemelor din a doua grupă și că, chiar mai mult, între cele două grupe de probleme există o legătură strînsă : inversa problemei tangentelor rezolvă problema cuadraturilor.

3. Idei pregătitoare.

Dacă acestea au fost problemele care au condus la calculul diferențial și calculul integral, să urmărim acum, mai în amănunt, drumul parcurs.

G. W. Leibniz (1646—1716).



J. L. Lagrange (1736—1813).

I. a) Pînă la Descartes, tangenta într-un punct al unei curbe era definită ca fiind dreapta dusă prin acest punct astfel că nici o altă dreaptă nu poate fi dusă între ea și curbă. Descartes propune o altă definiție, după care tangenta era poziția limită a secantei (noțiunea de limită nu era cunoscută în prima jumătate a secolului al XVII-lea). Ca aplicație, Des-

---

[8]) Bonaventure Cavalieri (1598—1647).

[9]) Gilles Personier de Roberval (1602—1675).

[10]) Evangelista Toricelli (1608—1647).

[11]) Isaac Newton s-a născut la Lincolnshire la 25 decembrie 1642. A făcut studiile între 1661 și 1669 la Trinity College din Cambridge unde a fost apoi profesor între 1669 și 1696. Din 1696 și pînă la moartea sa (1727) a trăit la Londra. A avut contribuții epocale în diverse domenii ale științei. Astfel, în matematică a descoperit calculul diferențial și integral, formula binomului, în optică — descompunerea luminii, în mecanică a descoperit legea gravitații universale ș. a. (vezi articolul apărut în G.M.F.-B nr. 7/1961).

[12]) Gottfried Wilhelm Leibniz (sau Leibnitz) s-a născut la Leipzig la 21 iunie 1646. a studiat matematica, filozofia, teologia și dreptul la Leipzig. A fost un timp în serviciul Electorului de Mayența și apoi al ducelui de Brunswick, ca diplomat, și apoi, timp de 40 de ani, directorul Bibliotecii ducale din Hanovra. A murit la Hanovra în 1716. Pe lîngă meritul deosebit de a fi descoperit calculul diferențial și integral, Leibnitz a mai lăsat scrieri filozofice și literare, dar fără importanță pentru noi.

cartes construia tangenta la o curbă într-un punct dat al ei, astfel: ducea un cerc care trecea prin acel punct și printr-un punct al curbei, vecin cu punctul dat; mișca cercul astfel ca punctul vecin să se apropie de punctul dat; cînd ele se confundau trasa tangenta la cerc. Aceasta era și tangenta la curbă, ea fiind în fond, limita secantei ce trecea prin cele două puncte vecine, comune curbei date și cercului considerat. Fermat, și apoi Lagrange[13]) adoptară această definiție, care este de altfel în circulație și astăzi. Aceeași idee a fost reluată apoi de Barrow[14]), profesorul lui Newton și după el, de Newton și, independent, de Leibniz. Barrow considera o curbă ca limita unui poligon înscris ale cărui laturi tind la zero, iar dreapta suport a fiecărei laturi a poligonului devine, la limită, tangentă la curbă. Această idee a fost folosită de Barrow pentru a construi grafic tangentele la unele curbe. Fie de exemplu, de dus tangenta la parabola $y^2 = 2\,px$ într-un punc. *M al ei.* Barrow consideră un arc *MN* infinit mic, confundat cu latura *MN* a poligonului înscris în parabolă. Segmentele *MM'* și *NN'* sînt ordonatele punctelor *M* și *N* de abscise *OM'* și *ON'*. Segmentele *MA* și *NA* sînt diferențele absciselor, respectiv ordonatelor punctelor *M* și *N*, infinit vecine; din această cauză triunghiul *MAN* este denumit de Barrow „triunghiul diferențial". Triunghiurile asemenea *MAN* și *TM'M* ne dau:

$$\frac{MM'}{TM'} = \frac{NA}{MA} \qquad (1)$$

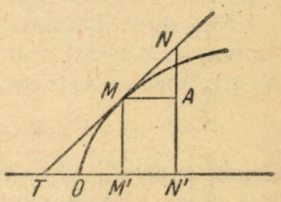


Fig. 1.

Notînd cu $NA = a$ și $MA = e$ avem: *M* (x, y) și *N* $(x + e, y + a)$, iar relația (1) se scrie:

$$\frac{MM'}{TM'} = \frac{a}{e}. \qquad (1')$$

Raportul $\frac{a}{e}$ este denumit de Barrow, pentru prima oară, „coeficientul unghiular" al tangentei *MT*.

Coordonatele punctului *N*, satisfăcînd ecuația parabolei, avem:

$$(y + a)^2 = 2p\,(x + e)$$

sau, după efectuarea calculelor (și făcînd înlocuirea: $y^2 = 2px$),

$$\text{obținem:}\quad \frac{a}{e}(2y + a) = 2p. \qquad (2)$$

În relația (2), termenul *a* din suma din paranteză se neglijează ca fiind un termen infinit mic și (2) devine:

$$\frac{a}{e} \cdot y = p \quad \text{și deci:} \quad \frac{a}{e} = \frac{p}{y}.$$

Astfel, coeficientul unghiular $\frac{MM'}{TM'} = \frac{a}{e}$ al tangentei *MT* este:

$$\frac{a}{e} = \frac{p}{y} = \frac{MM'}{TM'} \text{ cum } MM' = y, \text{ urmează } \frac{p}{y} = \frac{y}{TM'},$$

[13]) Joseph Louis Lagrange (1736—1813).
[14]) Isaac Barrow (1630--1677).

de unde:

$$TM' = \frac{y^2}{p} = \frac{2px}{p} = 2x.$$

Pe baza acestei relații pentru a construi tangenta într-un punct $M(x, y)$ al parabolei, Barrow lua pe axa parabolei segmentul $TM' = 2x$, MT era tangenta căutată.

Pe lîngă definiția tangentei ca limită a secantei, a mai apărut la Roberval, o altă definiție a tangentei la o curbă într-un punct al ei, ca direcția mișcării unui mobil punctiform, care descrie curba, în momentul trecerii sale prin punctul de contact.

b) A doua problemă, a maximului și minimului unei expresii o găsim tratată de Kepler și apoi de Fermat.

În „Stereometria" sa (1615), Kepler făcea observația: „În acele locuri în care se produce trecerea unei mărimi de la valori mai mici la valoarea cea mai mare și, de la aceasta iarăși la valori mai mici, variația valorilor mărimii devine aproape neobservabilă" (în limbajul nostru: în vecinătatea unui maxim al unei funcții *, derivata funcției are valori foarte mici).

Fermat aplică această idee la cîteva exemple făcînd efectiv calculele. Iată un exemplu: Să se împartă un număr dat în două părți astfel ca produsul lor să fie maxim.

Fie, după Fermat, a numărul dat, x și $(a-x)$ cele două părți. Trebuie determinat x astfel ca $y = x(a-x)$ să fie maxim. Îi dăm lui x o altă valoare $(x-e)$, unde e este un infinit mic, și scriem ecuația aproximativă:

$$x(a-x) = (x-e)[a-(x-e)]$$

întrucît expresiile din cei doi membri diferă foarte puțin în vecinătatea valorii lui x, care face maxim produsul $x(a-x)$. Făcînd calculele obținem astfel:

$$e[a-2x+e] = 0.$$

Anulînd termenul care tinde la zero, e din paranteză se capătă: $a-2x = 0$ și deci rezultatul corect: $x = \frac{a}{2}$.

Se constată că în acest stadiu, Fermat utiliza în mod provizoriu, o egalitate inexactă și obținea pînă în cele din urmă, răspunsul just. Această, deoarece în toate cazurile se obținea o sumă egală cu zero; unul din termenii sumei era finit, iar celălalt, care introduce aproximarea, era un număr care tinde la zero și ca atare era anulat spre sfîrșitul calculului **.

2) Problema determinării ariilor și volumelor o găsim tratată în „Stereometria" lui Kepler (cercetările lui în această direcție au fost determinate de practica imediată și anume de a stabili prin calcul capacitatea unui butoi). De altfel, cartea lui Kepler se intitula „Stereometria doliorum", adică geometria în spațiu a butoaielor sau determinarea capacității butoaielor (dolium-i = butoi în limba latină). În această lucrare Kepler folosește într-o formă încă nu suficient explicată, *metoda indivizibililor*. Circum-

---

* Este vorba de funcții regulate — continue și cu derivate continue — singurele care erau obiect de studiu atunci.

** Calculele corecte ar fi: $x(a-x) = (x-e)[a-(x-e)] + \eta$; $(+2x-a-e)+\eta=0$; $e(2x-a-e)+\frac{\eta}{e}=0$ etc.

ferința cercului are atîtea părți cîte puncte are, deci infinit de multe („partes habet totdem, quot puncta puta infinitas" — după M. Cantor, vol. II, p. 824). Cercul este compus dintr-o infinitate de triunghiuri isoscele al căror vîrf comun este în centrul cercului și ale căror baze sînt pe circumferință. Pentru a afla aria cercului, Kepler consideră un triunghi OAB, avînd ca bază AB, porțiunile circumferinței puse una în prelungirea celeilalte, și ca înălțime raza OA. *Toate triunghiurile OAC, OCD, ODE* etc., care alcătuiesc triunghiul OAB sînt echivalente cu triunghiurile isoscele ce formează suprafața cercului, triunghiurile avînd bazele egale (părțile circumferinței) și înălțimile egale (cu raza cercului). Deci, suma ariilor lor, adică aria triunghiului OAB este egală cu aria cercului $\frac{1}{2}AB.OA = \pi R^2$. Pe același principiu se bazează determinarea volumelor făcută de Kepler în aceeași lucrare.

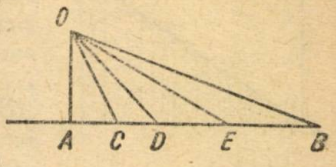


Fig. 2.

Problema determinării ariilor unor figuri mărginite de linii curbe a preocupat și pe geometrii antichității. Ei n-au găsit însă, o metodă generală, ci metode particulare pentru cîteva cazuri aparte. Iată, de exemplu, cum a rezolvat Arhimede[15]) problema aflării ariei unui segment de parabolă. Fie segmentul de parabolă, limitat de coarda AB. Se duce diametrul CC' corespunzător acestei corzi (diametrul corespunzător unei corzi într-o parabolă este o dreaptă paralelă cu axa parabolei și care împarte coarda în două părți egale). Se scoate din suprafața segmentului parabolic suprafața triunghiului ACB; au mai rămas două segmente de parabolă mărginite de corzile AC și CB. Se duc apoi diametrii DD' și EE' corespunzători coardelor AC și CB și se scoate din suprafețele celor două segmente parabolice suprafețele triunghiurilor ADC și CEB. Se continuă astfel procesul pînă ce diferența dintre aria segmentului de parabolă și suma ariilor triunghiurilor scoase devine mai mică decît o arie arbitrar de mică, totuși finită. Din această cauză metoda lui Arhimede era denumită metoda exhaustiei, a scoaterii[16]). În felul acesta la Arhimede, procesul de trecere la limită nu era terminat. Partea nouă la Kepler consta în faptul că el considera dintr-o dată cazul limită al poligonului cu o infinitate de laturi înscris în curbă. În afară de aceasta, după cum am menționat mai sus, metoda lui Arhimede putea servi numai pentru anumite curbe, în timp ce a lui Kepler era generală.

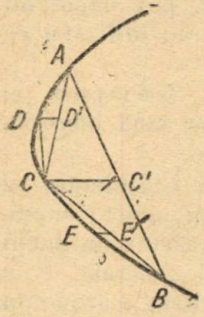


Fig. 3.

După Kepler, matematicianul italian Cavalieri desăvîrșește metoda indivizibililor pe care Kepler o folosise într-o formă rudimentară. Această metodă perfecționată continuu de Cavalieri între 1635 și 1653 se bazează pe ipoteza că orice mărime este divizibilă într-un număr infinit de părți foarte mici care nu se mai pot divide (de aici denumirea de indivizibile) și care pot fi alese uneori ca să existe un anumit raport între ele. Astfel, o linie era considerată ca formată dintr-un număr infinit de puncte (fără dimen-

[15]) 287—212 î. e. n.
[16]) În limba latină: exhario-si-stum = a scoate.

siuni), o suprafață dintr-un număr infinit de linii (fără lățime) și un volum, dintr-un număr infinit de suprafețe (fără grosime). Vom lămuri pe un exemplu foarte simplu în ce constă metoda : Fie de găsit, aria unui triunghi dreptunghic ABC. Ducem în A paralela AD la BC și o mutăm apoi, paralel cu ea însăși pînă se confundă cu BC. Cavalieri numește linia AD care se deplasează, fluens (în latină, „care curge"). Pozițiile intermediare ale dreptei AD (segmentele $A'D'$), corespund cu infinitatea de puncte D' ale segmentului AC, adică totalitatea segmentelor care alcătuiesc suprafața triunghiului ABC; ele sînt elementele indivizibile ale acestei suprafețe, a căror sumă formează suprafața figurii. Din proprietățile figurii rezultă relația între indivizibile. Dacă baza AB este formată din n puncte (indivizibilele liniei), iar BC este formată din na puncte ($a = \operatorname{tg} BAC$), atunci ordonatele punctelor segmentului AC, care au abscisele 0, 1, 2..., n sînt : 0, a, 2 a..., na, deci numere în progresie aritmetică. Suma lor, care este aria triunghiului ABC, va fi așadar :

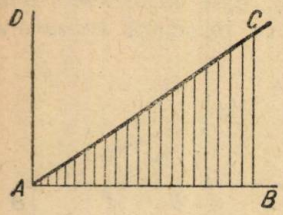


Fig. 4.

$$\frac{0 + na}{2} \cdot n = \frac{n \cdot na}{2} = \frac{AB\ BC}{2}.$$

Metoda indivizibililor, a lui Cavalieri, a fost criticată mult de unii contemporani ai săi îndeosebi de Guldin[17]) ca fiind negeometrică ; totuși prin rezultatele exacte pe care le dădea ea s-a impus în atenția tuturor matematicienilor din Italia, Franța și Anglia, ea constituind un pas important în pregătirea calculului integral. Pascal și Wallis[18]) au utilizat-o cu succes în aplicații.

3) Încoronarea tuturor acestor eforturi a făcut-o Newton și Leibniz, în a doua jumătate a secolului al XVI-lea, atunci cînd lucrurile erau coapte.

Newton admitea că toate mărimile geometrice pot fi considerate ca generate printr-o mișcare continuă : linia — prin mișcarea unui punct ; suprafață prin mișcarea unei linii ; un solid prin mișcarea unei suprafețe ; un unghi plan prin rotația unei semidrepte ș. a. m. d. Mărimea astfel generată, el o denumea *fluentă* sau *cantitate fluentă* și o nota cu x, iar viteza mărimii în mișcare, viteza de variație a fluentei, o denumea *fluxiunea* fluentei și o nota $\dot{x}$, fluxiunea lui $\dot{x}$ sau a doua fluxiune a lui x, o nota cu $\ddot{x}$ ș. a. m. d. (în limbajul nostru, fluenta ar fi funcția, iar fluxiunea, derivata funcției). Newton distingea două feluri de probleme : 1) Fiind dată o relație între fluente, să se găsească fluxiunile", ceea ce echivalează cu diferențierea și 2) problema inversă : „fiind dată o ecuație care arată relația între fluxiunile unor cantități, să se găsească relațiile între aceste cantități sau fluentele", ceea ce revine la integrare, pe care Newton o numește „cuadratură". Newton întrebuința această metodă, probabil încă prin 1666 și a comunicat-o după puțin timp, prietenilor și elevilor său. O expunere completă a metodei a fost făcută însă, de Newton, abia în lucrarea „Tractatus de Quadratura Curvarum" (1693).

---

[17]) Habakuk Guldin (1577—1643).
[18]) Jean Wallis (1616—1703).

Cam în același timp, Leibniz abordează aceeași problemă ; el numește creșterile abscisei și ordonatei „diferență infinit mică", introduce notațiile *dx*, *dy* și simbolul $\int$ iar ceva mai tîrziu, simbolul pentru sumarea indivizibililor. Încă în 1677 el folosea cu succes metoda derivării și integrării în aplicații, însă primul studiu asupra acestei metode îl publică abia în 1684, în revista „Acta eruditorum" [19]) sub titlul *„Nova methodus pro maximis et minimis itemque tangentibus"*.

Datorită faptului că noul calcul răspundea unei necesități reale a timpului, el s-a răspîndit foarte repede în lumea matematică și s-a dezvoltat considerabil în tot cursul secolelor XVIII și XIX. Progresele mecanicii și ale fizicii din aceste secole sînt legate de folosirea instrumentului Analizei.

Întrucît notația lui Leibniz era mai comodă, ea s-a încetățenit peste tot pe continentul european, numai în Anglia s-a folosit notația lui Newton pînă la sfîrșitul secolului al XVIII-lea. A existat o dispută între Leibniz și Newton asupra priorității în descoperirea calculului diferențial și integral, dispută care s-a continuat între adepții lor chiar după moartea celor doi savanți. Este foarte probabil că ei au descoperit acest calcul independent unul de celălalt, cam în același timp. Oricum, chestiunea priorității este fără importanță. Esențial este că a fost descoperit și că a determinat revoluționarea matematicii și rezolvarea cu succes a multor probleme din cele mai variate domenii, care rămăseseră nerezolvate pînă la descoperirea calculului diferențial.

FENOMENE ȘI PRINCIPII CARE STAU LA BAZA OPTICII GEOMETRICE

de *N. Stănescu*, profesor

1. Ce este și cum s-a născut optica geometrică ?

Lumina influențează în cea mai mare măsură activitatea omului și de aceea studiul ei s-a dezvoltat paralel cu tehnica. De la descoperirea focului și pînă în prezent o preocupare constantă a tehnicii a fost și continuă să fie *construirea de instrumente optice*, precum și *perfecționarea tehnicii luminatului*, în scopul creării unor bune condiții de muncă. Prima problemă care a preocupat pe fizicieni a fost cercetarea modului de propagare a luminii, adică o problemă aparținînd *opticii geometrice*.

A doua problemă, a izvoarelor de lumină, a dus în a doua jumătate a secolului al XIX-lea la cercetarea *interacțiunilor dintre lumină și substanță*, adîncind studiul naturii luminii, adică o problemă aparținînd *opticii fizice*.

Cunoștințele noastre despre lumină s-au închegat într-o lungă evoluție istorică, apropiindu-se treptat de adevărul obiectiv, corespunzător cu nivelul științific al fiecărei epoci. Reflexia și refracția luminii erau fenomene cunoscute încă din antichitate. Din Optica lui Euclid (pe la anul 300 î.e.n.) aflăm că în epoca sa se cunoșteau folosirea oglinzilor și legile reflexiei luminii. Ptolomeu (sec. al II-lea al e.n.) încearcă să stabi-

[19]) Apare începînd din 1682 la Leipzig.

lească legile refracției luminii, dar acest lucru va fi realizat abia în secolul al XVII-lea de către Snelius și Descartes. În această vreme burghezia, în ascensiune și în luptă cu feudalitatea latifundiară, era interesată de perfecționarea tehnicii și științei.

Se descoperă astfel luneta, telescopul, microscopul și alte aparate optice, a căror perfecționare necesită o cunoaștere tot mai adîncă a propagării luminii, a razei de lumină.

Natura fizică a luminii a preocupat de asemenea pe fizicieni și a primit soluții care au evoluat de-a lungul veacurilor. Gînditorii antici, exponenți ai societății sclavagiste, disprețuind munca fizică, nu puneau temei pe experiență ca sursă a cunoașterii și ca urmare aveau concepții confuze și naive despre lumină; ei confundau lumina cu senzația vederii. Unii dintre ei, idealiștii, ca de exemplu, Pitagora, considerau vederea ca o consecință a activității ochiului, de la care ar porni raze vizuale, ca un fel de tentacule, care ar pipăi corpurile. Gînditorii materialiști ai antichității, ca Democrit, Epicur și Lucrețiu, considerau vederea ca un efect al activității corpului luminos asupra ochiului. Această concepție se va dezvolta treptat și va duce la formarea concepției despre lumină ca agent fizic independent de gîndirea noastră și *cauză obiectivă a vederii.*

Mult mai tîrziu s-au elaborat teorii unitare ale luminii, care să articuleze într-un sistem logic de gîndire și să explice diferitele fenomene optice, pe baza unui număr restrîns de principii.

Astfel a fost încercarea lui Huyghens (1690) de a fundamenta o *teorie ondulatorie* a luminii, comparînd lumina cu sunetul. Huyghens consideră că lumina constă din impulsuri elastice, care se propagă într-un fluid universal, eterul; acesta ar umple întregul spațiu. Proprietățile mecanice ale eterului explică viteza foarte mare de propagare a luminii. Prin undă de lumină Huyghens nu înțelegea însă același lucru pe care-l înțelegem noi astăzi. El considera că impulsurile luminoase se propagă prin suprafețe sferice, numite suprafețe de undă, dar „... nu trebuie să ne imaginăm că aceste unde se succed la distanțe egale una după alta", afirma el. Cu alte cuvinte nu poate fi vorba de o adevărată teorie ondulatorie a luminii, deoarece, după el, fenomenul luminos era lipsit atît de periodicitatea în timp (T), cît și în spațiu (λ). La baza acestei teorii stă propagarea rectilinie a luminii, oricît de mic ar fi orificiul care limitează un fascicul îngust de lumină. Pentru a determina direcția de propagare a luminei, Huyghens elaborează principiul care-i poartă numele: orice punct atins de impulsul luminos devine la rîndul său centrul unor unde secundare; suprafața care înfășoară aceste unde secundare reprezintă frontul undelor, care se propagă prin acel punct. Principiul lui Huyghens are mai mult conținut geometric, decît fizic. Pe baza acestui principiu Huyghens a explicat reflexia, refracția și dubla refracție a luminii. Adevărata teorie ondulatorie a luminii a fost elaborată de Fresnel (1818), care a dat principiului lui Huyghens un conținut fizic și a completat teoria lui cu principiul interferențelor, reușind să explice în mod ondulatoriu atît difracția luminii, cît și propagarea ei rectilinie.

În același timp cu Huyghens, fizicianul englez I. Newton elaborează *teoria emisiunii*, pe care o publică în 1704. După această teorie lumina constă dintr-o puzderie de particule de lumină, emise de izvorul de lumină, care se propagă rectiliniu și uniform conform legii inerției. Traiectoria

fiecărei particule de lumină este o rază de lumină. Pentru a explica fenomenele de propagare a luminii în diferite medii, Newton consideră mișcarea particulelor de lumină supusă legilor generale ale mecanicii, admițînd că între particulele de lumină și particulele substanțelor prin care se propagă lumina, se exercită forțe de atracție ori de repulsie, după caz. Interesant de remarcat este că, pentru a explica fenomenul numit de noi inelele lui Newton (o interferență a luminii). Newton introduce periodicitatea în propagarea particulelor de lumină.

Newton explică reflexia luminii prin analogie cu ciocnirea elastică a unei bile de un zid. Refracția luminii o explică admițînd că o particulă de lumină este atrasă de mediul în care intră, dacă acesta este „mai dens", ceea ce are ca urmare o creștre a vitezei luiminii în mediul refringent. Cînd particula M ajunge în vecinătatea suprafeței de separare GY, dintre primul mediu și mediul refringent „mai dens" (fig. 1), particula de lumină M, care vine cu viteza V_1, este supusă unor forțe de atracție din partea mediului refringent, în care intră. Ca urmare, componenta normală V_n a vitezei V_1 crește, în timp ce componenta ei tangențială V_t rămîne aceeași, adică $V_2 > V_1$. De pe figură se observă ușor că

$$\sin i = \frac{V_t}{V_1} \text{ și } \sin r = \frac{V_t}{V_2},$$

deci:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{V_2}{V_1} = n > 1.$$

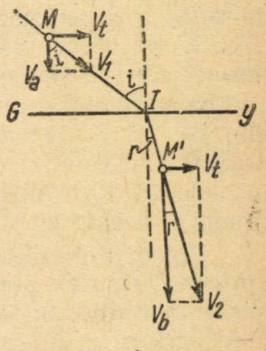


Fig. 1.

Dacă mediul refringent este „mai puțin dens", atunci particula de lumină este respinsă de mediul refringent și ca urmare viteza luminii scade cînd pătrunde în aceasta. Se observă că indicile de refracție n primește un conținut fizic în teoria lui Newton. Din teoria emisiunii a lui Newton reiese deci că, în apă, viteza luminii trebuie să fie mai mare decît în aer. Această consecință putea constitui o verificare experimentală a teoriei lui Newton, dar în acea vreme se cunoștea numai viteza luminii în vid. Abia mult mai tîrziu se vor imagina metode experimentale pentru determinarea vitezii luminii în diferite medii, iar Foucault (1850) va demonstra experimental că în apă lumina are o viteză mai mcă decît în aer, concluzie care a infirmat teoria lui Newton.

Cu toate deosebirile dintre ele, teoria emisiunii a lui Newton, teoria ondulatorie rudimentară a lui Huyghens și chiar teoria ondulatorie a lui Fresnel au un fond comun: *sînt teorii mecaniciste*. Cu alte cuvinte aceste teorii încearcă să reducă fenomenele luminoase la modele mecanice, le consideră efecte ale mișcărilor mecanice și le explică pe baza legilor mecanicii. Pe cînd însă teoria ondulatorie concepea lumina ca oscilația rapidă a unui mediu elastic, deci avînd la bază conceptia *continuității*, teoria emisiunii concepea lumina ca o emisie corpusculară, bazată pe concepția *discontinuității*. Această contradicție între teorii reflectă în concepțiile despre lumină, caracterul dialectic al luptei contrariilor, care stă la baza dezvoltării proceselor din natură.

2. Legile opticii geometrice

Cum s-a amintit mai înainte, scopul opticii geometrice este acela de a studia condițiile construirii instrumentelor optice. Acestea dau imagini ale obiectelor, în care se pot deosebi amănunte, care nu se pot observa cu ochiul liber. Instrumentele optice dau imagini, mărind unghiul solid în interiorul căruia se propagă razele de lumină pornite de la obiect și care se întîlnesc în imagine. Optica geometrică arată mersul razelor de lumină într-un sistem optic (oglindă, lupă, microscop etc.) sau în ce fel trebuie construit un sistem optic pentru ca el să corespundă unui anumit mers al razelor de lumină. Orice sistem optic este format din una sau mai multe suprafețe, care separă medii transparente, în care se produc fenomene de reflexie sau de refracție a luminii.

De aceea la baza opticii geometrice stă noțiunea de *rază de lumină*, a cărei propagare este descrisă de patru legi fundamentale, deduse experimental : legea propagării rectilinii a luminii, legea independenței fasciculelor luminoase, legea reflexiei și legea refracției luminii.

Propagarea rectilinie a luminii în medii omogene este un fapt de observație experimentală. Identificarea liniei drepte cu raza de lumină a izvorît din observarea umbrelor bine determinate, obținute cu surse punctiforme, precum și din faptul obținerii unor imagini corecte prin orificii mici ale camerii obscure (sec. XVI). Cercetări mai amănunțite au dovedit încă din sec. al XVII-lea că, propagarea rectilinie a luminii este un fenomen numai aproximativ exact, valabil numai în anumite condiții. Astfel fenomenele de *difracție* fac ca imaginea dată de o cameră obscură să înceteze a mai fi asemenea cu obiectul cînd orificiul coboară sub 0,01 mm diametru.

Fotografiile efectuate de V. K. Arkadiev arată că nici umbra obținută cu o sursă punctiformă nu mai rămîne asemenea cu obiectul, dacă distanța dintre sursă și ecran este foarte mare. La 7 km distanță, umbra unei farfurii devine neclară, iar în centrul ei apare o pată luminoasă.

Prin urmare, din punct de vedere practic se înțelege prin rază de lumină un fascicul atît de îngust, încît să poată fi neglijate fenomenele de difracție. Un principiu de care trebuie ținut seamă în optica geometrică este acela că, este indiferent sensul de propagare pe direcția razei (principiul drumului invers).

Independența fasciculelor luminoase care se întretaie se observă de asemenea din experiență : un fascicul luminos dat de un proiector intră și iese neschimbat din fasciculul luminos al altui proiector. Deci efectul produs de un fascicul luminos nu este influențat de prezența simultană a altor fascicule de lumină.

Reflexia și refracția luminii sînt fenomene de schimbare discontinuă a direcției de propagare a razei de lumină la suprafața de separare a două medii transparente. Sînt fenomenele pe baza cărora pot fi dirijate razele de lumină în sistemele optice, în scopul obținerii unor imagini cît mai corecte. Legile reflexiei luminii au fost descoperte încă din antichitate ; legile refracției au fost descoperite mult mai tîrziu, de către Snellius (1618) și Descartes (1637), indepenedent unul de altul. Legile reflexiei și refracției luminii pot fi stabilite pe baza unor principii generale, cum au procedat Fermat (1660), Huyghens (1690) sau Newton (1704).

Am văzut mai înainte cum a dedus Newton legile reflexiei și refracției luminii pe baza mișcării mecanice a corpusculilor de lumină, supuși forțelor de atracție sau repulsie ale moleculelor mediilor prin care se propagă.

Mult interes prezintă principiul pe baza căruia a dedus Fermat aceste legi. Este vorba de *principiul timpului minim*: drumul parcurs de raza de lumină între două puncte corespunde timpului minim de propagare. Ca să se propage pe un drum elementar dl lumina are nevoie de un interval de timp $dt = \frac{dl}{v}$; deoarece $n = \frac{c}{v}$, adică $v = \frac{c}{n}$, deducem că $dt = \frac{n \cdot dl}{c}$. Pentru a se propaga de la un punct A la altul B, raza de lumină se va mișca pe un drum compus dintr-un imens număr de drumuri elementare dl, astfel încît timpul total $t = \int_A^B dt$ să fie minim. Pentru aceasta, derivata acestui timp va fi nulă $\delta t = \delta \int_A^B dt = 0$, adică

$$\delta \int_A^B n \cdot dl = 0, \qquad (1)$$

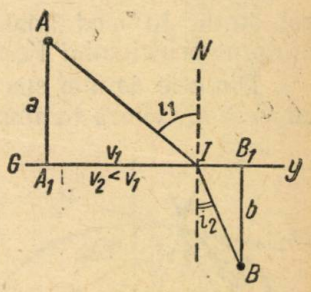


Fig. 2.

relație care exprimă tocmai principiul lui Fermat. Se observă că acest principiu are un conținut geometric, independent de natura fizică a luminii. Să-l aplicăm la verificarea legii refracției luminii.

Să considerăm mersul razei de lumină din punctul A la punctul B, traversînd suprafața de separare GY dintre două medii, în care lumina are viteza v_1, respectiv $v_2 < v_1$ (fig. 2). Raza de lumină nu va fi dreapta AB, ci linia frîntă $AI + IB$, care corespunde timpului minim de parcurs $t = t_1 + t_2 = \text{minim}$. Rămîne de determinat poziția punctului $A_1I = x$, ca să corespundă condiției Fermat. Notăm: $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $A_1B_2 = x_0$ segmentele constante date. Atunci:

$$t_1 = \frac{AI}{v_1} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} \quad \text{și} \quad t_2 = \frac{IB}{v_2} = \frac{\sqrt{b^2 + (x_0 - x)^2}}{v_2}$$

Pentru ca $t = t_1 + t_2$ să fie minim, trebuie ca derivata sa în raport cu x să fie nulă $\frac{dt}{dx} = 0$, adică

$$\frac{dt_1}{dx} + \frac{dt_2}{dx} = \frac{x}{v_1\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{x_0 - x}{v_2\sqrt{b^2 + (x_0 - x)^2}} = 0$$

sau:

$$\frac{\sin i_1}{v_1} = \frac{\sin i_2}{v_2}, \text{ deoarece } \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \sin i_1 \text{ și}$$

$$\frac{x_0 - x}{\sqrt{b^2 + (x_0 - x)^2}} = \sin i_2.$$

De aici deducem:

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1},$$

unde $n_1 = \frac{c}{v_1}$ și $n_2 = \frac{c}{v_2}$ sînt indicii absoluți de refracție ai celor două medii. Se obține deci legea refracției sub forma *invariantului lui Descartes:*

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2, \qquad (2)$$

care poate fi pusă și sub forma $\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = n$

n fiind indicele relativ de refracție $n = \frac{n_2}{n_1}$ al mediului al doilea față de cel dintîi. În mod analog se poate deduce și legea reflexiei luminii cu ajutorul principiului Fermat al timpului minim.

Din cele de mai sus se constată că într-un mediu mai refringent, adică cu $n_2 > n_1$, viteza luminii este mai mică decît în altul mai puțin refringent, $v_2 < v_1$. Concluzia la care duce pricipiul Fermat este deci în dezacord cu teoria lui Newton, dar în acord cu teoria ondulatorie. Principiul lui Fermat a fost generalizat pentru a îngloba toate cazurile reale: traiectoria reală a luminii este determinată de o condiție de minim, de maxim sau de staționaritate a drumului optic. Fie suprafața concavă a unui elipsoid de revoluție (fig. 3). Raza pornită din focarul F se reflectă prin focarul F', astfel încît $i_1 = i_2$, iar drumul $FI + IF' =$ constant, oricare ar fi punctul I pe elipsoid. Pentru o suprafață de curbură mai mică, tangentă în I la elipsoid, de exemplu planul M_1M_2, drumul $F + F'$ reprezintă un minim. Pentru o suprafață concavă N_1N_2, tangentă în I, dar de curbură mai mare decît elipsoidul, parcursul $FI + F'I'$ reprezintă un maximum.

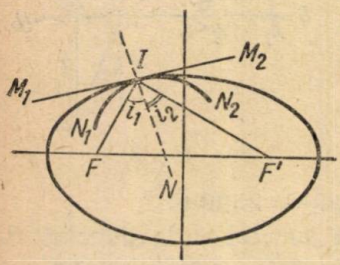


Fig. 3.

Principiul Fermat prezintă și un alt aspect extrem de interesant, un paralelism între propagarea luminii și mișcarea unui punct material, între optica geometrică și între mecanică. După cum propagarea luminii se face pe un drum care corespunde unui timp minim de propagare, mișcarea unui punct material între două puncte ale unui cîmp de forțe se face după principiul lui Maupertuis, al acțiunii minime $\delta \int_A^B m\, v \cdot dl = 0$. Acest paralelism a fost considerat ca formal, la început. Louis de Broglie îi dă însă un conținut fizic, considerînd că, după cum optica geometrică este înglobată ca un caz particular al opticei ondulatorii, tot așa mecanica clasică trebuie să fie un caz particular al unei mecanici mai generale, mecanica ondulatorie sau *mecanica cuantică*, aplicabilă și mișcărilor particulelor intraatomice.

Dar legile reflexiei și refracției luminii pot fi deduse, și pe baza teoriei ondulatorii a lui Huyghens, pornind de la principiul care-i

poartă numele. Această deducere se poate găsi în manualul de Fizică cl. XI de D. Mondescu pag. 36 și 40, de aceea nu o vom expune aici. Subliniem încă o dată că, principiul lui Huyghens duce la concluzii opuse celor scoase din teoria lui Newton cu privire la viteza luminii în apă față de viteza luminii în aer, ceea ce a permis lui Foucault să infirme teoria lui Newton, dovedind experimental că în apă lumina are viteza mai mică decît în aer.

3. Condițiile formării imaginilor corecte

Formarea imaginilor corecte, asemenea obiectului, de către sistemele optice necesită anumite condiții pe care să le îndeplinească acestea. Condiția esențială este *stigmatismul.*

Orice obiect este un ansamblu de puncte luminoase, care constituie puncte obiect pentru un sistem optic oarecare. Să considerăm unul din punctele luminoase A (fig. 4) ale unui obiect AB, din care pornește fasciculul de raze care se refractă prin sistemul optic. Se numește fascicul *omocentric* sau *izogen*, fiind generat de un singur punct A.

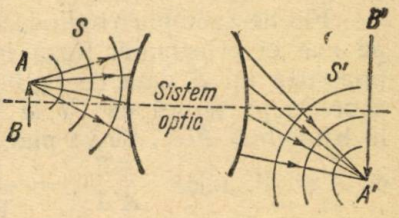


Fig. 4.

Fasciculul care iese din sistemul optic este concentrat în punctul A', imaginea reală a punctului obict A. Sistemul optic a transformat fasciculul omocentric divergent într-un fascicul de asemenea omocentric, dar convergent, adică a dat *o imagine punctuală* A' pentru un *obiect punctiform* A. Un asemenea sistem optic se numește *stigmatic* (de la stigma, punct).

Privind fenomenul sub aspect ondulator, sistemul optic centrat transformă undele sferice incidente, pornite din A, tot în unde sferice S' centrate pe A'. Punctul obiect A și punctul imagine A' se numesc *puncte conjugate.* Oglinda plană este un sistem optic stigmatic natural pentru toate punctele spațiului și dă imagini perfecte (fig. 5).

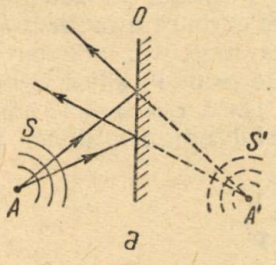


Fig. 5-a.

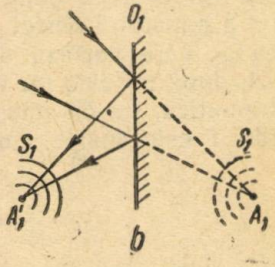


Fig. 5-b.

Se observă ușor că unui obiect real A sau unei imagini virtuale A' le corespund fascicule divergente, în timp ce unui obiect virtual A_1 sau unei imagini reale A_1' le corespund fascicule convergente.

Oglinzile sferice, lentilele etc., sînt sisteme optice astigmatice; prezintă proprietăți stigmatice numai pentru anumite puncte. În anumite condiții ele pot atinge un grad de stigmatism apropiat, care depășește posibilitățile de agerime vizuală a ochiului. Din cauza structurii retinei, în care fiecare extremitate a nervului optic ocupă o foarte mică porțiune din suprafața retinei, ochiul percepe sub forma unui punct, orice imagine care se formează pe o singură extremitate a nervului, adică o imagine a cărui unghi vizual nu depășește un minut. datorită acestui fapt un sistem optic poate avea un stigmatism apropiat, adică imaginea poate fi o mică suprafață în jurul lui A', și totuși să fie perceput ca un punct cu condiția să nu depășească unghiul vizual de 1'. Rămîne de stabilit condiția pe care trebuie s-o îndeplinească sistemul optic, pentru a asigura stigmatismul apropiat.

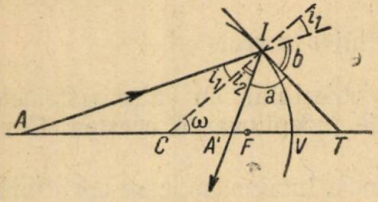


Fig. 6.

Fie de exemplu o oglindă sferică concavă (fig. 6) și A un punct obiect pe axa ei principală. Raza incidentă în I se reflectă prin A', care este imaginea lui A dată de oglindă. Notăm $AT = p$ și $A'T = p'$. Se observă ușor de pe figură că CI și TI sînt bisectoarele interioară și exterioară în triunghiul AIA'. Se va putea deci scrie că C și T sînt conjugate armonic cu A și A', adică $\frac{AT}{A'T} = \frac{p}{p'} = \frac{AC}{CA'} = \frac{p-CT}{CT-p'}$ de unde deducem:

$$\frac{2}{CT} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}.$$

Dar $CI = R = CT \cdot \cos\omega$, R fiind raza de curbură a oglinzii, iar ω deschiderea oglinzii. Relația de mai sus devine:

$$\frac{2\cos\omega}{R} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}. \qquad (3)$$

Se constată deci că poziția punctului imagine A', adică p', depinde de poziția p a punctului obiect A, de raza de curbură a oglinzii R, dar și de deschiderea ω, care variază de la rază la rază. Cu alte cuvinte razele ieșite din A, după reflexie nu vor trece toate prin A', adică oglinda sferică nu este stigmatică, nu dă imagini corecte. Dacă $\cos\omega \to 1$, adică punctul de incidență I este foarte aproape de vîrful oglinzii atunci (3) devine practic:

$$\frac{2}{R} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}, \qquad (4)$$

iar poziția imagine A' devine independentă de ω, adică razele reflectate se întîlnesc foarte aproape în jurul lui A', în cadrul condiției de stigmatism apropiat. Cînd $\omega \to 0$, atunci și $I \to V$, iar punctul T, unde tangenta în I taie axa optică se apropie pînă la confundare practică cu V, iar relația (4) are semnificația cunoscută. Făcînd $p = \infty$, imaginea A' va fi în focarul F, iar $p' = f$: $\frac{2}{R} = \frac{1}{\infty} + \frac{1}{f}$, de unde $f = \frac{R}{2}$, și relația de poziție a oglinzii sferice devine: $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$. (5)

Condiția de stigmatism apropiat cos $\omega = 1$ poartă numele de *aproximația lui Gauss* și ea trebuie să fie îndeplinită de toate sistemele optice astigmatice, pentru a putea da imagini corecte. Se mai poate exprima spunînd că fasciculul incident să fie *paraxial*, adică razele să fie foarte aproape de axa optică. Dacă sistemul optic funcționează prin refracție, fenomenele se petrec analog, supuse acelorași condiții, însă aspectul relațiilor este ceva mai complicat, datorită faptului că apare o deosebire între *drumul geometric* dintre două puncte și *drumul optic* dintre aceleași puncte.

Se știe că o suprafață de undă este locul geometric al punctelor care oscilează în aceași fază. Din această cauză distanțele dintre două unde succesive trebuie parcurse de lumină în același interval de timp. Cînd fasciculul de lumină se propagă printr-un mediu omogen aceste distanțe sînt geometric egale, adică (fig. 7 a): $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = \ldots$.

Dacă însă un fascicul paralel R_1R_2 (fig. 7 b) întîlnește suprafața Gy, care separă mediul în care lumina are viteza v_1, de mediul în care lumina are viteza $v_2 < v_1$, atunci distanța dintre undele plane $U_1, U_2 \ldots$ devine mai mică în mediul al doilea. Cu alte cuvinte geometric $A_5A_6 < A_3A_4$ însă din punct de vedere optic ele sînt echivalente, deoarece sînt parcurse de lumină în același timp: $A_3A_4 = v_1T$, $A_5A_6 = v_2T$, deci:

$$T = \frac{A_3A_4}{v_1} = \frac{A_5A_6}{v_2} = \frac{A_0A}{c},$$

unde A_0A este distanța dintre undele plane în vid, iar c este viteza luminii în vid.

$$A_0A = l = \frac{c}{v_1} \cdot A_3A_4 = \frac{c}{v_2} \cdot A_5A_6 =$$
$$= n_1 \cdot A_3A_4 = n_2 \cdot A_5A_6,$$

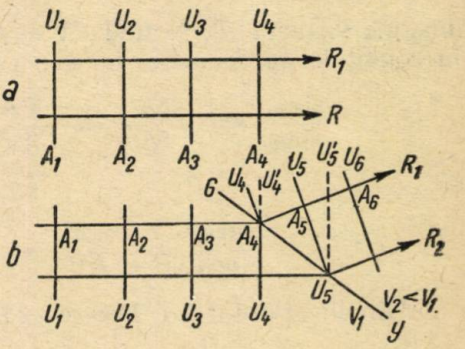


Fig. 7.

$A_0A = l$ fiind drumul parcurs de lumină în vid în același timp cu drumurile A_3A_4, A_5A_6 etc.

Acest drum se numește drum optic. Se observă că drumurile l, A_3A_4, A_5A_6 etc., sînt *tautocrone*, adică sînt parcurse în același interval de timp. Așadar drumul optic l corespunzător unui drum geometric l_1 dintr-un mediu cu indicele de refracție absolut n_1 este:

$$l = nl_1 . \qquad (6)$$

Între raza luminoasă și suprafața de undă există ortogonalitate. Malus a demonstrat (1807) că această ortogonalitate se păstrează și după ce fasciculul de lumină a suferit reflexii ori refracții. De aici urmează o consecință importantă pentru studiul suprafețelor stigmatice, adică pentru optica geometrică. O suprafață stigmatică dă un punct imagine A' (fig. 8) pentru un punct obiect A.

Drumul optic de la punctul obiect A pînă la punctul imagine A' este același pentru toate razele, adică:

$$n_1\overline{AI} + n_2\overline{IA'} = n_1\overline{AI_1} + n_2\overline{I_1A'} = \text{const.} \qquad (7)$$

Relația (7) exprimă conținutul teoremei lui M a l u s și servește drept criteriu pentru stigmatismul unui sistem optic.

Să analizăm acum relația de poziție a imaginii în cazul unui dioptru sferic (ansamblu de două medii transparente, separate printr-o suprafață sferică (fig. 9). Mediul din stînga are indicele absolut n_1, cel din dreapta indicele $n_2 < n_1$.

Din punctul obiect A pornește o rază AI, care se refractă, dînd punctul

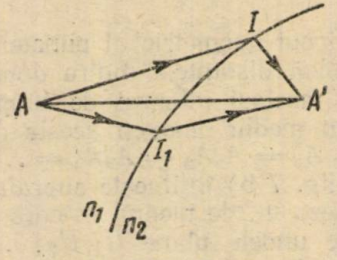


Fig. 8.

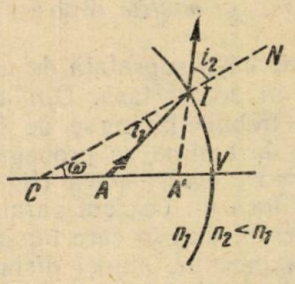


Fig. 9.

imagine virtuală A'. Notînd $CV = R$, $AV = p$ și $A'V = p'$ se poate scrie, în condițiile aproximației lui G a u s s:

$$\frac{\sin i_1}{\sin\omega} = \frac{CA}{IA} = \frac{CA}{AV} = \frac{R-p}{p} = \frac{R}{p} - 1$$

și:

$$\frac{\sin i_2}{\sin\omega} = \frac{CA'}{IA'} = \frac{R-p'}{p'} = \frac{R}{p'} - 1$$

Din invariantul lui D e s c a r t e s deducem:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{\frac{R}{p} - 1}{\frac{R}{p'} - 1}.$$

de unde se deduce:

$$n_1\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{R}\right) = n_2\left(\frac{1}{p'} - \frac{1}{R}\right). \qquad (8)$$

care se mai numește și invariantul de ordin zero al lui A b b é. Această soluție se poate pune sub forma mai ușor de reținut:

$$\frac{n_2}{p'} - \frac{n_1}{p} = \frac{n_2 - n_1}{R} \qquad (9)$$

Această relație este generală. Punînd $n_1 = -n_2$ se obține relația de poziție a *oglinzilor sferice*:

$$\frac{n_2 + n_2}{R} = \frac{n_2}{p'} + \frac{n_2}{p} \quad \text{sau} \quad \frac{2}{R} = \frac{1}{p'} + \frac{1}{p}$$

Dacă în ultima relație facem $R = \infty$, se obține relația de poziție la *oglinda plană*:

$$\frac{2}{\infty} = \frac{1}{p'} + \frac{1}{p} \quad \text{sau} \quad p = -p'$$

Făcînd în relația (9), $R = \infty$, se obține relația de poziția la *dioptrul plan*:

$$\frac{n_2}{p'} - \frac{n_1}{p} = \frac{n_2 - n_1}{\infty} \quad \text{sau} \quad n_2 p = n_1 p' .$$

Desigur că analiza fenomenelor de formare a imaginilor, în scopul construirii unor cît mai perfecte instrumente optice poate fi dusă mult mai departe. Nu a fost însă intenția noastră de a expune bazele optotehnicii ; am arătat doar condițiile principale de formare ale imaginilor, adică a opticii geometrice, avînd în vedere numeroasele ei aplicații în tehnica de laborator, la măsurătorile de precizie, la controlul cantitativ al pieselor de precizie, în fotografie, în spectroscopie, la unele aparate tehnice necesare apărării țării etc.

Din cele expuse pînă aici reiese în mod evident că, pentru a dirija fasciculele de lumină în direcții și cu convergențele necesare formării imaginilor se folosesc cele două fenomene fundamentale ale opticii geometrice : reflexia și refracția luminii pe suprafețe plane sau curbe, în cadrul condițiilor de stigmatism și aproximației lui G a u s s. Suprafețele sistemelor optice obținute în tehnică trebuie lucrate cu o înaltă precizie, care să le facă să difere de suprafețele teoretice corespunzătoare cu mai puțin de 10^{-5} cm.

In anii puterii populare s-au construit la noi întreprinderi optotehnice, cum este Industria Optică Romînă (I.O.R.), care fabrică microscoape, diascoape, epidiascoape, aparate fotografice și multe alte instrumente optice de înaltă precizie, necesare impetuoasei dezvoltări a producției.

PROBLEME DE MAXIM ŞI MINIM ÎN FIZICĂ ŞI TEHNICĂ

E. DEUTSCH, București

Atît în fizică, cît și în tehnică se întîlnesc deseori probleme a căror rezolvare necesită cunoștințe speciale de matematică. Astfel sînt problemele de maxim și minim.

Legătura dintre fizică, matematică și tehnică își găsește, în cadrul acestor probleme, o ilustrare evidentă. Exemplele prezentate în acest articol înfățișează o serie de aspecte privind problemele de acest gen, pe care le ridică practica și a căror rezolvare este posibilă cunoscînd legile fizice care stau la baza lor, precum și procedeele matematice specifice folosite în aceste împrejurări.

1. *Să se determine înălțimea la care trebuie așezată o lampă de intensitate I pe verticala centrului unei piste circulare de rază R pentru ca această pistă să fie luminată la maximum.*

Se știe că iluminarea E a unei suprafețe AB (fig. 1) este dată de formula

$$E = \frac{I \cos i}{r^2}. \tag{1}$$

Fie O centrul pistei (fig. 2), L poziția lămpii și M un punct al pistei. Este evident că pe toată lungimea ei pista va fi iluminată la fel. Notînd

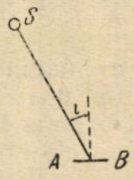


Fig. 1.

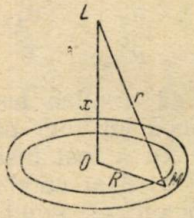


Fig. 2.

$OL=x$ și $LM=r$, din triunghiul dreptunghic OLM avem:

$$r^2 = R^2 + x^2, \quad \cos i = \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

și astfel formula (1) devine:

$$E = \frac{Ix}{(R^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}}. \tag{2}$$

Această formulă ne dă iluminarea E a pistei în funcție de înălțimea x a lămpii.

Avem:

$$\frac{dE}{dx} = I \frac{R^2 - 2x^2}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

care se anulează pentru o singură valoare pozitivă $x = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

Studiind semnul trinomului $R^2 - 2x^2$, constatăm că pentru $0 < x < \frac{R\sqrt{2}}{2}$ derivata este pozitivă, iar pentru $x > \frac{R\sqrt{2}}{2}$, negativă. Rezultă că pentru $x = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ iluminarea E devine maximă.

Valoarea maximă a lui E se obține din (2) punînd $x = \frac{R\sqrt{2}}{2}$. Găsim

$$E_{max} = \frac{2\sqrt{3}\, I}{9R^2}.$$

2. *Pe dreapta care unește două surse de intensități I_1 respectiv I_2, să se găsească punctul cu iluminarea minimă.*

Iluminarea unei suprafețe mici AB (fig. 3) situată la distanța x de sursa S_1 și înclinată cu unghiul α față de normala la S_1S_2 se obține prin aplicarea formulei (1). Găsim:

$$E=\left[\frac{I_1}{x^2}+\frac{I_2}{(l-x)^2}\right]\sin\alpha, \tag{3}$$

unde l reprezintă distanța dintre sursele S_1 și S_2.

Avem:

$$\frac{dE}{dx}=-2\left[\frac{I_1}{x^3}-\frac{I_2}{(l-x)^3}\right]\sin\alpha,$$

care se anulează cînd

$$\frac{I_1}{I_2}=\frac{x^3}{(l-x)^3} \quad \text{sau:} \quad \frac{x}{l-x}=\sqrt[3]{\frac{I_1}{I_2}},$$

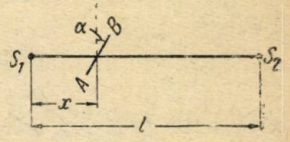


Fig. 3.

de unde, aplicînd o proprietate a proporțiilor:

$$x=\frac{l\sqrt[3]{I_1}}{\sqrt[3]{I_1}+\sqrt[3]{I_2}}. \tag{4}$$

Pentru derivata a doua obținem:

$$\frac{d^2E}{dx^2}=6\left[\frac{I_1}{x^4}+\frac{I_2}{(l-x)^4}\right]\sin\alpha,$$

care este pozitivă pentru orice valoare a lui x.

Deci punctul cu iluminarea minimă se găsește la o distanță de sursa S_1 egală cu x dat de (4).

Valoarea minimă a iluminării se obține înlocuind valoarea lui x din (4) în expresia (3).

După unele transformări obținem:

$$E_{min}=\frac{(\sqrt[3]{I_1}+\sqrt[3]{I_2})^3}{l^2}.$$

3. *Un canal are forma din figura 4, unghiul de întretăiere fiind drept. Să se determine lungimea maximă a unui buștean care poate străbate canalul.*

Bușteanul cel mai lung care străbate canalul, în timp ce trece dintr-o ramură a canalului în cealaltă, se rotește în jurul punctului B. Rezultă de aici că lungimea maximă a bușteanului care poate străbate canalul este egală cu lungimea minimă a segmentelor cuprinse între laturile AX și AY și care trec prin punctul B.

Fie MN un asemenea segment și fie $\varphi=\sphericalangle ANM$. Notînd $l=MN$, găsim din triunghiurile dreptunghice BMQ și BNP:

$$l=MB+BN=\frac{a}{\cos\varphi}+\frac{b}{\sin\varphi}. \tag{5}$$

Avem:

$$\frac{dl}{d\varphi} = \frac{a \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} - \frac{b \cos \varphi}{\sin^2 \varphi},$$

care egalată cu zero ne conduce la ecuația:

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}, \tag{6}$$

ecuație care are o singură rădăcină cuprinsă între 0° și 90°. Avem mai departe:

$$\frac{d^2 l}{d^2 \varphi} = a \frac{1 + \sin^2 \varphi}{\cos^3 \varphi} + b \frac{1 + \cos^2 \varphi}{\sin^3 \varphi},$$

care este pozitivă pentru orice valoare a lui φ cuprinsă între 0° și 90°. Deci pentru unghiul φ dat de relația (6), l admite un minim. Din (6) găsim:

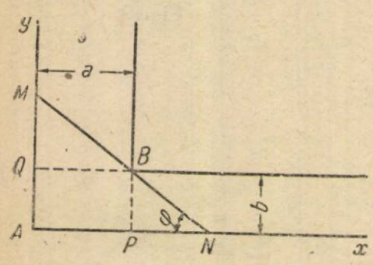


Fig. 4.

$$\cos \varphi = \frac{a^{\frac{1}{3}}}{(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}}, \quad \sin \varphi = \frac{b^{\frac{1}{3}}}{(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}},$$

iar din (5) găsim acum valoarea minimă a lui l,

$$l_{min} = (a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}.$$

Din cele spuse mai sus rezultă că lungimea maximă a unui buștean care poate străbate întreg canalul este:

$$L = (a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}.$$

Aplicație numerică. Pentru $a = 27$ dm, $b = 64$ dm se obține $L = 125$ dm.

4. *Să se determine poziția sistemului bielă-manivelă (fig. 5) pentru care punctul B are viteza maximă, în ipoteza că manivela se rotește uniform.*

Fie OC traiectoria punctului B, O fiind poziția punctului B, cînd punctul A se găsește în A_0. Notăm $OB = x$, lungimea bielei $AB = l$, lungimea manivelei $AC = r$ și cu ω viteza unghiulară constantă a manivelei. Dacă notăm cu t timpul socotit de la momentul în care biela s-a găsit în poziția B_0A_0, putem scrie:

$$\varphi = \omega t,$$

$$x = OB = OA_0 - BA_0 = l - (BC - r) = l + r - BC.$$

Dar, din triunghiurile dreptunghice ABD și ADC avem:

$$BC = BD + DC = l \cos \psi + r \cos \varphi$$

și deci:

$$x = l + r - l \cos \psi - r \cos \varphi$$

sau:

$$x = l(1 - \cos \psi) + r(1 - \cos \varphi). \tag{7}$$

Unghiul ψ poate fi exprimat cu ajutorul lui r, l și φ din triunghiul ABC. Într-adevăr, aplicînd teorema sinusului, avem:

$$\frac{\sin\psi}{r}=\frac{\sin\varphi}{l},$$

de unde:

$$\cos\psi=\sqrt{1-\sin^2\psi}=\sqrt{1-\frac{r^2}{l^2}\sin^2\varphi},$$

astfel că relația (7) devine:

$$x=r(1-\cos\omega t)+l\left(1-\sqrt{1-\frac{r^2}{l^2}\sin^2\omega t}\right). \tag{8}$$

Aceasta este legea mișcării punctului B, deoarece ne dă poziția punctului B în orice moment t.

De obicei se ia $\frac{r}{l}=\frac{1}{5}$. Ținînd seama că pentru un ξ mic avem:

$$\sqrt{1-\xi}\approx 1-\frac{1}{2}\xi$$

și că în cazul nostru:

$$\frac{r^2}{l^2}\sin^2\omega t\leqslant\frac{1}{25}=0{,}04,$$

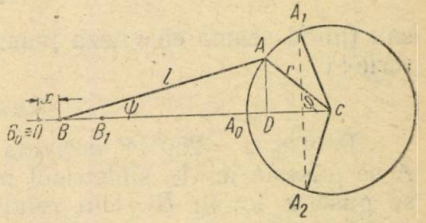


Fig. 5.

putem scrie o formulă aproximativă pentru x:

$$x=r(1-\cos\omega t)+\frac{r^2}{2l}\sin^2\omega t. \tag{9}$$

Viteza punctului B este:

$$v_B=\dot{x}=r\omega\left(\sin\omega t+\frac{r}{2l}\sin 2\omega t\right). \tag{10}$$

Pentru a găsi viteza maximă anulăm derivata vitezei. Avem:

$$\frac{dv_B}{dt}=r\omega^2\left(\cos\omega t+\frac{r}{l}\cos 2\omega t\right),$$

deci unghiul $\varphi=\omega t$ corespunzător vitezei maxime a punctului B, se găsește din ecuația:

$$\cos\varphi+\frac{r}{l}\cos 2\varphi=0, \text{ care pentru } \frac{r}{l}=\frac{1}{5} \text{ se mai poate scrie:}$$

$$2\cos^2\varphi+5\cos\varphi-1=0,$$

de unde:

$$\cos\varphi=\frac{-5\pm\sqrt{33}}{4}=\frac{-5\pm 5{,}7446}{4}.$$

Din aceste două ecuații numai ecuația: $\cos\varphi = 0{,}1861$ are soluții. Anume, se găsește:

$$\varphi = 79°16' + 360°\,k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$\varphi = 280°44' + 360°\,k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Pentru a stabili natura extremului, calculăm derivata a doua a lui v_B. Avem:

$$\frac{d^2 v_B}{dt^2} = -r\omega^3\left(\sin\omega t + \frac{2}{5}\sin 2\omega t\right).$$

Se vede ușor că pentru $\varphi = \omega t = 79°16' + 360°\,k$, derivata a doua este negativă. Deci, în punctul corespunzător (B_1 pe figură) avem viteza maximă. În acest moment punctul A se găsește în A_1 și avem $\sphericalangle A_0CA_1 = 79°16'$. Valoarea maximă a vitezei se obține din relația (10). Găsim:

$$v_{B\,max} = r\omega\left(0{,}9825 + \frac{1}{10}\,0{,}3659\right) \text{ sau: } v_{B\,max} \approx 1{,}02\,r\omega,$$

sau ținînd seama că viteza punctului A este pentru orice t, $v_A = r\omega$, putem scrie:

$$v_{B\,max} \approx 1{,}02\,v_A. \tag{11}$$

Pentru $\varphi = 280°44'$ derivata a doua a vitezei devine pozitivă. Punctul A se găsește în A_2, simetricul punctului A_1 față de dreapta OC și deci B se găsește tot în B_1. Din relația (10) obținem pentru viteză o valoare negativă (deoarece punctul B se mișcă în sens negativ). Rezultă că avem un minim al valorii negative, ceea ce pentru valoarea absolută a vitezei înseamnă un maxim. Se găsește ușor că valoarea vitezei în acest caz este dată de asemenea de relația (11).

5. *Un corp de greutate P, așezat pe un plan orizontal este deplasat cu ajutorul unei forțe Q. Coeficientul de frecare dintre corp și plan fiind μ, să se determine unghiul dintre forța Q și orizontală astfel ca forța Q să fie minimă (fig. 6).*

Fie N reacțiunea normală a planului și $F = \mu N$ forța de frecare. Forța Q poate fi descompusă în două forțe $Q\cos\alpha$ și $Q\sin\alpha$ după direcția orizontală respectiv verticală. Scriind echilibrul forțelor obținem:

$$\mu N = Q\cos\alpha,$$
$$P = N + Q\cos\alpha.$$

Eliminînd pe N găsim:

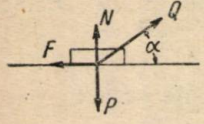


Fig. 6.

$$\mu(P - Q\sin\alpha) = Q\cos\alpha,$$

de unde:

$$Q = \frac{\mu P}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}. \tag{12}$$

Aceasta este expresia analitică a forței Q în funcție de unghiul α. Această forță este forța pentru care încă se menține echilibrul corpului (s-a dedus din condițiile de echilibru) dar, dacă este depășită, echilibrul nu se

mai păstrează. Cu alte cuvinte Q este acea forță datorită căreia corpul începe să-și piardă echilibrul și este pe cale să se deplaseze.

De exemplu, pentru $\alpha=0$, din relația (12) găsim $Q=\mu P$, adică pentru deplasarea corpului trebuie să învingem numai forța de frecare. Pentru $\alpha=90°$ găsim $Q=P$, adică trebuie să învingem greutatea corpului.

Să găsim acum unghiul α pentru care Q devine minim. Din relația (12) avem:

$$\frac{dQ}{d\alpha}=\mu P\frac{\sin\alpha-\mu\cos\alpha}{(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)^2}, \qquad (13)$$

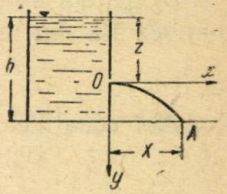


Fig. 7.

care se anulează dacă: $\sin\alpha-\mu\cos\alpha=0$,
adică pentru: $\operatorname{tg}\alpha=\mu$
și deci: $\alpha=\operatorname{arc}\operatorname{tg}\mu=\varphi$,
unde am notat cu φ unghiul de frecare ($\operatorname{tg}\varphi=\mu$).

Ținînd seama de relația $\mu=\operatorname{tg}\alpha$, expresia derivatei $\frac{dQ}{d\alpha}$ se mai poate scrie:

$$\frac{dQ}{d\alpha}=P\frac{\sin\varphi\sin(\alpha-\varphi)}{\cos^2(\alpha-\varphi)},$$

de unde rezultă că pentru $\alpha<\varphi$ derivata lui Q este negativă, iar pentru $\alpha>\varphi$ derivata este pozitivă și deci forța Q devine minimă, pentru $\alpha=\varphi$.

Valoarea minimă a lui Q se obține din relația (12):

$$Q_{min}=\frac{\mu P}{\sqrt{1+\mu^2}}$$

sau exprimată cu ajutorul unghiului de frecare: $Q_{min}=P\sin\varphi$.

6. *Un vas cu pereții verticali, de înălțime h, se află pe un plan orizontal. Dintr-un orificiu practicat în peretele vasului, se scurge lichidul. Să se determine poziția pe care trebuie să o aibă acest orificiu pentru ca distanța la care ajunge lichidul să fie maximă.*

Fie O orificiul în peretele vasului la adîncimea z socotită de la nivelul lichidului (fig. 7). Vasul este presupus plin cu lichid. Alegem axe de coordonate ca în figură.

Notăm deocamdată cu v viteza unei picături de lichid de masă m, la ieșirea din orificiu. Ecuațiile diferențiale ale mișcării sînt:

$$m\ddot{x}=0;\quad m\ddot{y}=mg,\quad (g=\text{accelerația gravitațională})$$

sau $\ddot{x}=0;\ \ddot{y}=g,$

de unde:

$$\dot{x}=C_1;\quad \dot{y}=gt+C_2, \qquad (14)$$

iar:

$$x=C_1t+C_3;\ y=\frac{gt^2}{2}+C_2t+C_4. \qquad (15)$$

Constantele de integrare C_1, C_2, C_3 și C_4 se determină cu ajutorul condițiilor inițiale ce rezultă din cunoașterea poziției și vitezei inițiale. Anume pentru $t=0$:

$$x=0,\ y=0,\ \dot{x}=v,\ \dot{y}=0.$$

Pentru ca aceste condiții să fie îndeplinite este necesar să avem, după cum rezultă din relațiile (14) și (15):

$$C_1=v,\quad C_2=0,\quad C_3=0,\quad C_4=0$$

și astfel ecuațiile mișcării (15) devin:

$$x=vt, \tag{16}$$
$$y=\frac{gt^2}{2}.$$

Traiectoria particulei de lichid este o parabolă. Ecuația ei se obține prin eliminarea lui t din relațiile (16). Găsim:

$$y=\frac{g}{2v^2}x^2. \tag{17}$$

Planul traiectoriei taie planul orizontal pe care se află vasul după dreapta BA a cărei ecuație este:

$$y=h-z. \tag{18}$$

Abscisa X a punctului A se obține prin rezolvarea sistemului format de ecuațiile (17) și (18):
Se găsește:

$$X^2=\frac{2}{g}v^2(h-z). \tag{19}$$

Dar viteza de scurgere v a lichidului este dată de formula lui Torricelli care în cazul nostru se scrie: $v^2=2gz$ și astfel relația (19) devine:

$$X^2=4z\ (h-z).$$

Întrucît mărimile X și X^2 devin maxime pentru aceeași valoare a lui z, ne vom pune problema maximului lui

$$X^2=u=4z\ (h-z).$$

Avem:

$$\frac{du}{dz}=4h-8z=4(h-2z),$$

care se anulează pentru $z=\frac{h}{2}$. Deoarece derivata a doua: $\frac{d^2u}{dz^2}=-8$ este negativă pentru orice valoare a lui z (deci și pentru $z=\frac{h}{2}$) rezultă că lichidul ajunge la o distanță maximă, dacă orificiul este la mijlocul înălțimii vasului.

Observare. Rezultatul găsit are loc numai dacă vasul — datorit unui robinet — este tot timpul plin sau, în caz contrar, numai pentru primele picături de lichid.

7. *Dintr-un buștean rotund de diametru d, să se taie o grindă de secțiune dreptunghiulară având modulul de rezistență maxim (fig. 8).*

Se știe că rezistența la încovoiere a unei grinzi depinde de modulul de rezistență al secțiunii transversale a grinzii. Pentru secțiunea dreptunghiulară modulul de rezistență are expresia:

$$W = \frac{bh^2}{6}, \tag{20}$$

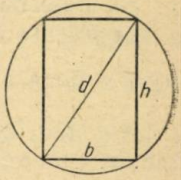


Fig. 8.

b fiind baza, iar h înălțimea dreptunghiului.

Ținînd seama de relația evidentă:

$$b^2 + h^2 = d^2, \tag{21}$$

expresia (20) a modulului de rezistență devine:

$$W = \frac{1}{6} b\,(d^2 - b^2).$$

Aici b este variabila independentă, iar d este o constantă dată (diametrul bușteanului).

Avem:

$$W'_b = \frac{1}{6}(d^2 - 3b^2),$$

care se anulează pentru o singură valoare pozitivă:

$$b = \frac{d}{\sqrt{3}} < d.$$

Derivata a doua: $W''_{bb} = -b$, are pentru $b = \frac{d}{\sqrt{3}}$ o valoare negativă.

Deci pentru $b = \frac{d}{\sqrt{3}}$, W are o valoare maximă, egală cu:

$$W_{max} = \frac{1}{6}\frac{d}{\sqrt{3}}\left(d^2 - \frac{d^2}{3}\right) = \frac{d^3}{9\sqrt{3}}.$$

Înălțimea secțiunii se obține din relația (21).

Găsim:

$$h = d\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

8. *Să considerăm o grindă de lungime l, simplu rezemată la cele două capete, încărcată cu o sarcină uniform distribuită de p tone/m (fig. 9). Ne propunem să determinăm acea secțiune a grinzii pentru care momentul încovoietor este maxim (secțiunea periculoasă).*

Se știe că prin momentul încovoietor M într-o secțiune dată a unei grinzi se înțelege suma algebrică a momentelor forțelor exterioare, care

se află de aceeași parte a secțiunii, luate față de centrul de greutate al secțiunii considerate.

În primul rînd trebuie să determinăm reacțiunile din reazemele A și B. În cazul nostru ele sînt egale (din motive de simetrie) și cum suma lor trebuie să fie egală cu pl (sarcina totală) rezultă că fiecare reacțiune este egală cu $\frac{1}{2} pl$.

Să determinăm acum expresia momentului încovoietor M într-o secțiune oarecare S situată la distanța x de reazemul A. La stînga secțiunii S avem o forță concentrată (reacțiunea din A) egală cu $\frac{1}{2} pl$ și o sarcină uniform distribuită pe lungimea $AS = x$. Pentru calculul momentului încovoietor, putem înlocui această sarcină uniform distribuită cu o forță concentrată de mărime px aplicată în mijlocul lui AS, adică la distanța $\frac{1}{2} x$ de punctul A. Avem deci:

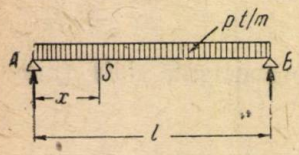


Fig. 9.

$$M = \frac{pl}{2} x - px \frac{x}{2}$$

sau:

$$M = \frac{1}{2} px(l - x).$$

Dacă am fi considerat forțele din dreapta secțiunii, pentru momentul încovoietor am fi obținut același rezultat.

Pentru a determina acum secțiunea în care momentul încovoietor are valoarea maximă, calculăm derivata lui M în raport cu x. Avem:

$\frac{dM}{dx} = \frac{1}{2} p(l - 2x)$, care se anulează pentru $x = \frac{l}{2}$.

Din faptul că: $\frac{d^2M}{dx^2} = -p < 0$ rezultă că, pentru $x = \frac{l}{2}$ avem un maxim.

Secțiunea periculoasă se găsește deci la mijlocul grinzii, iar valoarea maximă a momentului încovoietor este:

$$M = \frac{1}{8} pl^2.$$

9. *Să considerăm montajul din figura 10, unde rezistențele $R_2 = x$ și $R_4 = x$ sînt necunoscute și egale între ele. Pentru ce valoare a lui x, curentul care trece prin rezistența R_3 are valoarea maximă?*

Aplicînd formulele cunoscute de la legarea rezistențelor găsim pentru rezistența R', echivalentă rezistențelor R_3 și R_4:

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{x} + \frac{1}{9},$$

de unde:

$$R' = \frac{9x}{x+9},$$

iar pentru rezistența R, echivalentă rezistențelor R_1, R_2, R_3 și R_4:

$$R = x + 4 + \frac{9x}{x+9} = \frac{x^2+22x+36}{x+9}.$$

Din legea lui Ohm găsim acum intensitatea curentului care trece prin rezistențele R_1 și R_2:

$$I_1 = I_2 = \frac{80(x+9)}{x^2+22x+36}. \tag{22}$$

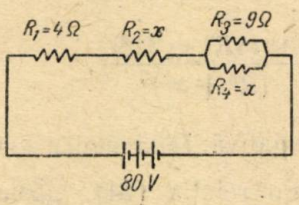


Fig. 10.

Fig. 11.

Pentru a găsi intensitățile I_3, respectiv I_4 a curenților care trec prin R_3 respectiv R_4 aplicăm legile lui Kirchhoff:

$$\begin{cases} I_3 + I_4 = I_1, \\ I_3 R_3 - I_4 R_4 = 0, \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} I_3 + I_4 = I_1, \\ \frac{I_3}{I_4} = \frac{x}{9}, \end{cases}$$

de unde: $\frac{I_3}{I_3+I_4} = \frac{x}{x+9}$, iar: $I_3 = I_1 \frac{x}{x+9}$

sau, ținînd seama de relația (22), avem:

$$I_3 = \frac{80x}{x^2+22x+36}, \tag{23}$$

și:

$$\frac{dI_3}{dx} = 80 \frac{36-x^2}{(x^2+22x+36)^2},$$

care se anulează pentru $x=6$. Studiind semnul trinomului $36-x^2$, deducem că, pentru $x<6$ avem: $\frac{dI_3}{dx} > 0$, iar pentru $x>6$ avem $\frac{dI_3}{dx} < 0$.

Rezultă că, pentru $R_2=R_4=6\Omega$ intensitatea I_3 devine maximă și anume găsim din relația (23):

$$I_{3\,max} \approx 2{,}35\ A.$$

10. *Să considerăm un cîmp electric produs de o sarcină electrică Q repartizată uniform pe un inel circular de rază R. Să se determine punctul de pe axul inelului în care intensitatea cîmpului are valoarea maximă (fig. 11).*

Se știe că intensitatea cîmpului într-un punct situat pe axul inelului la distanța x de centrul lui, este dată de relația:

$$H = \frac{Qx}{\varepsilon (R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

unde ε este constanta dielectrică absolută a mediului. Avem:

$$\frac{dH}{dx} = \frac{Q}{\varepsilon} \frac{R^2 - 2x^2}{(R^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}},$$

care se anulează pentru o singură valoare pozitivă: $x = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

Pentru derivata a doua, găsim:

$$\frac{d^2 H}{dx^2} = -\frac{Q}{\varepsilon} \frac{3x(3R^2 - 2x^2)}{(R^2 + x^2)^{7/2}},$$

care pentru $x = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ ia o valoare negativă. Deci pentru $x = \frac{R\sqrt{2}}{2}$, H admite o valoare maximă. Ea se obține din relația (24). Găsim:

$$H_{max} = \frac{2Q}{3\sqrt{3}\, R^2 \varepsilon}.$$

BIBLIOGRAFIE

1. *Gh. Th. Gheorghiu*, Probleme de algebră și analiză matematică, Editura Tehnică, 1953.
2. *N. M. Günther* și *R. O. Cuzmin*, Culegere de probleme de matematici superioare, vol. I, Editura Tehnică, 1953.
3. *O. Sacter*, Probleme de matematici cu conținut politehnic, Editura de stat didactică și pedagogică, 1958.

NOTE MATEMATICE

ASUPRA UNEI PROBLEME DE ALGEBRĂ

În cele ce vor urma vom da generalizarea unei probleme din lucrarea „Aritmetica și teoria numerelor" de Eugen Rusu.

Dîndu-se în general:

$$a = k_1^m \cdot k_2^{m'} \; ; \; b = k_1^n \cdot k_2^{n'} \tag{1}$$

și

$$A = k_1^p \cdot k_2^{p'} \; ; \; B = k_1^q \cdot k_2^{q'} \tag{2}$$

și cunoscînd că $\log_a A = \alpha$, vom afla $x = \log_b B$, în funcție, de α și de puterile lui k_1 și k_2 date mai sus.

Soluție. Avem:

$$a^\alpha = A \text{ și } b^x = B \tag{3}$$

și ținînd seama de relațiile (1) și (2), avem:

$$k_1^{m\alpha} \cdot k_2^{m'\alpha} = k_1^p \cdot k_2^{p'} \text{ și } k_1^{nx} \cdot k_2^{n'x} = k_1^q \cdot k_2^{q'} \tag{3'}$$

Logaritmăm în baza k_2 aceste ultime două relații și obținem:

$$\left.\begin{aligned} m\alpha \log_{k_2} k_1 + m'\alpha \log_{k_2} k_2 &= p \log_{k_2} k_1 + p' \log_{k_2} k_2 \\ \text{și} \qquad n x \log_{k_2} k_1 + n' x \log_{k_2} k_2 &= q \log_{k_2} k_1 + q' \log_{k_2} k_2, \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

sau

$$\left.\begin{aligned} m\alpha \log_{k_2} k_1 + m'\alpha &= p \log_{k_2} k_1 + p' \\ \text{și} \qquad n x \log_{k_2} k_1 + n' x &= q \log_{k_2} k_1 + q' \end{aligned}\right\} \quad (4')$$

Prima din relațiile (4') ne dă: $\log_{k_2} k_1 = \dfrac{p' - m'\alpha}{m\alpha - p}$,

valoarea pe care introducînd-o în a doua relație obținem:

$$x\left(n \cdot \frac{p' - m'\alpha}{m\alpha - p} + n'\right) = q \cdot \frac{p' - m'\alpha}{m\alpha - p} + q',$$

de unde

$$x = \frac{q(p' - m'\alpha) + q'(m\alpha - p)}{n(p' - m'\alpha) + n'(m\alpha - p)} \quad (5)$$

ceea ce reprezintă tocmai relația ce o căutam.

Cu această ocazie am rezolvat următoarea problemă generală:

Dacă se cunoaște valoarea logaritmului, într-o bază oarecare $a = k^m, k_2^{m'}$, a unui număr $A = k^p \cdot k_2^{p'}$, atunci cu ajutorul formulei (5) putem calcula logaritmul, într-o bază $b = k_1^n \cdot k_2^{n'}$ oricărui număr ce poate fi adus la forma $B = k_1^q \cdot k_2^{q'}$ unde $k_1, k_2, m, m', n, n', p, p', q, q'$ sînt numere oarecare.

Observare. Pentru $p = p'$ și $m = m'$; $n = n'$ expresia $n(p' - m'\alpha) + n'(m\alpha - p) = 0$ și expresia de la (5) nu are sens.

Aplicație: Luînd $a = 10$, $b = 10$, $A =$ un număr al cărui logaritm zecimal îl cunoaștem (diferit de 10 sau de o putere a acestuia) și care poate fi adus la forma $A = 2^p \cdot 5^{p'}$, putem calcula cu ajutorul formulei (5) fără ajutorul tabelelor, logaritmul oricărui număr ce poate fi adus la forma $B = 2^q\ 5^{q'}$.

Într-adevăr, presupunînd cunoscut, spre exemplu, că $\log 2 = 0{,}30103$. fie de calculat logaritmul zecimal al numărului 0,0128.

Observînd că $0{,}0128 = \dfrac{128}{10.000} = \dfrac{8}{625} = 2^3 \cdot 5^{-4}$.

Avem: $a = 2 \cdot 5$; $b = 2 \cdot 5$; $A = 2^r \cdot 5^0$; $B = 2^3 \cdot 5^{-4}$; $\alpha = 0{,}30103$.

Deci

$$x = \frac{3(0 - 0{,}30103) + (-4)(0{,}30103 - 1)}{0 - 0{,}30103 + 0{,}30103 - 1} = \frac{-7 \times 0{,}30103 + 4}{-1} =$$

$$= \frac{4 - 2{,}10721}{-1} = 2{,}10721 - 4 = \bar{2}{,}10721,$$ rezultat identic cu cel din tabele.

Observare: cînd $a = 56$, $b = 14$, $A = 98$, $B = 112$, obținem problema 21 din capitolul IV, pagina 223 a primului volum al lucrării amintite.

Ghica S. Anton, elev cl. a IX-a, ș. m. 1 Pitești

ASUPRA UNOR PROBLEME DE GEOMETRIE ANALITICĂ

În manualul de geometrie analitică (autor Gh. D. Simionescu, ediția 1953), este propusă problema nr. 316:

Fie F focarul unei parabole, M un punct mobil pe ea și A un punct fix pe axa de simetrie. Să se găsească locul geometric al intersecției dreptei MF cu paralela dusă prin A la tangenta în M.

Să se dea și o soluție geometrică (S.G.M. VIII).

Calea analitică (se alege ca parametru variabil ordonata punctului variabil M, care se elimină între ecuațiile dreptelor indicate) și cea geometrică (se folosește proprietatea comună a conicelor privind tangenta ca bisectoare a unghiului format de razele vectoare, în cazul parabolei, una din razele vectoare fiind paralelă cu axa) duc la același rezultat: cercul cu centrul în focarul F și cu raza FA.

Întrucît proprietatea de mai sus a tangentei este comuna tuturor conicelor, s-ar părea că aceeași problemă aplicată unei elipse (respectiv hiperbolei), ar trebui să ducă la același rezultat (sau asemănător).

O încercare în acest sens ne duce la o ecuație complicată de gradul IV. De altfel, construcția făcută în cazul unei elipse ne arată (ținînd seama de proprietatea tangentei) că nu se obține ca în cadrul parabolei, un triunghi isoscel. Deci FP (unde P este punctul de intersecție a lui MF cu o paralelă prin A dusă la tangentă) nu este o lungime constantă.

Explicația acestui fapt este următoarea:

Punctul A nu trebuie considerat, în cazul general, pe axa conicei, ci pe o paralelă dusă prin F (focar) la raza vectoare care pornește din celălalt focar.

În cazul parabolei, paralela dusă prin F la cealaltă rază vectoare (cu focarul la infinit) coincide cu axa parabolei și de aceea punctul A se ia pe axa xx').

Deci în cazul elipsei (resp. hiperbolei) punctul A se află pe o dreaptă variabilă AF, paralelă cu cealaltă rază vectoare, distanța AF fiind constantă, iar în cazul parabolei, punctul A se află pe o dreaptă fixă.

În aceste condiții punctul P descrie în fiecare caz cîte un cerc cu centrul în F și cu raza AF (resp. A_1F în cazul elipsei și pentru a se deosebi de cazul parabolei, se duce paralela din punctul A_1 întrucît cu A se notează, de obicei, extremitatea pozitivă a axei mari).

A. Deutsch, profesor Rădăuți

A TREIA OLIMPIADĂ INTERNAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

În perioada 5—16 iulie 1961 a avut loc în Republica Populară Ungară, a treia Olimpiadă internațională de matematică organizată de Societatea de matematică „Janos Bolyai", cu sprijinul Ministerului Culturii Populare din R.P.U., la care au participat elevi ai școlilor medii din țările socialiste. Lucrările Olimpiadei s-au desfășurat la Budapesta, Veszprém și Kesthely. Programul alcătuit de organizatorii OIM a fost, în linii mari, următorul:

a) pregătirea subiectelor pentru lucrările scrise ale Olimpiadei (Budapesta, 5—7 iulie 1961),

b) Olimpiada propriu-zisă : lucrările scrise și corectarea lor (Veszprém, 8—11 iulie),

c) discutarea lucrărilor scrise și stabilirea premiilor (Keszthely, 12 iulie),

d) încheierea lucrărilor celei de-a treia Olimpiade internaționale de matematică (Budapesta, 14 iulie).

Aceste activități au alternat cu organizarea de excursii, vizitarea unor orașe și a monumentelor istorice întîlnite. Participanții la Olimpiadă au avut astfel prilejul să cunoască realizările obținute de poporul frate maghiar, în anii regimului democrat-popular, să admire frumusețile împrejurimilor lacului Balaton și ale Capitalei Budapesta.

Lotul de elevi participanți din țara noastră a fost însoțit de Gh. D. Simionescu, conferențiar la Institutul Politehnic București și I. Mușat, inspector general în Ministerul Învățămîntului și Culturii.

La Veszprém a avut loc un schimb de păreri între toți profesorii însoțitori, pe marginea unui referat asupra modului în care s-ar putea introduce elemente moderne de matematici în școala medie, fără să se tragă concluzii din convorbiri. La Budapesta, după festivitatea înmînării premiilor, s-a ținut o ședință în care s-au purtat discuții asupra viitoarei ediții a Olimpiadei internaționale de matematică. Delegatul ceh, prof. R. Zelinka, a anunțat că viitoarea ediție a OIM va fi organizată în R. S. Cehoslovacă. Cu această ocazie, delegații au fost rugați să dea sugestii cu privire la organizarea viitoarei ediții a OIM și să trimită pînă în luna aprilie 1962, problemele propuse în vederea concursului.

Credem că este bine să atragem atenția că țara noastră este angajată în această acțiune și că este de dorit să trimitem probleme interesante, variate, de diferite grade de dificultate și care să aibă un caracter mai deosebit. În acest sens, adresăm tuturor profesorilor de matematici un călduros apel să trimită Societății astfel de probleme pînă la sfîrșitul lunii ianuarie 1962, din care să se poată alege cele mai indicate pentru a fi expediate organizatorilor OIM.

*

După cum se știe, inițiativa acestor întreceri internaționale aparține țării noastre și primele două ediții ale OIM au avut loc în R. P. Romînă în anii 1959 și 1960. Organizatorii maghiari au considerat că felul în care s-au desfășurat primele două olimpiade a fost destul de bun — lucru pe care dealtfel l-au și subliniat — și au urmat aceeași linie în alcătuirea programului. Dar o astfel de acțiune nu se mărginește numai la un concurs urmat de premieri, ci vizează și alte obiective care sînt tot atît de importante ; cunoașterea reciprocă a climatului școlar în țările socialiste, contactul direct între profesori și schimbul de idei asupra metodelor de predare a diferitelor capitole de matematică în învățămîntul mediu a introducerii unor elemente de matematică moderne, dar mai ales, stabilirea relațiilor de prietenie între elevii cei mai buni din țările socialiste, ceea ce întărește certitudinea unor strînse colaborări științifice între viitorii oameni de știință din aceste țări.

În acest sens, simpla alcătuire a unui program al Olimpiadei nu este decît un punct de plecare ; ceea ce dă viață acțiunii în ansamblul ei este atmosfera care se crează în cadrul acestui program. Trebuie să recunoaștem din toată inima că — după cum și noi am procedat în anii precedenți — colegii noștri maghiari au făcut tot ce le-a stat în putință pentru a crea o atmosferă plăcută,

începînd cu primirea călduroasă și continuînd cu atenția pe care au arătat-o mereu participanților la OIM, pentru ca aceștia să se simtă bine. Aceasta a fost condiția reușitei Olimpiadei ediția 1961, ca și a Olimpiadelor precedente.

*

Subiectele lucrărilor scrise de la OIM se găsesc publicate în Gazeta matematică și fizică, seria B nr. 9/1961. Din parcurgerea lor se observă că unele probleme sînt mai pretențioase fără să necesite calcule lungi (de ex., ecuația trigonometrică), altele, deși simple, sînt mai puțin obișnuite (prima problemă de geometrie) și că se pune un accent deosebit pe discuții, atît la chestiunile de algebră, cît și la cele de geometrie. Se poate spune că nivelul acestei Olimpiade a fost mai ridicat decît al celor precedente.

Ca și la edițiile precedente ale OIM, cercetarea lucrărilor s-a făcut cu o deosebită grijă și avînd în vedere criteriile stabilite în comun de către comisia internațională, astfel ca notarea să fie cît mai justă.

În cele ce urmează vrem să dăm cîteva date asupra rezultatelor obținute de diferitele echipe de elevi, pentru a putea aprecia rezultatele obținute de elevii noștri.

Situația numerică a premiilor și mențiunilor este următoarea :

	Premii			
	I	II	III	Mențiuni
R. P. Bulgaria	—	—	—	1
R. S. Cehoslovacă	—	—	1	1
R. D. Germană	—	—	1	—
R. P. Polonă	1	—	—	2
R. P. Romînă	—	1	1	4
R. P. Ungară	2	3	1	2
Total . . .	3	4	4	10

Menționăm că, în afara premiilor și a mențiunilor s-au acordat și mențiuni de încurajare.

Echipa noastră a obținut 2 premii și 4 mențiuni, fără a avea însă și un premiu I. Considerăm că rezultatul obținut de elevii noștri este bun, fiindcă din 8 elevi participanți, 6 au primit distincții. Trebuie să amintim că și la Olimpiada noastră internă, la faza finală, nu s-a putut acorda premiul I la clasa a XI, astfel încît rezultatele OIM sînt oarecum în concordanță cu cele ale olimpiadei interne.

Dintre elevii noștri au fost evidențiați următorii :

Premiul II — Năstăsescu M. Const. cl. XI ș. m. Pucioasa (reg. Ploiești),

Premiul III — Zamfirescu I. Tudor, cl. XI ș. m. 22 „Gh. Lazăr", București.

Mențiuni : Popa I. Nicolae, cl. XI ș. m. 1 „Unirea" Focșani (reg. Galați),
Strătilă C. Șerban, cl. XI ș. m. „N. Bălcescu" Pitești (reg. Argeș),
Buimovici M. Alex., cl. X ș. m. 18 „M. Eminescu", București,
Diaconescu C. Radu, cl. X ș. m. Pucioasa (reg. Ploiești).

Cu această ocazie trebuie să scoatem în evidență faptul că, deși în „Gazeta învățămîntului" din 15 septembrie 1960 a apărut un articol, în care se atrăgea atenția asupra unor lipsuri ale elevilor noștri care au participat la OIM ediția

1960 și deși anul acesta s-a discutat cu elevii noștri asupra acestor lipsuri atît în cantonament, la București, cît și la Veszprém, greșelile de anul trecut s-au repetat. De aceea, considerăm că trebuie luate o serie de măsuri cu caracter permanent, astfel ca pe durata unui an elevii să capete deprinderea de a lucra în sensul unei tratări mai riguroase și complete a problemelor așa cum se cere și la OIM. Aceste măsuri vor fi precizate cu ocazia discutării mai pe larg, a lucrărilor scrise, într-un articol ce se va publica ulterior în G.M.F. seria B.

*

Festivitatea împărțirii premiilor a avut loc la Budapesta în ziua de 14 iulie 1961, la „Casa Tehnicii" și a fost prezidată de acad. Alexits, președintele Societății de matematică „Janoș Bolyai". În cuvîntul de deschidere, d-sa a stăruit asupra importanței acestor olimpiade. Apoi tov. Joseph Fekete, subdirector în Ministerul Culturii Populare a salutat inițiativa țării noastre de a organiza în R.P.R. primele două ediții ale OIM și a accentuat asupra contribuției pe care aceste olimpiade o aduc cauzei prieteniei între tinerii din țările socialiste participante și păcii între popoare.

În numele delegațiilor participante a luat cuvîntul conf. univ. Gh. D. Simionescu, ca reprezentant al țării care a avut inițiativa acestor olimpiade.

Încheiem aceste rînduri cu observarea pe care am făcut-o și la Budapesta, că olimpiada internațională de matematică din acest an constituie de fapt, consolidarea pe plan internațional a acestor manifestări culturale, deoarece este prima oară cînd a fost organizată în afara țării noastre și prin aceasta începe să se creeze tradiția olimpiadelor internaționale științifice.

Gh. D. Simionescu

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ ȘI FIZICĂ 1962

PROGRAMA MATERIEI CERUTĂ PENTRU OLIMPIADELE DE MATEMATICĂ ȘI FIZICĂ PE ETAPE

MATEMATICĂ

I — *Etapa locală — la 11 februarie 1962*

A — *Clasa a VIII-a și anul I școli pedagogice*

1. *Algebră:* Numere raționale, expresii algebrice, expresii raționale fracționare, expresii iraționale (pînă la capitolul: Ecuația de gradul I).
2. *Geometrie:* Unghiuri, triunghiuri, perpendiculare și oblice (pînă la capitolul: Drepte paralele).

B — *Clasa a IX-a și anul II școli pdegogice*

1. *Algebră*: Ecuații de grad superior care se reduc la gradul II, sisteme de ecuații de gr. II (pînă la șiruri de numere).
2. *Geometrie:* Segmente proporționale, asemănarea triunghiurilor și poligoanelor (pînă la capitolul: Relații metrice).

C — *Clasa a X-a*

1. *Algebră:* Analiza combinatorie și binomul lui Newton, divizibilitatea numerelor și polinoamelor, cel mai mare divizor comun și cel mai mic multiplu comun al numerelor și polinoamelor (pînă la capitolul: Numere complexe).

2. *Geometrie:* Drepte și plane paralele, drepte perpendiculare pe un plan, proiecții, unghiuri diedre și plane perpendiculare (pînă la capitolul: Poliedre).
3. *Trigonometrie:* Funcții trigonometrice (pînă la capitolul: Formule fundamentale). (*La anul III școli pedagogice* se cere materia predată la zi).

D — *Clasa a XI-a*

1. *Analiză matematică:* Numere, noțiuni elementare despre mulțimi, șiruri, puteri și logaritmi, simboluri cu $+\infty$ și $-\infty$ funcții, limite de funcții, continuitate (pînă la capitolul: Derivate).
2. *Geometrie analitică:* Geometrie pe o dreaptă, geometria în plan, linia dreaptă, locuri geometrice (pînă la capitolul: Cercul).

E — *Anul I școli profesionale*

1. *Algebra* (pînă la ecuațiile de gradul I).
2. Geometria plană.

F — *Anul II școli profesionale*

Sisteme de ecuații; reprezentări grafice; puteri, radicali.

G — *Anul I școli tehnice de maiștri*

1. Aritmetica. 2. Algebra, pînă la ecuații de gradul I. 3. Geometria plană, pînă la poligoane regulate. 4. Trigonometria pînă la variații de funcții.

H — *Anul II școli tehnice de maiștri*

Toată materia de pe trimestrul I.

II — *Etapa regională — la 23—25 martie 1962*

A — *Clasa a VIII-a și anul I școli pedagogice*

1. *Algebră:* La această etapă, pe lîngă materia prevăzută pentru prima etapă se mai adaugă și capitolele: Ecuația de gradul I, sisteme de ecuații de gr. I cu 2 și 3 necunoscute pînă la capitolul Inegalități de gradul I).
2. *Geometrie:* în plus: drepte paralele, patrulatere (pînă la capitolul: Drepte concurente în triunghi).

B — *Clasa a IX-a și anul II școli pedagogice*

1. *Algebră:* în plus capitolul: Șiruri de numere (pînă la capitolul: Funcții exponențiale).
2. *Geometrie:* în plus capitolul: Relații metrice (pînă la capitolul: Poligoane regulate).

C — *Clasa a X-a*

1. *Algebră:* în plus capitolul: Numere complexe (pînă la capitolul: Proprietăți ale polinoamelor și rezolvarea ecuațiilor).
2. *Geometrie:* în plus capitolul: Poliedre (pînă la capitolul: Corpuri rotunde).
3. *Trigonometrie:* în plus capitolul: Formule fundamentale, rezolvarea triunghiului dreptunghic (pînă la Relații între elementele triunghiurilor oarecare).

(La anul III școli pedagogice se cere materia predată la zi).

D — *Clasa a XI-a*

1. *Analiza matematică:* Capitolul: Derivate (pînă la studiul funcțiilor cu ajutorul derivatelor).
2. *Geometrie analitică:* în plus capitolul: Cercul, Elipsa (pînă la cap. Hiperbola).

E — *Anul I școli profesionale*

1. *Geometria în spațiu* pînă la cap. Cilindrul.
2. *Algebră:* Ecuații de gr. I.

F — *Anul II școli profesionale*

1. *Trigonometria* (pînă la triunghiul dreptunghic).
2. *Algebra:* Ecuația de gradul II.

G — *Anul I şcoli tehnice de maiştri*

1. Algebra pînă la ecuaţiile de grad superior. 2. Trigonometria pînă la Relaţii şi formule trigonometrice.

H — *Anul II şcoli tehnice de maiştri*

Toată materia anului I şi anului II.

III — *Etapa finală — la 10—13 iunie 1962*

Întreaga materie.

FIZICĂ

I — *Etapa locală, la 18 februarie 1962*

Clasa VIII-a

Materia pînă la capitolul: Dinamica.

Clasa X-a de zi şi serală

Materia pînă la „Curentul electric în electroliţi".

Clasa XI-a de zi, serală şi şcoli tehnice pentru personal tehnic

Materia pînă la capitolul: Optica.

Clasa VIII serală

Materia pînă la capitolul: Atracţia universală.

Clasa IX-a serală

Materia pînă la capitolul: Proprietăţile lichidelor.

Şcoli pedagogice

Pentru toţi anii: materia predată la zi.

Anul I şcoli profesionale

Toată mecanica teoretică.

Anul I şcoli tehnice de maiştri

Materia pînă la capitolul: Electricitatea.

II — *Etapa regională, la 23—25 martie 1962*

Clasa VIII-a

De la început pînă la capitolul: Atracţia universală.

Clasa IX-a

De la început pînă la capitolul: Proprietăţile corpurilor lichide.

Clasa X-a şi a X-a serală

De la început pînă la capitolul: Forţa electrodinamică.

Clasa XI-a zi, serală şi şcoli tehnice pentru personal tehnic

De la început pînă la capitolul: Optica fizică.

Clasa VIII serală

De la început pînă la capitolul: Planul înclinat.

Clasa IX serală

De la început pînă la capitolul: Stările de agregare.

Anul I şcoli profesionale

Mecanica teoretică şi rezistenţa materialelor.

Anul I şcoli tehnice de maiştri

De la început plus capitolul: Electricitatea.

III — *Etapa finală, la 10—13 iunie 1962*

Toată materia.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ, MECANICĂ ŞI FIZICĂ PENTRU STUDENŢI 1961

Între 19—21 noiembrie 1961 a avut loc la Bucureşti în localul Facultăţii de matematică şi fizică a Universităţii C. I. Parhon etapa finală a celui de-al V-lea concurs de matematică, mecanică şi fizică pentru studenţi, organizat de Societatea de ştiinţe matematice şi fizice din R.P.R. şi Comitetul executiv al Uniunii Asociaţiilor studenţilor din R.P.R., cu sprijinul Ministerului Învăţămîntului şi Culturii.

Au participat 266 de studenţi din Bucureşti, Iaşi, Cluj, Timişoara, Petroşeni, Braşov, Galaţi şi Craiova.

Concursul a constat din două lucrări scrise eliminatorii şi o probă orală sau de laborator.

Studenţilor care au obţinut cele mai bune rezultate li s-au acordat premii şi menţiuni după cum urmează:

PREMIUL I

1. Rădulescu Eugen, anul III fizică, * Universitatea Bucureşti; 2. Vişinescu Mihai, anul III fizică, Universitatea Bucureşti; 3. Tomescu Ion, anul II matematică, Universitatea Bucureşti; 4. Stancu Florea, anul V fizică, Universitatea Bucureşti; 5. Constantinopol Alex., anul III fizică, Institutul politehnic Bucureşti; 6. Fazakaş Antal, anul II fizică, Universitatea Bucureşti.

PREMIUL II

1. Aldea Alexandru, anul V fizică, Universitatea Bucureşti; 2. Masgras Vasile, anul II matematică, Universitatea Bucureşti; 3. Dumitru Spiridon, anul I fizică, Universitatea Cluj; 4. Barbu Viorel, anul III matematica, Universitatea Iaşi; 5. Brînzei Dan, anul III matematică, Universitatea Iaşi; 6. Nanu Octavian, anul III matematică, Universitatea Iaşi; 7. Iftode Sorel, anul II, Institutul Politehnic Iaşi.

PREMIUL III

1. Damalan Maria, anul V fizică, Universitatea Bucureşti; 2. Craioveanu Mircea, anul II matematică, Universitatea Iaşi; 3. Beju Iulian, anul II matematică, Universitatea Bucureşti; 4. Ştefănescu Mirela, anul III matematică, Universitatea Iaşi; 5. Grill Alfred, anul II fizică, Universitatea Iaşi; 6. Tutoş Nicolae, anul III, Institutul politehnic Iaşi; 7. Lipşa Radu, anul IV mecanică, Universitatea Bucureşti.

MENŢIUNI

1. Klincseck T., anul II matematică, Universitatea Cluj; 2. Burghelea Dan, anul II matematică, Universitatea Bucureşti; 3. Lupu Vasile, anul II fizică, Universitatea Bucureşti; 4. Nistor Sergiu, anul III fizică, Universitatea Cluj; 5. Catrina D-tru, anul II, Institutul politehnic Bucureşti; 6. Ionescu Sorin P., anul III, Institutul politehnic Bucureşti; 7. Demco Dan, anul II fizică, Universitatea Cluj; 8. Zet Gheorghe, anul II fizică, Universitatea Bucureşti; 9. Udrea C-tin, anul II, Institutul politehnic Bucureşti; 10. Ixaru Liviu, anul III fizică, Universitatea Bucureşti; 11. Oproiu Vasile, anul III matematică, Universi-

---

* Obiectul pus după an înseamnă că studentul s-a prezentat la concursul pentru disciplina respectivă.

tatea Iași; 12. Munteanu Valeriu, anul II, Institutul politehnic Iași; 13. Fildan Mircea, anul V matematică, Universitatea București; 14. Bergthaler Cristian, anul III matematică, Universitatea București; 15. Nicolescu Basarab, anul II fizică, Universitatea București; 16. Piscupescu Gabriel, anul II, Institutul petrol București; 17. Lungu Șerban, anul II, Institutul politehnic Cluj; 18. Tudor C-tin, anul V matematică, Universitatea București; 19. Glovațchi Traian, anul III, Institutul politehnic Iași; 20. Mülbhacher Rudolf, anul III, Institutul politehnic Iași.

EVIDENȚIAȚI

1. Bălăcenoiu Ioan, anul III matematică, Institutul pedagogic Iași; 2. Benkö Iosif, anul III matematică, Universitatea Cluj; 3. Enache Marin, anul III, Institutul pedagogic Timișoara; 4. Petruș Octavian, anul II fizică, Universitatea Iași; 5. Schiller Ghizela, anul II fizică, Universitatea Cluj; 6. Bivoroș Leopild, anul III fizică, Universitatea Iași; 7. Ioachim Alex., anul II matematică, Institutul politehnic București; 8. Chisăliță Adrian, anul II matematică, Institutul politehnic Cluj; 9. Cușmaru Dady, anul II, Institutul politehnic Timișoara; 10. Micu Radu, anul II, Institutul politehnic Cluj; 11. Talpalaru Pavel, anul V matematică, Universitatea Iași; 12. Udriște C-tin, anul IV matematică, Institutul pedagogic Timișoara; 13. Sava Radu, anul II fizică, Institutul politehnic Brașov; 14. Turcanu C-tin, anul III, Institutul construcții București; 15. Oprișan Marina, anul IV, Institutul politehnic Brașov; 16. Comșa Radu, anul II, Institutul construcții București.

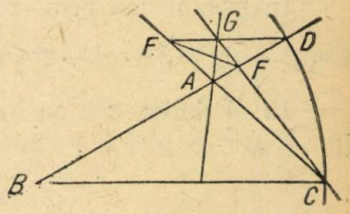
PROBLEME REZOLVATE

Problema 4490

În triunghiul oarecare ABC cercul de rază BC și de centru B taie pe AB în D. Paralela din D la BC taie pe AC în E. Bisectoarea unghiului AED taie pe AD în F. Dreptele FC, DE și bisectoarea unghiului A sînt concurente. (În legătură cu problema 3945).

C. Tudor, student București

Soluție. Intersectînd dreptele DE și AG (bisectoarea unghiului A) obținem punctul G. Pentru a demonstra că și FC trece prin G este suficient să verificăm colinearitatea punctelor F, C, G și deci, pe baza teoremei lui Menelaus aplicată triunghiului AED avem:



$$\frac{CE}{CA}\cdot\frac{FA}{FD}\cdot\frac{GD}{GE}=+1 \qquad (1)$$

Deoarece DE este paralelă cu BC și EF, AG sînt bisectoare interioare înseamnă că mai avem: $\frac{CE}{CA}=\frac{BD}{BA}$; $\frac{FA}{FD}=\frac{EA}{ED}=\frac{CA}{CB}$; $\frac{GD}{GE}=\frac{AD}{AE}=\frac{AB}{AC}$ și relația (1) devine: $\frac{BD}{BA}\cdot\frac{CA}{CB}\cdot\frac{AB}{AC}=+1.$ (2)

și deoarece $BD = BC$ egalitatea (2) devine evidentă. Rezultă că punctele F, C, G sînt colineare sau, că dreptele FC, DE, AG sînt concurente.

În particular, dacă triunghiul ABC este isoscel cu baza BC, dăm peste problema 3945.

S-au primit soluții bune de la *V. Olteanu*, elev București, *N. Popa*, elev Focșani, *Mircea Stan*, elev București.

Problema 4498

Să se rezolve ecuația:

$$p\sqrt[n]{a^2+\sqrt{a^4-x^2}}-2(p-q)\sqrt[n]{a^2-\sqrt{a^4-x^2}}=(p+q)\sqrt[n]{x}$$

unde n este un număr natural.

Emilian P. Moflic

Soluție dată de *N. Popa*, elev Focșani. Împărțim ecuația la $\sqrt[n]{a^2-\sqrt{a^4-x^2}}$ și avem:

$$p\sqrt[n]{\frac{a^2+\sqrt{a^4-x^2}}{a^2-\sqrt{a^4-x^2}}}-2(p-q)=(p+q)\sqrt[n]{\frac{x}{a^2-\sqrt{a^4-x^2}}}\text{ sau:}$$

$$p\left(\sqrt[n]{\frac{x}{a^2-\sqrt{a^4-x^2}}}\right)^2-2(p-q)=(p+q)\sqrt[n]{\frac{x}{a^2-\sqrt{a^4-x^2}}}$$

Notînd $y=\sqrt[n]{\frac{x}{a^2-\sqrt{a^4-x^2}}}$, avem:

$py^2-(p+q)y-2(p-q)=0$ de unde $y_1=2$ și $y_2=\frac{q-p}{p}$.

Deci: $\sqrt[n]{\frac{x}{a^2-\sqrt{a^4-x^2}}}=2$ sau $\sqrt[n]{\frac{x}{a^2-\sqrt{a^4-x^2}}}=\frac{q-p}{p}$.

Obținem: $x=2^na^2-2^n\sqrt{a^4-x^2}$ și $x=\frac{(q-p)^n}{p^n}a^2-\frac{(q-p)^n}{p^n}\sqrt{a^4-x^2}$.

În primul caz prin izolarea radicalului și ridicarea la patrat avem: $2^{2n}(a^4-x^2)=2^{2n}\cdot a^4-2^{n+1}a^2x+x^2$, cu rădăcinile $x_1=0$ și $x_2=\frac{2^{n+1}a^2}{2^{2n}+1}$.

În al doilea caz se ajunge la ecuația $[(q-p)^{2n}+p^{2n}]x^2-2p^n(q-p)^na^2x=0$ cu rădăcinile $x_1=0$ și

$$x_2=\frac{2p^n(q-p)^na^2}{(q-p)^{2n}+p^{2n}}.$$

Se observă că soluția $x=0$ nu corespunde.

Deci soluțiile ecuației sînt:

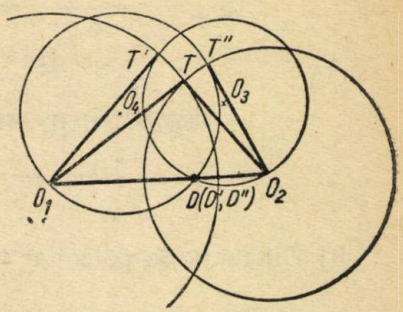
$$x_1=\frac{2^{n+1}a^2}{2^{2n}+1}\text{ și }x_2=\frac{2p^n(q-p)^n\cdot a^2}{(q-p)^{2n}+p^{2n}}.$$

Problema 4508

Se dau cercurile ortogonale (O_1) și (O_2). Să se arate că cercul ortogonal cu cercul (O_1) și care trece prin centrul cercului (O_2) și cercul ortogonal cu cercul (O_2) și care trece prin centrul cercului (O_1) au un punct comun cu linia centrelor cercurilor (O_1) și (O_2).

Gh. Cezar, Buzău

Soluție. Se notează cu (O_3) și cu (O_4) cercurile respective ortogonale cercurilor (O_1) și (O_2) și care trec prin centrele O_2 și O_1 respectiv ale cercurilor (O_2) și (O_1). Dreapta O_1O_2 intersectează cercurile (O_3) și (O_4) respective în punctele D' și D''. Fie T, T', T'' respectiv cîte una din intersecțiile cercurilor (O_1) și (O_2), (O_3) și (O_1), (O_4) și (O_2). Ținînd seama că cercurile (O_1) și (O_2) sînt ortogonale și că $O_1T = O_1T'$ și $O_2T = O_2T''$ ca raze, rezultă:



$$O_1O_2^2 = O_1T^2 + O_2T^2 = O_1T'^2 + O_2T''^2 \quad (1)$$

Ortogonalitatea cercurilor (O_1) și (O_3), a cercurilor (O_2) și (O_4), puterea punctului O_1 față de cercul (O_3), și puterea punctului O_2 față de cercul (O_4) dau:

$$O_1T'^2 = O_1D' \cdot O_1O_2\,; \quad O_2T''^2 = O_2D'' \cdot O_2O_1 \quad (2)$$

Adunînd relațiile (2) și ținînd seama de relația (1) rezultă:

$$O_1O_2^2 = O_1T'^2 + O_2T''^2 = O_1O_2(O_1D' + D''O_2)$$
$$O_1O_2 = O_1D' + D''O_2\,; \; D''O_2 = O_1O_2 - O_1D' = D'O_2$$

și cum punctele D' și D'' sînt situate pe dreapta O_1O_2 ele coincid în punctul D, comun cercurilor (O_3) și (O_4) și situat pe linia centrelor O_1O_2.

Problema 4515

Un condensator de 20μF și o bobină de inducție variabilă a cărui rezistență este de 50 Ω și inductanță este 1,33 Ω sînt conectate la o sursă de 110 V cu frecvența de 48 Hz. Pentru montajul în serie și în paralel să se calculeze:

a) *Curentul furnizat de generator și defazajul în raport cu diferența de potențial a generatorului.*

b) *Diferența de potențial la bornele bobinei și condensatorului.*

c) *Se modifică apoi, inductanța bobinei, astfel încît prin montajul în serie să avem maximul de curent provenit de la generator. Să se răspundă la cele două întrebări precedente ținînd seama de această nouă valoare a inductanței.*

C. d. P.

Soluție. a) receptorii în serie. Se știe că în acest caz este suficient să se facă suma tuturor rezistențelor, a reactanțelor inductive și capacitive și, pentru a obține impedanța echivalentă a tuturor acestor receptori. Avem:

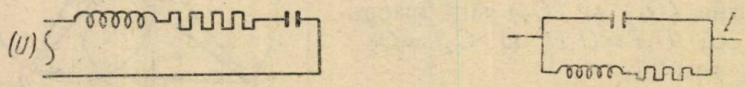
$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{c\omega}\right)^2} = \sqrt{50^2 + \left(1{,}33 \cdot 2\pi \cdot 48 - \frac{10^6}{20 \cdot 2\pi \cdot 48}\right)^2} = 241\ \Omega.$$

Deci, curentul va fi: $\frac{U}{Z} = \frac{100}{241} = 0{,}415\ A.$

Defazajul φ este dat de:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{c\omega}}{R} = \frac{1{,}33 \cdot 300 - \frac{10^6}{20 \cdot 300}}{50} = 4{,}67$$

$$(\omega = 2\pi \cdot 48 = 300)$$



a. b.

b) Diferența de potențial x_c la bornele condensatorului:

$$x_c = \frac{1}{c\omega} I$$

Diferența de potențial X_L la bornele bobinei va fi:

$$X_L = Z_{LI} = \sqrt{50^2 + (1{,}33 - 300)^2} \times 0{,}415 = 167{,}2 \text{ V.}$$

Receptorii în paralel. 1° Curentul în condensator:

$$I_c = \frac{U}{\frac{1}{c\omega}} = \frac{100 \cdot 20 \cdot 300}{10^6} = 0{,}6\,A \text{ cu } \varphi_c = \frac{\pi}{2}.$$

Curentul în bobină:

$$I_L = \frac{U}{Z_2} = \frac{100}{\sqrt{50^2 + (1{,}33 - 300)^2}} = 0{,}248\,A$$

cu $\operatorname{tg}\varphi = \frac{L\omega}{R} = \frac{400}{50} = 8.$

c) În montajul în serie, curentul este maxim la rezonanță, adică atunci cînd $L_\omega = \frac{1}{c\omega}$ sau $L \cdot 300 = \frac{10^6}{20 \cdot 300}$, unde $L = 0{,}55\,H.$

1°) În acest moment valoarea curentului este:

$$I' = \frac{U}{R} = \frac{100}{50} = 2A.$$

2°) Diferența de potențial la bornele condensatorului devine:

$$x_c = \frac{I'}{c\omega} = \frac{2 \cdot 10^6}{20 \cdot 300} = 333 \text{ V,}$$

iar la bornele bobinei:

$$x_L = I' z_L = 2\sqrt{50^2 + (0{,}55 - 300)^2} = 344 \text{ V.}$$

Tensiunea la bornele condensatorului și bobinei pot să atingă, la rezonanță, valori mult superioare valorilor nominale și pentru aceasta fenomenele de rezonanță sînt periculoase în rețele.

3° În montajul în paralel:

$$I_L = \frac{100}{\sqrt{50^2 + (0{,}55 - 300)^2}} = 0{,}581\,A$$

cu $\operatorname{tg}\varphi_L = \frac{165}{50} = 33$, pe cînd I_C rămîne egal cu 0,6 A.

Problema E : 1613

Ionel pleacă de acasă la ora 7 și 30 minute și ajunge la școală la ora 8. După terminarea cursurilor pleacă de la școală la ora 12 și 5 minute și ajunge acasă la ora 12 fără un sfert. Știind că amîndouă ceasurile merg bine, numai că ceasul lui Ionel nefiind întors de cu seară a stat, iar tatăl său l-a pus la întîmplare, să se spună cu cîte minute trebuie să fie dat înainte ceasul lui Ionel pentru a fi potrivit după acel al școlii și ce distanță este între casă și școală dacă Ionel merge cu viteza de 3 km/oră.

I. Albescu, Făgăraș

Soluție. $8 - 7\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ oră avansul ceasului plus timpul necesar parcurgerii drumului de acasă la școală.

$12\ \frac{5}{60} - 11\frac{45}{60} = \frac{1}{3}$ oră diferența dintre avansul ceasului școlii și timpul necesar parcurgerii drumului de acasă la școală

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \text{ oră}$$

$\frac{5}{6} : 2 = \frac{5}{12}$ oră $= 25$ minute trebuie dat înainte ceasul lui Ionel

$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ oră; $\frac{1}{6} : 2 = \frac{1}{12}$ oră $= 5$ minute, sînt necesare pentru a parcurge drumul de acasă la școală

$3\ \text{km/oră} = \frac{3000\ \text{m}}{60\ \text{min}} = 50\ \text{m/min.}$; $50 \cdot 5 = 250\ \text{m}$ distanța de acasă la școală.

Problema E : 1615

În proiectul Planului de stat pe 1960 se prevăd următoarele niveluri, și creșteri :

a) *minereuri de fier — 1,4 milioane tone reprezentînd o creștere de 27% față de 1959 ;*

b) *producția de țesături de bumbac va ajunge la 235 milioane m.p. reprezentînd o creștere de 9% ;*

c) *în agricultură se vor investi în total, circa 4,4 miliarde lei, ceea ce reprezintă o creștere de peste 25% față de anul 1959.*

Să se afle care au fost nivelurile producției în 1959.

* * *

Soluție. a) În 1960 se vor produce 1,4 milioane tone de minereu de fier reprezentînd: 100% + 27% din producția anului 1959, deci producția din 1959 a fost:

$$x = \frac{1{,}4 \cdot 100}{127} = \frac{140}{127} = 1\frac{13}{127} \cong 1{,}1 \text{ milioane tone.}$$

b) Producția de țesături de bumbac va ajunge la 235 milioane m², reprezentînd: 100% + 9% = 109% din producția anului 1959, deci producția din 1959 a fost:

$$y = \frac{235 \times 100}{109} = 215\,\frac{65}{109} \cong 216 \text{ milioane m}^2.$$

c) În agricultură se vor investi circa 4,4 miliarde lei, ceea ce reprezintă 100% + 25% = 125% din investițiile pe 1959; deci în 1959 s-au investit circa:

$$z = \frac{4{,}4 \times 100}{125} = 3{,}52 \text{ miliarde lei.}$$

Problema E: 1628

La un magazin ferometal se vinde un colac de șină de butoi în formă de coroană circulară formată din 29 de cercuri bine apropiate unul de altul. Să se afle lungimea aproximativă a șinei din colac cunoscînd raza cercului mijlociu de 40,2 cm. Cît cîntărește colacul știind că șina are grosimea de 0,2 cm și lățimea de 5 cm. Densitatea metalului se ia 7,6 g/cm³.

Șerban Popescu

Soluție. Se observă că, dacă avem un număr impar de cercuri concentrice lungimea tuturor cercurilor este egală cu lungimea cercului mijlociu înmulțită cu numărul cercurilor.

În cazul nostru putem face aproximația de a considera colacul format din 29 cercuri concentrice, la care diferența razelor a două cercuri alăturate este tocmai grosimea șinei. Avem:

$$\text{a) } L = 2\pi R_m \cdot N = 2\pi \cdot 40{,}2 \cdot 29 = 80{,}4 \cdot 29\,\pi \text{ cm} =$$
$$= 2331{,}6\,\pi \text{ cm} \cong 7321{,}224 \text{ cm} \cong 73{,}21 \text{ m}$$

$$\text{b) Mai folosim formulele } \varrho = \frac{m}{v};\ m = \varrho v.$$

$$v = 0{,}2 \cdot 5 \cdot 7321 = 7321 \text{ cm}^3$$

$$m = 7{,}6\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 7321 \text{ cm}^3 = 7{,}6 \cdot 7321 \text{ g} = 55639{,}6 \text{ g} \cong 55{,}640 \text{ kg}.$$

CHESTIUNI DE EXAMEN *)

5015. Se dau cercurile, de ecuații:

$$(C_1)\ x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0;\quad (C_2)\ x^2 + y^2 - 4y = 0.$$

a) Să se determine coordonatele centrelor lor O_1 și O_2 și mărimea razelor R_1 și R_2. *b*) Din punctul O_1 se duc tangentele O_1B_2 și O_1C_2 la cercul (C_2) iar din punctul O_2 se duc tangentele O_2B_1 și O_2C_1 la cercul (C_1). Să se scrie ecuațiile acestor tangente și să se găsească coordonatele punctelor

*) La problemele 5015—5066 se primesc soluții pînă la 30 martie 1962.

lor de intersecție. c) Să se scrie ecuațiile dreptelor O_2B_1, O_1B_2, O_2C_1, O_1C_2 unde s-a notat cu B_1 și B_2 sau cu C_1 și C_2, punctele de contact aflate de aceeași parte față de linia centrelor.

(Facult. de matematică și fizică, București, 1961)

5016. Se dau două cercuri tangente exterioare în punctul A, avînd respectiv centrele O,O' și razele R,R' $(R \neq R')$. Se duc tangentele comune exterioare BC, $B'C'$ care intersectează tangenta comună interioară în D și respectiv D'. Se ia un punct P pe dreapta DD' și se duc tangentele din P la cercurile date ; se notează cu M, N intersecțiile acestor tangente cu BC și M', N' intersecțiile lor cu $B'C'$.

a) Să se arate că patrulaterul $ODO'D'$ este inscriptibil. b) Să se calculeze în funcție de R și R' aria corpului născut prin rotirea triunghiului ABC în jurul liniei centrelor OO'. c) Cum trebuie luat punctul P pe dreapta DD' pentru ca cercurile (O) și (O') să fie simultan interioare fie triunghiului PMN, fie triunghiului $PM'N'$.

d) Există vreo poziție a punctului P pe dreapta DD' pentru care dreapta PA să fie bisectoarea interioară a unghiului MPN ?

(Facult. de matematică și fizică, București, 1961)

5017. Să se reprezinte graficul funcției

$$f(x) = \frac{1}{\pi^2}\left[(\arcsin x)^2 + (\arccos x)^2\right].$$

(Facult. de matematică și fizică, București, 1961)

5018. Pentru ce valoare a lui x cuprinsă între 1 și 64 funcția $f(x) = (\log_2 x)^4 + 12\,(\log_2 x)^2 \log_2\left(\frac{8}{x}\right)$ are valoarea maximă ?

(Facult. de matematică și fizică, București, 1961)

5019. Să se reprezinte graficul funcției $f(x) = \frac{x^2+ax+1}{x^2-x+1}$, a fiind un parametru real. Pentru ce valori ale lui a, valorile lui $f(x)$ sînt situate, oricare ar fi x, între -3 și 2 ?

(Facult. de matematică și fizică, București, 1961)

5020. Să se găsească maximele și minimele funcției $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x$.

(Facult. de matematică și fizică, București, 1961)

5021. Să se calculeze viteza cu care trebuie să se rotească un satelit artificial al pămîntului pe o orbită cu raza de 9800 km pentru a se putea menține pe ea. Accelerația gravitațională la suprafața pămîntului (cu raza de 6400 km) este de 9,8 m/s^2. Care este durata unei rotații a satelitului în jurul pămîntului ?

(Facult. de matematică și fizică, București, 1961)

5022. Într-un calorimetru ce conține un litru de apă la 20°C se introduce un încălzitor electric format din 3 rezistențe egale de cîte 100 ohmi, legate în paralel la o baterie de 100 volți. Să se calculeze energia electrică ce se consumă pentru a aduce apa la temperatura de fierbere (100°C) și timpul necesar încălzirii pînă la această temperatură. Care va fi intensitatea curentului prin fiecare din rezistențe ?

(Facult. de matematică și fizică București 1961)

5023. Se dă un triunghi isoscel ABC în care unghiul B este de n ori mai mare decît unghiul A, n fiind un număr natural. Să se arate că se poate împărți triunghiul dat prin $(n-1)$ segmente de dreaptă în n triunghiuri isoscele astfel că laturile egale ale tuturor acestor triunghiuri să fie egale.

(Olimpiada de matematică din R. P. Ungară, 1960)

5024. Să se rezolve ecuația

$$\frac{\sin^2 3x}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x} = 4$$

(Olimpiada matematică, Praga 1961)

5025. Să se rezolve inegalitatea

$$\sqrt{(x+4)(x-5)} < 6x - 3$$

(Olimpiada matematică, Praga 1961)

5026. Să se reprezinte graficul funcției

$$y = \frac{1}{2}(|x+1| - |x-1|)$$

(Olimpiada matematică, Praga 1961)

5027. Să se rezolve ecuația

$$\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x.$$

(Olimpiada matematică, Praga 1961)

5028. Să se afle valorile numărului x pentru care expresia $E = x^4 - x^2 - 24$ este divizibilă prin 12.

(Olimpiada matematică, Praga 1961)

5029. Să se afle numerele naturale x și y care satisfac acuația

$$5x + 7y^2 = 1600.$$

(Olimpiadu matematică, Praga 1961)

PROBLEME PROPUSE *)

5030. Într-un patrulater oarecare segmentele determinate pe cele două diagonale de proiecțiile vîrfurilor patrulaterului sînt invers proporționale cu lungimile diagonalelor.

A. Deutsch, profesor Rădăuți

5031. Să se pună sub formă de produs expresia:

$$E = 2 - (\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x)$$

V. Bujdei, profesor Rădăuți

5032. Într-o progresie geometrică cu un număr fără soț de termeni primul termen este 7, cel de la mijloc 56, iar suma tuturor termenilor este 889. Să se afle rația și numărul termenilor.

V. Bujdei, profesor Rădăuți

---

*) VIII. (5033, 5035, 5041, 5061, 5063); (5030, 5034, 5036, 5037, 5038, 5045, 5050); X. (5031, 5032, 5040, 5042, 5044, 5049, 5051, 5054, 5055, 5056, 5059, 5060, 5062, 5066); XI. (5039, 5043, 5046, 5047, 5048, 5052, 5053, 5057, 5058, 5064, 5065).

5033. Fiind date numerele reale $a > b > 0$ și $m > n > 0$, care dintre fracțiile :

$$A = \frac{a^m - b^m}{a^m + b^m} \quad \text{și} \quad B = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$$

este cea mai mare ?

Simon Petru, Tg. Mureș

5034. Să se construiască un trapez $ABCD$ cunoscînd lungimea bazei CD, a diagonalei AC, mărimea unghiului ADC și lungimea segmentului MN, care trece prin punctul O de intersecție al diagonalelor și este paralel cu baza CD și este cuprins între laturile neparalele.

C. Ionescu, profesor Suceava

5035. Să se arate că :

$$\frac{a - b}{(a + 2b)\sqrt[3]{a} + (2a + b)\sqrt[3]{b} + 3\sqrt[3]{a^2b^2}} = \frac{(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})^2}{a - b}$$

V. Pricopie, profesor Truseşti

5036. Cît la sută din aria discului solar a putut fi văzut în ziua elipsei solare din 15.II.1961 în momentul în care grosimea maximă a secerii solare a fost 0,25 din diametrul discului solar ?

Se presupune că soarele și luna au avut același diametru aparent.

A. Deutsch, profesor Rădăuți

5037. În interiorul unui triunghi ABC se ia un punct arbitrar P și se duc cevienele AP, BP, CP, care taie laturile BC, CA, AB respectiv în A', B', C'. Să se arate că există relația :

$$\frac{AP}{PA'} \cdot \frac{BP}{PB'} \cdot \frac{CP}{PC'} \geqslant 8.$$

Ion Nimițan, profesor Suceava

5038. Să se construiască un triunghi, cunoscînd unghiul B, lungimea bisectoarei interioare a unghiului A și media armonică a laturilor AB și AC.

* * *

5039. Să se calculeze în funcție de n întreg și pozitiv, suma

$$\sum_{p=0}^{n} p \cos \frac{(n-p)\pi}{3}$$

(E. Ehrhart, Mathesis, 3974)

5040. Să se rezolve și să se discute sistemul de ecuații

$$y^2z - a = z^2x - b = x^2y - c = xyz.$$

C. Coșniță

5041. Să se arate că soluțiile sistemului

$$2(x-y)+m(2x+z-1)=0$$
$$2(x+y+z-1)+m(2y+z-1)=0$$
$$2(z-y)+m(x-y)=0$$

nu depind de m.

N. Mihăileanu

5042. Se dau șase puncte în spațiu A_1, A_2, A_3, ... A_6. Să se afle locul geometric al punctelor M care satisfac relațiile

$$MA_1^2+MA_2^2=MA_3^2+MA_4^2=MA_5^2+MA_6^2$$

caz particular $A_1A_2=A_3A_4=A_5A_6$

Gh. D. Simionescu

5043. Fie I punctul de intersecție al diagonalelor patrulaterului convex $ABCD$ iar P un punct oarecare pe latura BC.

Dacă $Q\equiv(AP, BD)$; $L\equiv(AB, CQ)$; $R\equiv(AC, DL)$ și $K\equiv(AD, BR)$, Să se arate că K, I și P sînt colineare.

* * *

5044. Să se arate că dacă ecuația

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n=0$$

are rădăcinile reale, atunci $(a_1^2-2a_2)n\geqslant a_1^2$; iar dacă toate rădăcinile sînt reale și pozitive, atunci $a_1\cdot a_{n-1}\geqslant n^2\cdot a_n(-1)^n$.

Cînd rădăcinile sînt egale, atunci inegalitatea devine egalitate.

C. Ionescu-Țiu

5045. Se dau două cercuri secante în A și B. Dintr-un punct P situat pe dreapta AB se duc secantele MCD și MEF la cele două cercuri. Să se arate că patrulaterul $CDEF$ este inscriptibil.

* * *

5046. Care este domeniul punctelor $M(x,y)$, din planul xOy în care avem :

$$x\sqrt{1-x^2}-y\sqrt{1-y^2}>1$$
$$x\sqrt{1-x^2}-y\sqrt{1-y^2}>-1$$
$$x\sqrt{1-x^2}-y\sqrt{1-y^2}<1$$
$$x\sqrt{1-x^2}-y\sqrt{1-y^2}<-1$$

C. I. T.

5047. Se dă un cerc (O) și pe el două puncte fixe A și B. Se iau de asemenea punctele mobile M și N pe cerc de o parte și de alta a coardei AB. Se notează : $E\equiv(AM\,;\,BN)$ și $F\equiv(AN\,;\,BM)$. Să se arate că EF trece printr-un punct fix.

* * *

5048. În triunghiul oarecare ABC o paralelă la BC taie pe AB în D și pe AC în E. Paralela la CD dusă prin E taie pe AB în G, iar paralela la BE dusă prin D taie pe AC în F. a) Să se arate că GF este paralelă cu DE și că $DE^2=BC.GF$.

b) Notăm punctele $H \equiv (DF, EG)$, $I \equiv (CD, BE)$, $N \equiv (BF, CG)$. Să se arate că punctele A, H, N, I se află pe mediana AM.

c) Să se demonstreze că în ipoteza că $DE < BC$, punctul N este în interiorul trapezului $DEFG$, iar în caz că $DE > BC$, atunci N se află în interiorul trapezului $BCED$. d) Paralele la BC duse prin H și I intersectînd pe AB și AC determină un trapez ale cărui diagonale se taie în N.

C. I. T.

5049. Să se demonstreze inegalitatea:

$$(x^2+y^2+z^2)\,(a^2x^2+b^2x^2+c^2y^2) \geqslant (ax^2+by^2+cz^2)^2,$$

unde a, b, c, x, y, z sînt numere reale.

* * *

5050. La băile Buziaș, în fiecare cabină de baie, se află, atîrnat de un cui pe perete, un aparat format din doi cilindri de sticlă care comunică între ei printr-un tub subțire. O anumită cantitate de nisip fin, colorat, se scurge din cilindrul superior în cel inferior, într-un anumit timp și arată astfel, cît timp trebuie să stea bolnavul în baie. Să presupunem că după ce a trecut, în cilindrul inferior, jumătate din toată cantitatea de nisip, aflată în cilindrul superior, se întoarce aparatul așa ca cilindrul inferior să devină cilindru superior și se lasă să treacă în cilindrul inferior, jumătate din cantitatea de nisip aflată în cilindrul superior. Se repetă această operație de n ori. Să se arate că: a) din întreaga cantitate de nisip, porțiunea rămasă în cilindrul inferior este dată de expresia $E_n = \dfrac{2^{n+2} \pm 1}{3 \cdot 2^{n+1}}$, semnul plus între cei doi termeni de la numărător corespunde pentru n impar. *b*) Șirurile $E_1 E_3, E_5 \ldots$ și $E_2, E_4, E_6, \ldots$ sînt convergente, primul descrescător și al doilea crescător, ambele avînd aceeași limită. Să se afle această limită.

Corneliu Georgescu, Craiova

5051. Să se arate că într-un triunghi oarecare ABC, avem:

$$\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\cos A+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\cos B+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\cos C=3.$$

* * *

5052. Să se afle limitele șirurilor care au ca termen general respectiv:

$$A_n=\frac{(-1)^n n}{10^3 n+1};\quad B_n=\frac{(-1)^n n}{n+1};\quad C_n=\frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}+2(-1)^n+5}{n+1}$$

* * *

5053. Să se afle limitele șirurilor care au ca termen general respectiv:

$$A_n=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\cdot\frac{n^2}{n^2+1}\cos\frac{n\pi}{4n+1};$$

$$B_n=(-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}\frac{n^2}{n^2+1}\sin\frac{n\pi}{4n+1}.$$

* * *

5054. Să se stabilească egalitatea :

$\cos 24^\circ + \cos 48^\circ + \cos 72^\circ = \cos 12^\circ + \cos 36^\circ + \cos 84^\circ$. (Se poate da interpretare geometrică și generalizare).

* * *

5055. Să se arate că

$$(x^2 + 2x - 2)^{2n+1} + 5^{2n+1}(x - 2)^{n+2}$$

se divide prin $x^2 - 3x + 3$, unde n este un număr natural.

C. Ionescu-Țiu

5056. În interiorul unui apartament printr-un circuit monofazic de aluminiu se alimentează cu energie electrică un radiator având puterea 2 kW. Care este secțiunea conductorilor de alimentare cunoscînd că distanța de la tablou pînă la radiator este 15 m, pierderea admisibilă de tensiune este de 5% din tensiunea de plecare de pe tablou (care este de 220 volți), iar

$$\varrho_{AL} = \frac{1}{34}\,\frac{\Omega mm^2}{m}.$$

Sfichi Romulus, profesor Suceava

5057. Un motor electric trifazat alimentat dintr-o rețea electrică trifazică de 380/220 volți are puterea de 4,5 kW, factorul de putere $\cos \psi = 0{,}85$, iar randamentul $\eta = 0{,}87$.

Motorul este protejat prin siguranțe fuzibile de $I_f = 10$ A. Să se verifice dacă aceste siguranțe pot proteja electromotorul știind că valoarea curentului de pornire al acestui motor este $I_p = 5\ I_n = 2{,}5\ I_f$, iar în cazul în care nu corespund, să se aleagă siguranțele necesare, cunoscînd că scara normalizată a curenților nominali ai fuzibililor este : 6 ; 10 ; 15 ; 20 ; 25 ; 35 ; 60 ; 80 ; Amperi.

* * *

5058. O comună care urmează a se racorda la sistemul energetic național în vederea alimentării ei cu energie electrică, are 5940 de locuitori. Știind că această comună va consuma energie electrică sub un factor de putere $\cos \psi = 0{,}95$ și că normativele în vigoare prevăd 10 W pe locuitor, să se determine puterea postului de transformare în kVA, avîndu-se în vedere că factorul de simultaneitate al consumului este $K = 0{,}7$.

Sfichi Romulus, profesor Suceava

5059. Să se calculeze iluminarea pe suprafața orizontală a unui strung, iluminare produsă de un aparat de iluminat fixat la o distanță orizontală de 3 m de strung și la o înălțime de 4 m de suprafața sa. Intensitatea luminoasă a aparatului pe această direcție este $I = 300$ candele.

Romulus Sfichi, Suceava

5060. O lampă cu vapori de mercur, de lungime 1500 mm și de diametru 30 mm, are o intensitate luminoasă de 1000 candele. Care este valoarea strălucirii lămpii ?

* * *

5061. O sanie lunecă pe o pantă, își continuă drumul pe orizontală și urcă apoi pe o altă pantă pînă la o anumită înălțime. Cunoscîndu-se diferența

înălțimilor (inițială și finală) și distanța pe orizontală a proiecțiilor punctelor de pornire și oprire, să se determine coeficientul de frecare știind că el este același pe tot parcursul mișcării. Aplicați : $h_1 - h_2 = 2$ m ; $d = 100$ m.

C. Carp, profesor Dorohoi

5062. De la o sursă cu tensiunea de 110 V se transmite o putere electrică de 6 kW la 3 km distanță. Întrebuințînd pentru transmitere sîrmă de cupru cu un anumit diametru se constată că pierderile de energie în rețea sînt 10% din puterea transmisă.

La ce tensiune ar trebui să transmitem aceeași putere pentru ca pierderile de putere în aceleași fire să fie 0,1% ?

Ce diametru minim trebuie să aibă sîrma de cupru în aceste cazuri ?

Care vor fi pierderile de putere în rețea, dacă în cazul al doilea vom întrebuința sîrmă cu un diametru de 10 ori mai mic ?

I. Sbierea, profesor Suceava

5063. Nava cosmică „Vostok" I, a avut nevoie de circa 10 minute pentru a coborî de pe orbită pe cosmodrom. Presupunînd mișcarea uniform încetinită să se calculeze de la ce distanță de punctul de aterizare nava a început să frîneze. (Se consideră orbita circulară la altitudinea de 250 km, raza pămîntului 6400 km și accelerația gravitațională la sol de 9,8 m/s^2).

V. Castraveti, profesor Vatra Dornei

5064. Doi conductori paraleli, aflați la o distanță de 10 cm unul de altul, sînt parcurși de curenți în același sens. Cîmpul magnetic rezultat și punctele situate la jumătatea distanței dintre cei doi conductori este de 3 *Oe*, iar forța electrodinamică ce se exercită între cei doi conductori este de 0,05 *N* pe fiecare metru de lungime. Să se afle intensitățile curenților care circulă prin cei doi conductori.

* * *

5065. Un alternator avînd 12 perechi de poli și făcînd 250 rotații pe minut, trimite prin linie spre consumator o putere de 60 kW. Rezistența și inductanța liniei și a generatorului sînt de 10 Ω și 0,2 *H*, iar pe porțiunea consumatorului de 6 Ω și 0,05 *H*. Să se calculeze valoarea efectivă a tensiunii generatorului și puterea utilă întrebuințată de consumator. Să se demonstreze că randamentul întregii instalații nu depinde de inductanța circuitului.

* * *

5066. O lunetă terestră simplă posedă trei lentile ale căror convergențe sînt de 1,6 dioptrii, 12,5 dioptrii și 20 dioptrii. Lentila din mijloc are numai rolul de a răsturna imaginea fără a-i schimba mărimea. O persoană avînd distanța minimă de vedere distinctă $d = 25$ cm privește cu acest instrument un obiect înalt de 24 m situat la o distanță de 4,2 km. Să se afle : 1) lungimea ce va avea luneta în acest caz ; 2) mărimea imaginii văzute prin ocular.

I. Sbiera, profesor Suceava

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PROPUSE PENTRU CLASELE V – VIII*)

E : 1763. Doi dulgheri execută lucrarea a 9 m² șarpantă în 30 ore. Fiind neegal calificați, primul lucrează cu 4 ore în plus la 1 m² șarpantă. Să se afle productivitatea fiecăruia pe oră.

N. Moraru, profesor C-lung Moldovenesc

E : 1764. În triunghiul ABC se notează cu O mijlocul medianei AA'. Se duce BO pînă taie pe AC în B' și CO pînă taie pe AB în C'. Se cere : a) Să se arate că BC și $B'C'$ sînt paralele. b) Să se arate că aria $OB'C = {}^1/_{18}$ aria ABC.

I. Nimițan, profesor Suceava

E : 1765. Pentru a transporta o cantitate de cărămidă s-a angajat un camion de 3 tone capacitate de încărcare care transportă toată cărămida într-un anumit număr de drumuri.

Dacă s-ar angaja un camion de 4 tone atunci s-ar face cu 3 drumuri mai puțin și ar rămîne loc la ultimul transport pentru o tonă de alte materiale. Să se afle cantitatea de cărămidă de transportat și numărul de drumuri făcute de fiecare camion.

N. Moraru, profesor C-lung Moldovenesc

E : 1766. Se racordează la sistemul energetic republican un SMT și un GAS într-un punct T, astfel că $ST = GT$ (unde S reprezintă SMT-ul și G, GAS-ul).

Știind că distanța $GS = 41{,}2$ km și că distanța de la GAS la firul ce leagă SMT-ul de punctul T este de 40 km, se întreabă :

a) care este distanța de la T la cele două unități agricole socialiste ;

b) cum trebuie făcută legătura, pentru a face maximum de economii ;

c) de cîți stîlpi este nevoie în aceste condiții, știind că se prevede cîte un stîlp la 50 m de cablu.

A. Deutsch, profesor Rădăuți

E : 1767. Pentru prepararea mortarului se ia varul și nisipul în proporție de 1 : 2.

Mai are loc o contracție a volumului de mortar față de suma volumelor de nisip și var în mărime de 25%. Să se afle cît var și cît nisip este necesar a lua pentru 0,45 m³ mortar.

N. Moraru, profesor C-lung Moldovenesc

E : 1768. Dintr-un mortar se poate tencui o suprafață de perete cu stratul de o grosime anumită. Dacă mărim grosimea tencuielii cu 5 mm scade suprafața cu 2 m², dacă micșorăm grosimea de 4 mm, se mărește suprafața cu 2,5 m². Care era grosimea și suprafața inițială planificată a tencuielii și care era cantitatea de mortar.

* * *

E : 1769. Cîți km sînt de la Adjud la Văculești și cu ce viteză se deplasează două vehicule știind că pornesc concomitent unul spre altul din cele

*) V. (E : 1763, 1765, 1768, 1771, 1773) ; VI, (E : 1767, 1769, 1762, 1763) ; VII. (E : 1764, 1766, 1770).

două localități și se întîlnesc după 2 ore, primul avînd o viteză de 3 ori mai mică decît celălalt, care, dacă ar avea numai 30 km/oră întîlnirea ar întîrzia cu 40 minute?

Viorel Grigore, profesor Oroftiana

E : 1770. Să se arate că dacă avem

$$xyz = 1$$

avem și

$$\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx} = 1.$$

I. Nimițan, profesor Suceava

E : 1771. Să se demonstreze că produsul a două numere terminate cu 76, se termină tot cu 76. Idem pentru 25.

* * *

E : 1772. Un biciclist pleacă din A spre B. După ce a parcurs jumătate din distanța de la A la B și un kilometru și jumătate, constată că dacă ar mai parcurge jumătate din ceea ce i-a mai rămas și un kilometru și jumătate, ar mai avea 2 kilometri pînă să ajungă în B. Cu ce viteză a mers biciclistul, dacă el a făcut de la A la B 35 minute și 25 secunde.

Stelian Lambă, Constanța

E : 1773. Să se găsească cel mai mic număr care împărțit prin 6, 8, 9, 12 și 16 să dea același rest 4.

C. I. T.

E : 1774. Să se arate că două numere întregi pozitive nu pot avea un divizor comun mai mare decît diferența lor.

* * *

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

— Elevii claselor IX—XI nu vor trimite soluții la problemele propuse pentru clasele V—VIII. Problemele rezolvate trebuie să fie din ultimele trei numere apărute ale G.M.F.-B și vor fi trimise numai odată în cursul unei luni. Problemele de matematică vor fi expediate într-un singur plic și vor fi însoțite de un borderou cu numerele problemelor, scrise în ordine crescîndă. Idem pentru problemele de fizică. Pe plic se va scrie localitatea, școala și clasa pe care o urmează rezolvitorul. La rubrica rezolvitorilor nu se va anunța decît cel puțin 10 probleme bine rezolvate. Problemele incomplet rezolvate, care conțin erori, sau sînt copiate de la alți rezolvitori, nu vor fi anunțate și eventual vor fi subliniate la poșta redacției : iar rezolvitorii respectivi nu mai pot fi evidențiați. Problemele propuse să fie însoțite de una sau mai multe soluții.

EVIDENȚIAȚI

Pînă la 15 septembrie 1961 s-au mai evidențiat următorii rezolvitori de probleme de fizică din G.M.F.-B :

1. *Zăgreanu Nicolae.* (absolvent Timișoara), 2. *Zăzvan Vladimir* (cl. XI ș.m.l. București), 3. *Pătrașcu Gheorghe* (cl. X Pitești), 4. *Pavel N. Radu* (absolvent Craiova), 5. *Ender Lucian* (cl. XI ș.m.l. Galați), 6. *Zamfir Ioan* (cl. X

Panciu), 7. *Tomuța Liviu* (cl. X ș.m. Gh. Barițiu Cluj), 8. *Fărcaș Irina* (absolventă Oradea), 9. *Pancu Adrian* (cl. XI Mediaș).

*

Pînă la 15 septembrie 1961 s-au mai primit soluții bune la problemele de matematică propuse în G.M.F.-B, de la:

PITEȘTI (Argeș). **Ș.m. 1 N. Bălcescu.** Cl. VII. Musceleanu Eugenia (E: 1637, 48, 49, 51—58, 60, 62, 65). Cl. VIII. Constantinescu Adrian (4516, 17, 21, 43, 48, 54, 61, E: 1634, 36—38, 41—47), **Hurduc Dan** (4625, 29, 33, 45, 65, 72, 702, 09, 14, E: 1648, 49, 51—59, 62, 64—68, 70, 77—81), **Ștefănescu Mircea** (4591, 601, 04, 14, 58, 59, E: 1634, 37, 39, 42, 43, 46—60, 62, 66, 68, 70, 75). Cl. IX. Florescu Costel (4536, 37, 39, 46, 66, 85, 614, 15, 17, 24, 25, 27—29, 33, 46, 63), Mărgineanu Doru (4509, 39, 614, 15, 24—27, 33), **Tărăbuță P. Mihai** (4506—08, 10, 17, 31, 33, 35, 36, 38, 39, 42, 47, 51, 55, 60, 61, 64, 70, 75—86, 90, 91, 99, 601—04, 07, 14—20, 24—28, 30, 31, 33, 35, 44, 51, 52, 57—59, 63, 64, 70, 72, 75, 88, 93, 95, 97, 98, 700—04, 11, 14, 15). Cl. X. Bejan I. G. (4613, 20, 26—30, 33, 65, 69, 80, 85, 88), Pătrașcu Gheorghel (4499, 540, 61, 75, 77, 88, 614, 17, 18, 25—30, 32, 33, 38, 63), Popescu Remus (4575, 77, 80, 85, 88, 614, 17, 18, 20, 26—28, 30, 50, 63, 69), **Stancu M. Ion** (4556, 57, 62, 64, 67, 72, 77, 80—85, 87, 88, 92—94, 96, 97, 99—601 03, 04, 06—09, 12, 14—35, 38, 39, 41, 44—46, 48, 50—60, 62—66, 68—70, 84, 86, 98, 700, 05, 09—12, 25, 27, 29—35, 40, 49, 58, 67, 68, 71).

Ș. m. 2 Alexandru Odobescu. Absolvent Georgescu Ion (4575, 78, 80, 93, 602, 14, 17, 20, 26, 28, 30, 31, 63). Cl. IX. **Diaconu Nicolae** (4575, 77, 79, 84, 85, 90, 91, 600, 04, 10, 14—17, 24, 26—29, 33, 45—47, 63, 68, 93, 702, 04, 09, 10). Cl. X. **Zamfir Cornel** (4499, 530, 31, 35, 38, 61, 75, 80, 91, 600, 14, 15, 17—20, 25—33, 35, 38, 41, 48, 50, 63, 68, 69, 86, 90, 93, 711, 34, 49, 51, 53). **Ș.m. 3.** Cl. VIII. **Ionescu V. Marcel** (4517, 43, 614, 15, 35, 38, 59, 63, 93, E: 1617, 18, 20, 21, 23, 26, 27, 29—31, 33, 34, 37, 38, 42, 43, 45, 47, 50, 52—60, 62, 64—70, 76—85, 87). Cl. X. Diaconescu I. Ion (4546, 75, 77, 80, 81, 84, 91, 95, 604, 09, 10, 15, 17, 19, 20, 24, 26—30, 33, 63).

PLOIEȘTI. **Ș.m. 1 I. L. Caragiale.** Cl. VIII. Dinescu Const. (E: 1634, 37, 42—44, 47—50, 52, 53, 56), Drăguțescu Elisabeta (E: 1652, 54, 56, 57, 59), Herțen Vasile (E: 1620, 23, 29, 31, 33, 37, 43, 44, 47, 48, 53, 57), Leonte Filip (E: 1618—29, 31), Lică Eugenia (4591, 601, E: 1648, 50—59, 67, 68, 70, 75), Niță D. Vasile (E: 1637, 42, 43, 52—57, 59, 67, 68, 70), Pîrvu Cornelia (E: 1637, 38, 42—44, 47, 48, 51—57, 59, 64, 67, 68, 70, 75), Stoica Virgil (E: 1633, 44, 48, 51, 53, 55, 57, 59, 62, 68, 70), Toma P. Maria (4514, 77, 91, E: 1636, 38, 44, 47—50, 52—55, 57, 59, 60, 62, 68, 70, 71), Vlădescu Venera (E: 1643, 47, 48, 52—54, 56, 57, 68, 70, 75). Cl. X. Cișmaș Ion (4575, 77, 81, 91, 604, 07, 14, 15, 18—20, 24—27, 29, 31, 33, 38, 41, 46, 48, 51, 59, 63, 70), Cruceru Ștefan (4591, 607, 25, 38, 48, 58, 62, 63, 70), Lazea T. Adrian (4562, 75, 77, 80, 84, 91, 95, 607, 14—20, 24—33), Mareș Eugenia (4575, 84, 603, 07, 14, 18, 20, 24, 29, 30, 32, 33, 38, 51, 62), Maxim Dan (4581, 91, 607, 20, 24, 25, 31, 32, 35, 38, 41, 46, 48, 51, 59, 62, 72, 77, 79, 90, 93, 97, 99, 701—03, 08), Mărgărit Elena (4575, 77, 81, 84, 95, 607, 14, 19, 20, 27, 29, 32, 33, 63), Mihuț N. Ioan (4615, 18, 19, 26, 27, 29, 31, 703, 09, 11), Munteanu Mariana (4504, 06, 07, 09, 19, 35, 39, 40), Mușat Alin (4499, 509, 10, 17, 39, 43, 46, 75, 77, 80—82, 84, 91, 97, 615, 17, 18, 20, 26—30, 33, 701, 03, 04), Oprea Maria (4499, 509, 17, 39, 53, 75, 603, 14, 15, 19, 20, 30, 33), Peiulescu Marius (4551, 75, 84, 603, 07, 14—20, 24—33, 58, 59, 63, 70), Popescu Valentin (4575, 77, 84, 88, 91, 95, 603, 04, 07, 14, 15, 17—20, 25—34, 38, 41, 48, 51, 54, 59, 62, 63, 90, 97, 707, 08, 14), Vasilescu Luminița (4509, 19, 36, 38, 39, 43, 52, 75, 84, 601, 03, 07, 14, 17, 20, 26, 27, 29, 30, 33, 63), Vasilescu Relu (4526, 75, 77, 84, 95, 607, 14, 18, 19, 25, 27, 33). Cl. XI. **Drugea I. Gh.** (4468, 69, 71, 73, 78, 91, 92, 520, 26, 27, 46, 49, 51, 52, 61, 65, 73, 75, 77, 78, 80, 85, 86, 91, 607, 14—33, 52, 58, 59, 63, 70), Georgiade Alex. (4500, 03, 14, 17, 39, 43, 51, 59, 62), Nicolae Nicolae (4467, 70—75, 80—84, 86, 87, 89, 90, 95, 96, 509), Opriș Ion (4576—86, 91, 602—04, 07, 10, 14—33, 38, 39, 52, 58, 59, 63, 70).

Ș.m. 2 A. Toma. Cl. VIII. Iliescu Florin (E: 1621, 27, 37, 46, 47, 53, 55—57, 59). Cl. X. Petre Alexandru (4546, 55, 61, 63, 65, 66, 71, 75, 84, 85, 91). Cl. XI. Topciu Rodica (4509, 33, 37, 39, 43, 45, 52, 56, 75, 81, 82, 84, 604, 13, 15, 18, 20, 72, 97).

Ș.m. 3 Mihai Viteazu. Cl. IX. Stăvaru Cristina (4533, 75, 80, 91, 610, 14, 15, 18, 25, 26, 28, 29, 33, 59, 63). Cl. X. Florescu Mihai (4499, 505, 06, 09, 19, 22, 31, 36, 37, 43), Hoinărescu N. Călin (4575, 77, 81, 84, 604, 10, 14, 17, 19, 20, 26—31, 33, 63, 701—03). Cl. X. Stănoiu Cezar (4546, 52, 56, 64, 68, 70, 75, 77, 80—82, 84, 88, 91, 607, 12, 14, 15, 17—20, 24—28, 30, 31, 38).

Ș.m. 5 Al. I. Cuza. Cl. IX. Ghița M.

Constantin (4546, 75, 77, 614, 15, 17, 24, 26, 27, 33, 63), Lungu Ileana (4499, 509, 17, 19, 38, 39, 43, 46, 61, 75, 77, 91, 614, 20, 26—29, 33, 63). Cl. X. Lungu Vasile (4546, 75, 77, 607, 14, 19, 20, 26, 27, 30, 33, 63), Mîrzea Gh. (4575, 80, 610, 14, 15, 18, 19, 26, 28, 33).

Ş.m. 6 C. I. Parhon. Cl. VIII. Pătraşcu Mihai (4561, 91, 614, 15, 59, E: 1634, 36—38, 42, 43, 45, 46, 48—56, 58, 59, 68, 70). Cl. IX. Pătraşcu Tudor (4509, 19, 36, 37, 39, 46, 52, 75, 84, 88, 610). Cl. X. Miu I. Elena (4499, 509, 17, 19, 20, 31, 38, 39, 48, 61, 75, 77, 91, 614—16, 20, 24—33).

PREDEAL (Braşov). Cl. VIII. Cardaş St. Vladimir (E: 1633, 37, 47, 53, 56—59, 68, 70, 71), Ioniţă Maria (E: 1661—71, 73, 75—84, 88—92, 95, 97, 700, P.).

PUCIOASA (Ploieşti). Ş.m. Absolvent Popescu S. Gheorghe (4503, 04, 16, 21, 28, 31, 49, 66, 75, 77, 79, 80, 84—88, 91, 93, 96, 99, 600, 02, 04—09, 11, 13—16, 18—24, 26—36, 38, 43, 44, 46, 51, 52, 54, 55, 57—59, 61—64, 67, 70, 72, 73, 75, 78—80, 85—87, 89, 91, 97, 98, 701—03, 05, 09, 10, 12, 14, 17, 19, 22, 25, 28—31, 33—36, 39, 42, 47—49, 51, 56, 59, 62—64, 71). Cl. VIII. Matei C. Gheorghe (4503, 08, 09, 12, 17, 19, 33, 35—37, 39, 43, 44, 46, 47, 61, 77, 84, 91. 604, 14, 15, 17, 20, 24—29, 31—33, 59, 63, 68, 72, 73, 76, 79, 93, 95, 97, 701—04, 15—19, 38, 63, E: 1619, 22, 24—29, 31—33, 36—38, 42—48, 50, 52—60, 63—71, 73, 75—81, 83—85, 88—92), Vlad Viorel (4591, 614, 25, 59, 63, E: 1604, 13, 17, 26, 29, 31, 37, 45—48, 52, 54, 57, 67, 68, 70). Cl. IX. Anca Dorinel (4508, 09, 17, 19, 37, 39, 46, 47, 52, 61, 75, 84, 91, 610), Bucăşoiu Nicolae (4503, 09, 28, 39, 43, 46, 47, 52, 61, 75, 85, 610), Drăghici Ioan (4547, 56, 66, 71, 75, 77, 80, 85, 91, 600, 01, 15, 17, 24, 26, 28, 32, 33, 45, 50, 68), Ene Ioan (4499, 508, 09, 17, 19, 35—37, 39, 43, 46, 47, 52, 56, 61, 77, 81, 616), Manea V. Ilie (4503, 09, 19, 28, 39, 43, 46, 47, 52, 61, 75, 84, 85, 90, 610), Popa Alexandru (4499, 503, 06, 08, 09, 12, 16, 17, 19, 28, 33, 36—39, 43—47, 56, 61, 66, 71, 75, 77, 80, 83, 85, 91, 600, 01, 04, 15, 17, 24, 26, 28, 45, 50, 68), Sencovici Mihaela (4504, 09, 16, 17, 19, 25, 31, 33, 44, 46, 47, 51, 52, 59, 61, 63, 77, 84, 91, 610). Cl. X. Banu Gheorghe (4500, 30, 35, 41, 42, 44, 46, 47, 51, 52, 55, 56, 59, 61, 63, 66, 70, 75, 79—85, 88, 91, 92, 95, 96, 99, 600, 03, 04, 07, 09, 11, 12, 14—20, 24—35, 38, 41, 44—48, 50, 51, 54, 58, 62, 68—70, 81, 86, 87, 90, 93, 97, 99. 701—03, 05, 07—09, 11, 12), Diaconescu C. Radu (4500, 30, 32, 44, 46, 47, 51, 52, 59, 61, 63, 64, 66, 68, 70, 75, 77, 79, 80, 82, 84, 85, 87, 88, 91, 93, 95, 99, 600, 02, 04, 07, 14—22, 26, 27—31, 33—35, 38, 40, 41, 44—46, 50—52, 54, 57—59, 63, 65, 67—70, 72, 74, 75, 81, 87), Marin Victor (4503, 04, 06, 07, 09, 10, 17, 19, 27, 31, 33, 36—40, 42, 43, 52, 59, 70, 75, 77—81, 84, 88, 91, 603, 07, 14—20, 24—33), Marinescu Victor (4499, 503, 04, 06, 07, 09, 16, 17, 19, 26, 27, 31—33, 35, 37—41, 43, 44, 46, 47, 61, 63, 66, 75, 80, 84, 85, 88, 91, 618—20, 63), Radu A. Gheorghe (4499—501, 05—07, 09, 17, 19, 22, 30—33, 35—44, 46, 47, 51, 52, 59, 61, 70), Şerban Longin (4614—20, 24—36, 38, 41, 45, 47, 48, 50, 51, 54, 58, 59, 62, 63, 68—70, 87, 90, 93, 97, 99, 705, 07, 09, 11). Cl. XI. Niţă Constantin (4499, 501, 05—07, 09, 17, 19, 22, 30, 31, 33, 35—40, 42, 43), Tîrcă I. Ion (4500, 03, 04, 06, 09, 16, 17, 19, 32, 33, 35, 36, 38, 40—44, 47, 61, 75, 77, 80, 85, 88, 91, 600, 11, 14, 17—19, 25, 26, 33—35, 45—47, 58—60, 69).

Şc. de 7 ani Poiana. Cl. VI. Sîrbu Gheorghe (E: 1637, 47, 48, 51, 54, 55, 62, 65, 67, 68, 70). Cl. VII. Ruxăndoiu Aurel (E: 1617, 18, 21, 26, 27, 29, 31, 33, 37, 42, 43, 45—47, 54).

RĂDĂUŢI (Suceava). Sîrghie Mircea (4503, 04, 07—19, 19, 27, 31, 38, 39, 43, 46, 61, 75, 84, 85, 88, 91, 99, 600, 03, 04, 07, 12, 14—20, 22, 24—33, 35, 38, 40, 41, 44—46, 48—51, 54, 56, 58, 59, 63, 67—70, 72, 75, 76, 81, 83, 86, 87, 89, 93, 97—99, 701, 03, 05, 07—11, 14, 15, 20, 22, 24, 29—35, 38, 41, 43, 48, 49, 51, 53, 55, 57, 58, 62—65, 68—70).

REŞIŢA (Banat). Cl. VII. Kăştner Edith (E: 1618—20, 23, 27, 37, 42, 53, 55, 57, 68), Samide Mariana (E: 1617, 18, 20—22, 25, 27, 37, 42, 43, 45, 47, 48, 51, 53—56, 68, 70). Cl. VIII. Cojocaru Mircea (E: 1637, 43, 46, 47, 52, 53, 57, 59, 67, 68, 70).

RÎMNICU-SĂRAT (Galaţi). Ş.m. 1. Absolvent Perlea Nicolae (4537—39, 41, 44, 46, 51, 52, 56, 57, 62, 64, 65, 68, 70, 73, 84, 86, 91, 93, 95, 97, 99, 601—04, 06). Ş.m. 2 Ştefan cel Mare. Cl. IX. Nelepcu Grigore (4505, 06, 09, 19, 36, 39, 46, 52, 56, 75, 610).

ROMAN (Bacău). Cl. IX. Niculescu G. G. (4501, 06, 19, 32, 36—38, 46, 64, 75, 77, 79, 81, 84, 94, 99, 604, 14, 15, 17, 51, 704).

SĂCĂDAT (Crişana). Şc. de 7 ani. Cl. VII. Negruţiu Vasile (E: 1519, 616—23, 25, 27, 28, 32—34, 37, 38, 42, 43, 47, 48, 50, 60).

SĂVENI (Suceava). Cl. X. Sănduc Medeea (4585, 614, 16, 17, 24, 26—29, 33, 57, 63, 68).

SIBIU (Braşov). Ş.m. 1 Gheorghe Lazăr Cl. X. Scurtu Ionel (4499, 505, 09, 17, 19, 30, 31, 33, 34, 37, 39, 40, 42, 43,

46, 52, 57, 59, 61, 65, 75, 77, 81, 82, 91, 99, 607, 10). Şc. de 7 ani nr. 4, Cl. VII. Bucur Liliana (E: 1617, 34, 37, 38, 53—60, 68, 70). Şc. de 7 ani nr .9. Cl. V. Cică Maria (E: 1648, 53, 59, 67, 68, 70, 75, 80, 81). Şc. de 7 ani nr. 15. Cl. VI. Munteanu Rodica (E: 1637, 38, 42, 48, 55—56, 58, 59), Nedelcu Alex. (E: 1621, 31, 37, 56, 59), Zăgan Dumitru (E: 1620—22, 31, 37, 42, 48, 51, 53—55). Cl. VII. Bucur Delia (E: 1648, 50—60), Daneş Emil (E: 1618, 20, 21, 23, 43, 54, 56, 57, 59), Dăncilă I. Ioan (E: 1648, 50—60), Dumitrescu Rodica (E: 1620, 26, 31, 37, 46, 53, 55—57, 59), Goima Liliana (E: 1617, 23, 26, 27, 31, 37, 44, 48, 53, 59, 60), Oncescu Eugenia (E: 1618, 23, 27, 29, 32, 37, 42, 45, 46, 52, 53, 57, 58), Radu Vasile (E: 1617, 18, 23, 26, 27, 31, 38, 44, 46, 59). Şc. tehnică construcţii. Anul I. Dan Virgilius (4575—77, 80, 81, 86, 91, 95, 97, 99, 603, 14—17, 20, 24—28, 33, 38, 58, 63, 70).

SIGHET (Maramureş). Ş.m. Cl. X. Smicală Ion (4575, 77, 84, 91, 95, 99, 607, 14, 18, 19, 26, 59, 70). Cl. XI. Beniczky Judith (4575, 86, 97, 614, 18, 61, 72, 79, 81, 91, 95, 97).

SIGHIŞOARA (Braşov). Ş.m. 2. Cl. X. Vlăduţiu Mircea (4614—20, 24—33, 35, 41, 46—48, 50, 51, 63, 68—70, 73, 90, 93, 97, 98, 701, 02, 05, 09, 11, 12, 15, 16, 24, 27, 29, 30, 31, 33, 34, 38, 43, 48, 53, 55, 63, 65, 70).

SINAIA (Ploieşti). Ş.m. George Enescu. Cl. X. Paxino C. Gheorghe (4575, 77, 80—83, 85, 91, 96, 600, 07, 11, 12, 14, 15, 17—20, 25, 33, 35, 41, 45, 48, 50, 58, 59, 68—70, 86, 90, 93, 97—99, 701—05, 08, 09, 11, 12, 14, 15).

STREHAIA (Oltenia). Ş.m. Cl. VIII. Mindreanu Eugen (E: 1628, 48, 49, 51—53, 55, 56, 58, 60).

SUCEAVA. Absolvent Pop Ioan (4614—21, 23, 24, 26—33, 36, 38, 44, 46, 51, 52, 55, 59, 61—63, 70, 72, 79, 81, 82, 89, 91, 93, 97, 99, 701—03, 08, 17—19, 22, 24, 39, 53, 55, 59, 64, 65).

TIMIŞOARA (Banat). Student Scarlat Nicolae (4500, 09, 20, 46, 56, 65, 70, 73, 75—78, 80, 83—88, 91, 97, 99, 602—04, 06, 07, 14—26, 28—33, 35, 38, 41, 43, 46, 48, 51, 52, 57, 59, 61—65, 68, 70, 72, 73, 78, 81, 88, 90, 91, 93, 95, 97, 701—04, 07, 13, 14). Absolvent Zăgreanu Nic (4562, 73—75, 77, 80, 93, 95, 97, 602, 12).

Grupul şcolar Electromotor. Anul II. Neguş Spiridon (4614, 34, E: 1634, 36—38, 42, 43, 45, 48, 50—60).

Ş.m. 2. Cl. VIII. Hasenfratz Herbert (E: 1634, 36—38, 42, 48, 51, 53, 57, 59), Oberlec Sigrid (4614, E: 1652, 53, 56, 57 59, 68, 77, 81), Popescu Viorela (4615, 25, 29, 33, 701), Szende Suzana (E: 1643, 48, 50, 52—60). Ş.m. 5 Cl. X. Lustig Gheorghe (4576—78, 81, 82, 93—95, 97, 601, 03, 07, 09, 10, 13—34, 36—38, 40, 41, 43, 44, 46, 48, 51—55, 57—59, 61—65, 68, 70, 72—79, 80—82, 88—91, 93, 95, 97, 99, 704, 07, 08, 13—15). Ş.m. 7. Cl. X. Băleanu Cornelia (4501, 03, 09, 16—19, 21, 27, 28, 31, 33, 34, 36—39, 42, 43, 46, 47, 61, 68, 70, 75, 77, 79, 81, 83—85, 88, 91).

TIRGOVIŞTE Ploieşti). Ş.m. 3 N. Bălcescu Cl. V. Creţu G. D. (4503—09, 16, 17, 19, 22, 23, 26—28, 31, 33, 36—39, 43, 55, 63, 66, 70—72, 75, 77, 79, 80, 83—85, 91, 92, 96, 98, 600, 04, 10, 11).

TIRGU JIU (Oltenia). Ş.m. 2 Tudor Vladimirescu. Cl. IX. Calistrat D. Ion (4503, 04, 09, 19, 31, 35, 38, 39, 43, 47, 61, 65, 75, 80, 84, 85, 607, 10, 14—20, 24—30, 33, 45, 58, 59, 62, 63, 68—70). Cl. X. Roangheş Ion (4503, 04, 09, 19, 30, 38, 39, 43, 47, 61, 66, 75, 80, 84, 607, 10, 14—20, 24—30, 33, 45, 58, 59, 63, 68—70), Urs N. Dumitru (4561, 75, 77, 80, 84, 88, 95, 99, 607, 14, 17—20, 25—30, 33, 63). Ş.m. 3 Cl. VIII. Ceapă Alexandru (4503, 09, 28, 39, 75, 85, 600, 33, E: 1617—23, 27, 28, 31, 34, 37, 38, 42, 46, 48—62, 64, 66), Cirţiha I. Anghel (4503, 04, 16. 17, 75, 79—81, 84, 88, 90, 91, 601, 04, 24, 28, 33, E: 1617, 19—21, 23, 25, 27, 28, 31, 33—38, 42, 48, 51—60, 62, 65, 67, 68, 70, 72), Roangheş Elena (4614, 15, 25—27, 33, 58, 59, 61, E: 1634, 36—38, 42, 43, 45—60, 62, 63, 65—71, 75). Cl. X. Mihuţ Antonia (4561, 75—77, 80, 82, 84, 88, 91, 95, 99, 603, 07, 12, 14, 17, 18, 24, 26—28, 30, 32, 38, 44, 46, 48, 51, 54, 62, 63, 70).

TIRGU MUREŞ (M.A.M.). Şc. m. Papiu Ilarian. Cl. VIII. Frandeş Leonard (4571, 668, E: 1634—38, 40, 42—44, 48—62, 64—68, 70, 71). Cl. IX. Crişciu Horia (4509, 36, 39, 46, 52, 86). Cl. X. Cîndea Ioan (4546, 52, 53, 56, 59, 61, 62, 68, 70, 604), Cotoran Victor (idem).

TIRGU OCNA (Bacău). Ş.m. Absolvent Mihail Moise (4584—86, 90, 91, 97, 99, 600, 07, 36, 38, 43, 44, 47, 50—52, 58, 61, 63, 65, 70 P,N).

TIRNAVENI (M.A.M.). Ş.m. Alexandru Sahia. Cl. VIII. Ciurca Viorica (E: 1637, 43, 48—50, 52, 55, 59), Mittelmann Eva (E: 1637, 43, 44, 48—50, 52, 55, 59).

TURNU MĂGURELE (Bucureşti). Şc. contabilitate. Anul I. Eremia Dinu (4546, 52, 70, 72, 77, 81, 83, 95, 96, 611, 14, 15, 17, 20, 23, 26—33, 50, 51, 61, 63, 68—70).

TURDA (Cluj). Ş.m. Mihai Viteazu. Cl. IX. Mureşan Corina (4575, 610, 14—17, 24, 26, 28, 33), Păcuraru Liana (4554, 55, 66, 85, 92, 96, 600, 35, 45, 47, 50).

VASLUI (Iaşi). Ş.m. 2. Cl. IX. Grosu N. I

an. (4575, 77, 84, 614, 15, 17, 24, 26—29, 33, 46, 57, 63, 72, 701).

*

Pînă la 15 septembrie 1961 s-au mai primit soluții bune la probleme de fizică propuse în G.M.F.-B, de la:

ADJUD (Bacău). Absolvenți: Tăzlăoanu Dumitru (4635, 42, 50, 68, 98, 711, 29, 31, 32. 34, 47—49, 68), Băluță Gh. (Băluță Gh. (4669, 86, 700, 05, 29, 31, 34, 35, 40, 49, 70).

AIUD (Cluj). Ş.m. Avram Iancu. Cl. X. Ciugudeanu N. (4645, 68, 89, 98, 700—03, 05, 09, 11, 12), Iancău Horațiu (4705, 11), Leția Ioan (4575, 83, 85, 96, 611, 35, 68, 69, 85, 95, 700, 05, 09, 11, 29, 31, 33, 34, 35, 70).

ALEXANDRIA (București). Ş.m. Al. I. Cuza. Boștenaru I. Liviu (4700, 09, 31, 33, 35, 49).

ARAD Ş.m. 4. Cl. VIII. Spircu Tiberiu (4635, 45, 68, 98, 4700, 09). Ş.m. Ion Slavici. Cl. IX. Olariu Ştefan (4566, 83, 85, 90, 4600, 35, 45, 50, 68, 70, 09). Cl. XI. Popescu Dorel (4589, 83, 90, 611, 42, 45, 50, 68. 98, 700, 09).

BACĂU. Ş.m. 2. Cl. IX. Vasiliu Florin (4586, 96, 600, 50, 69, 71, 710, 31, 49).

BAIA-MARE Ş.m. 1. Cl. IX. Cioltea Valer (4698, 700, 03, 09, 25, 30, 33, 35, 47, 48). Strebici Ştefan (4635, 45, 47, 50, 68, 700, 09, 10, 25, 29, 33, 48). Cl. XI. Ghiman Vasile (4647, 68, 98, 700, 02, 05, 09, 11, 29—35, 40, 47, 49, 58, 69, 70).

BISTRIȚA (Cluj). Cl. X. Circu Ioan (4548, 55, 63, 66, 72), Pefringel Ioan (4686, 700, 05, 09, 10, 11, 27, 29, 33, 48, 49, 58).

BRAȘOV. Ş.m. 5. Cl. X. Munteanu Mircea (4725, 29—31, 33—35, 47—49, 58, 70).

BRĂILA. Ş.m. 1. Cl. IX. Gherguș Felicia (4645, 50, 68, 85, 700, 09, 10, 25, 26, 47—49).

BREAZA (Ploiești). Cl. X. Zegheanu Petre (4583, 85. 90, 92, 96, 600, 11, 35, 45, 47, 50, 68, 69, 85, 86, 98, 700—03, 05, 09—12).

BUCUREȘTI. Studenți: Piscupescu Gabriel (IPGG) (4642, 45, 60, 68, 69, 94, 98, 700, 05, 09), Nemeș Gheorghe (IPB) (4685, 86, 94, 98, 701—03, 05, 09—12). Absolvenți: Popescu Andrei (4583, 85, 600, 35, 68, 69, 98, 700—03, 05, 09. 11).

Ş.m. 1. Cl. X. Grigorescu Șerban (4717, 25, 26, 29—31, 33, 35, 47—49), Stoian Nicolae (4555, 63, 83, 85, 96), Timoșenko Alexandru (4685, 98, 700, 09, 11, 25, 29, 31—35, 48). Cl. XI. Răzvan Vladimir (4523, 48, 55, 63, 65, 71, 83, 85, 92, 96, 98, 600, 11, 35, 45, 47, 50, 85, 86, 94, 98, 700, 05, 09—12, 26, 27, 29—35, 40, 47—49, 68).

Ş.m. 2. Cl. IX. Grigoriu Mihai (4548, 54—56, 83, 85, 90, 600, 35, 45, 50, 68).

Ş.m. 3. Cl. IX. Ionescu-Mișcov Ștefan (4635, 45, 47, 68, 84, 98, 700, 05, 09, 25, 29). Cl. XI. Sucitu Gh. (4635, 45, 49, 50, 68, 69, 705, 09—12).

Ş.m. 11 D. Cantemir. Cl. VIII. Persache Octavian (4575, 77, 85, 91, 604, 10, 14, 15, 26, 33, 45, 51, 58, 68, E: 1648, 51, 52). Cl. IX. Cancer Șerban (4635, 45, 50, 68, 85, 98, 700, 02, 09, 10, 26, 30, 35, 48), Gropper Jean (4635, 45, 50, 68, 84, 85, 98, 700, 09, 10, 25, 26, 29—31, 33, 35, 47—49), Ursulescu Florin (4554, 55, 66, 85, 90). Cl. X. Georgescu Horia (4504, 16, 26, 27, 54, 55, 63, 66, 71, 72, 83, 85, 600, 11), Simicu Cornel (4635, 50, 68, 84, 98, 700, 09, 29, 31, 33, 35, 47, 49). Gianni Emanuel (4645, 68, 69, 700, 05, 09, 11, 25, 29, 31, 33—35, 48, 49). Cl. XI. Cristescu Dragoș (4549, 54, 55, 63, 66, 85, 96, 600, 45, 50).

Ş.m. 13 Mihai Viteazu. Cl. X. Dogaru I. Anton (4645, 50, 68, 69, 96, 98, 700, 05, 11, 12), Herda Mihai (4503, 04, 27, 28, 63, 66, 72, 85, 96, 98, 600).

Ş.m. 15 Elena Sîrbu. Cl. X. Herda Gh. Mihai (4645, 50, 68, 69, 86, 705, 09, 11, 12, 27, 31, 32. 34, 35, 49).

Ş.m. 16. G. Coșbuc. Cl. IX. Mendelsohn Mariana (4726. 29—31, 33, 35, 47—49, 819).

Ş.m. 17 Matei Basarab. Cl. IX. Dimitriu Camelia (4548, 54, 55, 66, 85, 90, 635, 45, 50, 68).

Ş.m. 20. Cl. IX. Negoescu Gh. (4635, 45, 68, 84, 701—03, 09, 10, 48). Cl. XI. Hîrșan Doru (4548, 49, 54, 55, 63, 66, 72, 79, 83, 85, 90, 96, 600).

Ş.m. 22. Gh. Lazăr. Cl. XI. Ceicu Mirella (4583, 635, 45, 47, 68, 69).

Ş.m. 26 Al. I. Cuza. Cl. XI. Bolocan I. Gabriel (4685, 86, 700—03, 09, 11, 25, 26, 29—31, 33, 34).

IOR. tehnician Drăgan St. Marin (4635, 50 68, 69, 720, 30, 31, 33—35, 48, 56).

BUZĂU. Ş.m. 1. Cl. VIII. Popescu Darin (4548, 90, 4645, 68, 85, 700, 01, 09,. Cl. X. Udrescu Florin (4645, 68, 69, 700, 01, 05, 09, 11).

CARANSEBEȘ. Ş.m. 2. Cl. VIII. Popescu Adrian (4700—02, 09).

CĂRBUNEȘTI (Oltenia). Absolvent Gușiță Marcel (4635, 42, 45, 50, 53, 56, 85, 700, 05, 09—12, 27—29, 34, 35, 46).

CIMPIA TURZII. Cl. X. Nemeș Mihai (4684—86, 98, 700, 06, 09—11, 25, 29, 31, 33—35, 40, 48, 49, 58, 97, 819).

CIMPINA. Ş.m. 1. Cl. VIII. Brezeanu S. (4668, 700, 02—47).

CIMPULUNG MOLDOVENESC. Cl. X. Manec Oxana (4504, 27).

CLUJ. Studenți: Cimoca Gh. (4421, 22, 31, 34, 43, 67, 70, 95, 503, 04, 26, 27), Iacobescu Dan (4698, 700, 05, 09, 10, 29, 30, 31, 33, 34). Ş.m. Gh. Barițiu. Cl. X. Tomuța Liviu (4421, 22, 31, 32, 34, 41,

43, 67, 69, 86—88, 543, 54, 55, 63, 66, 72, 79, 83, 85, 90, 92, 96, 600, 11, 34, 35. 50, 68, 69). Cl. XI. Iosubescu Dan (4503, 04, 24, 26—28, 48—50, 66, 85). Ş.m. G. Coşbuc. Cl. IX. Jeflea Alexandrina (4585, 600, 35, 45, 47, 68, 84, 709, 10).

Şc. de 7 ani nr. 13. Cl. VII. Oprişiu N. (E: 1602, 19, 25).

CONSTANŢA. Ş.m. 1. Cl. IX. Brînzănescu Vasile (4548, 54, 55, 66, 71, 83, 85, 90, 96, 600, 35, 45, 47, 50, 68).

CORABIA. Absolvent Florescu Ion (4579, 85, 89, 90, 96, 611, 35, 46, 68, 69).

CRAIOVA. Abs. Pavel N. Radu (4579, 85, 89, 90, 92, 96, 98, 600, 11, 35, 42, 47, 49, 50, 68, 69, 71, 645, 84—86, 94, 98, 700, 05, 09—12). Ş.m. 3. Cl. XI. Chincheza Iuliana (4698, 729, 33, 48, 58).

DEVA. Absolvent Clipii Tudor (4563, 642, 68, 69, 728, 46). Ş.m. Decebal. Cl. VIII. Caşotă Mihai (4645, 747, 48). Cl. X. Nestor Luminiţa (4734, 40).

DOROHOI. Ş.m. 1. Cl. X. Ciornea D. (4611, 69). Ş.m. 2. Cl. XI. Rabinovici Mariana (4711, 31, 34, 35).

DRĂGĂŞANI. Cl. XI. Blidaru Ion (4503, 04, 24, 26, 27, 49, 66, 72, 79, 85, 96, 600, 11).

FĂLTICENI. Ş.m. 2. Cl. X. Rabinovici Liviu (4725, 26, 29—35, 40, 47—49, 67—71).

FOCŞANI. Ş.m. Unirea .Cl. VIII. Hanea Mariana (4747, 48). Cl. XI. Năstase Aurel (4698, 705, 10—12, 29, 31—35, 40, 48, 58, 68). Ş.m. Al. I. Cuza. Cl. XI. Kramer Eugenia (4686, 700, 01, 11, 25, 27, 29—31, 33, 34, 40).

GALAŢI. Absolvent Felea Victor (4725, 27—31, 33—35, 40, 47—49, 58, 67—70). Ş.m. 1. V. Alecsandri. Cl. XI. Ender Lucian (4579, 83, 85, 89, 90, 96, 600, 11, 35, 42, 45, 50, 56, 68, 69, 85, 86, 94, 98, 700, 05, 09, 10, 11, 25—27, 29—35, 40, 48, 49, 58, 67—70). Ş.m. 3. Anonim Cl. VIII. (4698, 725, 29, 30, 33, 47, 48, E: 1702).

GĂIEŞTI (Argeş). Cl. IX. Ciobanu Viorel (4585, 92, 645, 47, 63, 98, 700, 02, 09, 10, 30—35, 48, 49).

HUNEDOARA. Cl. IX. Vaida Victor (4615, 20, 27, 29, 33, 47, 49, 50, 69). Cl. XI. Cuş Ioan (4685, 86, 98, 700—03, 05, 09—11, 17, 25, 27, 29—31, 33—35, 40, 47, 48, 49, 58, 70).

IAŞI. Absolvenţi. Matei Dragoş (4694, 98, 705, 09, 11, 29, 31, 33, 34, 47—49, 819). Ş.m. 1. Haim Marcel (4583, 85, 96, 600, 50, 68, 85, 94, 702, 05, 09, 10). Ş.m. 3. Cl. XI. Pavel Nicolae (4585, 90, 96, 600, 11, 12, 68, 69, 98, 700, 07). Ş.m. 7. Cl. IX. Grimberg Ilie (4583, 85, 90, 635, 45, 50, 68, 700—03, 09, 25, 29, 31, 33, 35, 47—49).

INEU (Crişana). Cl. XI. Condea Vasile (4549, 66, 85, 89, 645).

LONEA (Hunedoara). Absolvent Grozavu Mihail (4503, 04, 16, 26, 28, 85, 92, 600, 11).

Lugoj. Ş.m. 1. Cl. IX. Vasiliu Dan (4645, 65, 94, 98, 700, 02, 03, 05, 09, 17, 25, 29, 30, 35, 47, 68). Cl. XI. Popa Doina (4504, 16, 27, 49, 55, 66, 79, 85, 96, 600).

MEDIAŞ. Cl. VIII. Brădişteanu Adrian (4645, 68, 700, 02, 09, 48, E: 672, 700—02). Cl. XI. Pancu Adrian (4585, 645, 68, 69, 85, 86, 98, 700, 05, 09—12, 25, 26, 29—31, 34, 35, 40, 48, 49, 58, 67).

ORADEA. Absolvent. Farcaş Irina (4549, 50, 54—56, 71, 85, 89, 90, 600, 11, 42, 68, 69, 86, 98, 704, 10, 11, 28—31, 33—31, 33—35, 40, 46, 68). Ş.m. 2. Cl. IX. Vertes Petre (4725, 26, 29—31, 33, 47—49, 62).

PANCIU. Cl. X. Hărăbov Vasile (4635, 45, 47, 50, 68, 84, 98, 700, 09, 10), Zamfir Ion (4585, 90, 92, 96, 98, 600, 35, 42, 47, 49, 50, 68, 69, 84, 94, 98, 700, 05, 09—12, 25, 26, 29—35, 40, 47—49, 56, 58, 68—70). Cl. XI. Spătaru Ion (4563, 66, 72, 83, 85, 96, 600, 35, 45, 50, 68, 69, 98, 700, 05, 09—11).

PITEŞTI. Ş.m. 1. Cl. IX. Dumitru Petrică (4600, 10, 35, 45, 50, 68, 700, 09, 29—31, 33, 47—49), Mărgineanu D. Doru-Georz (4503, 28, 83, 85, 98, 600, 35, 45, 50, 68). Cl. X. Pătraşcu I. Gh. (4524, 49, 63, 72, 73, 85, 96, 600, 11, 35, 45, 50, 68, 69, 98, 700—03, 05, 09—12, 17, 25, 27, 29—35, 40, 47—49, 68, 70). Ş.m. 3. Cl. VIII. Ionescu Marcel (4747, 48, 96, 819). Cl. X. Diaconescu Ioan (4566, 85, 90, 600, 11, 69), Stănoiu Cezar (4635, 50, 68, 69, 86, 94, 701—03, 11, 58).

PLOIEŞTI. Ş.m. I. L. Caragiale. Cl. X. Bădescu Gh. (4585, 96, 600, 11, 35, 45, 50, 69, 705, 11), Vasilescu Relu (4585, 96, 600, 11, 35, 45, 50, 69, 705, 11). Cl. XI. Emanoil Const. (4583, 611, 35, 41, 61, 96, 98, 700, 05, 09—11). Ş.m. Mihai Viteazu. Cl. IX. Condrescu Mădălina (4555, 66, 85, 90, 600, 50, 68, 705, 09). Cl. X. Hoinărescu Călin (4709, 11).

PUCIOASA. Cl. VIII. Matei Gh. (4645, 68, 709, 29, 30, 33, 47, 48, E: 1701).

RÎMNICU-SĂRAT. Ş.m. 2 Ştefan cel Mare. Cl. IX. Nelepcu Grigore (4684, 98, 700, 09, 10, 25, 26, 29—31, 33, 35, 47—49).

RÎMNICU-VÎLCEA. Ş.m. N. Bălcescu. Cl. XI. Nicolaescu Gh. (4686, 705, 11, 27, 29, 30, 33, 34, 35, 48, 49, 58).

SATU-MARE. Ş.m. K. Ferencz. Cl. VIII. Nemeş Vasile (E: 1673, 700, 4668, 700, 03, 09, 29, 30, 33, 48).

SIBIU. Ş.m. 1. Cl. IX. Mihu Dumitru (4583, 645, 68, 709), Cl. XI. Braitsch Dieter (4585, 705, 11, 12). Ş.m. 2. Cl. VIII. Trif Maria (E: 1702; 4747, 48). Ş.m. 3. Cl. IX. Manea Octavian (4555, 66, 85, 600, 35, 50). Cl. XI. Cristea Valentin 4503, 04, 16, 27, 28).

IKOS-MÜSZAKI-KÖNYV 1883

Şc. de 7 ani nr. 15. Cl. VI. Nedelcu Alexandru (E: 1622, 28, 53, 60). Şc. tehnică proiectări anul II, Andrei Maria (4698, 730, 33, 34, 48, 68).

SIGHET (Maramureş). Ş.m. Filimon Sîrbu. Cl. XI. Smicală Ion (4685, 86, 702, 03, 09, 11. 29, 31, 33, 47, 49).

SIGHIŞOARA. Ş.m. 1. Cl. IX. Vonica Octavian (4635, 45, 50, 68, 700, 09, 10, 25, 29—31, 33, 48, 49). Cl. X. Fintoc Lucian (4668, 69, 86, 98, 700, 02, 05, 09—11, 34. 58), Frunzeti Dan (4585, 96, 611, 35, 45, 86, 701, 02, 05, 11), Iacob Angela (4668, 69, 86, 98, 700, 02, 05, 09—11), Ionescu Ştefan (4585, 96, 668, 69, 86, 700, 01, 02, 05, 09, 11).

SLĂNIC. Absolvent Duma Ilie (4686, 700, 05, 09—11, 29, 30, 33—35, 47, 58, 68). Ş.m. mixtă. Cl. VIII. Dumitrescu Costin (4645, 68, 98, 700—02, 09, 25, 29, 33, 48), Boboc Nestor (4645, 68, 98, 700—02, 09, 25, 29, 33, 48).

SĂVENI (Suceava). Cl. VIII. Sanitescu Gh. (4645, 68, 85, 709, 25, 29, 30, 33, 47, 48).

SUCEAVA. Anonim. (4635, 45, 49, 53, 68, 69, 700, 04, 05, 11, 12, 29—31, 33, 34, 48, 49, 68, 69, 70).

TIMIŞOARA. Soldat Zăgreanu Nicolae (4583, 92, 630, 69, 86, 98, 700, 02, 05, 11, 17, 20, 25, 29, 31, 33—35, 40, 48, 49, 58, 68, 70, 71). Şc. muzică şi arte plastice. Cl. VIII. Penţia Mircea (4645, 700, 09, 29, 33, 48). Şc. meserii an I. Anonim. (E: 1702; 4725, 29—31, 33, 35, 48, 49, 68). Ş.m. 5. Cl. IX. Lustig Gheorghe (4583, 85, 90, 600, 35, 45, 47, 68, 700, 09, 10).

TÎRGU JIU. Ş.m. Tudor Vladimirescu. Cl. X. Brîncuş Dan (4686, 98, 705, 09—12, 29, 34), Mihuţ Antonie (4554, 83, 85, 90, 96, 98, 600, 11, 45, 50, 68, 69).

TÎRGU LĂPUŞ. Cl. X. Cîndea Octavian (4448, 69, 516, 27, 63, 66).

TITU GARA. Cl. IX. Matei Gheorghe (4645, 68, 85, 709, 25, 29, 48). Cl. X. Avramescu Ioan (4635, 45, 50, 68, 700, 09, 10, 29, 31, 49).

TURDA. Ş. m. 1 Mihai Viteazu. Cl. IX. Apostol Adriana (4647, 98, 701—03, 05, 25, 26, 30, 33), Filip Liana (4583, 85, 92, 635, 45, 47, 50, 68, 98, 700—03, 09, 10, 26, 29, 31, 35, 49), Kovry Magdalena (4635, 45, 47, 50, 68, 700, 01—03, 09, 10), Păcuraru Liana (4684, 85, 98, 700—03, 05, 09, 10, 48). Cl. X. Olar Iacob (4635, 68, 69, 86, 98, 700—03, 05, 19, 11, 12).

TURNU SEVERIN. Ş.m. 1. Cl. X. Bocănete Paul (4686, 94, 700—03, 05, 09—11. Ş.m. 2. Cl. XI. Ilie Emil (4711).

E 1426

MAGYAR MŰSZAKI MÚZEUM 1833

TABLA DE MATERII

a Gazetei Matematice şi Fizice seria B, anul XIV, 1961

I — ARTICOLE

		Pag.
1.	*M. Ababii, prof. R. Vîlcea* — Efectele chimice ale luminii	539
2.	*I. S. Antoniu, dr. ing. prof. univ.* — André Marie Ampere	468
3.	*Eugen Boia,* prof. Piteşti — Transformatori	520
4.	*Mircea Bostan, prof. Galaţi* — Noţiuni despre natura magnetismului	663
5.	*Gh. Ciucu,* conf. univ. — Unele aplicaţii ale statisticii matematice	193
6.	*Ilie Constantinescu,* ing. Petroşani — Noţiuni introductive asupra spaţiilor metrice.	592
7.	*Ion Cristescu,* prof. — Forţa Coriolis	337
8.	*E. Deutsch,* prof. — Probleme de maxim şi minim în fizică şi tehnică	723
9.	*E. Dobrescu,* conf. univ. şi *I. Sălăgean,* conf. univ. Petroşani — Despre formularea corectă a noţiunilor, proprietăţilor şi a raţionamentelor matematice	577
10.	*Iosif Fuchs,* prof. Timişoara — Un model de geometrie	656
11.	*Gh. Gheorghiev,* dr. prof. univ. Iaşi — Facultatea de matematică şi fizică a Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi	327
12.	*Adolf Haimovici,* prof. univ. Iaşi — Schemele cu contacte şi algebrele lui Boole	449
13.	*C. Ionescu-Bujor,* prof. univ. — Transformări geometrice în optică	260
14.	*C. Ionescu-Ţiu,* prof. — Progresii geometrice, numere complexe şi sume trigonometrice	392
15.	*Teodor Lecca,* prof. Curtea-de-Argeş — Introducere în teoria relativităţii restrînse.	643
16.	*S. Marcus,* lector — Traducerea dintr-o limbă în alta, cu maşina electronică de calcul.	132
17.	*N. Mihăilă,* conf. univ. Bucureşti-Newton	385
18.	*Emil Morţun,* prof. emerit Piteşti — Fascicule de cercuri	515
19.	*Edmond Nicolau,* prof. univ. — Cibernetica	269
20.	*O. Sacter,* conf. univ. — Calculul cu diferenţe	330
21.	*Ilie Stănescu,* prof. Pucioasa — Rezonanţa	397
22.	*N. Stănescu,* prof. — Fenomene şi principii care stau la baza opticii geometrice	713

Pag.

23. *Alex. Stoenescu*, prof. univ. — I. V. Mescerski 129
24. *Gh. Tarnoki*, prof. Oradea — Despre geometria lui Lobacevski . . . 74
25. *N. Teodorescu*, dr., prof. univ. — Facultatea de matematică și fizică a Universității „C. I. Parhon" 321
26. *I. Tudoran*, prof. Cluj — Observarea pămîntului de către un cosmonaut . . . 669
27. *Vanță Maria*, prof. Petroșani — Unele aspecte ale folosirii izotopilor radioactivi în minerit 590
28. *Vanță Maria*, prof. și *Elemer Rosinger*, prof. Petroșani — Aplicații fizico-matematice în minerit 585
29. *Gh. Vieroșanu*, prof. București — Mișcarea relativă 460
30. *Semiconductorii* (prelucrare după Enciclopedia Sovietică pentru tineret) . . . 5
31. Eclipsa totală de soare de la 15 februarie 1961 1
32. Aplicații practice ale semiconductorilor 79
33. Să cunoaștem semiconductorii 140
34. Din istoria calculului diferențial și integral 705
35. Olimpiada de matematică și fizică 1962. (Programa) 739

II — EDITORIALE

1. *O glorioasă aniversare* 257
2. *La începutul noului an școlar* 513
3. *În pragul comunismului, de Gh. Rulea* 641

III — PENTRU CERCURILE DE ELEVI

a) *Articole scurte*

1. Aplicații ale teoremei celor trei perpendiculare de *Tudor Zamfirescu*, elev ș. m. 22 București 146
2. Presiunea osmotică de prof. *Dumitru Tănase* 150
3. Circuite electrostatice și magnetice de asist. univ. *Dorin Gheorghiu* 199
4. Drum spre luceafăr de prof. univ. *Al. Stoenescu* 209
5. Prima viteză astronautică (prelucrare din limba rusă) 210
6. Eclipsa totală de soare de la 15 februarie 1961 215
7. Asupra unor sume de *Dan Bretan*, Timișoara 276
8. Ce sînt electreții ? (traducere din l. germană) 280
9. Circuitul oscilant (serie) de *Dumitrescu Vladimir* și *Fezi Adrian*, cl. XI ș. m. I Ploiești 352
10. În legătură cu problema 4530 de prof. *H. Gorcea*, P. Neamț 401
11. Despre accelerația lui Coriolis de *Al. Stoenescu* și *C. Ionescu-Țiu* . . . 527
12. Din aplicațiile practice ale firului cu plumb și ale pendulului (traducere din l. rusă). 545
13. Determinarea coeficientului de vîscozitate la gaze, de *Dumitru Grosu*, asistent Iași 678
14. Compararea rădăcinilor ecuațiilor de gr. II cu numere date de prof. *C. Borș* și *C. Lindestein*, Piatra Neamț 672

b) *Dări de seamă*

1. Din activitatea „Cercului de matematici" de la școala medie Bolintinul de Vale . 47
2. Din activitatea cercului de matematici pe Capitală pentru clasa a X-a . . . 310
3. Variația temperaturii atmosferice în timpul eclipsei solare din 15 februarie 1961 la ș. m. 2 Bacău și ș. m. 1 Oradea 411
4. Despre activitatea extra școlară la matematici a cercului Dimitrie Pompeiu de la ș. m. 12 Spiru Haret din București 501
5. Dare de seamă asupra Olimpiadei de matematică și fizică 1961 de *Ion St. Mușat* 626
6. Dare de seamă asupra celei de-a III-a Olimpiade Internaționale de matematică, 1961 736

IV — NOTE MATEMATICE

1. Asupra problemei 3358 de *Iacob I. Voia*, student Timișoara 11
2. Asupra problemelor 3391 și 4322 de *I.I. Munteanu*, student Iași 12
3. Stabilirea unor relații de *Viorel Vodă*, ș. m. 12 București 13

Pag.

4. Generalizarea unei probleme a lui *G. Țițeica* de *Silviu Guiașu*, student București . 15
5. O altă demonstrație a formulei celor 3 relevmente de *Costel Bejan*, elev Galați . . 86
6. Generalizarea problemei 3261 de *Iacob I. Voia*, cl. XI, Anina 37
7. Demonstrații trigonometrice ale unor teoreme de geometrie de *Viorel Vodă*, ș. m. 12 București 88
8. Polinoamele lui Cebîșev de *Mircea Rădulescu*, elev Constanța 158
9. Aflarea laturii decagonului regulat convex și a pentagonului regulat convex cu alte procedee de *H. Rosner*, Iași 159
10. Asupra unor probleme de divizibilitate de *Paul Popescu*, student Electronică București 213
11. Generalizarea unei reguli de divizibilitate de *D. M. Bătinețu*, student București . . 341
12. Cîteva relații în legătură cu ceviene izogonale de *Lupaș Laurențiu*, absolvent București 345
13. Cîteva inegalități deduse din inegalitatea lui Bernoulli de *C. Gh. Bănică*, elev Cîmpulung Muscel 405
14. Relativ la punctul Nagel de *Viorel Vodă* ș. m. 12 București 407
15. Generalizarea problemei 3493 de *Laurențiu Lupaș*, student I. P. București . . . 407
16. Asupra ariei triunghiului podar și generalizarea teoremei lui Simson de *Gh. Oprișan*, elev Curtea-de-Argeș 530
17. Cîteva generalizări în analiza combinatorie de *Șerban Strătilă*, elev Pitești . . . 533
18. Asupra proiecției unui unghi pe un plan de *Nicolae Peligrad*, profesor Pitești . 537
19. Asupra unei inegalități trigonometrice de *Albu Toma*, elev Petroșeni (Hunedoara) 597
20. Asupra unei teoreme a lui T. Lalescu de *Ilie Torsan*, absolvent Alba Iulia . . 598
21. Asupra problemelor 4641, 4648, 4738 de *Lucian Bădescu*, elev C-lung Muscel . 675
22. Asupra unei probleme de Algebră de *Ghica S. Anton*, elev Pitești . . . 734
23. Asupra unei probleme de Geometrie analitică de A. Deutsch, profesor Rădăuți . 736

V — CHESTIUNI DE EXAMEN

1. Subiecte date la examenul de admitere în 1960 în facultăți în București și Craiova . 37
2. Subiecte date la examenul de admitere în Institutul de Construcții București, în 1960 179
3. Subiecte date la etapa locală a Olimpiadei de matematică 1961 232
4. Din problemele date pentru pregătirea Olimpiadei matematice din 1961 în U.R.S.S. 302
5. Probleme date la etapa regională a Olimpiadei de matematici 1961 365
6. Probleme date la etapa regională a Olimpiadei de matematică 1961 427
7. Probleme date la etapa finală a Olimpiadei de matematică 1961 . . . . 490, 617
8. Probleme date la admiterea în Facultatea de matematică și fizică, București 1961, 674, 680, 699, 748

VI — CALEIDOSCOP MATEMATIC ȘI FIZIC

Caleidoscop matematic și fizic 19, 92, 160

VII — SĂ CONSTRUIM CU MIJLOACE PROPRII MODELE ȘI APARATE DE FIZICĂ

1. Cel mai simplu motor electric de V. A. 219
2. Dispozitiv pentru demonstrarea legii lui Arhimede (trad. din l. rusă) . . . 409
3. Dispozitiv pentru demonstrarea distribuției electrivității pe conductori de *D. Atanasiu*, Petroșeni 599

VIII — POȘTA REDACȚIEI

1. Către rezolvitorii de probleme. — Coperta nr. 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11.
2. Anunțarea datelor olimpiadei de matematică și fizică, 1961 — coperta nr. 1, 3, 4 și pag. 128.
3. Colecțiile de numere din anii precedenți, — coperta 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11.
4. Biblioteca Societății de științe matematice și fizice din R.P.R. — coperta nr. 2, 5, 7, 8, 12.
5. Concurs pentru elaborarea unor probleme legate de practică — coperta nr. 3, 4, 6 și pag. 448.
6. Întrecerea pe anul 1961 între școlile medii, coperta nr. 5, 6, 11.
7. Poșta redacției: pag. 187, 245, 448, 629 și coperta nr. 2—7, 9—12.

Pag.

8. Rubrica rezolvitorilor de probleme : pag. 49, 61, 120, 125, 188, 246, 313, 316, 377, 439, 441, 444, 504, 571, 629, 633, 700, 757.
9. Evidențiați : pag. 49, 61, 125, 246, 315, 441, 444, 571, 629, 633, 701, 757.

IX — DIN VIAȚA „SOCIETĂȚII"

1. Premiile Gazetei matematice și fizice seria B pe 1960 21
2. Olimpiada micilor matematicieni și fizicieni 1961 24
3. Concursul de matematică, fizică și mecanică pentru studenți, 1960 . . . 27
4. Rezultatul întrcerii între școlile medii din țară pe 1960 96
5. Regulamentul întrecerii între școlile medii din țară în 1961 97
6. Cărți noi 313, 503
7. Rezultatul Olimpiadei de matematică 1961, etapa finală 352
8. Rezultatul Olimpiadei de fizică 1961 etapa finală 353
9. Concursul de matematică, mecanică și fizică pentru studenți, 1961 742

X — PROBLEME PROPUSE, REPARTIZATE PE AUTORI

Ailincăi Margareta (4727), *Albu Toma* (4640, 4956), *Anghelache Tudorică* (4738, 4790, 4903, E : 1729), *Antoniu S. I.* (4662), *Atanasiu Virgil* (4709, 4725, 4729, 4747), *Avramescu I.* (4792), *Bădescu Lucian* (4866, 4941), *Bătinețu Dumitru* (4566, 4754, E : 1632, 1635, 1665, 1669, 1679, 1714, 1724), *Bazacov Gh.* (4567, 4716), *Baieră Bodgan* (E : 1656, 1662, 1676, 1695, 1720), *Bănică G. Constantin* (4891), *Bejan Costel* (E : 1629), *Berti Ștefan* (4638), *Belcea Marin* (4865), *Bîrzan Romanel* (4584, 4939), *Bică Constantin* (4894), *Bogosi Jenő* (E: 1680), *Boștenaru L.* (E : 1705), *Bobolea I.* (4863, 5005), *Boia Eugen* (4880, 4883), *Bostan M.* (4984), *Bretan Dan* (4518), *Brătianu Silviu* (4769), *Brașoveanu Mihai* (E : 1740), *Buicliu Gheorghe* (4517, 4658, 4741, 4994), *Burghelea Dan* (4558), *Bujdei V.* (5031, 5032), *Buzu Ioan* (4655, 4670), *Candrea I.* (E : 1648, 1667), *Carp C.* (5061), *Castraveti V.* (5023), *Catrina Dumitru* (4646), *Cernescu Petre* (4916), *Cimoca Gheorghe* (E : 1672), *Ciorobîtcă Maria* (E : 1747, 1749), *Costăchescu V. Const.* (4565, 4637, 4699, 4799, 5000), *Constantinescu N. I.* (4654, 4757, 4933, 4947, 4958), *Constantinescu E.* (4812), *Codreanu Maria* (4821), *Coșniță C.* (5010, 5040), *Cucurezeanu I.* (4802), *Cupcea Z. N.* (4641), *Dăneț Teodor* (4599, 4793, 5003), *Deutsch A.* (5030, 5036, E : 1766), *Diaconu Adrian* (4523), *Dincă Gh.* (4995), *Diță N. G.* (4892), *Dobrescu C.* (E : 1689), *Domokos C.* (4851), *Dobreanu P.* (E : 1743), *Dumitrescu I. Florea* (E : 1634, 1637), *Dumitru Nicolae* (4778, 4915, 4922), *Eftimie Radu* (4999), *Erhardt E.* (5039), *Ene P. Dumitru* (4544, 4589, 4655), *Făgădaru I.* (4954), *Fărcaș Irina* (4771, 4718, 4823, 5050), *Georgescu-Buzău Eremia* (4610), *Georgescu Stelian* (4765, 4848), *Gheorghe Cezar* (4508, 4989), *Ghica Anton* (4743, 4889, 4902, E : 1739) *Gloden A.* (4696), *Grăjdeanu Virginica* (E : 1642), *Grosu Teodora* (4514, 4613, 4758), *Grigoraș V.* (4663), *Guzu Boris* (4940), *Gruian Ștefan* (4942), *Gușită Marcel* (5013), *Hadîrcă Ioan* (4636), *Hangea Nicolae* (4710, 4726, 4854, 5007), *Horak Stanislav* (4539), *Ioachim Alexandru* (4997), *Ionescu-Țiu C.* (4510, 4513, 4541, 4545, 4553, 4562, 4587, 4595, 4608, 4639, 4666, 4667, 4683, 4692, 4696, 4719, 4720, 4721, 4737, 4745, 4760, 4766, 4794, 4810, 4827, 4836, 4837, 4845, 4849, 4881, 4888, 4907, 4928, 4937, 4945, 4946, 4949, 4959, 4960, 4961, 4985, 5001, 5008, 5014, 5046, 5048, 5055, E : 1650, 1664, 1666, 1679, 1690, 1712, 1721, 1722, 1735, 1750, 1751, 1755, 1756, 1773), *Ivănescu Cezar* (4860), *Ixaru Grigore* (4879, 4898, 4906, E : 1739), *Jaliu E.* (4685), *Jaliu I.* (4527), 4730, 4733, 4841), *Kacsó Ferenc* (4707), *Kaflikiewicz Ileana* (4919), *Kery Helga* (4785), *Kiss E.* (4724, E : 1685), *Lalescu Alex.* (E : 1630), *Lambă Stelian* (E : 1631, 1641, 1645, 1683, 1723, 1772), *Leca Teodor* (4875), *Maftei Ion* (4547), *Masgras Vasile* (4442, 4559), *Marica Ștefan* (E : 1646, 1707), *Marinescu Achim* (4867), *Manolache D.* (4886, 4900), *Mașek Corina* (4952), *Maglașu Doina* (E : 1746), *Marinescu Gabriela* (E : 1732, 1733), *Menciu C.* (4522, 4704, 4755, 4825, 4857, E : 1671), *Merches Ioan* (4712, 4788), *Mihăileanu N.* (4573, 4586, 4597, 4657, 4661, 4691, 4736, 4800, 4856, 4859, 4935, 5009, 5041), E: 1643, 1652, 1673), *Mirzan D.* (E : 1709), *Mitran I. Nicolae* (E: 1728, 1730), *Moflic Emilian* (4671), *Mocanu Augustin* (E : 1717), *Moraru N.* (E : 1763, 1765, 1767), *Morțun Emil* (4873, 4896, 4908), *Munteanu I. Ioan* (4564), *Mușat Șt.*

Ioan (4507), *Müller M.* (4684, 4686, 4767), *Năstăsescu Constantin* (4557, 5004), *Nicolau C.* (E : 1658), *Nicula Virgil* (4787), *Nicolescu Basarab* (4560), *Nimițan I.* (5037, 1770), *Oprișan Gheorghe* (4887, 4904), *Oprișan Victor* (E : 1748), *Oproiu Ion* (E : 1731, 1734), *Panu C. Dan* (4593), *Paxino Gheorghe* (4770, 4795), *Pavel Radu*, (5014, E : 1701, 1702), *Părău Titus* (E : 1754), *Păncescu Paul* (4570), *Petrescu Gh.* (4789, E : 1636, 1651), *Petre Liviu* (4601), *Persache Octavian* (4864), *Peligrad N.* (4877, 4897), *Pîrșan C. Liviu* (4520), *Popescu Șerban* (E : 1628, 1647), *Popa I. Nicolae* (4556), *Popa Alexandru* (4594), *Popescu Paul* (4604, 4609), *Popescu Gheorghe* (4653, 4706, 4829, 4895, 4905), *Popescu S. I.* (E : 1661), *Popescu Mihai* (4809, 4876), *Popa Viorel* (4878), *Postelnicu Anghel* (4983), *Pravăț V. V.* (4648, 4850), *Pricopie V.* (4644, 5035), *Proca Nicolae* (E : 1660), *Pupăzan Nicolae* (4688), *Raicu Anghel* (4839), *Rădulescu Mircea* (4563, 4742, 4858), *Rogai M. Eliferie* (4531), *Roman Tiberiu* (4773, 4780, 4786, 4828, 4834, 4921, 4925), *Rusu Coriolan* (4711), *Sacter O.* (4722, 4723, 4830, 4831, 4835, 4844, 4923), *Savu C.* (4525, 4694), *Săndulache C.* (4813, 4814), *Sbierea I.* (5062, 5065), *Schüssler Alfred* (4817), *Sedlacek Jiri* (4542), *Setzer Oto* (4543), *Sfichi Romulus* (4548, 4549, 4635, 4705, 4819, 5056, 5058, 5059), *Simon Petru* (5033), *Simionescu D. Gh.* (4682, 4772, 4784, 4820, 4826, 4832, 4833, 4929, 4998, 5042), *Simion Sorin* (4884, 4899), *Spătaru Ion* (5012), *Stamate Ion* (4519), *Stan A. M.* (4643), *Strătescu Ion* (4665), *Stănescu I. Cicerone* (4993), *Stănescu Nicolae* (4728, 4746, 4861), *Stancu Ion* (4890), *Stoicescu Aurel* (4752), *Strățilă Șerban* (4893, 4901), *Ștefan Tache* (4756), *Soare Ion* (4782), *Stoenescu Alexandru* (4521, 4714, E : 1633), *Sușea A.* (4569), *Szasz Carol* (4603), *Teaha Pompiliu* (4842, 4910), *Teodorescu C.* (4909, 4936, 5056), *Teodorescu I.* (4982), *Teodorescu V.* (5011), *Timuș Dan* (4571, 4689), *Titilici E.* (E : 1677, 1724), *Tircă Ion* (4634), *Tîrtan Gabriel* (4561, 4591), *Tomescu Ion* (4568, 4715, 4818, 4843), *Tomoioagă D.* (4768), *Tudoran Ioan* (4838), *Țarălungă I.* (4816), *Țene Lucia* (4717, 4824), *Țopan Gheorghe* (4612), *Vanță Maria* (4932, 4951, 4962), *Vargă Anton* (4840), *Vasilescu Mihail* (4550), *Vasi'ache Valeriu* (E: 1653), *Velescu Ioan* (E : 1703, 1727), *Viorel Gr.* (E : 1769, 1770), *Vîrgolici V.* (4664), *Vodă G. Viorel* (4532, 5006), *Zamfirescu Tudor* (4744, 4822), *Zapan Grigore* (4938).

XI. PROBLEME REZOLVATE *

4003 (28), 4013 (39), 4025 (98), 4038 (29), 4053 (30), 4054 (30), 4057 (31), 4061 (99), 4083 (99), 4085 (100), 4092 (101), 4097 (101), 4098 (102), 4099 (103), 4102 (679), 4106 (164), 4108 (104), 4111 (166), 4112 (169), 4113 (104), 4114 (170), 4115 (173), 4119 (105), 4124 (173), 4126 (106), 4127 (354), 4136 (174), 4157 (175), 4158 (175), 4163 (176), 4165 (355), 4171 (176), 4172 (177), 4173 (178), 4178 (219), 4183 (220), 4191 (221) 4112 (222), 4213 (223), 4214 (223), 4215 (224), 4216 (225), 4218 (413), 4220 (226), 4224 (282), 4225 (226), 4226 (227), 4227 (228), 4229 (228), 4231 (229), 4232 (229), 4234 (230), 4235 (230), 4237 (231), 4242 (282), 4246 (283), 4247 (356), 4249 (357), 4250 (414), 4251 (285), 4265 (231), 4266 (232), 4267 (288), 4268 (359), 4270 (359), 4271 (288), 4272 (289), 4273 (360), 4277 (360), 4278 (290), 4280 (361), 4283 (291), 4285 (361), 4286 (363), 4287 (363), 4288 (292), 4295 (292), 4296 (364), 4297 (548), 4287 (550), 4299 (550), 4300 (551), 4312 (293), 4314 (415), 4315 (296), 4316 (296), 4317 (297), 4318 (299), 4319 (299), 4321 (416), 4323 (300), 4325 (301), 4328 (552), 4331 (294), 4335 (417), 4336 (418), 4337 (418), 4338 (419), 4343 (419), 4344 (420), 4345 (600), 4348 (422), 4350 (422), 4351 (680), 4355 (477), 4356 (478), 4358 (478-9), 4359 (479), 4360 (479-80), 4361 (480), 4362 (481), 4364 (492), 4365 (482), 4367 (483), 4368 (483-4), 4369 (484), 4370 (485), 4372 (485), 4373 (486), 4375 (486), 4385 (487), 4390 (487), 4391 (487-8), 4393 (488), 4394 (489), 4397 (423), 4400 (681), 4404 (553), 4405 (553), 4412 (554), 4416 (555), 4418 (555), 4422 (601), 4423 (602), 4432 (682), 4433 (557), 4435 (557), 4444 (603), 4446 (604), 4447 (605), 4450 (558), 4451 (682), 4454 (683), 4456 (684), 4457 (605), 4460 (606), 4461 (607), 4462 (684), 4463 (685), 4467 (686), 4468 (687), 4471 (688), 4472 (608), 4474 (609), 4475 (609), 4477 (688), 4480 (610), 4482 (610), 4483 (611), 4485 (611), 4486 (613), 4489 (614), 4490 (744), 4492 (614), 4497 (615), 4498 (744), 4508 (745), 4515 (746),

*

E : 1459 (33) ; E : 1461 (34) ; E : 1462 (35) ; E : 1467 (35) ; E : 1468 (68) ; E : 1499 (107); E: 1502 (36) ; E: 1503 (36); E: 1504 (108) ; E : 1505 (109) ; E : 1520 (107) ; E : 1545 (109) ; E : 1548 (424) ; E : 1549 (425) ; E : 1551 (110) ; E : 1552 (111) ; E : 1553 (425) ; E : 1554 (426) ; E : 1574 (426) ; E : 1581 (616) ; E : 1600 (559) ; E : 1602 (559) ; E : 1605 (559) ; E : 1607 (560) ; E : 1608 (560) ; E : 1609 (561) ; E : 1610 (562) ; E : 1611 (562) ; E : 1613 (747) ; E : 1615 (747) ; E : 1628 (748).

* În paranteze este pagina la care s-a rezolvat problema.

XII. EVIDENȚIAȚI

1. *Abramovici Alexandru* (246), 2. *Adameșteanu Ion* (49), 3. *Anghel Mioara* (633), 4. *Anghel Vasile* (444), 5. *Aniţescu N. Maria* (49, 633), 6. *Barbu Dorin* (633), 7. *Bănică Gh. Constantin* (50), 8. *Bădescu Lucian* (315), 9. *Barbu S. Cornel* (316), 10. *Bălan George* (690), 11. *Băluţă Gheorghe* (49, 315, 633), 12. *Barbu G. Emil* (49), 13. *Banu Gheorghe* (125, 246, 571, 690), 14. *Bărbulescu Aurelia* (316), 15. *Bejan Costel* (125), 16. *Benderski Boris* (315), 17. *Bîrzan Romanel* (50), 18. *Bibicu Ion* (50), 19. *Bîrză I. Ilie* (633), 20. *Bluoss I. Hans* (246, 441), 21. *Blidaru Ion* (61, 246, 444, 701), 22. *Bolocan Gabriel* (50, 315, 444), 23. *Boboc Bănuţ* (315), 24. *Boldea Ion* (61, 246, 444, 690), 25. *Bolborea Petre* (633), 26. *Boicescu Vlad* (633), 27. *Breazu Ioana* (441), 28. *Brezeanu Florin* (346), 29. *Bîrzănescu Maria* (633), 30. *Brindea Rodica* (690), 31. *Buiculescu Doina* (633), 32. *Buimovici Alexandru* (315), 33. *Busuioc Mihaela* (316, 444), 34. *Capotescu Mircea* (49), 35. *Cănilă C. Constantin* (49), 36. *Catrina Dumitru* (125), 37. *Cancer Şerban* (441), 38. *Caramalis Paula* (571), 39. *Calistrate D. Ion* (701), 40. *Cancer Anca* (125), 41. *Călăraşu Ovidiu* (316), 42. *Ceapă Constantin* (316), 43. *Ceapă Alexandru* (701), 44. *Cepoiu Mariana* (246), 45. *Ceicu Mihaela* (633), 46. *Chiriţă Marcel* (49, 61, 315, 444), 47. *Chiva Petre* (246, 571), 48. *Chizinski Elena* (246), 49. *Ciucu I. Cornel* (49), 50. *Cimoca Gheorghe* (125, 444), 51 *Ciulei Mircea* (246, 316), 52. *Cimponeriu Traian* (316, 701), 53. *Cîrţiha Anghel* (690), 54. *Ciocan Dan* (316), 55. *Cojocaru Ion* (49), 56. *Covar Eugen* (49), 57. *Costanda D. Cristian* (61), 58. *Costanda D. Graziela* (61), 59. *Cojocaru Mircea* (61), 60. *Cornea Filip* (50), 61. *Colbeanu Ion* (246), 62. *Cornblum Eugen* (50), 63. *Constantin Martiana* (633), 64. *Craioveanu Mircea* (49), 65. *Cruşoveanu Victor* (50), 66. *Creţu Gh. Dumitru* (61, 315, 690), 67. *Crihană Lascăr* (316), 68. *Cristescu Mărgărit* (633), 69. *Cristea Nicolae* (50), 70. *Crăciun Viorel* (633), 71. *Cristudor Elena* (633), 72. *Cupcea Nicolae* (125), 73. *Cuş Ioan* (690), 74. *Dascălu Paul* (49, 125, 316), 75. *Danciu P. Iulian* (444, 633), 76. *Dabu Dan* (316, 701), 77. *Dache Constantin* (444), 78. *Demetrian Romulus* (316), 79. *Deleanu Denis* (444), 80. *Dinulescu Rodrig* (444), 81. *Diaconescu C. Radu* (49, 316, 571, 701), 82. *Dimovici Sorin* (246), 83. *Diaconu Nicolae* (690), 84. *Dolteanu Temistocle* (701), 85. *Drugea I. Gheorghe* (61, 246, 315, 701), 86. *Drăguşanu Constantin* (316), 87. *Drigă M. Gheorghe* (633), 88. *Dragomir Toma* (690), 89. *Driga Maria* (246), 90. *Drăgănescu Lavinia* (315), 91. *Dumitrescu Emilia* (316), 92. *Dumitrică V. Aurel* (61, 315, 571), 93. *Dumitrescu Aurel* (246), 94. *Elec T. Maria* (571), 95. *Enăceanu Dan* (633), 96. *Ender Lucian* (701-57), 97. *Ene P. Dumitru* (49, 125, 246), 98. *Ene P. Elena* (125, 571), 99. *Ene Traian* (246), 100. *Eremia Dinu* (246, 444), 101. *Florea Gheorghe* (316), 102. *Fotescu Constantin* (246), 103. *Foale Titi* (444), 104. *Frangu Octavian* (61, 633), 105. *Frandeş Leonard* (701), 106. *Frincu Zaharia* (441), 107. *Garabedian Rodica* (246, 315), 108. *Gaiginski Radu* (690), 109. *Georgescu Horia* (125), 110. *Georgescu Stelian* (315, 444, 633), 111. *Georgescu V. Teodorel* (50), 112. *Gheju Petruc* (49, 444), 113. *Gheorghiu Rodica* (246), 114. *Gheorghiu A. Nicolae* (571), 115. *Ghiţă R. Teodor* (49), 116. *Ghica S. Anton* (50), 117. *Gianni Emanuel* (444), 118. *Gilmeanu Vasilaş* (701), 119. *Gladcenko Gheorghe* (633), 120. *Grădeanu C. Gheorghe* (49, 61, 246, 315, 444, 633), 121. *Grigorescu I. Şerban* (50, 246), 122. *Grozavu Mihai* (701), 123. *Gruia Ştefan* (441), 124. *Gurămultă V. Dănuţ* (571), 125. *Gurămultă V. Ion* (701), 126. *Gheorghiţă Vitalie* (61), 127. *Hiriş Viorel* (49), 128. *Hurduc Dan* (701), 192. *Ilie Mihai* (49, 246, 444, 633), 130. *Ilina Stelian* (444), 131. *Ionescu Alina* (701), 132. *Ionescu D. Alexandru* (49), 133. *Ionescu Marcel* (701), 134. *Ionescu Vladimir* (49), 135. *Ioniţă Maria* (701), 136. *Iorga Valeriu* (61, 125, 315, 444), 137. *Iuga Ştefania* (125), 138. *Jipa Constantin* (49), 139. *Jurca Gabriela* (61), 140. *Kessler Petre* (571), 141. *Kindich Richard* (441), 142. *Lazăr Dan* (315), 143. *Leonte Alexandru* (49), 144. *Lungu Şerban* (50, 246), 145. *Lustig Gheorghe* (94, 315, 571, 701), 146. *Marinescu Emil* (315), 147. *Martiş Gheorghe* (633), 148. *Matei Gheorghe* (701), 149. *Matei Dragoş* (701), 150. *Marinescu Victor* (125), 151. *Marcus Sergiu* (316), 152. *Marian Iuliu* (444, 633), 153. *Man Eugeniu* (633), 154. *Malidi Nela* (633), 155. *Medaru Doina* (444), 156. *Mihai M. M.* (316), 157. *Mihu Răzvan* (444, 633), 158. *Mihăescu Doru* (49), 159. *Mitran Maria* (701), 160. *Moga Ioan* (49), 161. *Moraru Radu* (50), 162. *Moraru Liliana* (316), 163. *Moldovan Grigore* (49), 164. *Moţit Horia* (49, 315, 633), 165. *Moţoi V. Marin* (633), 166. *Mocanu Ovidiu* (49), 167. *Munteanu Ion* (49), 168. *Munteanu Gh. Mircea* (633), 169. *Munteanu Gh. Mihai* (633), 170. *Năstase Aurel* (49, 316, 444), 171. *Năstăsescu Constantin* (49, 125, 315, 571), 172. *Nelepcu Grigore* (50), 173. *Neagu Gheorghe* (61, 315, 571), 174. *Nemet Doina* (316), 175. *Negruţiu I. Vasile* (316, 701), 176. *Necula Mihai* (444, 633), 177. *Negreanu Mircea* (633), 178. *Nicolae Silvia* (125), 179. *Niţă Constantin* (50, 125, 316), 180. *Olaru Nicolae* (50), 181. *Olteanu S. Victor* (49, 125, 246, 315), 182. *Oltenescu E. Nicolae* (316), 183. *Obadă Hareta* (61), 184. *Oprescu Constanţa* (444), 185. *Opriş M. Ion* (49, 125, 316, 571), 186. *Ou V. Ion* (49), *Ozum Cezar* (633), 188. *Pavel N. Radu* (50, 630), 189. *Pavelescu Valerian* (50), 190. *Paxino*

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR 1883

G. Gheorghe (315, 701), 191. *Pascu Adrian* (441), 192. *Păncescu Paul* (125, 701), 193. *Pavel H. Nicolae* (316, 701), 194. *Pantelimon Anton* (444), 195. *Pavel Marin* (633), 196. *Perju Gheorghe* (49), 197. *Petric Maria* (701), 198. *Persache Octavian* (50, 125, 315, 444), 199. *Petrescu Corneliu* (633), 200. *Pitea M. Virgil* (571), 201. *Piscupescu Gabriel* (61, 315, 441, 444, 633), 202. *Pirșan Liviu* (444), 203. *Popescu Virgiliu* (49), 204. *Popescu Dorel* (49, 315, 444), 205. *Popa I. Nicolae* (49, 246, 315, 633), 206. *Popescu Gh. Domițian* (50), 207. *Popescu Gheorghe* (125, 316, 701), 208. *Popa Alexandru* (246, 633, 701), 209. *Popa Radu* (315, 701) 210. *Popovici I. Mariana* (444, 701), 211. *Popa I. Ioan* (633), 212. *Popa Doria* (61, 701), 213. *Pop Ioan* (49, 690), 214. *Popescu Mircea* (49), 215. *Pop Valer* (315), 216. *Popescu Viorela* (571), 217. *Popa Lucia* (701), 218. *Purghel Florian* (633), 219. *Pupăzan Nicolae* (444, 701), 220. *Raicu Viorel* (61, 246, 444), 221. *Radu A. Gheorghe* (61, 571), 222. *Rădulescu Doina* (444), 223. *Răzvan Vladimir* (441, 633, 757), 224. *Răduță Aristotel* (61), 225. *Rosenberg Flavia* (50), 226. *Rotko Ioan* (633), 227. *Rozman Izu* (49), 228. *Rujan Dan* (633), 229. *Săbăilă Aurel* (633), 230. *Scarlat C. Nicolae* (49, 61, 571, 701), 231. *Șerbănescu Nicolae* (49), 232. *Șerban Doina* (315), 233. *Șerban Longin* (125, 246, 571, 701), 234. *Segal Zeilic* (61, 633), 235. *Sfetcu Ioan* (61, 125, 246, 701), 236. *Strghie Mircea* (40, 315, 701), 237. *Spiratos Antonio* (49), 238. *Stanca Ion* (316, 571, 690), 239. *Stan Ștefan* (444), 240. *Stanciu Nicoleta* (246), 241. *Stănescu Cicerone* (315, 633), 242. *Stancu V. Mihai* (49), 243. *Stan Mircea* (49), 244. *Strătilă Șerban* (49), 245. *Stoica Aurel* (316), 246. *Stoicescu T. Ion* (315), 247. *Szasz Carol* (49), 248. *Sucitu Gheorghe* (50, 61, 315), 249. *Sutac Sidonia* (441), 250. *Tănase Mihail* (49), 251. *Tănăsescu T. Miron* (49, 246, 701), 252. *Tănase Virgil* (315), 253. *Tărăbuță Mihai* (316, 701), 254. *Teodorescu Catrinel* (50, 125, 315, 441), 255. *That Frieder* (441), 256. *Thirer Nonel* (701), 257. *Tiurbe Codruța* (441), 258. *Tutuianu Ovidiu* (61), 259. *Tircă Ion* (125, 701), 260. *Tircă Mihai* (571), 261. *Tomuță Liviu* (633), 262. *Tințăreanu Cristian* (246), 263. *Tințareanu Mihai* (444), 264. *Ursu Constantin* (49), 265. *Vasilescu V. Mihai* (49), 266. *Vasiliu Dan* (315, 690), 267. *Vidrașcu Traian* (246), 268. *Vîlceanu Gheorghe* (50), 269. *Vinea Vladimir* (49, 444), 270. *Vîlceanu Sabin* (125, 630), 271. *Vlad Virgiliu* (50), 272. *Vlad I. Valentin* (50), 273. *Vlăduțiu Mircea* (316, 701), 274. *Vodă Viorel* (246, 316, 633), 275. *Wald Robert* (690), 276. *Zăgreanu Marius* (633), 277. *Zamfir Cornel* (690), 278. *Zamfirescu Tudor* (633), 279. *Zegheanu Petre* (633), 280. *Zoller David* (571), 281. *Zăgreanu Nicolae* (757).

Rezolvitorii de probleme care au fost evidențiați cel puțin de două ori în nr. 1—11 din G.M.F.-B. sînt rugați să trimită redacției cîte un tabel cu totalul problemelor anunțate în această revistă la rubrica rezolvitori. Se va menționa pe fișa trimisă, dacă elevul sau studentul evidențiat a trimis în 1961 probleme propuse, note, dări de seamă sau articole și pagina la care s-au publicat.

* * *

Școlile medii care au avut evidențiați sau cercuri de elevi, pot participa la întrecerea pe anul 1961 și sînt rugate să trimită fișa cu totalizarea punctelor obținute pînă în prezent, conform regulamentului publicat în G.M.F.-B, pag. 97, nr. 2, 1961. Se va specifica și numărul de clase a VIII-a, a IX-a, a X-a reală și a XI-a reală care au funcționat în anul școlar 1960—61 în școală.

Fișa poate fi întocmită de profesorii sau elevii responsabili de cercuri.

* * *

Școlile medii pot procura pentru bibliotecile lor exemplare diferite din G.M.F.-B începînd cu anul 1952, trimițînd prin mandat poștal suma respectivă pe numele S.S.M.F. din Str. Academiei 14, contul 070 004 la B.R.P.R. filiala Lenin, București.

Erată — La problema 4935 în loc de $(4+m—m^2)$ se va scrie $(4+4\ m—m^2)$; iar în loc de $(4—m—m^2)$ se va scrie $(4—2\ m—m^2)$.

Olimpiada de matematică și fizică 1962 *pentru elevii școlilor medii, profesionale, tehnice de maiștri și pedagogice se desfășoară astfel:*

Etapa locală: *11 februarie 1962 la matematică și 18 februarie la fizică.*

Etapa regională: *23—25 martie la matematică și fizică.*

Etapa finală: *10—13 iunie, în București.*

BIBLIOTECA SOCIETĂȚII DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE DIN R.P.R.

1. E. RUSU	Bazele teoriei numerelor.
2. A. I. MARKUȘEVICI	Șiruri recurente.
3. N. N. VOROBIEV	Numerele lui Fibonacci.
4. P. S. ALEXANDROV	Introducere în teoria grupurilor.
5. I. S. SOMINSKI	Metoda inducției matematice.
6. GH. MIHOC	Elemente de calculul probabilităților.
7. H. IONESCU	Calcule numerice.
8. A. I. MARKUȘEVICI	Arii și logaritmi.
9. A. I. GHELFOND	Rezolvarea ecuațiilor în numere întregi.
10. O. SACTER	Despre conice și alte curbe.
11. ION IONESCU	Maxime și minime geometrice.
12. F. I. ZIGHEL	Cometele.
13. S. SKLOVSKI	Radioastronomia.
14. V. ATANASIU	Structura materiei.
15. V. V. SARONOV	Soarele și observarea lui.
16. O. KREINDLER	Elemente de calcul vectorial.
17. B. B. KUDRIAVȚEV	Experiențe simple cu ultrasunete.
18. M. V. PENTKOVSKI	Nomograme.
19. A. KAHANE	Elemente din teoria congruențelor de drepte.
20. GH. ȚIȚEICA	Culegere de probleme de geometrie, (revăzută și completată de G. D. SIMIONESCU).
21. A. HALANAY	Introducere în teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale.
22. N. STĂNESCU	Electronul.
23. V. SERGIESCU	Introducere în fizica solidului.
24. G. N. BERMAN	Cicloida.
25. C. BORȘ	Noțiuni de geometrie proiectivă.
26. AL. SANIELEVICI	Introducere în radioactivitate.
27. M. HEROVANU	Introducere în fizica atmosferei.
28. C. G. BEDREAG	Bibliografia fizicii romîne.
29. I. S. DUBNOV	Erori în demonstrațiile geometrice.
30. H. STEINHAUS	Caleidoscop matematic
31. C. POPOVICI	Stelele, date fizice, structura internă, originea și evoluția lor.
32. C. DRIMBĂ	Elemente de mecanică cerească.
33. C. IONESCU-BUJOR	Elemente de transformări geometrice (I).
34. NICOLAE MILEA	Elemente de geomagnetism.
35. GH. A CHIȚEI	Metode pentru rezolvarea problemelor de aritmetică.
36. G. PETRESCU	Cutremure de pămînt.
37. C. IONESCU-BUJOR	Elemente de transformări geometrice (II).
38. O. SACTER	Olimpiade matematice.
39. A. I. MARKUȘEVICI	Numere complexe și reprezentări conforme.
40. I. S. GRADSTEIN	Teorema directă și reciprocă.
41. A. I. HINCIN	Fracții continue.
42. V. A. USPENSKI	Unele aplicații ale mecanicii în matematică.
43. V. G. BOLTEANSKI	Ce este derivarea?
44. G. N. BERMAN	Despre numere și studiul numerelor.

Litografia și Tipografia Învățămîntului. — c. 2518

Lei 1,50